Induction électromagnétique

Introduction : présentation qualitative du phénomène d'induction électromagnétique

A - Cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps (Cas de Neumann) :

I) Circulation du champ électrique, loi de Faraday, définitions des coefficients d'inductance propre L et mutuelle M de deux circuits filiformes :

1) Circulation du champ électrique
2) Loi de Faraday
3) Loi de Lenz
4) Définitions des inductances propre et mutuelle

II) Bilan énergétique de l'établissement du courant dans un ensemble de deux circuits filiformes indéformables et fixes : énergie magnétique (expression en fonction des courants et des coefficients d'inductance)

1) loi d'Ohm généralisée
2) Energie magnétique d'un système de deux circuits

B - Cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire (Cas de Lorentz) :

I) Circulation du terme $\vec{v}_e \wedge \vec{B}$, loi de Faraday :

II) Exemple : barre lancée sur des rails

III) Rendement fondamental des transducteurs électromécaniques :

IV) La roue de Barlow, ancêtre des générateurs et des moteurs électriques :

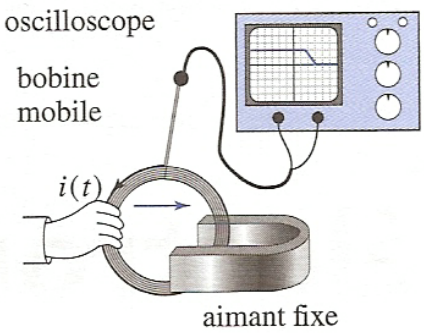
V) Application au haut-parleur électrodynamique (couplage électromécanique), bilan énergétique :

Induction électromagnétique

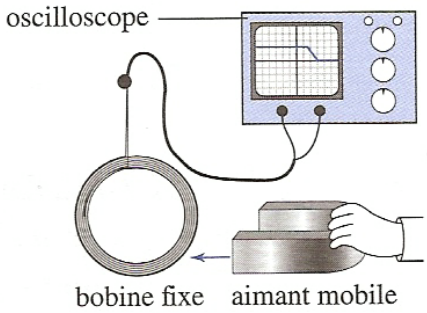
Introduction : présentation qualitative du phénomène d'induction électromagnétique

Un circuit se déplaçant dans un champ magnétique permanent peut se comporter comme un générateur électrocinétique : il est le siège d'un phénomène d'induction. On parle alors d'induction de Lorentz.

Lorsqu'un circuit fixe est soumis à un champ magnétique variable, il est encore le siège d'un phénomène d'induction. On parle alors de phénomène d'induction de Neumann.



Doc. 1. *La bobine mobile (déplacée par l'observateur) se comporte comme un générateur.*



Doc. 2. *La bobine fixe se comporte comme un générateur si l'aimant se déplace.*

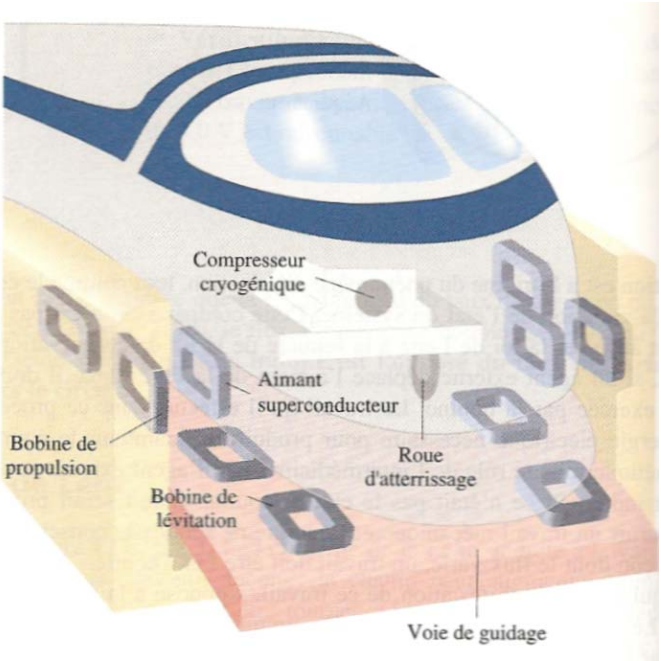
Dans le 1er cas, le déplacement du circuit à vitesse $\vec{v}_e$ (dans le référentiel du laboratoire) dans le champ permanent $\vec{B}_0$ de l'aimant entraîne l'apparition d'une force magnétique $q\,\vec{v}_e \wedge \vec{B}_0$ susceptible de faire circuler les charges de conduction du circuit.

Dans le 2ème cas, le circuit, fixe dans le référentiel du laboratoire, voit apparaître un champ magnétique variable créé par l'aimant. L'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

montre l'apparition d'un champ électrique induit capable de mettre en mouvement les charges du circuit.

On peut cependant remarquer que le 2nd cas est, pour un observateur qui se déplacerait avec l'aimant, semblable au 1er cas : cet observateur voit la bobine se déplacer dans un champ magnétique permanent. La distinction entre ces deux cas est liée à un choix d'observation, mais leurs effets sont les mêmes.



Un train à lévitation magnétique (maglev) de grande vitesse. Des bobines supraconductrices au bas de la voiture induisent des champs magnétiques opposés dans des bobines d'aluminium disposées tout au long de la voie de guidage, ce qui soulève la voiture.

« L'induction électromagnétique est un phénomène unique : l'induction de Lorentz et l'induction de Neumann en sont deux facettes qui dépendent du point de vue de l'observateur. »

Rappels d'électromagnétisme (« Equations locales de l'EM »)

Rappels sur les équations de Maxwell et le potentiel vecteur :

Les équations de Maxwell sont des équations locales qui expriment des relations entre le champ EM $(\vec{E},\vec{B})$ et ses sources $(\rho,\vec{j})$:

$$div\,\vec{B}=0 \qquad (Equation\ du\ \ flux\ magnétique-Flux)$$

$$div\,\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (Equation\ de\ Maxwell-Gauss-MG)$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (Equation\ de\ Maxwell-Faraday-MF)$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (Equation\ de\ Maxwell-Ampère\ -MA)$$

Rappels mathématiques :

Un champ égal à un gradient a un rotationnel nul et un champ égal à un rotationnel a une divergence nulle :

$$\vec{e}=\overrightarrow{grad}\,\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{rot}\,\vec{e}=\vec{0}$$

$$\vec{b}=\overrightarrow{rot}\,\vec{a} \qquad \Rightarrow \qquad div\,\vec{b}=\vec{0}$$

Réciproquement, on peut montrer que :

- Si un champ vectoriel a un rotationnel nul, il existe au moins un champ scalaire dont il est le gradient.
- Si un champ vectoriel a une divergence nulle, il existe au moins un champ vectoriel dont il est le rotationnel.

Définition des potentiels ($\vec{A}$,V) :

L'équation de Maxwell-flux :

$$div\,\vec{B}=0$$

et la propriété précisée ci-dessus permettent de définir un champ vectoriel $\vec{A}$ (appelé potentiel vecteur) tel que :

$$\vec{B}=\overrightarrow{rot}\,\vec{A}$$

Si l'on introduit cette relation dans l'équation de Maxwell-Faraday, il vient :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}) \qquad soit \qquad \overrightarrow{rot}\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\vec{0}$$

Il existe donc au moins un champ scalaire que l'on notera – V (V est appelé potentiel scalaire) tel que :

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\overrightarrow{grad}\,(-V)=-\overrightarrow{grad}\,V \qquad soit \qquad \vec{E}=-\overrightarrow{grad}\,V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Dans le cas du régime permanent $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$, on retrouve l'expression classique $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$.

Non unicité du couple de potentiels :

On suppose que, pour un champ EM donné, on dispose de deux couples ($\vec{A}_0$,V_0) et ($\vec{A}$,V) de potentiels. Alors :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\, \vec{A}_0 = \overrightarrow{rot}\, \vec{A} \qquad soit \qquad \overrightarrow{rot}\,(\vec{A} - \vec{A}_0) = \vec{0}$$

Par conséquent, en notant $\varphi(\vec{r},t)$ un champ scalaire quelconque :

$$\vec{A} - \vec{A}_0 = \overrightarrow{grad}\, \varphi \qquad soit \qquad \vec{A} = \vec{A}_0 + \overrightarrow{grad}\, \varphi$$

Le potentiel vecteur $\vec{A} = \vec{A}_0 + \overrightarrow{grad}\, \varphi$ (où $\varphi(\vec{r},t)$ désigne un champ scalaire quelconque) convient également : le potentiel vecteur est défini à un gradient près.

De même, pour le potentiel scalaire :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V_0 - \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad soit \qquad \overrightarrow{grad}\,(V - V_0) = -\frac{\partial(\vec{A} - \vec{A}_0)}{\partial t}$$

Soit :

$$\overrightarrow{grad}\,(V - V_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}) = 0$$

Après intégration, la fonction additive du temps qui s'introduit est mise sous forme d'une dérivée par rapport au temps :

$$V - V_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

Finalement, en posant $\psi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r},t) - F(t)$:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0(\vec{r},t) + \overrightarrow{grad}\, \psi(\vec{r},t) \qquad et \qquad V(\vec{r},t) = V_0(\vec{r},t) - \frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Il existe donc une infinité de couples de potentiels vecteurs : faire le choix d'un d'entre eux est faire un choix de jauge (il existe une infinité de jauges). On dit qu'il y a indétermination de jauges.

Le champ EM est par contre invariant de jauge ; lui seul a un sens physique alors que les potentiels sont seulement un moyen mathématique d'expression des champs (en mécanique classique).

Potentiels permanents :

En régime permanent, les équations de Poisson se réécrivent sous la forme :

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \qquad \text{et} \qquad \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Cette dernière équation a pour solution la solution bien connue (loi de Coulomb pour le potentiel électrostatique) :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(S)}{SM} d\tau$$

(On note M le point où l'on calcule le potentiel, S un point source de la distribution (D) de charges, r = SM et $\vec{r} = \overrightarrow{SM} = r\,\vec{u}$).

Chaque composante A_x, A_y et A_z vérifient la même équation que V ; par conséquent :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S)}{SM} d\tau$$

On peut montrer que la condition de jauge de Lorentz est bien vérifiée, c'est-à-dire que :

$$div\ \vec{A} = 0$$

On peut alors en déduire la formule de Biot et Savart donnant le champ magnétique. On évalue :

$$\vec{B}(M) = \overrightarrow{rot}\ \vec{A}(M) = \overrightarrow{rot}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S)}{SM} d\tau\right)$$

Soit :

$$\vec{B}(M) = \overrightarrow{rot}\ \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(D)} \overrightarrow{rot_M}\left(\frac{\vec{j}(S)}{SM}\right) d\tau$$

Or : $(\overrightarrow{rot}\ (f\vec{A}) = \overrightarrow{grad}\ f \wedge \vec{A} + f\ \overrightarrow{rot}\ \vec{A})$

$$\overrightarrow{rot_M}\left(\frac{\vec{j}(S)}{SM}\right) = \overrightarrow{grad}_M\left(\frac{1}{SM}\right) \wedge \vec{j}(S) + \frac{1}{SM} rot_M(\vec{j}(S))$$

$$\overrightarrow{rot_M}\left(\frac{\vec{j}(S)}{SM}\right) = -\frac{1}{SM^2}\vec{u} \wedge \vec{j}(S)$$

D'où la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(D)} -\frac{1}{SM^2}\vec{u} \wedge \vec{j}(S)\, d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S) \wedge \vec{u}}{SM^2}\, d\tau$$

Et, dans le cas d'un circuit filiforme (avec l'expression formelle $\vec{j}d\tau = id\ell$) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{(C)} \frac{i\, d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{SM^2}$$

Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) :

- Nature de l'approximation :

Cette approximation consiste à négliger les retards qui interviennent dans les expressions des potentiels retardés, c'est-à-dire à utiliser en régime non permanent les potentiels instantanés suivants :

$$V = V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{(D)} \frac{\rho(S, t - \frac{SM}{c})}{SM} d\tau \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{(D)} \frac{\rho(S,t)}{SM} d\tau$$

$$\vec{A} = \vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S, t - \frac{SM}{c})}{SM} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S,t)}{SM} d\tau$$

Cette approximation est justifiée si tous les retards $\Delta t = \frac{SM}{c}$ sont négligeables vis-à-vis d'un temps T caractéristique de l'évolution de la distribution de charges et de courants. Si on suppose cette évolution périodique, T représente alors la période.

L'ARQS néglige les phénomènes de propagation.

Si l'on note $\lambda = cT$ la longueur d'onde du phénomène dans le vide, on a alors :

$$\Delta t = \frac{SM}{c} << T = \frac{\lambda}{c} \qquad soit \qquad SM << \lambda = cT = \frac{c}{\nu}$$

Ainsi, l'ARQS décrit convenablement le champ EM d'une distribution (D) en des points dont les distances SM aux éléments de (D) sont faibles devant la longueur d'onde $\lambda = cT$.

Quelques ordres de grandeur :

Pour le courant industriel fourni par le secteur ($\nu = 50\ Hz$), alors $\lambda = \frac{c}{\nu} = 6\,000\ km$. L'ARQS est donc valable lors de l'étude du champ magnétique d'un solénoïde parcouru par un courant alternatif.

