Electrostatique : révisions de PCSI

Compléments

I) Electrostatique ; révisions de PCSI :

1 – Loi de Coulomb, calculs direct du champ et du potentiel :

$\boxed{dV = \overrightarrow{grad V} \cdot d\vec{l}}$ $\Rightarrow$ par identification, il vient : $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad V}}$ (2)

Rq : la relation (2) est vraie en tout point de l'espace, c'est en ce sens qu'elle est « locale » (son caractère « intrinsèque » vient du fait qu'elle est écrite sans référence aucune à un système de coordonnées particulier) ; la relation (1) en est la forme « intégrée » : dans la suite du cours de physique, nous retrouverons souvent cette dualité entre forme locale et forme intégrée d'un même théorème.

* Gradient d'une somme et d'un produit :

$$\overrightarrow{grad}\left[f(\vec{r}) + g(\vec{r})\right] = \overrightarrow{grad}\left[f(\vec{r})\right] + \overrightarrow{grad}\left[g(\vec{r})\right]$$

$$\overrightarrow{grad}\left[f(\vec{r}).g(\vec{r})\right] = g(\vec{r}).\overrightarrow{grad}\left[f(\vec{r})\right] + f(\vec{r}).\overrightarrow{grad}\left[g(\vec{r})\right]$$

* En tout point, le gradient du champ scalaire $f(\vec{r})$ est perpendiculaire à la surface de niveau (la surface iso-f) passant par ce point et il est dirigé suivant la direction de variation la plus rapide de $f(\vec{r})$, dans le sens des valeurs croissantes de $f(\vec{r})$.

Exemple en électrostatique : les lignes de champs sont perpendiculaires aux équipotentielles et le champ est dirigé vers les potentiels décroissants (car $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V(\vec{r}))$.

Des grandeurs vectorielles, dont le sens ne dépend pas d'une convention d'orientation des rotations dans l'espace, obéissent au principe de Curie ; ceci aura plusieurs conséquences que nous exposerons en prenant le champ électrostatique pour exemple :

- Soit (Π) = plan de **symétrie** d'une distribution ; si $P' = sym\{P\}/(\Pi)$, alors : $\boxed{\vec{E}(P') = sym\{\vec{E}(P)\}/(\Pi)}$

- Soit (Π) = plan d'**antisymétrie** d'une distribution ; si $P' = sym\{P\}/(\Pi)$, alors : $\boxed{\vec{E}(P') = -sym\{\vec{E}(P)\}/(\Pi)}$

- Soit (Π) un plan de **symétrie** de la distribution passant par le point M où l'on veut déterminer le champ électrostatique, alors : $\boxed{\vec{E}(M) \in (\Pi)}$

- Soit (Π) un plan d'**antisymétrie** de la distribution passant par le point M où l'on désire calculer le champ, alors : $\boxed{\vec{E}(M) \perp (\Pi)}$

Si M et M' sont symétriques relativement à un plan de symétrie positive des charges Π_+, alors $\mathbf{E}(M)$ et $\mathbf{E}(M')$ sont également des vecteurs symétriques par rapport à Π_+. En particulier, si $M \in \Pi_+$, alors $\mathbf{E}(M) /\!\!/ \Pi_+$.

Si M et M' sont symétriques relativement à un plan de symétrie négative des charges Π_-, alors $\mathbf{E}(M)$ et $-\mathbf{E}(M')$ sont également des vecteurs symétriques par rapport à Π_-. En particulier, si $M \in \Pi_-$, alors $\mathbf{E}(M) \perp \Pi_-$.

2 – Topographie du champ électrostatique, lignes de champs et surfaces équipotentielles :

Considérons deux points M et M' voisins et appartenant à une même surface équipotentielle ; on a alors : $V(M')-V(M)=dV=-\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$ (où $d\vec{l}=\overrightarrow{MM'}$) $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E}\perp d\vec{l}}$

En tout point M, la ligne de champ qui passe par M est donc **perpendiculaire** à l'équipotentielle passant par ce point.

3 – Le théorème de Gauss, équations locales de l'électrostatique :

On considère une surface **fermée** (S), limitant un volume (V), orientée vers **l'extérieur** et renfermant des charges; on montre que le flux du champ électrique créé par la distribution de charges à travers (S) peut se calculer par :

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

Ce théorème a été démontré en 1ère année ; on peut l'utiliser comme point de départ pour démontrer la relation de Green-Ostrogradsky et présenter l'interprétation locale de l'opérateur divergence.

On considère un volume élémentaire en coordonnées cartésiennes $d\tau$ = dxdydz. On montre que le flux élémentaire sortant de ce volume vaut :

$$d\Phi=\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)d\tau$$

Soit : (interprétation locale de la divergence)

$$\frac{d\Phi}{d\tau}=div\,\vec{E}$$

L'écriture locale du théorème de Gauss s'en déduit :

$$div\,\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Et on démontre ainsi le théorème de Green-Ostrogradsky : (valable finalement pour tout champ vectoriel)

$$d\Phi=div\,\vec{E}\,d\tau \quad soit \quad \oiint_{(S)} \vec{E}.\vec{n}\,dS=\iiint_{(V)} div\vec{E}\,d\tau$$

Rq2 : l'analogie formelle entre le champ de gravitation $\vec{g}$ et le champ électrique permet d'établir un « théorème de Gauss » pour la gravitation, soit :

$$\boxed{\oiint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{\text{int}}}$$

(où G est la constante universelle de la gravitation et m_{int} la masse contenue dans le volume V ; le signe « moins » vient du fait que 2 charges de même nature se repoussent alors que 2 masses de même signe s'attirent).

Grandeur électrostatique	Grandeur gravitationnelle
charge q	masse m
champ $\mathbf{E}$	champ $\mathbf{G}$
potentiel V avec $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\, V$	potentiel ϕ avec $\mathbf{G} = -\mathbf{grad}\, \phi$
constante $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	constante $-\mathcal{G}$
charge volumique ρ	masse volumique ρ
$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\operatorname{div} \mathbf{G} = -4\pi\mathcal{G}\rho$
$\oint_{P\in S} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$	$\oint_{P\in S} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} dS = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}}$
$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\Delta \phi = 4\pi\mathcal{G}\rho$

Equations locales :

- Dans le cadre de l'électrostatique (charges fixes), Maxwell a postulé les équations suivantes :

$$\boxed{div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \text{ (Maxwell-Gauss)} \quad \text{et :} \quad \boxed{\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}} \text{ (Maxwell-Faraday)}$$

- « *div* » est l'opérateur **divergence** et « $\overrightarrow{rot}$ » est l'opérateur **rotationnel** ; ils sont à connaître **uniquement** en coordonnées **cartésiennes**, soit :

$$\boxed{div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}} \quad \text{et :} \quad \boxed{\overrightarrow{rot}\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z}$$

Remarque sur les opérateurs :

Retour sur l'opérateur « gradient » :

$$\overrightarrow{grad}\, V = \vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z \qquad \text{(opérateur « nabla »)}$$

$$div\ \vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E}$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

On retrouve alors facilement les expressions des ces opérateurs mais en coordonnées cartésiennes uniquement ! (dans les autres systèmes de coordonnées, il faut soit utiliser un formulaire ou alors retrouver l'expression de ces opérateurs quand par exemple les symétries sont fortes et seule la distance r intervient).

