

Systèmes de coordonnées

11.1 Les systèmes de coordonnées

11.1.1 Repérage géométrique d'un point

□ *Nécessité du repérage* : la Thermodynamique est apparue pour l'étude des machines thermiques (les machines à vapeur), qui sont caractérisées par des *écoulements* de fluides et par leurs conséquences, les *transports de grandeurs extensives* : énergie, quantité de mouvement, etc. La description de ces phénomènes sera l'occasion de rappeler l'existence des *systèmes de coordonnées* classiques (cartésien, cylindro-polaire, sphérique) pour le repérage d'un point de l'espace.

Naturellement, la nécessité d'un tel repérage est tout aussi évidente dans d'autres domaines de la Physique, que nous aborderons ultérieurement, comme la Mécanique ou l'Électromagnétisme. Les résultats établis ici seront donc utiles dans toute la suite.

□ *Repérage dans l'espace physique* : nous supposerons que l'espace physique est euclidien ; on peut ainsi définir distances et angles entre directions. Pour l'unicité des définitions d'angles, on munira systématiquement cet espace d'une *base orthonormée directe* notée $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, associée au *système d'axes rigide* (Ox) , (Oy) , (Oz) .

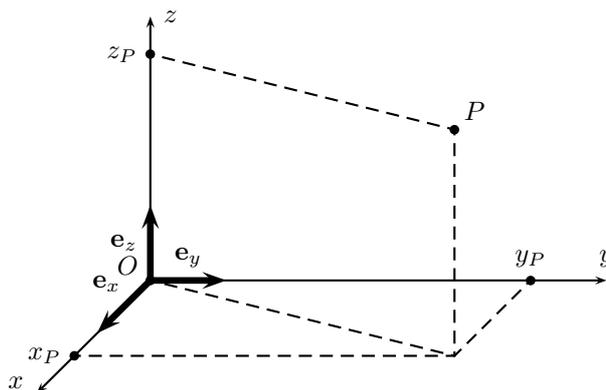


Figure 11.1 – Repérage d'un point P dans l'espace euclidien

Le repérage spatial d'un point P de l'espace relativement à l'origine O choisie, comme on le voit sur le schéma de la figure 11.1, par l'abaissement de trois perpendiculaires

et les mesures des abscisses x_P , y_P et z_P de leurs intersections avec les axes.

11.1.2 Le système de coordonnées cartésien

□ *Définition* : on appelle repérage cartésien le repérage d'un point P de l'espace par les trois composantes ($s_1 = x_P, s_2 = y_P, s_3 = z_P$). Ce repérage est associé aux expressions du vecteur position et de sa variation élémentaire :

$$\mathbf{OP} = \mathbf{r} = x_P \mathbf{e}_x + y_P \mathbf{e}_y + z_P \mathbf{e}_z \quad d\mathbf{r} = dx_P \mathbf{e}_x + dy_P \mathbf{e}_y + dz_P \mathbf{e}_z \quad (11.1)$$

Le déplacement élémentaire $d\mathbf{r}$, calculé ici et dans toute la suite, suppose implicitement que les vecteurs de base \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y et \mathbf{e}_z sont constants lors du calcul de la différentielle ; nous reviendrons sur ce point dans le cours de Mécanique et définirons à cette occasion les notions de différentielle et dérivée dans un référentiel.

□ *Généralisation* : on choisira d'utiliser la notation générale :

$$d\mathbf{r} = \sum_{\text{PC}} \mu_i ds_i \mathbf{e}_i \quad (11.2)$$

dans laquelle \sum_{PC} désigne une somme par permutation circulaire des indices 1, 2 et 3, tandis que dans ce cas $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ est une caractéristique du système cartésien (et de lui seul) ; cette expression définit aussi une *base locale* $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$. Plus généralement, on parlera de *système de coordonnées orthogonal* pour tout repérage bijectif d'un point P de l'espace euclidien par trois coordonnées (s_1, s_2, s_3) vérifiant une relation du type (11.2), avec les \mathbf{e}_i formant une base orthonormée directe.

Dans la relation (11.2), on peut interpréter le vecteur unitaire \mathbf{e}_1 comme la direction du déplacement du point P lorsque la variable s_1 croît seule (à condition de choisir des multiplicateurs μ_1, μ_2 et μ_3 tous positifs).