Avec $\nu = 10\ MHz,\ \lambda = 30\ m$, de telle sorte que l'ARQS reste valable lors de l'étude de circuits réalisés en TP sur une table de dimensions de l'ordre du mètre.

Dans le domaine des hyperfréquences ($\nu \geq 1\ GHz,\ soit\ \lambda \leq 30\ cm$), l'ARQS n'est plus valable et les phénomènes de propagation tiennent alors un rôle important.

- Détermination du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ dans le cadre de l'ARQS :

Dans le cadre de l'ARQS, on peut donc calculer les potentiels à l'aide des mêmes formules qu'en régime stationnaire, valables à chaque instant :

$$V = V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(S, t - \frac{SM}{c})}{SM}\, d\tau \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(S,t)}{SM}\, d\tau$$

et :

$$\vec{A} = \vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S, t - \frac{SM}{c})}{SM}\, d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S,t)}{SM}\, d\tau$$

L'expression du champ EM $(\vec{E}, \vec{B})$ se déduit de ces deux expressions grâce aux relations :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\ \vec{A} \qquad et \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\ V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On note que la relation entre $\vec{B}$ et $\vec{A}$ est la même qu'en régime stationnaire puisqu'elle ne fait pas intervenir de dérivation par rapport au temps (mais seulement des dérivées d'espace). Par conséquent, la loi de Biot et Savart sera encore valable dans le cadre de l'ARQS.

En revanche, le champ électrique $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\ V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ne s'identifie pas, même dans l'ARQS, à un champ de Coulomb instantané du type :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(S,t)\, d\tau}{SM^2}\, \vec{u}$$

En raison du terme d'induction $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ (champ électromoteur de Neumann).

- Loi d'Ohm dans les conducteurs ohmique dans le cadre de l'ARQS :

La loi d'Ohm : pour un conducteur comme le cuivre par exemple, le temps de relaxation (« durée » de collision des porteurs de charges) est de l'ordre de $\tau \approx 10^{-14} s$. Or on sait que, dans un conducteur, la loi d'Ohm est satisfaite si le temps caractéristique d'évolution du système T vérifie $T >> \tau$. Dans le cadre de l'ARQS, cette condition sera bien vérifiée.

Ainsi, dans le cadre de l'ARQS, la loi d'Ohm locale sera valable :

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} = -\sigma\left(\overrightarrow{grad}\, V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

- Courant de déplacement dans un conducteur ohmique :

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit, compte tenu de la loi d'Ohm locale :

$$\overrightarrow{rot}\, \vec{B} = \mu_0\left(\sigma\vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

On note T le temps d'évolution caractéristique de la distribution (D) (sa période d'évolution). On peut comparer le courant de conduction avec le courant de déplacement :

$$\frac{\left|\sigma\vec{E}\right|}{\left|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|} \approx \frac{\sigma E}{\varepsilon_0 \frac{E}{T}} = \frac{\sigma T}{\varepsilon_0}$$

Pour le cuivre de conductivité $\sigma = 6.10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}$, ce rapport est de l'ordre de $10^{18}\ T$ (avec T en s). Ainsi, même si T est de l'ordre de $10^{-10}\ s$ (soit une fréquence de 10 GHz) :

$$\frac{\left|\sigma\vec{E}\right|}{\left|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|} \approx 10^8$$

Par conséquent, pour les régimes d'évolution justifiant l'emploi de la loi d'Ohm, le courant de déplacement est, au sein du conducteur ohmique, négligeable devant le courant de conduction.

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit alors :

$$\overrightarrow{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E}$$

- Neutralité électrique :

On suppose qu'à l'instant $t = t_0$, il existe en un point M intérieur au conducteur une charge volumique $\rho(M, t_0)$. Comment varie dans le temps cette charge volumique ?

L'équation de Maxwell-Gauss, la loi d'Ohm locale et la conservation de la charge électrique :

$$div\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \vec{j} = \sigma\vec{E} \quad ; \quad div\, \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

permettent d'écrire :

$$div\, \frac{1}{\sigma}\vec{j} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad soit \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho = 0$$

Par intégration :

$$\rho(M,t) = \rho(M,t_0)\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_d}\right) \qquad avec \qquad \tau_d = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$$

Pour le cuivre, $\tau_d \approx 4.10^{-14}\,s$: très rapidement, le conducteur devient neutre en volume :

$$\rho(M,t) = 0$$

Ainsi, comme en régime stationnaire, les charges s'accumulent au voisinage immédiat de la surface d'un conducteur, d'où l'intérêt de la notion de charge surfacique σ.

- Equations de Maxwell dans un conducteur :

Finalement, dans le cadre de l'ARQS, le champ EM vérifie les équations de Maxwell « simplifiées » suivantes :

$$div\,\vec{B} = 0$$
$$div\,\vec{E} = 0$$
$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} = \mu_0\sigma\,\vec{E}$$

Ainsi, dans un conducteur, l'ARQS ne diffère des régimes stationnaires que par la prise en compte des phénomènes d'induction (équation de Maxwell-Faraday).

Puisque ρ = 0, l'équation de conservation de la charge électrique conduit (à l'intérieur du conducteur) à :

$$div\,\vec{j} = 0$$

Le flux du vecteur courant volumique se conserve, entraînant ainsi la validité de la loi des branches et des nœuds dans le cadre de l'ARQS.

*** Changement de référentiel :**

Soit, dans le référentiel du laboratoire (R), un faisceau de protons de densité particulaire n homogène, d'axe (Oz) et de rayon a. Le faisceau est dit homocinétique lorsque toutes les particules ont la même vitesse $\vec{v} = v\,\vec{u}_z$.

Une étude de symétries conduit à (dans le référentiel du laboratoire) :

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r \qquad et \qquad \vec{B} = B(r)\,\vec{u}_\theta$$

On se place maintenant dans le référentiel (R') lié aux charges, c'est-à-dire se déplaçant en translation rectiligne par rapport à (R) à la vitesse $\vec{v} = v\,\vec{u}_z$. Les charges, immobiles, ne créent pas de champ magnétique ($\vec{B}' = \vec{0}$) et ne subsiste donc q'un champ électrique $\vec{E}'$.

Cet exemple simple illustre le fait que le champ EM dépend du référentiel considéré.

Formule de changement de référentiel :

Soit $\vec{v}$ la vitesse d'une particule de charge q dans un référentiel (R) et soit $\vec{v}'$ sa vitesse dans un référentiel (R') animé de la vitesse $\vec{v}_e$ par rapport à (R).

La force de Lorentz doit être identique dans les deux référentiels (principe d'invariance de la force en mécanique newtonienne), par conséquent :

$$\vec{f} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) = q\left(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'\right)$$

Ce principe a été utilisé à propos du poids ; en effet, celui-ci est toujours le même que l'on soit sur Terre à la place des parents ou sur un manège en fonctionnement.

On utilise la relation de composition des vitesses $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$:

$$\vec{E} + (\vec{v}' + \vec{v}_e) \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'$$

Soit :

$$\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + \vec{v}' \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'$$

On est donc amené à poser : (expressions de changement de référentiels galiléens du champ EM)

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \qquad et \qquad \vec{B} = \vec{B}'$$

Remarque : ces expressions sont en contradiction avec l'exemple du faisceau de protons homocinétiques, puisque $\vec{B}$ est non nul alors que $\vec{B}' = \vec{0}$. Pour éviter ce paradoxe, il faut utiliser les formules relativistes de transformations du champ (EM).

A - Cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps (Cas de Neumann)

I) Circulation du champ électrique, loi de Faraday, loi de Lenz, définitions des coefficients d'inductance propre L et mutuelle M de deux circuits filiformes :

1 – Circulation du champ électrique :

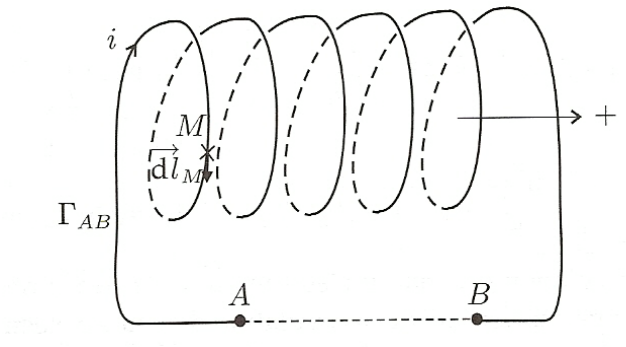
On se place dans le référentiel du laboratoire. Le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On considère un circuit filiforme (C) parcouru par un courant d'intensité i. La loi d'Ohm permet d'écrire que :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \qquad et \qquad dR = \frac{d\ell}{\sigma\, S}$$

dR étant la résistance d'une longueur $d\ell$ de conducteur. Par ailleurs, $i = jS$.



On calcule la circulation du champ électrique le long d'une portion de conducteur allant de A à B :

$$\int_{(C_{AB})} \vec{E}.d\vec{\ell} = -(V_B - V_A) + \int_{(C_{AB})} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right).d\vec{\ell}$$

Or :

$$\int_{(C_{AB})} \vec{E}.d\vec{\ell} = \int_{(C_{AB})} \frac{\vec{j}}{\sigma}.d\vec{\ell} = \int_{(C_{AB})} \frac{i}{\sigma\, S}.d\ell = \int_{(C_{AB})} i\, dR = R_{AB} i$$

Par conséquent :

$$R_{AB} i = (V_A - V_B) + \int_{(C_{AB})} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right).d\vec{\ell}$$

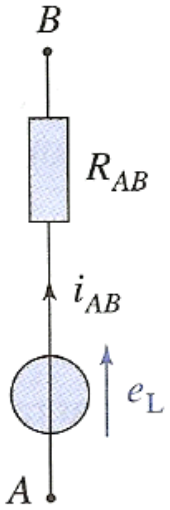
Dans la suite, on note e_{AB} la circulation du champ électromoteur de Neumann $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ le long du circuit de A à B :

$$e_{AB} = \int_{(C_{AB})} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right).d\vec{\ell}$$

Ainsi :

$$V_A - V_B = R_{AB} i - e_{AB}$$

On comprend alors que le champ magnétique dépendant du temps, source du champ électromoteur de Neumann, puisse créer une fém d'induction e_{AB} et mettre ainsi en mouvement les charges de conduction du circuit.



(Schéma équivalent)

Cas particuliers :

- En circuit ouvert (i = 0) : alors $V_A - V_B = -e_{AB}$. Le phénomène d'induction se traduit par l'apparition d'une ddp aux bornes du circuit ouvert.
- Le long d'un circuit fermé : $V_A - V_B = 0 \; donc \; e_{AB} = R_{AB} i$.

Interprétation énergétique :

La puissance fournie par l'extérieur à la portion de circuit (AB) est :

$$p = (V_A - V_B)\, i = R_{AB} i^2 - e_{AB} i$$

Soit :

$$p + e_{AB} i = R_{AB} i^2$$

Cette équation traduit la conservation de l'énergie : la puissance électromotrice $p_m = e_{AB} i$ et la puissance fournie par l'extérieur à la portion de circuit sont dissipées par effet Joule dans la résistance R.

Retour sur la définition de la fém d'induction :

Dans le référentiel du laboratoire, le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Sur un tour complet de circuit filiforme, seul le champ électromoteur de Neumann peut fournir de l'énergie à la charge q et compenser l'énergie perdue par les forces dissipatives (dues aux chocs des électrons sur les ions positifs du métal, par exemple). Le champ de type électrostatique, dérivant d'un gradient, n'en fournit aucune.

L'énergie électrique δW fournit à une charge δq qui fait un tour de circuit fermé orienté (C) considéré est le travail de la force électrique :

$$\delta W = \oint_{(C)} \delta q \vec{E}.d\vec{\ell} = \delta q\, e \qquad \text{avec} \qquad e = \oint_{(C)} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right).d\vec{\ell}$$

Cette charge δq qui se déplace correspond à un courant $i = \frac{\delta q}{dt}$, par conséquent :

$$\delta W = ei\, dt$$

Soit une puissance électromotrice p :

$$p = \frac{\delta W}{dt} = ei$$

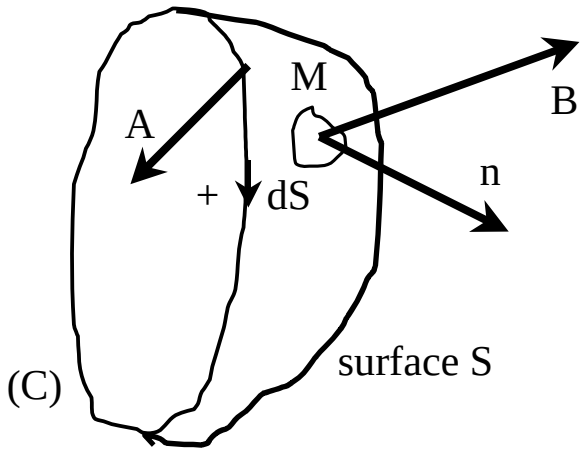
Cette formule, équivalente à celle qui donne l'énergie fournie par une source de tension de fém e délivrant un courant d'intensité i, montre que le circuit est bien équivalent, d'un point de vue énergétique, à un générateur de tension qui délivre la fém d'induction e égale à la circulation du champ électromoteur.