En coordonnées cylindriques :

$$div\vec{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(rA_z)}{\partial z}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(A_z)}{\partial z}$$

Et en coordonnées sphériques :

$$div\vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial(r^2 \sin\theta A_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial \varphi}\right] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\ A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi}$$

* Divergence d'une somme et d'un produit :

$$div\left[\vec{V}(\vec{r}) + \vec{W}(\vec{r})\right] = div\left[\vec{V}(\vec{r})\right] + div\left[\vec{W}(\vec{r})\right]$$

$$div\left[f(\vec{r})\vec{V}(\vec{r})\right] = \overrightarrow{grad} f(\vec{r}).\vec{V}(\vec{r}) + f(\vec{r})div\left[\vec{V}(\vec{r})\right]$$

* Rotationnel d'une somme et d'un produit :

$$\overrightarrow{rot}\left[\vec{V}(\vec{r}) + \vec{W}(\vec{r})\right] = \overrightarrow{rot}\left[\vec{V}(\vec{r})\right] + \overrightarrow{rot}\left[\vec{W}(\vec{r})\right]$$

$$\overrightarrow{rot}\left[f(\vec{r})\vec{V}(\vec{r})\right] = \overrightarrow{grad} f(\vec{r}) \wedge \vec{V}(\vec{r}) + f(\vec{r})\overrightarrow{rot}\left[\vec{V}(\vec{r})\right]$$

$$div\left[\vec{V}(\vec{r}) \wedge \vec{W}(\vec{r})\right] = \overrightarrow{rot}\vec{V}(\vec{r}).\vec{W}(\vec{r}) - \vec{V}(\vec{r}).\overrightarrow{rot}\vec{W}(\vec{r})$$

(Voir le chapitre sur l'analyse vectorielle et un formulaire d'analyse vectorielle)

4 – Exemples de calculs de champs et de potentiels :

Voir TD.

5 – Relations de passage pour le champ :

• **Distribution volumique de charges :** $\vec{E}$ et V sont **continus** à la traversée de la surface délimitant la distribution.

• **Distribution surfacique de charges :** considérons une surface chargée (densité surfacique de charge $=\sigma$), séparant 2 milieux (1) et (2) ; soit $\vec{n}_{12}$ la normale locale à la surface, **orientée de (1) vers (2)**. Juste de part et d'autre de cette surface, on a la relation de passage :

$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$ (la composante **tangentielle** du champ est donc **continue** à la traversée).

Quant à lui, le potentiel V reste **continu** lors de cette traversée.

• **Distribution linéique de charges** : $\vec{E}$ et V **divergent** sur le « fil ».

6 – Equation de Poisson :

En utilisant l'opérateur nabla : $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. Par conséquent :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}V) = -(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla})(V) = \vec{0}$$

On sait également que : $div\ \vec{B} = \vec{\nabla}.\vec{B} = 0$, par conséquent, on peut définir un vecteur noté $\vec{A}$ (appelé potentiel vecteur) tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\ \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \qquad ; \qquad div\ \vec{B} = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{0}$$

Les relations d'analyse vectorielle permettent d'écrire :

- $\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0} \iff \exists V$ tel que: $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$
- $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \iff \iiint_V div\vec{E}\,d\tau = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \dfrac{\rho\, d\tau}{\varepsilon_0} = \dfrac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

(on retrouve le théorème de Gauss, après application du théorème de Green-Ostrogradski).

- $div\vec{E} = div(-\overrightarrow{grad}V) = -\Delta V = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ ou : $\boxed{\Delta V + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$ (= équation de Poisson)

Rq1 : « Δ » est l'opérateur **laplacien scalaire**, donné en coordonnées cartésiennes par :

$$\boxed{\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}$$

Il est encore noté : $\Delta = \vec{\nabla}^2$

Rq2 : la résolution de l'équation de Poisson est le potentiel coulombien, du type: $V = \iiint \dfrac{\rho d\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Rq3 : dans une région **vide de charge**, on a : $\boxed{\Delta V = 0}$ (équation de Laplace).

7 – Energie électrostatique :

a – Energie d'interaction de deux charges ponctuelles :

On considère 2 charges q_1 et q_2 distantes de r_{12} ; chaque charge ressent le potentiel créé par la deuxième). Par symétrie, on aura :

$$\boxed{E_{P1} = E_{P2} = E_P = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}}$$ (on parle d'énergie potentielle « **d'interaction** »)

b – Cas d'une distribution discrète de n charges ponctuelles :

- En notant r_{ij} la distance entre 2 charges quelconques q_i et q_j, il vient :

$$\boxed{E_P = \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}}$$

- On peut également écrire, en faisant attention à ne pas compter 2 fois le même terme d'énergie potentielle :

$$\boxed{E_P = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} q_i V_i}$$ avec : $$\boxed{V_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}}$$ (V_i est le potentiel ressenti par la charge q_i)

c – Energie électrostatique d'une sphère uniformément chargée :

On établit l'expression de l'énergie électrostatique d'une sphère de rayon a uniformément chargée en volume, de charge totale Q et de densité volumique de charges ρ.

On construit de manière réversible la sphère en amenant de l'infini la charge $dq = 4\pi r^2 \rho dr$, qui passe donc du potentiel nul au potentiel de la « sphère » en construction , de rayon r :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(r)}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{r} = \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0}$$

Le travail élémentaire qu'il faut fournir est alors :

$$\delta W = -\delta W_{élect} = dE_P = dq\left[V(r) - V(\infty)\right] = dqV(r) = 4\pi r^2\rho dr\,\frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0} = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}r^4 dr$$

On en déduit :

$$E_{él} = \int_0^a \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0}a^5 = \frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

On peut aussi généraliser la relation obtenue dans le cas de n charges ponctuelles :

$$E_{él} = \frac{1}{2}\iiint_{(espace)} \rho(M)V(M)d\tau$$

Ici, l'intégration se limite au volume de la sphère de rayon a. Avec :

$$\rho(M) = \rho = cste \qquad ; \qquad V(M) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3a^2 - r^2)$$

Alors :

$$E_{él} = \frac{1}{2}\int_0^a \rho\,\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3a^2 - r^2)\,4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0}a^5$$

On peut également utiliser la densité volumique d'énergie électrostatique :

$$E_{él} = \iiint_{(espace)} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left[\int_0^a\left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\right)^2 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty\left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr\right]$$

et on obtient là encore le même résultat.