La figure 11.2 illustre ces trois déplacements élémentaires orthogonaux, et les surfaces élémentaires associées, $d\mathcal{A}_1 = \mu_2 \mu_3 ds_2 ds_3$, $d\mathcal{A}_2 = \mu_3 \mu_1 ds_3 ds_1$ et $d\mathcal{A}_3 = \mu_1 \mu_2 ds_1 ds_2$; le volume élémentaire s'écrit enfin $d\tau = \mu_1 \mu_2 \mu_3 ds_1 ds_2 ds_3$.

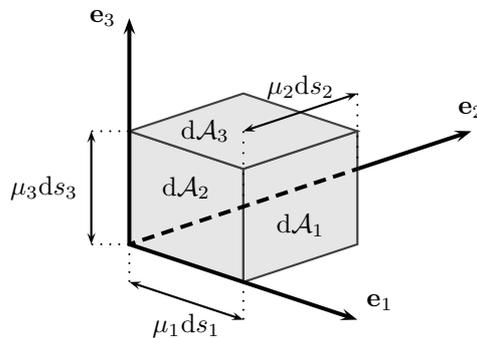


Figure 11.2 – Déplacement élémentaire dans un système de coordonnées orthogonal

On remarquera que les notations ont été choisies de sorte que les surfaces élémentaires d'aire $d\mathcal{A}_i$ (avec $i = 1, 2, 3$) aient pour normales les vecteurs $\pm \mathbf{e}_i$.

11.1.3 Le système de coordonnées cylindro-polaire

□ *Définitions* : de repérage du point mobile P peut se faire, après le choix d'un axe particularisé (Oz), en remplaçant les coordonnées cartésiennes (x_P, y_P) par les coordonnées polaires (ρ, φ) de la projection P' de P sur le plan (Oxy) . La figure 11.3 montre ces coordonnées dans le cas de deux points P_1 et P_2 différents.

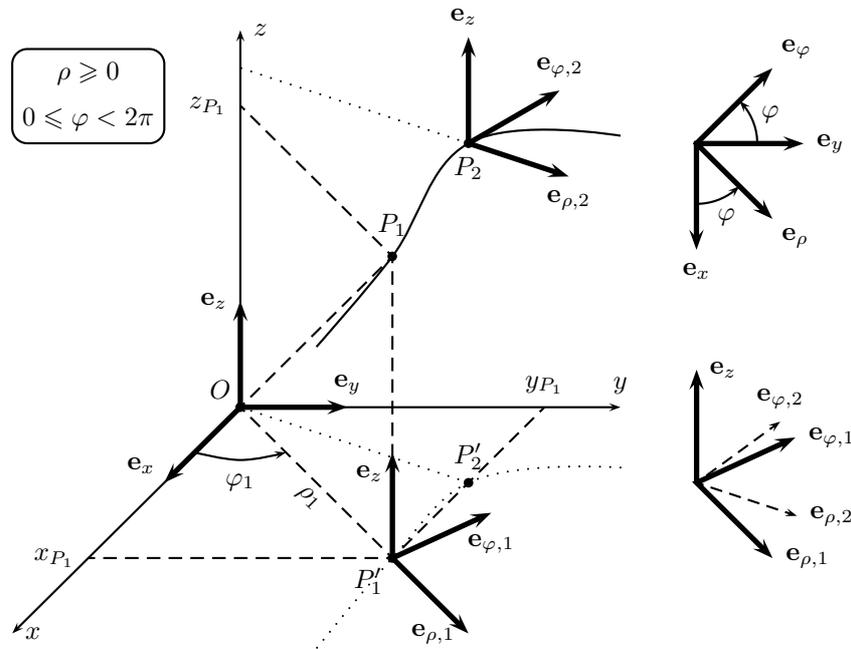


Figure 11.3 – Coordonnées cylindro-polaires

On peut alors écrire $\mathbf{OP} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z$, à condition de définir le vecteur unitaire \mathbf{e}_ρ de la direction \mathbf{OP}' , soit $\mathbf{e}_\rho = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y$. Comme le montre la figure 11.3, le déplacement du point P de P_1 à P_2 se traduit par une modification du vecteur \mathbf{e}_ρ (et du vecteur \mathbf{e}_φ défini plus bas) : on a ainsi formé une *base locale*.

On utilise souvent les notations (r, θ) à la place de (ρ, φ) pour les coordonnées cylindro-polaires ; nous verrons cependant que ces notations engendrent un risque de confusion avec les coordonnées sphériques, proposées plus loin.