On peut également montrer que la puissance de la force électromotrice est compensée par celle des actions de Laplace exercée sur le circuit (principe des transducteurs, voir paragraphe B-3) :

$$P_{Laplace} + ei = 0$$

2 – Loi de Faraday :

On considère le phénomène d'induction le long d'un circuit fermé (C) fixe dans le référentiel du laboratoire.



La circulation du champ électromoteur de Neumann s'écrit, en utilisant le relation de Stockes :

$$e_{AB} = \int_{(C_{AB})} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right).d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\left(\int_{(C_{AB})} \vec{A}.d\vec{\ell}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\, \vec{B}.d\vec{S}\right)$$

Soit (loi de Faraday) :

$$e_{AB} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\, \vec{B}.d\vec{S}\right) = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

« La fém induite le long d'un circuit fermé fixe dans le laboratoire galiléen est opposée à la dérivée temporelle du flux magnétique à travers le circuit. »

3 – Loi de Lenz :

Le signe moins de la loi de Faraday résulte des conventions utilisées pour orienter la surface du circuit et définir la fém algébrique et, physiquement, de l'effet modérateur du courant induit.

La loi de Lenz traduit qualitativement cet effet. Elle permet de prévoir le sens du courant induit dans les cas simples et de vérifier son signe une fois le calcul algébrique effectué.

Enoncé de la loi de Lenz :

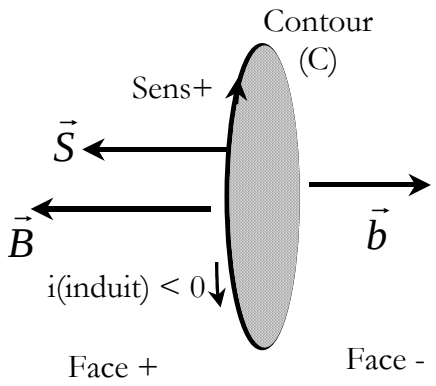
« Le courant induit a un sens tel que le flux induit qu'il crée s'oppose aux variations du flux inducteur. »

ou encore :

« La fém induite tend par ses conséquences à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance. »

Exemple ; on considère le système suivant :

La variation du champ magnétique $\vec{B}$ dans le temps est cause d'un flux magnétique variable à travers le circuit, appelé « flux inducteur » et d'une fém induite qui peut débiter un courant dans le circuit (appelé « courant induit »).



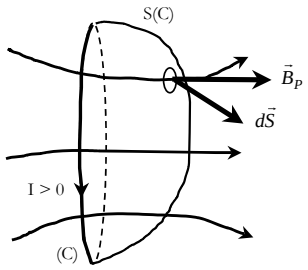
Le courant induit créé un champ magnétique propre $\vec{b}$ ou « champ magnétique induit » responsable d'un flux magnétique à travers le circuit appelé « flux induit ».

Si le flux inducteur augmente (la norme du champ $\vec{B}$ augmente), sa dérivée est positive et d'après la loi de Faraday, la fém induite est négative. Le courant induit est alors négatif. Le champ induit $\vec{b}$ s'en déduit (règle de Biot et Savart) et le flux induit est donc négatif quand la variation du flux inducteur est positive : le flux induit s'oppose donc à la variation du flux inducteur, ce qui illustre, sur cet exemple, la loi de Lenz qui apparaît bien comme une loi de modération.

4 - Définitions des coefficients d'inductance propre L et mutuelle M de deux circuits filiformes

a) Inductance propre :

Un circuit fermé filiforme (C) est parcouru par un courant d'intensité I ; son champ magnétique propre $\vec{B}_P(M)$, donné par la loi de Biot et Savart, est proportionnel à I.



Le flux du champ magnétique propre à travers le contour orienté par le sens positif du courant choisi ou « flux propre » est proportionnel à I :

$$\Phi_P = \iint_{(S)} \vec{B}_P.d\vec{S} \propto I \qquad soit \qquad \Phi_P = LI$$

Le coefficient L ne dépend que des caractéristiques géométriques du circuit et s'appelle coefficient d'auto-induction ou d'inductance propre du circuit (C).

Signe de L : Si I > 0, le champ magnétique a le sens représenté sur la figure et le flux est donc positif, donc L > 0. De même, si I < 0, le champ magnétique change de sens et le flux devient négatif. Par conséquent, L est un coefficient positif.

Le flux est exprimé en Weber et le coefficient L en Henry.

Exemples :

- Inductance propre d'un solénoïde :

Le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde « infini » est $\vec{B} = \mu_0 nI\,\vec{u}_z$. Le flux à travers N spires occupant une longueur L est :

$$\Phi_P = (\mu_0 \frac{N}{\ell} I)\, NS = LI \qquad avec \qquad L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$$

AN : une bobine de longueur 10 cm comportant 100 spires dont le diamètre est de 1 cm a une inductance propre de l'ordre de 0,01 mH : le henry est une assez grande unité.

Des inductances propres plus importantes s'obtiennent avec une bobine à noyau de fer. Mais la relation donnant L est plus compliquée (L dépend non seulement de la géométrie du circuit mais aussi de l'intensité).

- Inductance propre d'une bobine torique de section rectangulaire :

On considère une bobine torique de section rectangulaire de hauteur h et de rayons a et b comportant N spires jointives parcourues par un courant I.

Un plan méridien est plan de symétrie ; en un point de ce plan, en cordonnées cylindriques, le champ propre est orthoradial et dépend *a priori* de r et de z, $\vec{B}_P(M) = B_P(r,z)\,\vec{u}_\theta$. Les lignes de champs sont des cercles d'axe (Oz). On applique le théorème d'Ampère à la ligne de champ de rayon r :

$$2\pi\, r\, B(r,z) = \mu_0 NI \qquad soit \qquad B_P(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi}\frac{1}{r}$$

Le champ ne dépend finalement pas de la cote z.

Le flux propre à travers les N spires vaut alors :

$$\Phi_P = N\left(\int_a^b B_P(h\,dr)\right) = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} h \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

On en déduit l'inductance :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

b) Inductance mutuelle, formule de Neumann :

Deux circuits filiformes (C_1) et (C_2) sont parcourus par des courants d'intensités I_1 et I_2. Le champ magnétique $\vec{B}_2$ créé par (C_2), donné par la loi de Biot et Savart, est proportionnel à I_2. Le flux $\Phi_{2\to1}$ de $\vec{B}_2$ à travers le contour fermé (C_1) orienté par le sens positif du courant I_1 est proportionnel à I_2 :

$$\Phi_{2\to1} = M_{2\to1} I_2 \qquad \textit{et de même} \qquad \Phi_{1\to2} = M_{1\to2} I_1$$

Formule de Neumann :

Le flux du champ magnétique à travers une courbe fermée est égal à la circulation du potentiel vecteur dont il dérive :

$$\Phi_{2\to1} = \oint_{(C_1)} \vec{A}_2 . d\vec{r}_1 = \oint_{(C_1)} \left[\frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{(C_2)} \frac{d\vec{r}_2}{S_1 S_2}\right] . d\vec{r}_1 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} \frac{d\vec{r}_2 . d\vec{r}_1}{S_1 S_2}$$

Soit :

$$M_{2\to1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} \frac{d\vec{r}_2 . d\vec{r}_1}{S_1 S_2}$$

Du fait de la symétrie des indices :

$$M = M_{2\to1} = M_{1\to2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} \frac{d\vec{r}_2 . d\vec{r}_1}{S_1 S_2} \qquad \text{(formule de Neumann)}$$

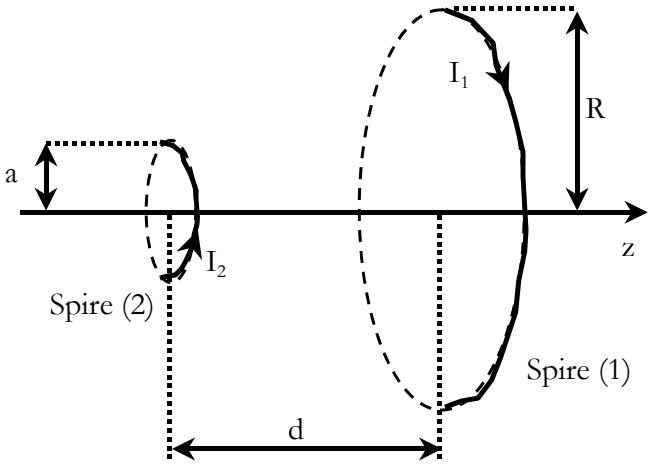
M est appelé coefficient d'inductance mutuelle entre les deux circuits (C_1) et (C_2). Contrairement à l'inductance qui est toujours positive, M est positive ou négative (selon l'orientation des circuits).

Remarque : si on sait calculer $\Phi_{2\to1}$, on en déduit M et $\Phi_{1\to2}$. Parfois, le calcul de l'un des deux flux est compliqué alors que le calcul de l'autre est plus simple

Exemple : (inductance mutuelle de deux spires)

Soient deux spires, l'une de rayon R et d'axe (Oz) et une seconde spire de même axe et de rayon a<<R. Ces deux spires sont à une distance d l'une de l'autre.

Calculer les coefficients $M_{2\to1}$ *et* $M_{1\to2}$ et montrer qu'ils sont égaux.



On calcule le flux de $\vec{B}_1$ à travers la spire (2) : $\vec{B}_1$ au centre O_2 de la spire (2) vaut :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R}\sin^3\alpha\,\vec{u}_z = \frac{\mu_0 I_1}{2}\frac{R^2}{(R^2+d^2)^{3/2}}\,\vec{u}_z$$

Comme a << R, on suppose que ce champ est uniforme sur la surface de la petite spire. Par conséquent (attention aux conventions de signes) :

$$\Phi_{1\to 2} = -(\pi a^2)\,B_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{2}\frac{\pi a^2 R^2}{(R^2+d^2)^{3/2}} = M_{1\to 2} I_1$$

D'où :

$$M_{1\to 2} = -\frac{\mu_0 \pi a^2 R^2}{2(R^2+d^2)^{3/2}}$$

On calcule désormais le flux de $\vec{B}_2$ à travers la spire (1) : pour cela, on considère la petite spire comme un dipôle magnétique de moment dipolaire $\vec{\Gamma} = -\pi a^2 I_2\,\vec{u}_z$. Le champ créé en un point de la surface de la spire (1) est alors, en coordonnées cylindriques :

$$B_{2,r} = \frac{\mu_0(-\pi a^2 I_2)}{4\pi}\frac{2\cos\theta}{r^3} \qquad et \qquad B_{2,\theta} = \frac{\mu_0(-\pi a^2 I_2)}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^3}$$

Le champ magnétique étant à flux conservatif, on peut choisir toute surface s'appuyant sur (C_1) pour calculer le flux $\Phi_{2\to 1}$. On choisit une calotte sphérique de centre O_2 et de rayon r, alors :

$$\Phi_{2\to 1} = \iint_{calotte} \vec{B}_2(M_1).d\vec{S}_1 = \iint_{calotte} B_{2,r}.dS_1 = -\frac{\mu_0 \pi a^2 I_2}{2\pi}\frac{1}{r^3}\int_0^{\alpha} \cos\theta\,(2\pi r^2\,\sin\theta\,d\theta)$$

Soit :

$$\Phi_{2\to 1} = -\frac{\mu_0 \pi a^2 I_2}{2}\frac{1}{r}\sin^2\alpha = -\frac{\mu_0 \pi a^2 I_2}{2}\frac{1}{\sqrt{R^2+d^2}}\frac{R^2}{R^2+d^2} = -\frac{\mu_0 \pi a^2 I_2}{2}\frac{R^2}{(R^2+d^2)^{3/2}}$$

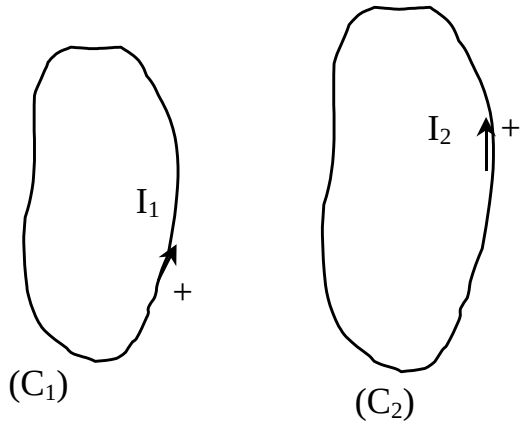
Finalement :

$$M_{2\to 1} = -\frac{\mu_0 \pi a^2}{2}\frac{R^2}{(R^2+d^2)^{3/2}} = M_{1\to 2}$$

II) Bilan énergétique de l'établissement du courant dans un ensemble de deux circuits filiformes indéformables et fixes : énergie magnétique (expression en fonction des courants et des coefficients d'inductance)

1) Loi d'Ohm généralisée :

On considère deux circuits filiformes (C_1) et (C_2) en couplage mutuel. Alors, en l'absence d'autres sources de champs magnétiques :



$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2 \qquad et \qquad \Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

Si les circuits sont rigides et immobiles dans le référentiel du laboratoire, les fém d'induction valent :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \qquad et \qquad e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}$$

(Remarque : si les deux circuits ne sont pas rigides, il faut tenir compte des dérivées $\frac{dL_1}{dt}$, $\frac{dL_2}{dt}$ et $\frac{dM}{dt}$).