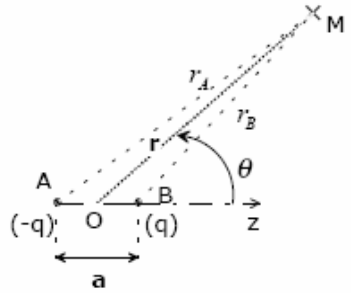
Par analogie, on en déduit l'énergie gravitationnelle d'une étoile (ou d'une planète) de masse M et de rayon a :

$$E_{grav} = -\frac{3}{5}GM^2\frac{1}{a}$$

II) Dipôle électrostatique :

1 – Définition, exemples :

- Un dipôle électrostatique est constitué de 2 charges ponctuelles immobiles de **signe opposé,** séparées par une distance **très inférieure** aux distances où l'on calculera le champ créé par ce dipôle pour déterminer l'interaction du dipôle avec d'autres charges éventuelles.
- Nous travaillerons en **coordonnées sphériques** et adopterons les notations suivantes :



On a la relation: $a \ll r$

On définit la grandeur: $\boxed{\vec{p} = q\overrightarrow{AB} = qa\vec{e}_z}$

="**moment dipolaire**" (en $C.m$)

• La notion de dipôle électrique est d'une grande importance, en particulier en chimie où l'étude des interactions entre molécules fera appel à cette notion. En réalité, les phénomènes sont plus complexes, car, en général , il y a plus de 2 charges mises en jeu : les points A et B correspondront alors aux **barycentres** des charges « moins » et des charges « plus ».

• Nous appellerons « **dipôle rigide** » un dipôle où les grandeurs a et q restent sensiblement constantes au cours de l'étude : ce sera le cas des molécules polaires ($\|\vec{p}\|$ est alors constant) par opposition aux molécules apolaires mais polarisables (on parlera alors de « dipôle induit »).

2 – Calcul du potentiel dans le cadre de l'approximation dipolaire :

$$\boxed{V(M) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\overrightarrow{OM}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

3 – Champ électrique du dipôle, topographie :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_r + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_\theta}$$

4 – Action d'un champ électrique extérieur, énergie potentielle d'interaction :

Rq : si le champ extérieur n'est **pas uniforme** (mais ne varie « pas trop » à l'échelle du dipôle), on montre que, dans le cadre de l'approximation dipolaire, le moment garde la même expression ($\vec{E}_{ext}$ étant une valeur « typique » du champ sur le dipôle, en O par exemple) et qu'il apparaît une résultante de force non nulle : $\boxed{\vec{F}_{ext} = (\vec{p}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{E}_{ext}}$

• Par sommation des énergies potentielles des 2 charges très proches l'une de l'autre, il vient :

$$\boxed{E_P = -\vec{p}\cdot\vec{E}_{ext}} \quad \text{(à une constante près)}$$

Rq : cette expression est valable même si le champ extérieur n'est pas uniforme.

Remarque sur la notion de dipôle : dans le cas d'une distribution de charges de **somme nulle**, le potentiel peut se mettre sous la forme d'un « **développement multipolaire** » :

$$V(r,\theta)=\frac{A(\theta)}{r^2}+\frac{B(\theta)}{r^3}+\frac{C(\theta)}{r^4}+\ldots$$

Le terme en $1/r^3$ est le terme **quadrupolaire** , le terme en $1/r^4$ est appelé « **octupolaire** » etc...(si la somme des charges n'était pas nulle, on aurait un terme en $1/r$ de type « **monopolaire** »). L'approximation consistant à assimiler des molécules polaires à de simples dipôles sera d'autant mieux vérifiée que le terme en $1/r^2$ sera **prépondérant**, donc que les molécules seront très éloignées les unes des autres, donc que la matière étudiée sera moins condensée.

Compléments :

Considérons le dipôle précédent placé cette fois dans un champ électrostatique quelconque, et proposons-nous tout d'abord de calculer la résultante **F** ; nous écrirons, avec des notations évidentes :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}(P) - \mathbf{E}(N))$$

soit, pour la composante F_x :

$$F_x = q(E_x(P) - E_x(N)) .$$

Désignons par x, y, z, les coordonnées du milieu O de NP, et par $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ les composantes de **NP** ; les coordonnées de P sont alors :

$$x + \Delta x/2 , \qquad y + \Delta y/2 , \qquad z + \Delta z/2$$

et celles de N :

$$x - \Delta x/2 , \qquad y - \Delta y/2 , \qquad z - \Delta z/2$$

de sorte que nous écrirons de façon plus explicite :

$$F_x = q(E_x(x + \Delta x/2, y + \Delta y/2, z + \Delta z/2) - \\ - E_x(x - \Delta x/2, y - \Delta y/2, z - \Delta z/2))$$

soit, en se limitant à un développement du premier ordre en $\Delta x, \Delta y, \Delta z$:

$$F_x = q\left(\Delta x \frac{\partial E_x}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial E_x}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)$$

que nous noterons de façon symbolique :

$$F_x = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{grad})\, E_x$$

où $\mathbf{p} \cdot \mathbf{grad}$ est l'opérateur qui a pour expression, en coordonnées cartésiennes :

$$p_x\, \partial/\partial x + p_y\, \partial/\partial y + p_z\, \partial/\partial z .$$

Cette notation « symbolique » nous permet d'exprimer **F** de façon intrinsèque :

$$\boxed{\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{E}} \ .$$

Cette expression est valable dans tous les cas, que le dipôle soit rigide ou non et on peut l'utiliser dans tous les systèmes de coordonnées ; il faut commencer par exprimer l'opérateur $\mathbf{p} \cdot \mathbf{grad}$ dans le système de coordonnées choisi, puis le faire agir sur **E** (c

Le calcul du moment peut se faire suivant la même méthode, mais le résultat est évident « à priori » : à un infiniment petit près, on doit pouvoir appliquer le résultat obtenu pour un champ uniforme, où la partie principale de Γ_0 n'était pas nulle ; nous écrirons donc :

$$\boxed{\Gamma_0 = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}} \ .$$

En résumé, dans un champ inhomogène (i.e. non uniforme), en plus du couple qui tend à orienter le dipôle suivant une ligne de champ (et qui constitue l'action mécanique principale), il s'exerce une force.

Dans le cas particulier où le dipôle est parallèle au champ et orienté dans le même sens que lui, cette force tend à attirer le dipôle vers les champs intenses ; si le dipôle est orienté en sens inverse, il sera au contraire attiré vers les champs faibles.

Attention : la force subie par un dipôle n'est pas « a priori » colinéaire à **E**.

On remarquera que du point de vue des actions mécaniques subies, un dipôle électrostatique est entièrement caractérisé par son moment **p**.

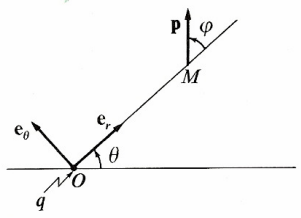
Un dipôle est donc entièrement caractérisé, tant du point de vue du champ qu'il crée, que des actions mécaniques qu'il subit, par son moment dipolaire **p**.

Exemple : force exercée par une charge sur un dipôle

Une charge ponctuelle Q est à l'origine O des coordonnées et crée un champ :

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \ .$$

Considérons alors un dipôle de moment **p** en un point M de l'espace, et proposons-nous de calculer la force exercée par la charge Q sur le dipôle. Pour ce faire, plaçons-nous dans le plan défini par O et **p**, et adoptons dans ce plan les coordonnées polaires (fig.). Soit φ l'angle que fait **p** avec **OM**, $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$



Action d'une charge sur un dipôle.

les vecteurs unitaires « tournants » habituels ; nous allons tout d'abord chercher l'expression de $\mathbf{p} \cdot \mathbf{grad}$:

$$\mathbf{p} = p \cos \varphi \, \mathbf{e}_r + p \sin \varphi \, \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{grad} = \mathbf{e}_r \, \partial/\partial r + \mathbf{e}_\theta \, \partial/r\theta \, .$$

L'expression générale de $\mathbf{F}$ s'écrit alors :

$$\mathbf{F} = p[\cos \varphi \, \partial/\partial r + (\sin \varphi/r) \, \partial/\partial\theta] \frac{Q}{4 \pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

soit finalement :

$$\mathbf{F} = \frac{Qp}{4 \pi\varepsilon_0 \, r^3} [- 2 \cos \varphi \, \mathbf{e}_r + \sin \varphi \, \mathbf{e}_\theta]$$

relation que nous aurions pu obtenir, sans doute plus facilement, en cherchant la force qu'exerce un dipôle sur une charge, puis en appliquant le principe de l'action et de la réaction.

Donnons ici, à titre documentaire, l'expression générale (intrinsèque) de la force qu'exerce un dipôle de moment $\mathbf{p}$ placé en un point M sur un autre dipôle de moment $\mathbf{p}'$ placé en un point M', avec $\mathbf{MM'} = \mathbf{r}$:

$$\mathbf{F} = - \frac{3}{4 \pi\varepsilon_0 \, r^5} \left[(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}') \, \mathbf{r} + (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}) \, \mathbf{p} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \, \mathbf{p}' - \frac{5(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \, (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r})}{r^2} \mathbf{r} \right]$$

5 – Quadripôle électrostatique :

Voir exercice

III) Equilibre électrostatique des conducteurs :

1 – Conducteur en équilibre électrostatique :

• Conducteur : c'est un corps à l'intérieur duquel des charges peuvent se déplacer sous l'action d'une force aussi petite soit-elle.

• Equilibre électrostatique : un conducteur sera à l'équilibre si, à l'échelle mésoscopique, les **charges sont fixes** (à l'échelle microscopique, ces charges pourront cependant avoir un mouvement désordonné).

2 – Propriétés des conducteurs en équilibre :

- $\boxed{\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}}$ (si le champ intérieur n'était pas nul, une force mettrait les charges en mouvement)
- $\boxed{V_{\text{int}} = cste}$ (relation obtenue en écrivant : $\vec{E}_{\text{int}} = -\overrightarrow{grad} V_{\text{int}}$)
- $\boxed{\rho_{\text{int}} = 0}$ (par application du théorème de Gauss à une sphère de rayon r→0, entourant un point hypothétique où ρ_{int} serait non nulle)

On peut également obtenir ce dernier résultat à partir de l'équation de MG, $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Localement, les charges des ions positifs sont compensées par les charges des électrons.

- Le champ électrostatique au voisinage extérieur d'un conducteur à l'équilibre lui est **NORMAL**

(la surface limitant le conducteur est une **équipotentielle** $\Rightarrow \vec{E}_{ext} \perp$ à la surface)

Rq : un conducteur à l'équilibre ne peut donc porter que des charges **surfaciques** (en fait, contenues à l'intérieur d'une couche de faible épaisseur).

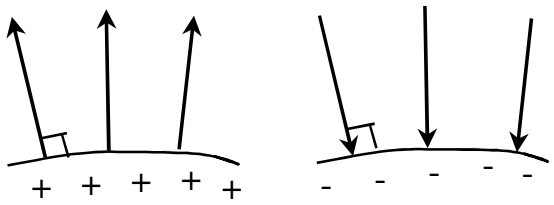
Cette épaisseur est de l'ordre de 0,1 nm dans le cas du cuivre. La densité superficielle de charges n'est en général pas uniforme : elle dépend de la forme du conducteur et des autres conducteurs et charges en présence.

3 – Théorème de Coulomb :

En appliquant la relation de passage et en tenant compte du fait que $\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$, on trouve pour le champ au voisinage extérieur d'un conducteur à l'équilibre :

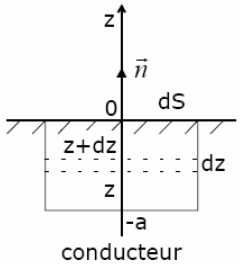
$\boxed{\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{ext}}$ (σ est la densité surfacique de charges et $\vec{n}_{ext}$ la normale orientée vers **l'extérieur**)

Sens des lignes de champ :



4 – Pression électrostatique :

Nous allons considérer un modèle de conducteur où les charges sont réparties sur une couche d'épaisseur a très faible ; sur cette couche, le champ électrostatique passe progressivement de la valeur nulle (intérieur d'un conducteur) à la valeur $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Raisonnons sur la figure ci-dessous :



Nous admettrons que dans la couche chargée:

$\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$

Par ailleurs, la charge contenue dans le cylindre droit de hauteur a et de base dS vaut:

$\delta q = \int_{-a}^{0} \rho(z) dS dz = \sigma dz$

Ce qui permet d'établir: $\boxed{\sigma = \int_{-a}^{0} \rho(z) dz}$

• Appliquons le théorème de Gauss au cylindre élémentaire de base dS et de hauteur dz . Le flux latéral est nul, et l'on remarque que $d\vec{S}(z) = -dS\vec{e}_z$ et $d\vec{S}(z+dz) = dS\vec{e}_z$; il vient alors :

$$[E(z+dz) - E(z)] \times dS = \frac{\delta q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho dS dz}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dE(z)}{dz} = \frac{\rho(z)}{\varepsilon_0}}$$

• La force électrostatique totale s'exerçant sur le cylindre de base dS et de hauteur a vaut alors :

$$d\vec{F}_E = \int_{cyl} \vec{E}(z)\delta q = \int_{-a}^{0} \vec{E}(z)\rho dSdz = \int_{-a}^{0} \vec{E}(z)\varepsilon_0 \times \frac{dE}{dz} \times dSdz = \varepsilon_0 dS\vec{n} \times \int_{E(-a)}^{E(0)} E(z)dE(z) = \frac{\varepsilon_0 dS\vec{n}}{2}[E^2(z)]_{-a}^{0}$$

$$\Rightarrow d\vec{F}_E = \frac{\sigma^2 dS}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$; on posera : $\boxed{p_E = \frac{d\vec{F}_E}{dS\vec{n}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$ = « **pression électrostatique** »

Rq : quel que soit le signe de σ, la force de pression électrostatique est dirigée vers **l'extérieur**, et tend donc à arracher les charges surfaciques.