La ddp aux bornes de chaque circuit est alors :

$$u_1 = R_1 I_1 - e_1 = R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \qquad et \qquad u_2 = R_2 I_2 - e_2 = R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$$

2) Energie magnétique d'un système de deux circuits :

La puissance électrique reçue par les deux circuits vaut :

$$P = u_1 I_1 + u_2 I_2$$

Soit :

$$P = \left(R_1 I_1^{\,2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_1 I_1^{\,2}\right) + M I_1 \frac{dI_2}{dt} \right) + \left(R_2 I_2^{\,2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_2 I_2^{\,2}\right) + M I_2 \frac{dI_1}{dt} \right)$$

$$P = R_1 I_1^{\,2} + R_2 I_2^{\,2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_1 I_1^{\,2}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_2 I_2^{\,2}\right) + M \frac{d}{dt}(I_1 I_2)$$

Finalement :

$$P = (R_1 I_1^{\,2} + R_2 I_2^{\,2}) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_1 I_1^{\,2} + \frac{1}{2} L_2 I_2^{\,2} + M I_1 I_2\right)$$

On reconnaît d'une part la puissance dissipée par effet Joule et on définit d'autre part :

$$E_m = \frac{1}{2}L_1 I_1{}^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2{}^2 + MI_1 I_2$$

comme étant l'énergie magnétique du système des deux circuits, en l'absence d'autres sources de champs magnétiques et en prenant comme convention que cette énergie est nulle lorsque les courants sont nuls.

Relation entre L_1, L_2 et M :

L'énergie magnétique est nécessairement positive. On pose $x = \frac{I_1}{I_2}$, alors :

$$\frac{E_m}{I_2{}^2} = \frac{1}{2}L_1 x^2 + \frac{1}{2}L_2 + Mx > 0 \qquad soit \qquad L_1 x^2 + 2Mx + L_2 > 0 \quad \text{(quel que soit x)}$$

Cette dernière condition est réalisée si le discriminant du polynôme est négatif, soit :

$$\Delta = 4M^2 - 4L_1 L_2 < 0 \qquad soit \qquad M < \sqrt{L_1 L_2}$$

Couplage idéal :

On a vu que $|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$. On pose :

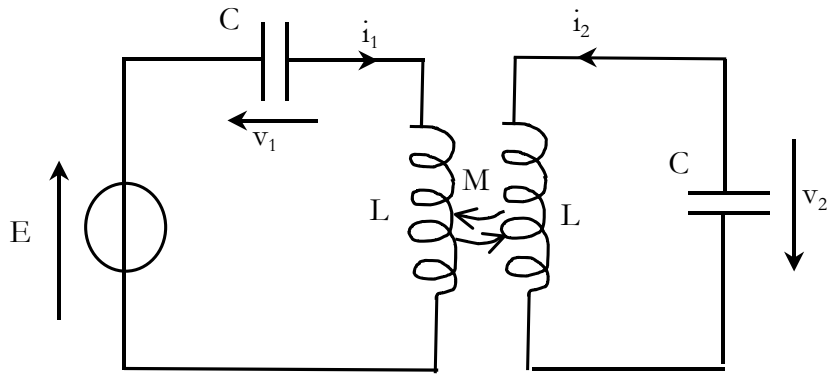
$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

le coefficient de couplage entre les deux circuits. Ce coefficient est compris entre 0 et 1.

Le cas limite k = 1, soit $|M| = \sqrt{L_1 L_2}$ correspond au cas où toutes les lignes de champ du champ magnétique créé par un des deux circuits traversent l'autre circuit. Il s'agit du cas idéal du couplage parfait.

Exercice sur les circuits couplés :

On considère désormais le circuit suivant :



Les tensions et les intensités sont reliées :

$$i_1 = C\frac{dv_1}{dt} \qquad et \qquad i_2 = C\frac{dv_2}{dt}$$

La loi des mailles donne :

$$E = v_1 + L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad et \qquad v_2 + L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} = 0$$

D'où :

$$E = v_1 + LC\frac{d^2v_1}{dt^2} + MC\frac{d^2v_2}{dt^2} \qquad et \qquad v_2 + LC\frac{d^2v_2}{dt^2} + MC\frac{d^2v_1}{dt^2} = 0$$

Recherche des modes propres :

On suppose que E = 0 (régime libre). On cherche des solutions harmoniques de même pulsation ω. Alors :

$$0 = v_1 - LC\omega^2 v_1 - MC\omega^2 v_2 \qquad et \qquad v_2 - LC\omega^2 v_2 - MC\omega^2 v_1 = 0$$

D'où le système homogène :

$$(1 - LC\omega^2)v_1 - MC\omega^2 v_2 = 0 \qquad et \qquad -MC\omega^2 v_1 + (1 - LC\omega^2)v_2 = 0$$

Ce système possède une solution non triviale si son déterminant est nul :

$$(1 - LC\omega^2)^2 - (MC\omega^2)^2 = 0$$

Soit :

$$(1 - LC\omega^2 - MC\omega^2)(1 - LC\omega^2 + MC\omega^2) = 0$$

On en déduit les deux pulsations propres (avec M < L) :

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L+M)C}} \qquad et \qquad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L-M)C}}$$

Pour le 1re mode propre, $v_1 = v_2$: les deux tensions oscillent en phase.

Pour le 2nd mode propre, $v_1 = - v_2$: les deux tensions oscillent en opposition de phase.

Le régime libre correspond à une superposition linéaire de ces deux modes propres.

Autre définition de l'inductance propre d'un circuit :

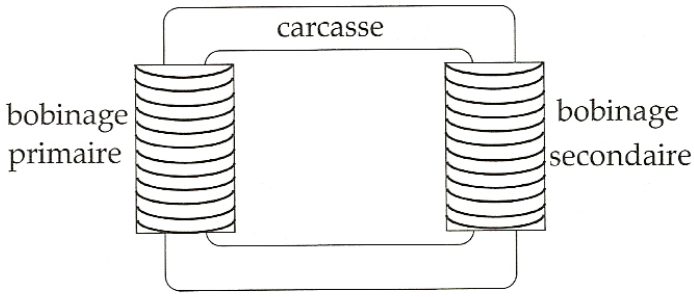
On considère un circuit (filiforme ou non) sans interaction mutuelle avec un autre circuit.

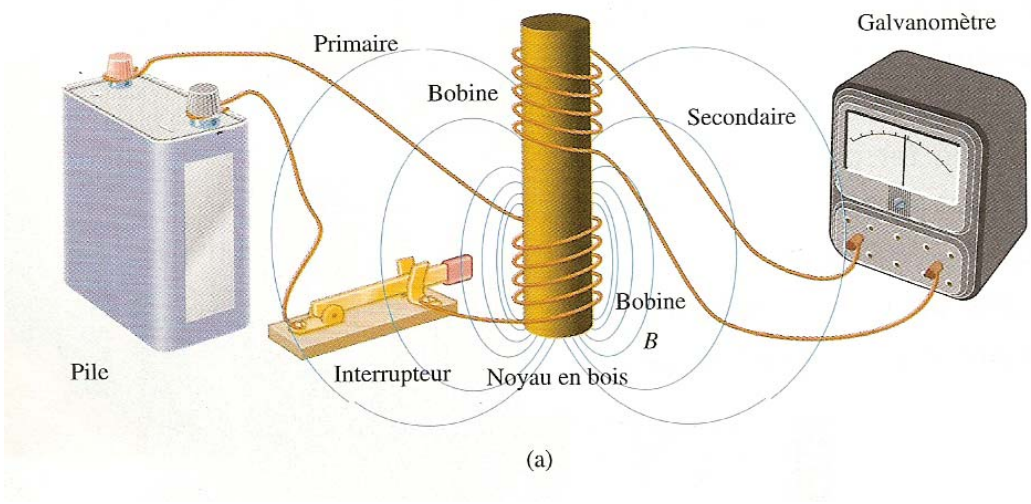
Pour étendre la définition de L, on peut identifier les deux expressions de l'énergie magnétique, soit :

$$\frac{1}{2}LI^2 = \iiint_{(V)} \frac{B_{propre}^2}{2\mu_0} d\tau$$

Exemple d'application ; le transformateur idéal :

Le couplage entre les deux bobines est augmenté en les reliant les bobines par une carcasse de fer qui canalisent les lignes de champ :





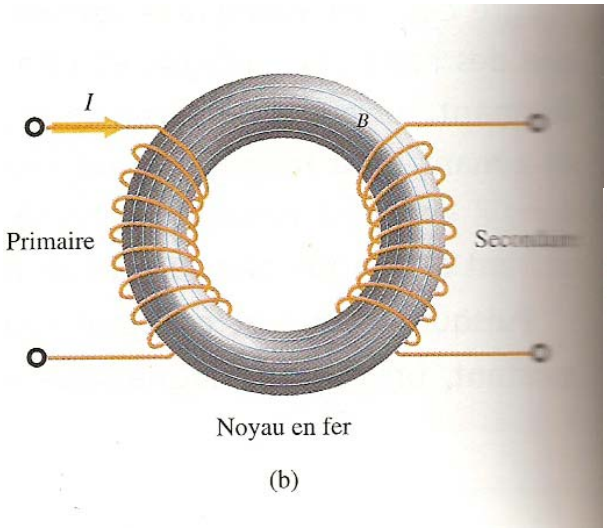


Figure 22.1 (a) Lors de la fermeture ou l'ouverture du circuit dans l'une des bobines, un champ magnétique variable s'établit à travers l'autre bobine, y induisant un courant transitoire. (b) Le champ du courant primaire aimante le noyau de fer, augmente le champ magnétique et améliore le couplage magnétique avec le circuit secondaire.

Dans le cadre du modèle du transformateur parfait, le couplage est parfait et il n'y a pas de pertes par effet Joule, donc : $R_1 = R_2 = 0$ et $M^2 = L_1 L_2$.

Les bobines sont identiques (cylindres de rayon a, de longueur l), le bobinage primaire comporte N_1 spires, le bobinage secondaire N_2 spires.

Nous avons montré plus haut que (voir paragraphe 2.8.b), de la page 652) que :

$L_1 = \mu_0 N_1^2 \dfrac{\pi a^2}{l} = N_1^2 L_0$ et que $L_2 = N_2^2 L_0$ en posant $L_0 = \mu_0 \dfrac{\pi a^2}{l}$. Nous en déduisons, dans l'hypothèse d'un couplage parfait que $M = \sqrt{L_1 L_2} = N_1 N_2 L_0$.

En utilisant l'équivalence de la figure 18.12 nous trouvons comme montage électrique équivalent :

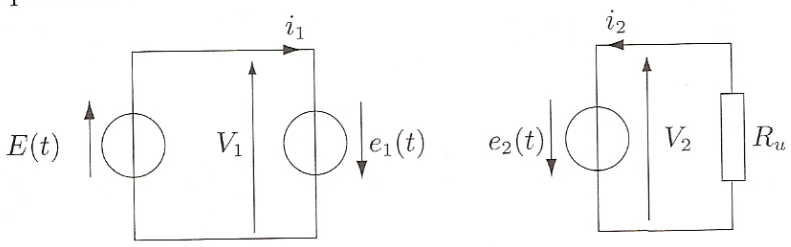


Figure 18.20 – Schéma électrique équivalent au transformateur.

Les équations électriques donnant les tensions V_1 et V_2 aux bornes du primaire et du secondaire sont donc :

$$\begin{cases} E(t) = V_1 = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ V_2 = -R_u i_2 = L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

Les trois principales utilisations d'un transformateur sont :

- *Transformateur de tension* : les expressions des inductances propres du primaire et du secondaire et celle de l'inductance mutuelle permettent d'écrire :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}.$$

  Le rapport des tensions au secondaire et au primaire est égal au rapport du nombres de spires des deux bobinages, appelé *rapport de transformation*, et noté en général m.

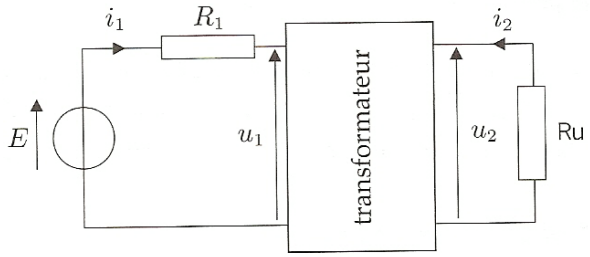
- *Transformateur de courant* : quand le transformateur est utilisé en court-circuit, $R_u = 0$, la tension V_2 est nulle. Nous en déduisons : $L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = -M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ ou encore, les courants étant nuls à l'instant initial : $L_2 i_2 = -M i_1$, soit :

$$\frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{m}.$$

  Cette relation est valable quelle que soit la résistance d'utilisation. La démonstration dépasse le cadre de ce cours.

- *Adaptation d'impédance* : un transformateur peut permettre d'adapter l'impédance d'une source et d'une charge, c'est-à-dire de permettre à la source, de résistance interne R_1 donnée, de délivrer une puissance maximale à une

charge donnée R_c. Étudions le montage suivant :



Le transformateur est parfait : $u_2 = mu_1$ et $i_1 = -mi_2$.