Autre méthode de raisonnement :

On se place dans une modélisation surfacique. Une surface élémentaire dS du conducteur est soumise à la force :

$$d\vec{f} = (\sigma dS)\ \vec{E}_{ext}$$

où $\vec{E}_{ext}$ désigne le champ électrique créé par les autres charges du conducteur (et éventuellement d'autres contributions). Soit $\vec{E}_{propre}$ le champ dû aux charges portées par la surface dS, alors on a :

$$\vec{E}_{ext} + \vec{E}_{propre} = \vec{E}_{tot} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

Si on assimile la surface dS, localement, à un plan infini chargé σ, alors $\vec{E}_{propre} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$ et, par conséquent, $\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$. La force qui s'exerce alors sur dS devient :

$$d\vec{f} = (\sigma dS)\ \vec{E}_{ext} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS\ \vec{n}$$

D'où la pression électrostatique, $P_e = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$.

5 – Exemples de topographie de champs en présence de conducteurs, résolution du problème de Laplace :

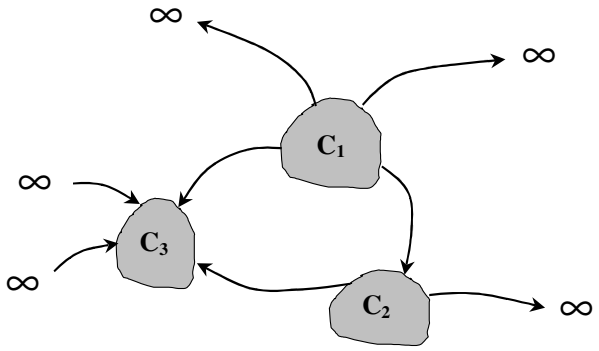
En présence de conducteurs placés dans le vide (problème de Laplace), le potentiel électrostatique V(M) vérifie :

- L'équation de Laplace en tout point : $\Delta V = 0$
- La valeur du potentiel est imposée sur les surfaces des conducteurs (à l'infini, la valeur du potentiel est choisie conventionnellement égale à 0)
- Il y a continuité du potentiel

La résolution de ce problème conduit à une solution unique qui permet d'en déduire toutes les autres données du problème, comme le champ électrique et les densités superficielles de charges des conducteurs par exemple.

Exemple : interprétation du sens des lignes de champ

On considère le système de trois conducteurs représenté sur la figure suivante. Le potentiel à l'infini est nul. Sans effectuer de calcul, préciser le signe des différents potentiels V_1, V_2 et V_3 et la relation d'ordre qui existe entre eux.



Réponses : $V_3 < 0$; $V_2 > 0$, $V_1 > 0$, $V_1 > V_2$ et $V_1 > V_3$.

Exemple : influence d'une charge ponctuelle q positive sur une sphère isolée neutre

Une boule métallique de rayon R est reliée à la Terre (son potentiel est donc nul). On place à une distance d du centre de la boule une charge ponctuelle $q > 0$.

a) Où se trouvent les charges et commenter leur signe.

b) En calculant le potentiel au centre de la boule, calculer la charge Q portée par cette dernière.

c) Tracer les lignes de champ.

d) La boule est désormais isolée et porte une charge totale nulle (la charge q est toujours présente). Quel est le potentiel de la boule ? Tracer les lignes de champ.

Réponses :

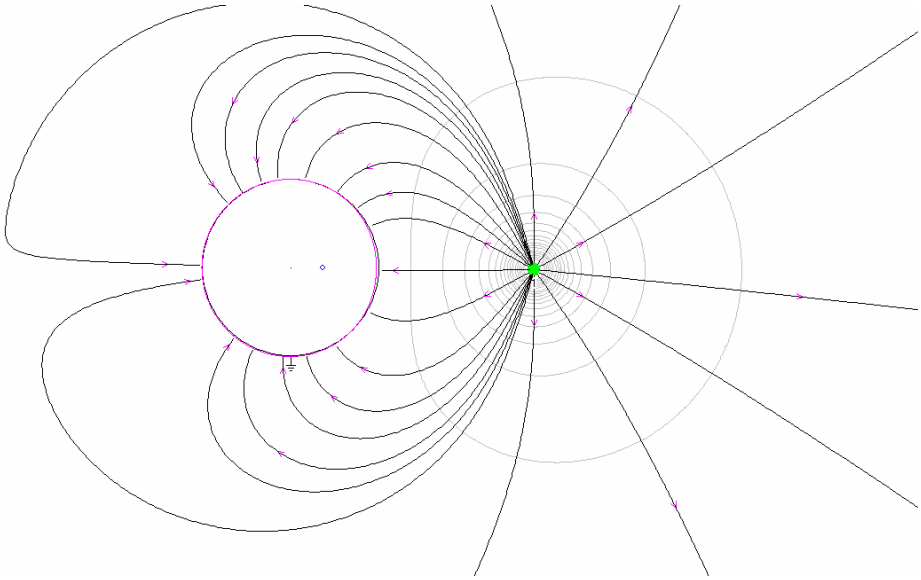
a) La boule acquiert une densité surfacique de charges ; des charges (venant de la Terre) négatives vont être attirées sur la boule. Le potentiel de la boule reste nul puisqu'elle est reliée à la Terre.

b) Le potentiel au centre de la boule est nul :

$$V(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d} = 0 \qquad soit \qquad Q = -\frac{R}{d}q$$

On remarque bien que $Q < 0$.

c) L'allure des lignes de champ est obtenue à partir du logiciel « Equipotential » :