Au primaire : $u_1 = E - R_1 i_1 = E + mR_1 i_2$ donc $u_2 = mE + m^2 R_1 i_2$: le dipôle équivalent à la source et à la résistance R_1 vu du secondaire est un générateur de force électromotrice mE et de résistance interne $m^2 R_1$. Le montage, vu du secondaire, est donc équivalent à :

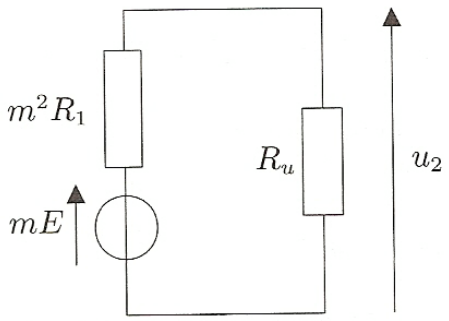


Figure 18.22 – Schéma équivalent vu de la charge.

La formule des diviseurs de tension permet d'écrire $u_2 = \dfrac{R_u}{R_u + m^2 R_1} mE$.

Nous en déduisons l'expression de la puissance $\mathcal{P}_2$ transmise à la charge :

$$\mathcal{P}_2 = \frac{u_2^2}{R_u} = \frac{1}{R_u}\left(\frac{mER_u}{R_u + m^2 R_1}\right)^2.$$

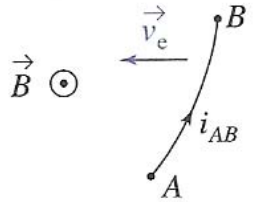
Elle est maximale si $\dfrac{R_u}{m} + mR_1$ est minimale donc si $m = \sqrt{\dfrac{R_u}{R_1}}$.

Si le rapport de transformation est bien choisi, on peut réaliser l'adaptation d'impédance grâce à un transformateur.

B - Cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire (Cas de Lorentz)

I) Circulation du terme $\vec{v}_e \wedge \vec{B}$, loi de Faraday :

On considère un conducteur mobile (C). on note $\vec{v}_e$ la vitesse d'un élément du circuit situé au point M par rapport au référentiel du laboratoire et $\vec{v}'$ la vitesse des porteurs de charges lorsqu'ils passent au point M.



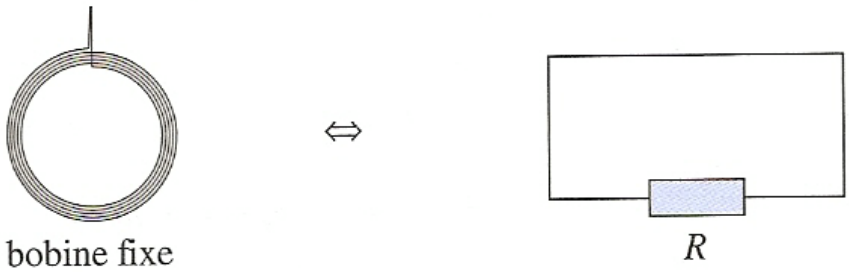
a. *Portion de fil de résistance ohmique R entre les points A et B en mouvement de vitesse $\vec{v}_e$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ extérieur permanent.*

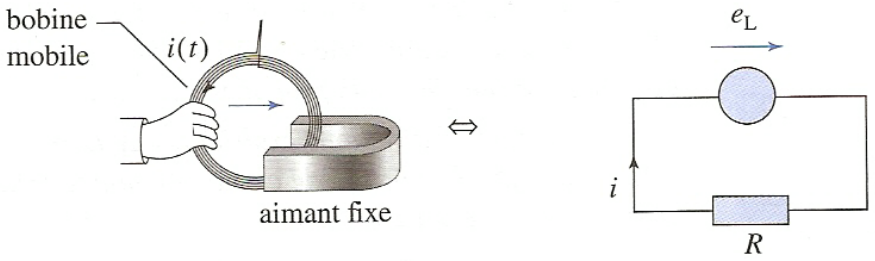
D'après la loi de composition des vitesses, la vitesse $\vec{v}$ des porteurs de charges au point M, évaluée dans le référentiel du laboratoire est :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$$

On suppose , dans le référentiel du laboratoire, règne un champ EM dont la composante magnétique est permanente, de telle sorte que $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$ et donc $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$. Le champ EM dans le référentiel du conducteur est alors, en utilisant les relations de transformations des champs :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \qquad et \qquad \vec{B}' = \vec{B}$$





Ainsi, dans le référentiel du conducteur, apparaît un champ électromoteur $\vec{E}_m$ à circulation non conservative, susceptible de mettre en mouvement relatif les porteurs de charges :

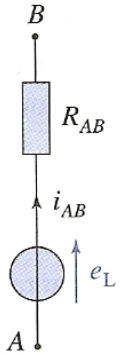
$$\underline{\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}}$$

Entre A et B, la circulation de ce champ donnera la fém induite entre ces deux points :

$$e_{AB} = \int_{(C_{AB})} \vec{E}_m . d\vec{\ell} = \int_{(C_{AB})} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}).d\vec{\ell}$$

Pour un circuit mobile fermé :

$$e = \oint_{(C_{AB})} \vec{E}_m . d\vec{\ell} = \oint_{(C_{AB})} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}).d\vec{\ell}$$



b. *Circuit électrique équivalent avec*

$$e_L = \int_A^B \vec{v}_e \wedge \vec{B} \,.\, d\vec{\ell} \quad et$$

$$V_A - V_B + e_L = R_{AB}\, i_{AB}$$

Doc. 13. *Équivalence électrocinétique d'une portion de conducteur.*

On peut montrer que, pour un champ magnétique permanent, la loi de Faraday est valable :

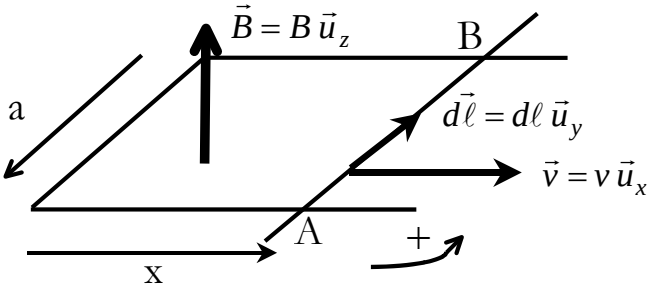
$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

où $d\Phi$ représente la variation du flux du champ magnétique à travers le circuit lors du déplacement du circuit pendant l'intervalle de temps dt.

II) Exemple : barre lancée sur des rails

La barre (AB), de longueur a et de masse m, de centre de masse d'abscisse x(t) et de vitesse $\vec{v} = v\,\vec{u}_x$ (avec $v = \dot{x}$) est lancée avec une vitesse initiale v_0 sur des rails métalliques sur lesquels elle glisse sans frottement.

Elle constitue avec les rails de résistance négligeable un circuit rectangulaire (C) de résistance R constante et d'inductance négligeable et dont la surface à l'instant t est $S(t) = ax(t)$.



Ce circuit est placé dans un champ magnétique permanent $\vec{B} = B\,\vec{u}_z$ d'origine extérieure à (C).

On souhaite déterminer la fém induite et la loi de vitesse de la barre.

- **Détermination de la fém induite :**

1ère méthode de calcul (utilisation de la loi de Faraday) :

Pendant l'intervalle de temps dt, la variation du flux magnétique est :

$$d\Phi = Ba\,dx = Bav\,dt$$

La fém induite vaut donc :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bav$$

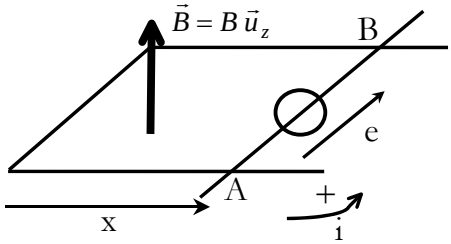
2ème méthode de calcul (circulation du champ électromoteur) :

La circulation du champ électromoteur entre A et B vaut (elle est nulle le long du reste du circuit qui, lui, est immobile) :

$$e = \int_A^B (\vec{v} \wedge \vec{B}).d\vec{\ell} = \int_A^B (v\,u_x \wedge B\vec{u}_z).d\ell\,\vec{u}_y = -\int_A^B vB\,d\ell = -Bav$$

On retrouve bien évidemment le même résultat.

Le circuit peut alors être modélisé par :



L'intensité qui traverse le circuit se calcule par la loi de Pouillet :

$$e = Ri \qquad soit \qquad i = -\frac{Bav}{R}$$

Ainsi, pour v > 0, on en tire i < 0 : ce résultat pouvait être prévu à l'aide de la loi de Lenz. En effet, lorsque la tige se déplace vers la droite, le flux inducteur (positif) augmente. Par conséquent, le flux induit doit être négatif, ce qui correspond bien à un courant induit dans le sens négatif.

- **Loi de vitesse v(t) :**

La barre est soumise (horizontalement du moins) à la force de Laplace :

$$\vec{F} = i\,a\,\vec{u}_y \wedge B\,\vec{u}_z = iaB\,\vec{u}_x = F\,\vec{u}_x$$

Ainsi, pour i < 0, F < 0 : ce résultat peut là encore être prévu par la loi de Lenz. En effet, l'apparition d'une force de freinage négative est bien un effet modérateur tendant à s'opposer à la mise en mouvement de la barre.

Le théorème du CI appliqué à la barre donne enfin :

$$m\frac{dv}{dt} = iaB = -\frac{B^2a^2}{R}v \qquad soit \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2a^2}{mR}v$$

On peut remarquer que le terme $\frac{B^2a^2}{R}$ joue le même rôle qu'un coefficient de frottement fluide.

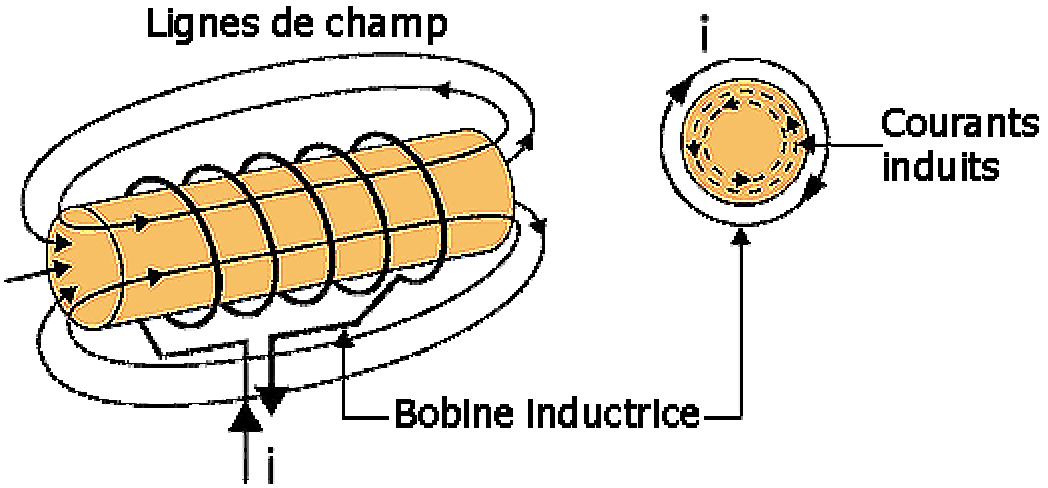
On pose $\tau = \frac{mR}{B^2a^2}$ (temps caractéristique du régime transitoire), alors :

$$v = v_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

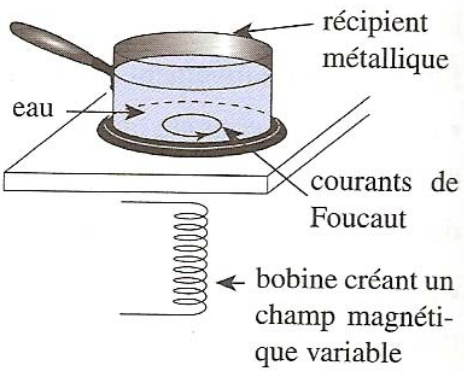
Application numérique : a = 10 cm, B = 0,1 T, m = 10 g et R = 0,1 Ω. Alors τ = 10 s.

Remarque : (application de la loi de Lenz aux courants de Foucault)

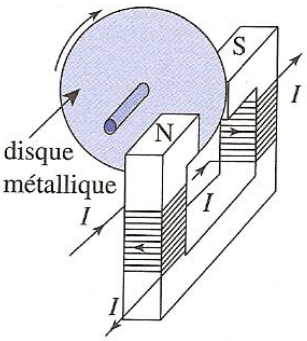
Selon un principe analogue à celui du montage précédent, les courants de Foucault induits dans les conducteurs massifs mobiles dans des champs magnétiques permanents sont à l'origine de forces de Laplace qui tendent à s'opposer au mouvement qui leur donne naissance. Tel est le principe du freinage électromagnétique, utilisé notamment pour les poids lourds et les TGV.



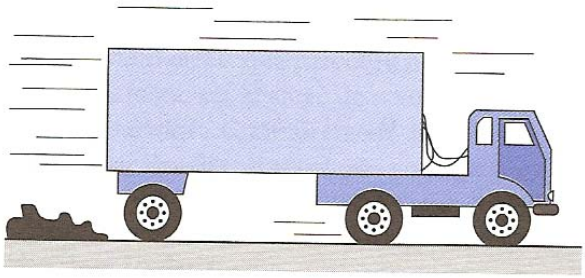
Ce freinage est d'autant plus efficace que B est grand ($\tau \propto B^{-2}$, voir résultat plus haut).