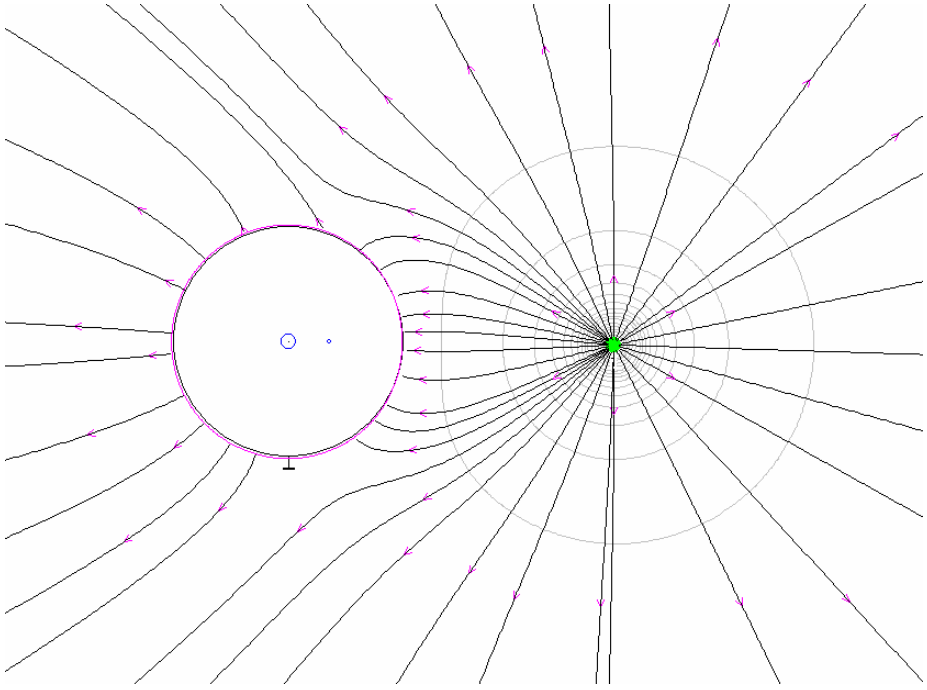


Comme l'infini et la boule sont au même potentiel nul, aucune ligne de champ ne peut partir de l'un pour aller à l'autre.

Les lignes de champ partent donc de la charge q pour aller soit à l'infini soit sur la boule.

d) La boule étant isolée, sa charge reste nulle ; des charges positives se déplacent vers la droite et des charges négatives vers la gauche.

L'allure des lignes de champ est :



Son potentiel vaut :

$$V(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{0}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d}$$

Autre exemple ; sphère métallique neutre plongé dans un champ uniforme :

Une sphère métallique (S) neutre, de centre O et de rayon a, est plongée dans un champ électrique uniforme $\vec{E}_0 = E_0\vec{u}_z$. Déterminer l'expression de la densité superficielle de charges sur la sphère et donner la topographie du champ total.

Réponse :

On remplace la sphère de potentiel uniforme par un dipôle électrostatique de moment dipolaire $\vec{p} = p\vec{u}_z$ placé en O mais on laisse le champ uniforme. Il faut montrer qu'il existe une surface équipotentielle sphérique de centre O, de potentiel uniforme ; si c'est le cas, on imposera que son rayon est a. Alors, à l'extérieur de la sphère, pour les systèmes sphère-champ uniforme et dipôle-champ uniforme, le potentiel vérifiera l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ et les même conditions aux limites : à l'infini, champ uniforme égal à $\vec{E}_0 = E_0\vec{u}_z$ et sur la sphère S(O,a), potentiel uniforme (en plus, Q = 0 ; par unicité, la fonction potentiel sera la même dans les deux cas.

Dans le cas du dipôle, le potentiel total est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} - E_0 r\cos\theta$$

Le potentiel est effectivement constant sur la sphère de rayon R tel que :

$$R = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 E_0}\right)^{1/3}$$

En imposant R = a, le moment dipolaire p est connu : $\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 E_0 a^3\vec{u}_z$.

Le potentiel total est alors :

$$V(M) = E_0\left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right)r\cos\theta$$

Et le champ :

$$\vec{E}(M) = E_0\left[\left(\frac{2a^3}{r^3} + 1\right)\cos\theta\,\vec{u}_r + \left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right)\sin\theta\,\vec{u}_\theta\right]$$

On vérifie bien que le champ est bien normal à la sphère quand r est proche de a.

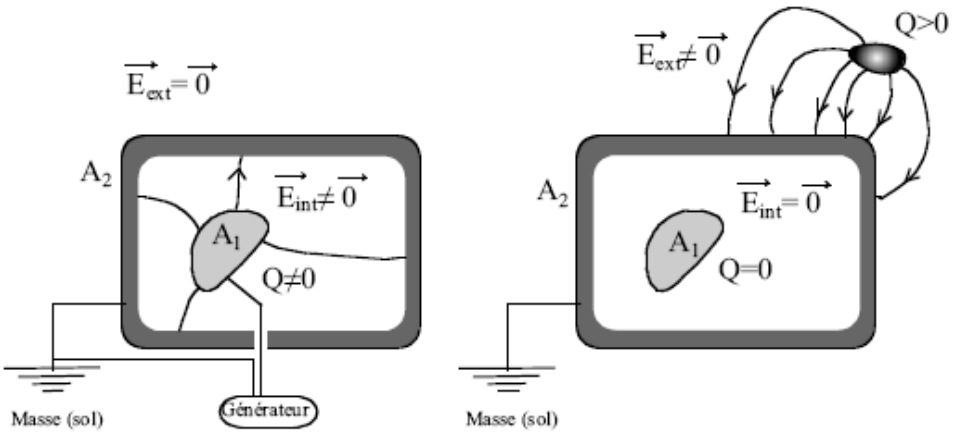
Le théorème de Coulomb donne la densité superficielle :

$$\vec{E}(a,\theta) = 3E_0\cos\theta\,\vec{u}_r = \frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}\vec{u}_r \qquad \textit{soit} \qquad \sigma(\theta) = 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta$$

Notion d'écran ou de blindage électrostatique : la cage de Faraday

Un conducteur à l'équilibre a un champ nul : de ce fait, s'il possède une cavité, celle-ci se trouve automatiquement isolée (du point de vue électrostatique) du monde extérieur. On définit par écran électrostatique parfait tout conducteur creux maintenu à un potentiel constant.

Lorsqu'on relie (A2) au sol, on a $Q_2^{ext} = 0$ (les charges s'écoulent vers la Terre ou proviennent de celle-ci). Dans ce cas, le champ électrostatique mesuré à l'extérieur de (A2) est nul, malgré la présence de (A1) chargé à l'intérieur de (A2). Ainsi, l'espace extérieur à (A2) est protégé de toute influence électrostatique provenant de la cavité. L'inverse est également vrai.



Prenons maintenant le cas où (A1) porte une charge nulle et où (A2) est placé à proximité d'autres conducteurs chargés. A l'équilibre, on aura $Q_2^{int} = 0$ mais un champ électrostatique non nul mesuré à l'extérieur de (A2), dépendant de la distribution surfacique externe de (A2). Ainsi, malgré la charge portée par la surface extérieure de (A2), la cavité interne possède un champ électrostatique nul. Nous voyons donc que le champ électrostatique régnant à l'intérieur de (A2) est parfaitement indépendant de celui à l'extérieur. Noter que ceci reste vrai même si (A2) n'est pas maintenu à potentiel constant.

Une combinaison linéaire de ces deux situations permettant de décrire tous les cas possibles, nous venons de démontrer que tout conducteur creux maintenu à potentiel constant constitue bien un écran électrostatique dans les deux sens. Un tel dispositif est appelé *cage de Faraday*.