Doc. 36. *Principe d'une plaque à induction : des courants apparaissent dans le récipient métallique soumis à un champ magnétique variable.*



Doc. 37. *Si aucun courant ne passe dans l'électro-aimant, le disque tourne librement ; dès que l'électro-aimant est excité, le disque est freiné.*



Doc. 38. *Freinage par induction pour certains poids lourds : des courants de Foucault apparaissent dans une pièce (solidaire des roues) en mouvement dans un champ magnétique.*

- **Aspect énergétique (exemple de transducteur) :**

On reprend l'équation électrique (E) et l'équation mécanique (M) du circuit :

$$\text{(E) : } e = Ri = -Bav \qquad \text{et} \qquad \text{(M) : } m\frac{dv}{dt} = F = iaB$$

Afin de faire intervenir des puissances, on multiplie l'équation (E) par i et l'équation (M) par v :

$$ei = Ri^2 = -Bav\, i \qquad \text{et} \qquad mv\frac{dv}{dt} = Fv = iaBv$$

On note $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ l'énergie cinétique de la barre ; alors :

$$\frac{dE_c}{dt} = -Ri^2$$

L'énergie cinétique perdue par la barre se retrouve intégralement sous forme d'effet Joule dans la résistance : la barre joue le rôle de convertisseur d'énergie mécanique en énergie électrique finalement dissipée par effet Joule en chaleur.

On peut également envisager le cas où la barre est initialement fixe et où l'introduction le long du circuit d'une source de tension (une pile par exemple) engendre un courant. La barre se met alors en mouvement sous l'action des forces de Laplace et le même système joue le rôle de récepteur en convertissant cette fois de l'énergie électrique en énergie mécanique ; on a en fait le principe d'un moteur électrique.

D'une manière générale, on appelle « transducteur électromécanique » un système qui est susceptible de transformer l'énergie mécanique en énergie électrique et réciproquement.

Plaque à induction

Les plaques à induction sont des plaques de cuisson fondées sur les courants de Foucault.

Dans ce type de plaque, des inducteurs magnétiques sont placés sous la surface en vitrocéramique. Ces inducteurs génèrent un champ magnétique (car ils sont parcourus par un courant électrique à haute fréquence : 50 kHz) qui induit des courants électriques dans le métal de la casserole. Ces courants produisent par effet joule de l'énergie thermique (chaleur) en circulant dans le métal de la casserole.

Avec une plaque à induction, la surface de la plaque reste presque froide, seulement chauffée par la casserole elle-même. Il y a donc peu de risques de se brûler en touchant la plaque après retrait de l'ustensile et aucun risque à la prise en main de son manche, un moins grand risque de se brûler sur les bords de casseroles lorsqu'elles sont non pleinement remplies, ni sur leurs couvercles.

Les casseroles doivent être d'un métal magnétique, c'est-à-dire qu'un aimant doit pouvoir se coller dessus. Autrement dit, les casseroles à base de fer fonctionnent bien, alors que celles à base de cuivre ou d'aluminium ne sont pas utilisables.

Les plaques à induction sont très intéressantes en cuisine, car elles n'ont pas d'inertie thermique tout comme le gaz, du fait qu'il n'y a pas de pièce intermédiaire et que la chaleur naît directement dans le fond de la casserole. Lorsque l'on coupe l'alimentation électrique, la chauffe cesse immédiatement.

Elles sont aussi intéressantes car il n'y a pas d'émission de chaleur ailleurs que dans la casserole ainsi qu'une moindre déperdition énergétique et donc une moindre dispersion de chaleur dans la cuisine.

Le nettoyage est facilité car en cas de débordement le liquide ne brûle pas sur la plaque étant donné qu'elle est froide.

Le principal inconvénient est le surcoût dû à la nécessité d'avoir un jeu de casseroles adaptées. En effet, une dégradation rapide des casseroles par bombement du fond est observée, si l'on ne dispose pas de modèles très bien conçus qui ne surchauffent pas sur une partie du fond (et brûlent localement les aliments) et surtout si l'on utilise la plaque à sa puissance maximale. Ce

phénomène est dû au fait que l'induction provoque des différences de températures très importantes au sein des casseroles non prévues spécifiquement pour ce type de plaques.

Le rendement d'une plaque à induction est excellent : entre 80% et 90%.

Exercices sur les courants induits :

* Courants induits dans une roue :

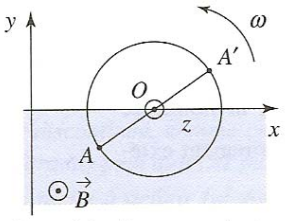
Courants induits dans une roue

La circonférence et un diamètre d'une roue de rayon a sont conducteur et ont la même résistance R.

La roue est mobile autour de l'axe (Oz), *avec une vitesse angulaire de rotation* ω *(doc.* 14a*).*

Un champ magnétique permanent $\vec{B} = B\vec{e}_z$ *est imposé sur la moitié* $y < 0$ *de la roue, le champ magnétique étant nul pour* $y > 0$.

On admettra qu'un tel champ discontinu existe, sachant que c'est une modélisation simplificatrice.



Doc. 14a. *Roue conductrice en rotation.*

En l'absence de source, déterminer les courants et le moment des actions de Laplace par rapport à l'axe de rotation.

On utilisera deux méthodes faisant appel à :

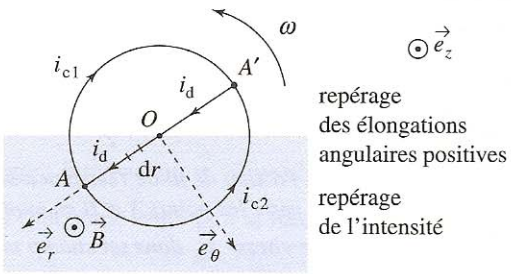
a) *la puissance des forces de Laplace ;*

b) *la circulation du champ électromoteur.*

Quelle que soit la méthode utilisée, la solution comporte quatre étapes :

- *orienter le circuit (cf. les orientations arbitraires que nous avons choisies sur le document* 14b*) ;*
- *calculer les f.e.m. ;*
- *dessiner le schéma électrocinétique équivalent (très utile dès que le circuit comporte plus d'une maille) ;*
- *en déduire les courants et donc les actions mécaniques.*

Orientons le diamètre de O vers A situé dans le champ (*doc.* 14b).



Doc. 14b. *Choix des orientations.*

a) Première méthode

• Pour un élément dr de rayon plongé dans le champ : $d\vec{F}_{\text{Laplace}} = i_d\, dr\, \vec{e}_r \wedge B\, \vec{e}_z$, soit :

$$d\vec{F}_{\text{Laplace}} = -B i_d\, dr\, \vec{e}_\theta .$$

Le moment par rapport à l'axe de rotation (Oz) est :

$$d\mathcal{M} = -B\, i_d r\, dr .$$

En intégrant, nous obtenons, pour le rayon plongé dans le champ :

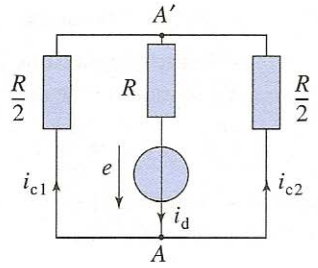
$$\mathcal{M} = -i_d B \frac{a^2}{2},$$

et $$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = -\omega i_d B \frac{a^2}{2} = -e_{OA}\, i_d ,$$

d'où la f.e.m. $e_{OA} = \omega B \dfrac{a^2}{2}$.

• Pour toute portion de la circonférence, le moment des forces de Laplace par rapport à (Oz), est nul : il en est de même pour la puissance. La f.e.m. est donc aussi nulle.

En conclusion, une f.e.m. est localisée uniquement entre O et A. Nous pouvons désormais déterminer les courants en dessinant un schéma électrocinétique équivalent au système étudié (*doc.* 15). Comme $i_{c1} = i_{c2}$, nous noterons i_c cette valeur commune.



Doc. 15. *Schéma électrocinétique équivalent.*

L'analyse électrocinétique fournit le résultat :

$$i_d = 2\, i_c = \frac{e}{R + \frac{R}{4}} = \frac{2\omega B a^2}{5R} .$$

D'où le moment des forces de Laplace

$$\mathcal{M} = -\frac{B^2 a^4}{5R}\omega .$$

Conformément à la loi de Lenz, il s'agit d'un moment opposé à la rotation du système.

b) Seconde méthode

Le champ électromoteur :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B} = (\omega r\, \vec{e}_\theta) \wedge \vec{B} = \omega r B\, \vec{e}_r$$

est normal à la circonférence et parallèle au diamètre.

Pour la circonférence, la f.e.m. est donc nulle.

Pour le diamètre :

$$e_{OA} = \int_0^a \omega B\, r\, dr = \omega B \frac{a^2}{2} .$$

Le schéma électrocinétique équivalent est donc celui du *document* 15.

La f.e.m. de Lorentz, localisée sur la portion de circuit OA, se met sous la forme :

$$e_L = -\Phi_0\, \omega .$$

Nous en déduisons (*cf. Application* 2) que sur cette même portion de circuit s'exercera le moment : $\mathcal{M} = \Phi_0\, i_d$, avec $\Phi_0 = -B \dfrac{a^2}{2}$.

Courants de Foucault dans un disque :

Courants de Foucault dans un disque

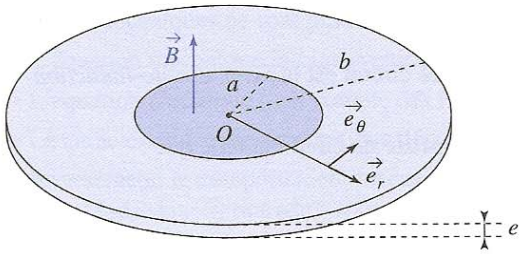
Un disque conducteur ohmique de conductivité γ, mince, d'axe (Oz), de rayon b et d'épaisseur e, est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}(t) = B_m \cos \omega t \, \vec{e}_z$ localisé dans un cylindre de rayon a et nul ailleurs (doc .40).

On convient de négliger le champ $\vec{B}_{\text{induit}}$ créé par le courant induit.

1) *Quelle est la forme des lignes de courant ?*

2) *Calculer le vecteur densité de courant en tout point du disque.*

3) *Déterminer la puissance moyenne dissipé dans le disque. Faire le calcul pour un disque de cuivre ($\gamma = 6 \,.\, 10^7$ S . m^{-1}) de 2 mm d'épaisseur, de rayon $a = 2$ cm entièrement plongé ($a = b$) dans un champ de valeur maximale $B_m = 0{,}1$ T vibrant à 50 Hz.*



Doc. 40. *Disque conducteur.*

4) *Calculer le champ $\vec{B}_{\text{induit}}$ créé au centre par la distribution de courants induits, puis discuter la pertinence de l'hypothèse initiale.*

1) Les conditions aux limites ($\vec{j}$ tangent à la surface extérieure, disque mince) et la symétrie du problème nous incitent à rechercher une solution de la forme $\vec{j} = j(r,t)\vec{e}_\theta$ (en coordonnées cylindriques).

2) Sur une ligne de courant de rayon r :

$$\oint_\Gamma \vec{E}_m \,.\, \mathrm{d}\vec{\ell} = 2\pi r \frac{j(r,t)}{\gamma} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}.$$

• Si $r < a$:

$$\phi = \pi r^2 B \quad \text{et} \quad j(r,t) = \frac{\gamma}{2}\omega r B_m \sin \omega t\,.$$

Si $a < r < b$:

$$\phi = \pi a^2 B \quad \text{et} \quad j(r,t) = \frac{\gamma}{2}\omega \frac{a^2}{r} B_m \sin \omega t\,.$$

Nous retrouvons bien la règle générale, à savoir : le champ induit est négligeable si l'épaisseur du conducteur est petite devant δ.

3) La puissance volumique dissipée par effet Joule est (*cf. chapitre* 1) :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \vec{j} \,.\, \vec{E}_m = \frac{j^2}{\gamma}.$$

Pour une couronne de rayon r, de largeur dr et d'épaisseur e.

$$\mathrm{d}\mathcal{P}_{\text{Joule}} = \mathcal{P}_{\text{vol}}\,\mathrm{d}\tau = 2\pi r e \,\mathrm{d}r \frac{j^2(r,t)}{\gamma}.$$

La puissance totale dissipée par le disque est donc :

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = \frac{\pi e \gamma}{2}\omega^2 B^2 \sin^2 \omega t \times \left[\int_0^a r^3\,\mathrm{d}r + \int_a^b \frac{a^4}{r}\,\mathrm{d}r\right]$$

$$= \frac{\pi e \gamma}{2}\omega^2 a^4 B^2 \sin^2 \omega t \left(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right).$$

Sur une durée grande devant la période, la puissance moyenne dissipée est :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{Joule}} \rangle = \frac{\pi e \gamma}{4}\omega^2 a^4 B_m^2 \left(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right),$$

soit lorsque $a = b$:

$$\langle \mathcal{P}_{\text{Joule}} \rangle = \frac{\pi e \gamma}{16}\omega^2 a^4 B_m^2\,.$$

Remarquons que cette puissance est effectivement proportionnelle :

• à la pulsation au carré (terme en ω^2) ;

• au champ magnétique au carré (terme en B^2) ;

• à la surface au carré (terme en a^4).