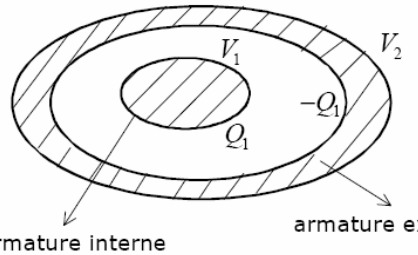
Alors que la *distribution* des charges Q_2^{int} dépend de la position de (A1), celle des charges Q_2^{ext} portées par la surface externe de (A2) dépend, elle, uniquement de ce qui se passe à l'extérieur.

Applications :

1. Protection contre la foudre : un paratonnerre est en général complété par un réseau de câbles entourant l'édifice à protéger, reliés à la Terre.
2. Tout conducteur transportant un courant faible est entouré d'une gaine métallique (appelée blindage) reliée au sol. Cette gaine est parfois simplement le châssis de l'appareil.

6 – Etude des condensateurs :

a – Définitions :

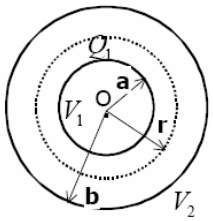


On appelle **condensateur** un système de 2 conducteurs, dont l'un est creux et entoure complètement l'autre.
L'espace séparant les 2 armatures peut être vide ou rempli d'un isolant ("diélectrique").
Les faces en regard portent des charges opposées.

On pose : $\boxed{Q_1 = C(V_1 - V_2)}$ où C est la **capacité** du condensateur en Farad (F) (C>0)

b – Exemples de condensateurs, calculs de capacités :

• **Condensateur sphérique :**



Les symétries et les invariances donnent:

$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

Le théorème de Gauss appliqué à une sphère de centre O, de rayon r conduit à:

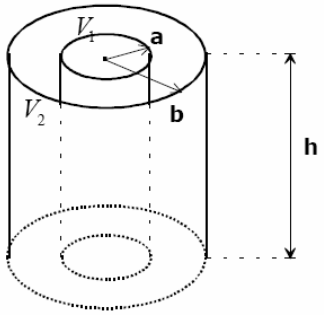
$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

La méthode est alors générale : on fait **circuler** le champ d'une armature à l'autre. D'où :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad V} \Rightarrow E_r = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\times\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\times\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

Or : $Q_1 = C(V_1 - V_2) \Rightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 \times \frac{ab}{b-a}}$ (1)

• **Condensateur cylindrique :**



On considère 2 cylindres illimités et coaxiaux.
On cherche la capacité d'un tronçon de hauteur h.
Les symétries et les invariances nous donnent:

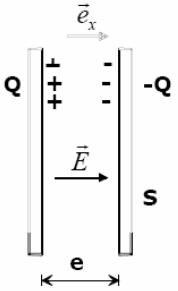
$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ (r=distance à l'axe)

On applique le théorème de Gauss à un cylindre de rayon r (a ≤ r ≤ b) et de hauteur h, en remarquant que le flux à travers les surfaces de base sera nul ($\vec{E} \perp d\vec{S}$) et que sur la surface latérale, $\vec{E}$ et $d\vec{S}$ sont colinéaires ; enfin, on se servira du fait que le module de $\vec{E}$ est constant sur cette même surface latérale, ce qui conduit à :

$$\oiint_{cyl} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{s.lat} E(r)\times dS = E(r)2\pi rh = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 hr}\vec{e}_r$$

Circulation entre les 2 armatures : $V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\times Ln(b/a) \Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{Ln(b/a)}}$ (2)

• **Condensateur plan :**



On considère que: $e \ll \sqrt{S}$

En négligeant les "effets de bord", les invariances et les symétries permettent d'écrire:

$\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$

Appliquons l'équation de Laplace entre les armatures (vide de charges) ; il vient :

$\Delta V = 0 = \frac{d^2V(x)}{dx^2}$ (puisque les grandeurs sont invariantes par translation selon x et y) ;or :

$\vec{E} = -\overrightarrow{gradV} \Rightarrow E_x = -\frac{dV}{dx} = cste$; on détermine la constante sachant que le champ à la surface des armatures vaut : $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$

La circulation du champ permet d'obtenir : $V_1 - V_2 = E \times e = \frac{Q \times e}{\varepsilon_0 S} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$

Rq1 : la formule ci-dessus est à retenir ; si, entre les armatures, il y a un diélectrique (isolant) de permittivité relative ε_r, la formule devient : $\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{e}}$ (ε_r étant supérieure à 1, on a ainsi la possibilité d'augmenter la capacité du condensateur ; pour de fortes valeurs de C, il faut que e soit la plus petite possible : pour $V_1 - V_2$ fixée, le module du champ va augmenter ainsi que les forces qui s'exercent sur les charges liées du diélectrique ⇒ il faudra veiller à ce que ce dernier ne « claque » pas, c'est-à-dire qu'il reste isolant).

Rq2 : lorsque la distance qui sépare les armatures est **faible** devant les dimensions du condensateur, on peut poser : b=a+e, avec $e/a \ll 1$; on peut alors développer les expressions (1) et (2) au premier ordre en e/a, soit :

- (1) : posons $R = a + e/2 = b - e/2$ (R= rayon « moyen » du condensateur sphérique) ⇒ $C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{(R - e/2)(R + e/2)}{e} \Rightarrow \boxed{C \simeq \frac{\varepsilon_0 \times 4\pi R^2}{e}}$ ⇒ on retrouve la **formule du condensateur plan** avec : $S = 4\pi R^2$.

- (2) : $\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{Ln(1 + e/a)} \simeq \frac{\varepsilon_0 \times 2\pi ah}{e}}$ ⇒ on retrouve la même formule avec : $S = 2\pi ah$

c – Aspect énergétique, exemple du condensateur plan :

- En électrocinétique, nous avons vu que l'énergie emmagasinée par un condensateur était de la forme : $W_C = \frac{1}{2} C U^2$, où U est la tension aux bornes du condensateur.

- Pour un condensateur plan, nous avons noté que : $V_1 - V_2 = U = E \times e$ et: $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$; alors :

$W_C = \frac{1}{2} \times \frac{\varepsilon_0 S}{e} \times E^2 e^2 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \times eS$; eS représente le **volume** délimité par les armatures ⇒

la **densité volumique d'énergie électrostatique** s'écrit : $\boxed{w_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}}$ (en $J.m^{-3}$)

- On admettra la **validité générale** de cette expression, même lorsque le régime sera non permanent ; en régime variable, les phénomènes magnétiques seront liés aux phénomènes électriques, il faudra alors tenir compte de la densité volumique d'énergie magnétique.

Exercice d'application ; force exercée entre les deux armatures d'un condensateur plan :

Soit un condensateur composé de deux armatures planes, de surface S et séparées d'une distance L et soumis à la tension U. On néglige les effets de bord. On note $Q = \sigma S$.