Le disque de cuivre dissipe une puissance moyenne égale à 3,7 W.

4) Le champ dB créé au centre d'une spire de rayon r et de largeur dr est :

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0\,\mathrm{d}i}{2r} \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}i = j(r,t)e\,\mathrm{d}r\,.$$

Le champ créé par l'ensemble des courants induits est donc :

$$B_{\text{induit}} = \int_{r=0}^{a} \mathrm{d}B + \int_{r=a}^{b} \mathrm{d}B$$

$$= \mu_0 \gamma \omega \frac{e a}{2}\left(1 - \frac{a}{2b}\right) B_m \sin \omega t\,.$$

B_{induit} est toujours négligeable devant B_{total} si :

$$a e \ll \delta^2 \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}\,.$$

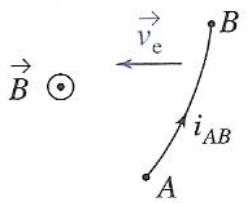
Pour du cuivre à 50 Hz, $\delta = 9{,}2$ mm.

Si $a = b = 2$ cm et $e = 2$ mm, l'approximation est à la limite de validité.

III) Rendement fondamental des transducteurs électromécaniques :

1) Puissance de la fém induite et puissance des forces de Laplace :

On considère un porteur de charge plongé dans un champ magnétique indépendant du temps et se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ par rapport au conducteur, lui-même se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_e$ par rapport au référentiel du laboratoire (R_0).



a. *Portion de fil de résistance ohmique R entre les points A et B en mouvement de vitesse $\vec{v}_e$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ extérieur permanent.*

Dans ce référentiel, le porteur de charge a une vitesse $(\vec{v}+\vec{v}_e)$ et subit la force de Lorentz $q(\vec{v}+\vec{v}_e)\wedge\vec{B}$ dont la puissance est nulle :

$$\left[q(\vec{v}+\vec{v}_e)\wedge\vec{B}\right](\vec{v}+\vec{v}_e)=0$$

Cette puissance peut être décomposée en 4 termes dont deux sont nuls :

$$q(\vec{v}\wedge\vec{B}).\vec{v}+q(\vec{v}\wedge\vec{B}).\vec{v}_e+q(\vec{v}_e\wedge\vec{B}).\vec{v}+q(\vec{v}_e\wedge\vec{B}).\vec{v}_e=q(\vec{v}\wedge\vec{B}).\vec{v}_e+q(\vec{v}_e\wedge\vec{B}).\vec{v}$$

Dans un volume élémentaire dτ, le nombre de porteurs de charge est n.dτ et la puissance volumique de la force de Lorentz devient :

$$d\vec{f}=nd\tau\left[q(\vec{v}\wedge\vec{B}).\vec{v}_e+q(\vec{v}_e\wedge\vec{B}).\vec{v}\right]$$

Le terme $nd\tau\, q(\vec{v}_e\wedge\vec{B}).\vec{v}$ représente la puissance volumique de la force appliquée aux charges due au champ électromoteur $\vec{E}_m=\vec{v}_e\wedge\vec{B}$ évaluée dans le référentiel du conducteur ; en sommant sur tout le volume du conducteur, on obtient la puissance de la fém induite, notée P_e :

$$P_e=\oiiint_{(V)} nd\tau\, q(\vec{v}_e\wedge\vec{B}).\vec{v}=\oiiint_{(V)}(\vec{v}_e\wedge\vec{B}).\vec{j}\,d\tau=\oint_{(C)}(\vec{v}_e\wedge\vec{B}).d\vec{\ell}\,i=ei$$

Interprétation du terme $nd\tau\, q(\vec{v}\wedge\vec{B}).\vec{v}_e$:

$$nd\tau\, q(\vec{v}\wedge\vec{B}).\vec{v}_e=(\vec{j}\,d\tau\wedge\vec{B}).\vec{v}_e$$

Ce terme apparaît comme la puissance de la force de Laplace subie par l'élément de volume dτ.

Finalement, par intégration :

$$P_e+P_L=ei+P_L=0$$

La puissance de la force électromotrice d'induction est compensée par celle des actions de Laplace exercée sur le circuit.

2) Rendement d'un transducteur électromécanique :

Les moteurs et générateurs électriques sont des convertisseurs de puissance susceptibles de produire de la puissance mécanique à partir d'une source électrique ou de la puissance électrique à partir d'une excitation électrique (des transducteurs électromécaniques).

Théoriquement, les deux sens de conversion sont en général possibles, mais les appareils sont en général adaptés techniquement à un seul mode de fonctionnement.

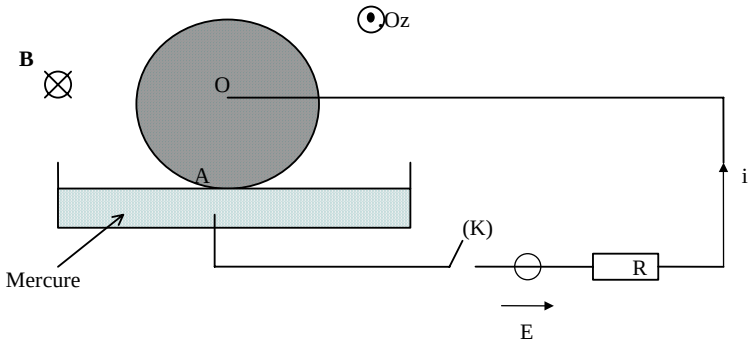
S'il était possible de faire abstraction des résistances, le rendement serait de 100% : en effet, la puissance mécanique est celle des actions de Laplace et la puissance électrique est, en l'absence de résistance, celle de la fém d'induction. D'après le paragraphe précédent, ces deux puissances sont égales en valeur absolue.

On peut ainsi dire que le rendement fondamental d'un transducteur électromécanique est égal à 1.

IV) La roue de Barlow, ancêtre des générateurs et des moteurs électriques :

On envisage un moteur électrique constitué d'un disque métallique de rayon a, libre de tourner autour de son axe horizontal Oz avec un moment d'inertie J et plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\mathbf{B}=-B\mathbf{u}_z$, avec B>0. Ce disque est fermé par un fil électrique issu de son centre O et par un contact avec un bain de mercure en un point A sur un générateur de fém E constante et une résistance R via un interrupteur K. On néglige la résistance du disque et celle du générateur. On néglige l'inductance propre du circuit.

On note i l'intensité du courant et ω la vitesse angulaire de rotation du moteur. Le courant étant nul et la roue au repos, on ferme l'interrupteur K.



Le disque, parcouru par un courant imposé par le générateur, se met en mouvement (dû aux forces de Laplace dans un champ magnétique) ; ce mouvement va créer une fém d'induction (cas de Lorentz) dont les effets vont s'opposer à la cause de ce mouvement.

Il y a couplage entre i(t) et ω(t) : la roue de Barlow constitue un exemple de « transducteur électromécanique », c'est-à-dire de système susceptible de transformer l'énergie mécanique en énergie électrique et réciproquement.

Dans un 1er temps (voir à la fin de ce paragraphe), on admet que les forces de Laplace subies par le disque sont équivalentes à celles que subirait un conducteur filiforme confondu avec le rayon OA et parcouru par un courant d'intensité i.

On va établir l'équation différentielle du problème en supposant que la roue est soumise à un couple de frottements de la forme -fω.

Un élément de longueur $d\vec{\ell} = dr\,\vec{u}_r$ du conducteur filiforme fictif OA , centré en M, est soumis à la force de Laplace :

$$d\vec{F} = i\ dr\ \vec{u}_r \wedge (-B)\ \vec{u}_z = iB\ dr\ \vec{u}_\theta$$

Le moment élémentaire de cette force par rapport à l'axe (Oz) est :

$$d\Gamma_z = (r\ \vec{u}_r \wedge d\vec{F}).\vec{u}_z = iB\ rdr$$

Le moment total par rapport à l'axe vaut donc :

$$\Gamma_z = \frac{1}{2} iBa^2$$

Le théorème scalaire du moment cinétique donne ensuite (dans le référentiel galiléen du laboratoire) :

$$J\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} iBa^2 - f\omega$$

C'est l'équation différentielle (M) obtenue par les lois de la mécanique.

On va déterminer maintenant l'équation électrique du système.

La fém d'induction qui apparaît peut se calculer selon :

$$e_{OA} = \int_0^a \left(r\omega\ \vec{u}_\theta \wedge (-B\ \vec{u}_z)\right).dr\ \vec{u}_r = -\frac{B\omega a^2}{2}$$

On peut également dire que, pour un transducteur électromécanique dans un champ magnétique stationnaire, la puissance des forces de Laplace et la puissance de la fém induite sont opposées. Par conséquent :

$$P_e = ei = -P_L = -\Gamma_z \omega$$

Soit :

$$e = -\frac{\Gamma_z \omega}{i} = -\frac{B\omega a^2}{2}$$

La loi des mailles dans le circuit électrique équivalent donne l'équation électrique (E) :

$$E - Ri + e = 0 \qquad soit \qquad Ri = E - \frac{Ba^2\omega}{2}$$

En éliminant i entre les équations (E) et (M), on obtient :

$$J\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} Ba^2 \frac{E - \frac{Ba^2\omega}{2}}{R} - f\omega$$

Soit :

$$J\frac{d\omega}{dt} + \left(f + \frac{B^2a^4}{4R}\right)\omega = \frac{Ba^2E}{2R}$$

La roue étant immobile à t = 0, il vient :

$$\omega = \omega_\ell (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad avec \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{f}{J} + \frac{B^2a^4}{4RJ} \qquad et \qquad \omega_\ell = \frac{2Ba^2E}{4Rf + B^2a^4}$$

Le moteur atteint une vitesse angulaire limite ω_ℓ au bout d'un intervalle de temps de l'ordre de τ.

On obtient l'intensité par :

$$i = \frac{1}{R}(E - \frac{Ba^2\omega}{2})$$

Soit :

$$i(t) = \frac{4Ef}{B^2a^4 + 4Rf} + \frac{B^2a^4E}{B^2a^4R + 4R^2f}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On constate que le courant est discontinu à l'instant t = 0 puisque $i(0^+) = \frac{E}{R}$ alors que $i(0^-) = 0$.

Il atteint une valeur permanente :

$$i_\ell = \frac{4Ef}{B^2a^4 + 4Rf}$$

On peut effectuer un bilan énergétique du dispositif : pour cela, on multiplie l'équation (M) par ω et l'équation (E) par i :

$$J\omega\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}i\omega Ba^2 - f\omega^2 \qquad ; \qquad Ri^2 = Ei - \frac{Ba^2\omega i}{2}$$

Soit :

$$Ei = Ri^2 + f\omega^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right)$$

La puissance fournie par le générateur sert à augmenter l'énergie cinétique du disque, une partie étant dissipée sous forme de frottements mécaniques et d'effet Joule.

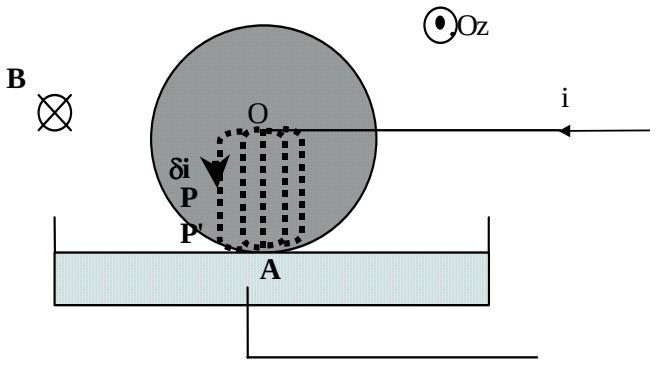
En régime permanent établi, ce bilan se simplifie sous la forme :

$$Ei_\ell = Ri_\ell{}^2 + f\omega_\ell{}^2$$

La puissance du générateur compense entièrement les pertes.

Compléments :

On calcule la force de Laplace qui agit sur le disque sans faire l'hypothèse que le courant circule le long du diamètre (OA).