Calculer la force $\vec{F}_{b\to h}$ exercée par l'armature du bas (chargée +) sur celle du haut (chargée -) .

Réponse :

Calcul direct :

La force $\vec{F}_{b\to h}$ vaut :

$$\vec{F}_{b\to h} = (-\sigma S)\,\vec{E}_{bas}$$

où $\vec{E}_{bas}$ désigne le champ créé par l'armature du bas. Il vaut :

$$\vec{E}_{bas} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$$

Et ainsi :

$$\vec{F}_{b\to h} = -\frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$$

Avec $Q = \sigma S = CU = \frac{\varepsilon_0 S}{L}U$:

$$\vec{F}_{b\to h} = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2L^2}\vec{u}_z$$

Cette force est attractive : les deux armatures, de charges opposées, s'attirent.

Utilisation de la pression électrostatique :

On a alors, directement :

$$\vec{F}_{b\to h} = P_{él} S(-\vec{u}_z) = -\frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$$

Si, maintenant, on écarte lentement l'armature du haut vers le haut par exemple, le travail de la force d'attraction (résistant) est compensé par l'opérateur. Le travail de celui-ci vaut :

$$\delta W_{op} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}dL \qquad et \qquad W_{op} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}(L_2 - L_1) = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1}$$

L'opérateur a contribué à augmenter l'énergie électrostatique du condensateur, dont on retrouve l'expression habituelle, $E_{él} = \frac{Q^2}{2C}$.

Exercice d'application ; détermination de la capacité d'un condensateur sphérique à partir de la densité d'énergie électrostatique :

Déterminer l'énergie stockée entre les armatures d'un condensateur sphérique en fonction de la charge Q portée par l'armature intérieure. Retrouver l'expression de la capacité du condensateur à partir de la relation $E_{él} = \frac{Q^2}{2C}$.

Réponse :

On rappelle que : $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{u}_r$ entre les deux armatures. L'énergie est alors :

$$E_{él} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon_0 (\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2})^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad \text{d'où} \quad C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Formulaire d'électrostatique

Champ électrostatique

Créé par une particule:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

Créé par n charges ponctuelles:

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u_i}$$

Créé par une distribution continue:

$$\vec{E}(M) = \int \overrightarrow{dE}(M) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}$$

Distributions de charges :

linéique : $dq = \lambda\ dl$

surfacique : $dq = \sigma\ d^2S$

volumique : $dq = \rho\ d^3V$

Potentiel électrostatique

Créé par une charge ponctuelle

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + V_0$$

Créé par n charges ponctuelles

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i} + V_0$$

Créé par une distribution continue

$$V(M) = \int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} + V_0$$

Conducteurs en équilibre

Champ à proximité (Th de Coulomb) :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

Capacité d'un conducteur isolé :

$$C = \frac{Q}{V} \quad \text{où} \quad Q = \iint_{\text{Surface}}\sigma\ d^2S$$

Coefficients d'influence (n conducteurs) :

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}V_j \quad \text{avec} \quad C_{ij} = C_{ji}$$

Capacité d'un condensateur

$$C = \frac{Q}{U} \quad \text{où} \quad U = V_1 - V_2$$

Propriétés fondamentales

Flux (Th. de Gauss) :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Circulation :

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} \qquad \left(\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V\right)$$

Energie potentielle électrostatique

D'une charge ponctuelle :

$$W_e = qV$$

D'un conducteur isolé :

$$W_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$$

D'un système de n conducteurs :

$$W_e = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}Q_iV_i$$

Force électrostatique

Sur une particule chargée (Coulomb)

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Sur un conducteur en équilibre

$$\vec{F} = \iint_S \overrightarrow{d^2F} = \iint_S \sigma\overrightarrow{E_{ext}}\,d^2S = \iint_S P d^2S\vec{n}$$

Expression via l'énergie (condensateur)

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ W_e \left(= \frac{U^2}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\ C\right)$$

Dipôle électrostatique

Moment dipolaire électrique :

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

Potentiel à grande distance :

$$V(M) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{u_\rho}}{4\pi\varepsilon_0\rho^2}$$

Energie électrostatique

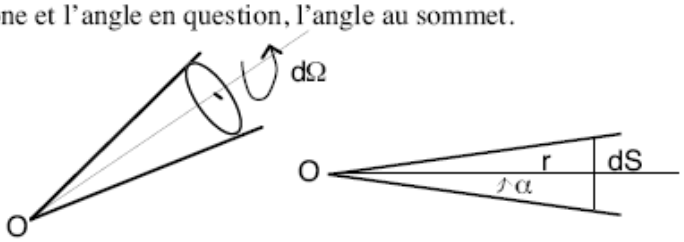
$$W_e = -\vec{p}\cdot\overrightarrow{E_{ext}}$$

Force et moment électrostatiques

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}\left(\vec{p}\cdot\overrightarrow{E_{ext}}\right) \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = \vec{p}\wedge\overrightarrow{E_{ext}}$$

Annexe : angle solide

La notion d'angle solide est l'extension naturelle dans l'espace de l'angle défini dans un plan. Par exemple, le cône de lumière construit par l'ensemble des rayons lumineux issus d'une lampe torche est entièrement décrit par la donnée de deux grandeurs : la direction (une droite) et l'angle maximal d'ouverture des rayons autour de cette droite. On appelle cette droite la génératrice du cône et l'angle en question, l'angle au sommet.



Définition : l'angle solide élémentaire dΩ, délimité par un cône coupant un élément de surface élémentaire dS située à une distance r de son sommet O vaut

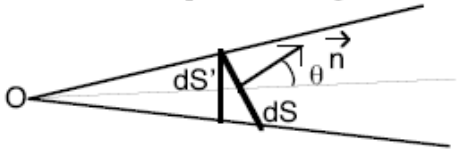
$$\boxed{d\Omega = \frac{dS}{r^2}}$$

Cet angle solide est toujours positif et indépendant de la distance r. Son unité est le « stéradian » (symbole sr).

En coordonnées sphériques, la surface élémentaire à r constant vaut $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. L'angle solide élémentaire s'écrit alors $d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$. Ainsi, l'angle solide délimité par un cône de révolution, d'angle au sommet α vaut

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta \, d\theta = 2\pi(1 - \cos\alpha)$$

Le demi-espace, engendré avec $\alpha=\pi/2$ (radians), correspond donc à un angle solide de 2π stéradians, tandis que l'espace entier correspond à un angle solide de 4π ($\alpha=\pi$).



D'une façon générale, le cône (ou le faisceau lumineux de l'exemple ci-dessus) peut intercepter une surface quelconque, dont la normale $\vec{n}$ fait un angle θ avec la génératrice de vecteur directeur $\vec{u}$. L'angle solide élémentaire est alors défini par

$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{dS} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS\,\vec{n} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{dS'}{r^2}$$

où dS' est la surface effective (qui, par exemple, serait « vue » par un observateur situé en O).