Le courant passe de O à A en suivant les lignes de courant en pointillés. L'élément de courant $\overrightarrow{PP'}$ du tube de courant traversé par le courant δi est soumis à la force de Laplace :

$$\delta^2\vec{F}_L = \delta i\,\overrightarrow{PP'} \wedge \vec{B}$$

dont le moment par rapport à O vaut :

$$\delta^2\vec{\Gamma}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \delta^2\vec{F}_L = \overrightarrow{OP} \wedge \delta i\ (\overrightarrow{PP'} \wedge \vec{B})$$

Avec $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} = d\overrightarrow{OP}$, il vient (en notant que $\overrightarrow{OP}$ *et* $\vec{B}$ sont perpendiculaires) :

$$\delta^2\vec{\Gamma}_O = \left[(\overrightarrow{OP}.\vec{B}).d\overrightarrow{OP} - (\overrightarrow{OP}.d\overrightarrow{OP})\vec{B}\right]\delta i = -(\overrightarrow{OP}.d\overrightarrow{OP})\vec{B}\ \delta i$$

En sommant sur tous les éléments de courant du tube puis sur tous les tubes :

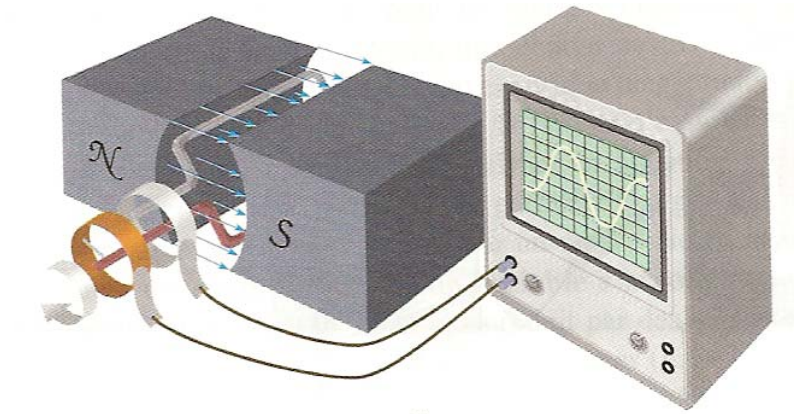
$$\delta\vec{\Gamma}_O = -\int_O^A (\overrightarrow{OP}.d\overrightarrow{OP})\vec{B}\ \delta i = -\delta i\ \vec{B}.\left[\frac{\overrightarrow{OP}^2}{2}\right]_O^A = -\delta i\ \vec{B}\ \frac{\overrightarrow{OA}^2}{2} = \frac{\delta i B a^2}{2}\vec{u}_z \qquad (avec\ \vec{B} = -B\,\vec{u}_z)$$

Puis, finalement :

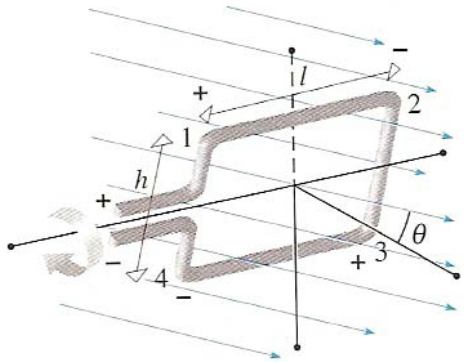
$$\vec{\Gamma}_O = \frac{iBa^2}{2}\vec{u}_z \qquad et \qquad \Gamma_z = \frac{iBa^2}{2}$$

C'est le résultat que l'on avait obtenu en supposant que le courant i passait selon le rayon OA en étant soumis à la force de Laplace $\vec{F}_L = i\,\overrightarrow{OA} \wedge \vec{B}$ appliqué au milieu du rayon OA.

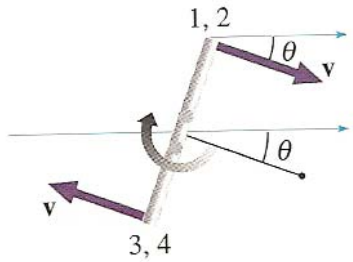
Exemples de moteurs :



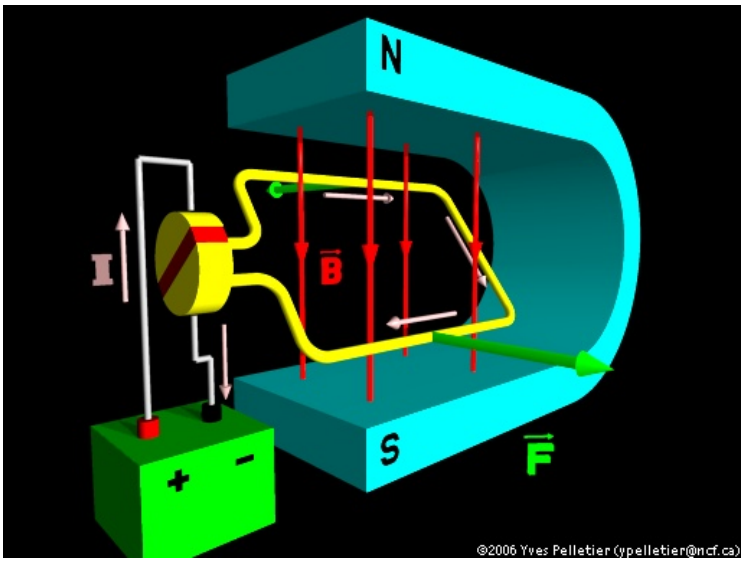
(a)



(c)

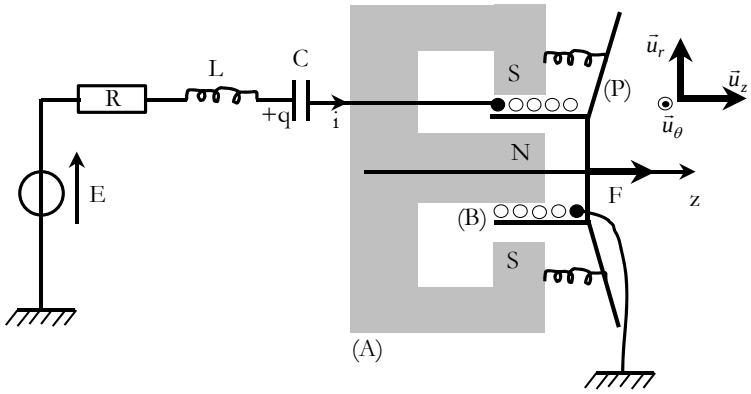


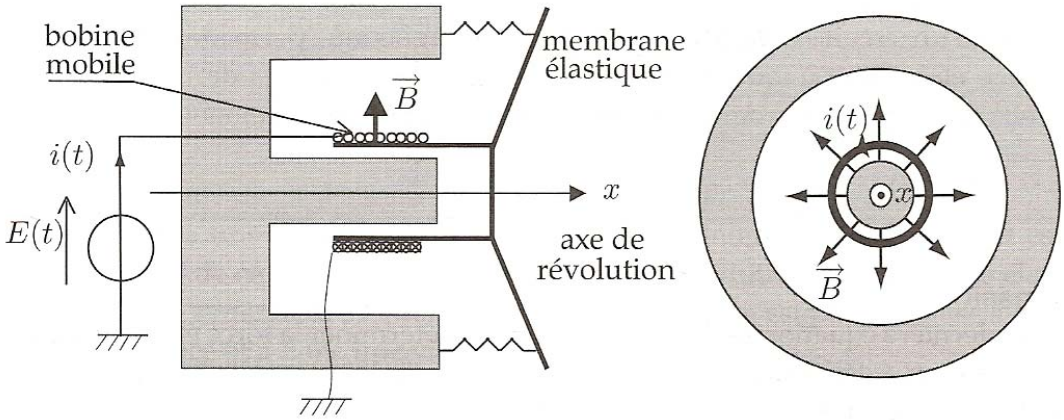
(d)



V) Application au haut-parleur électrodynamique (couplage électromécanique), bilan énergétique :

La figure suivante représente un dispositif pouvant servir aussi bien de haut-parleur que de microphone.





Vue de côté Vue de face

(A) est un aimant permanent possédant une symétrie de révolution d'axe (Oz). Dans son entrefer règne un champ magnétique radial, dans la région où se déplace le bobinage (B) solidaire du pavillon (P), ce champ s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B} = B\,\vec{u}_r$$

(P) est un système de masse totale m, susceptible de se déplacer le long de l'axe (Oz). Il peut être mis en mouvement de translation par l'action d'une force extérieure $F\,\vec{u}_z$. Il subit en outre des forces dissipatives de somme $-h\,\dot{z}\,\vec{u}_z$, des forces de rappel de somme $-k\,z\,\vec{u}_z$ exercées par un système de ressorts ainsi que des forces de Laplace de somme $\vec{f}$ exercées sur (B). Ce dernier, constitué d'une longueur totale de fil ℓ, transporte un courant d'intensité i. Négligeant l'hélicité de (B), on admet que chaque élément de fil est représentable en coordonnées cylindriques par :

$$d\vec{\ell} = d\ell\,\vec{u}_\theta$$

(B) est alimenté par une source de tension E à travers un circuit dont on note R, L et C les résistances, inductances et capacités totales (c'est-à-dire relatives à l'ensemble du circuit, (B) compris).

On peut exprimer $\vec{f}$ en fonction de $i = \dot{q}$, B et ℓ. En effet, si l'on somme les forces de Laplace qui s'exercent sur les différents éléments de (B) :

$$d\vec{f} = i\,d\ell\,\vec{u}_\theta \wedge B\,\vec{u}_r = -iBd\ell\,\vec{u}_z \qquad et \qquad \vec{f} = -iB\ell\,\vec{u}_z$$

On en déduit l'équation différentielle (M) vérifiée par z(t) qui traduit le comportement mécanique du système en écrivant le théorème de la résultante cinétique appliqué au pavillon (P) (et projeté sur l'axe (Oz)) :

$$m\ddot{z} = -h\dot{z} - kz - B\ell i + F \qquad soit \qquad m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = -B\ell i + F$$

On obtient ainsi l'équation mécanique (M) du système.

Afin d'obtenir l'équation électrique (E), on va exprimer en fonction de $v = \dot{z}$, B et ℓ la fém e induite dans (B). Sur un élément $d\vec{\ell}$ de (B) est induite la fém :

$$de = (\vec{v} \wedge \vec{B}).d\vec{\ell} = (\dot{z}\,\vec{u}_z \wedge B\,\vec{u}_r).d\ell\,\vec{u}_\theta = B\dot{z}\,d\ell$$

et, en intégrant le long de (B) dans le sens positif de i :

$$e = B\dot{z}\ell = B\ell v$$

La loi des mailles donne alors l'équation électrique (E) du circuit :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = B\ell v + E$$

On effectue la combinaison (M).v+(E).i :

$$(m\ddot{z} + h\dot{z} + kz).v + (L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q).i = (-B\ell i + F).v + (B\ell v + E).i$$

On voit que cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dU}{dt} = Fv + Ei - Ri^2 - hv^2$$

Avec :

$$U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

U représente l'énergie mécanique du système et son énergie électromagnétique.

L'équation précédente traduit la conservation de l'énergie : la dérivée de U est égale à la somme des puissances fournies par les deux sources d'énergie du système (la force extérieure F et la source de tension E) diminuée des puissances dissipées sous forme de frottements (ou d'énergie acoustique lors que le haut-parleur émet un son) ou d'effet Joule.

On suppose désormais un régime sinusoïdal forcé de pulsation ω de toutes les grandeurs précédentes. On peut écrire les équations (M') et (E') qui relient les représentations complexes de v, i, F et E sous la forme :

$$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = -B\ell i + F \qquad donne \qquad \underline{\xi}\,\underline{v} = -B\ell\,\underline{i} + \underline{F} \qquad \text{(M')}$$

Et :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = B\ell v + E \qquad donne \qquad \underline{z}\,\underline{i} = B\ell\underline{v} + \underline{E} \qquad \text{(E')}$$

où l'on a introduit dans une notation complexe en exp(j ωt) les grandeurs :

$$\underline{z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \qquad et \qquad \underline{\xi} = h + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)$$

$\underline{z}$ est l'impédance complexe du dipôle (RLC) série et $\underline{\xi}$ est l'impédance mécanique du pavillon mobile (rapport entre la force de Laplace et la vitesse).

On se place dans le cas d'un fonctionnement en haut-parleur ; F est alors nulle, l'énergie du système provenant de la source de tension E.

La réponse du système est alors caractérisée par les relations $\underline{v}(\underline{i})$ et $\underline{i}(\underline{E})$; pour les obtenir, on écrit les équations (E') et (M') :

$$\underline{\xi}\,\underline{v} = -B\ell\,\underline{i} \qquad et \qquad \underline{z}\,\underline{i} = B\ell\,\underline{v} + E$$

D'où :

$$\underline{v} = -\frac{B\ell}{\underline{\xi}}\,\underline{i} \qquad et \qquad \underline{i} = \frac{\underline{E}}{\underline{z} + \underline{Z}}$$

en introduisant la quantité $\underline{Z} = \dfrac{B^2\ell^2}{\underline{\xi}}$: d'un point électrocinétique, tout se passe comme si, en raison du mouvement dans le champ magnétique, venait s'ajouter à $\underline{z}$ une impédance électrique supplémentaire $\underline{Z}$. Cette impédance, appelée impédance motionnelle, caractérise le couplage électromécanique réalisé par le montage.

Si la fréquence $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$ est comprise dans la gamme $[20\,Hz, 20\,kHz]$, les vibrations du pavillon engendrent une onde de pression acoustique qui produit un son audible.

Dans le fonctionnement en microphone, E est alors nulle, l'énergie du système provenant de la force sinusoïdale F qui traduit l'action sur (P) des forces de pression d'une onde sonore.

La réponse du système est alors caractérisé par la fonction $\underline{i}(\underline{F})$ que l'on explicite à l'aide des notations précédentes :

$$\underline{i} = \frac{B\ell}{\underline{\xi}(\underline{z} + \underline{Z})}\underline{F}$$

L'intensité est proportionnelle à la force appliquée : le signal électrique reçu est donc fidèle à la force et pourra être enregistré, traité et reproduit par un autre haut-parleur, …