□ *Déplacement élémentaire* : le déplacement élémentaire $d\mathbf{r}$ s'obtient en calculant $d\mathbf{r} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\mathbf{e}_\rho + dz \mathbf{e}_z$; l'expression ci-dessus du vecteur \mathbf{e}_ρ fournit immédiatement $d\mathbf{e}_\rho = -\sin \varphi d\varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi d\varphi \mathbf{e}_y$, vecteur unitaire directement orthogonal à \mathbf{e}_ρ dans le plan (Oxy) . On a alors :

$$d\mathbf{r} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi + dz \mathbf{e}_z \quad (11.3)$$

Ainsi, les multiplicateurs dans le système de coordonnées cylindro-polaires sont donnés par $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \rho$ et $\mu_3 = 1$.

□ *Calculs en coordonnées cylindro-polaires* : ce système est particulièrement adapté à la description de dispositifs circulaires, cylindriques, hélicoïdaux, etc. La figure 11.4 montre un exemple d'application de ce système de coordonnées.

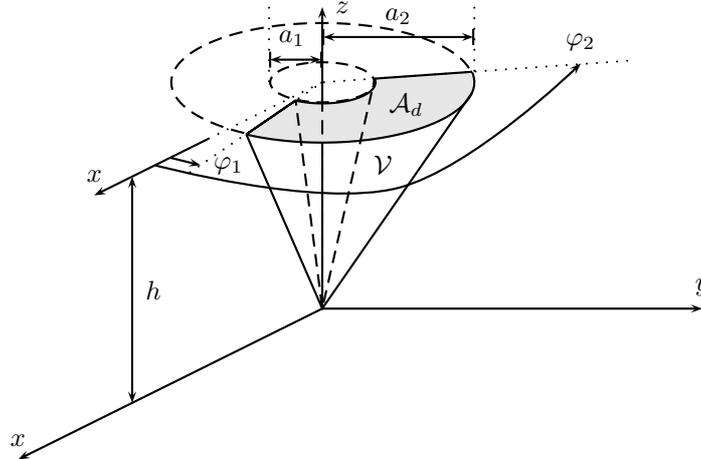


Figure 11.4 – Application des coordonnées cylindro-polaires

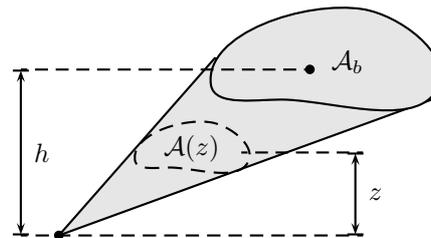
Ainsi, le calcul de l'aire définie par les conditions $a_1 \leq \rho \leq a_2$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ à z constant (aire de la portion de disque grisée sur la figure) se fait en écrivant le déplacement élémentaire $d\mathbf{r} = d\rho\mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi\mathbf{e}_\varphi$ (puisque $dz = 0$) et l'élément d'aire correspondant est $dA = \rho d\rho d\varphi$, soit une aire $\mathcal{A}_d = \int_{\rho=a_1}^{a_2} \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \rho d\rho d\varphi = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} (a_2^2 - a_1^2)$. On retrouve bien sûr l'aire πa_2^2 du disque entier si $a_1 = 0$ et $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$.

On peut encore calculer de même le volume du cône de sommet O , de hauteur h et de base \mathcal{A}_d , en écrivant le déplacement élémentaire ici arbitraire $d\mathbf{r} = d\rho\mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi\mathbf{e}_\varphi + dz\mathbf{e}_z$ donc le volume élémentaire $d\tau = \rho d\rho d\varphi dz$; les bornes de variation en ρ dépendent ici de z et s'écrivent sous la forme $\rho_1(z) \leq \rho \leq \rho_2(z)$ ou la géométrie du cône impose $\frac{\rho_1(z)}{a_1} = \frac{\rho_2(z)}{a_2} = \frac{z}{h}$; on a donc $\mathcal{V} = \int_{z=0}^h \int_{\rho=\rho_1(z)}^{\rho_2(z)} \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \rho d\rho d\varphi dz$.

Les intégrales en ρ et φ sont identiques à celles qui précèdent et on peut les calculer d'abord pour écrire $\mathcal{V} = \int_{z=0}^h \mathcal{A}(z) dz$ avec $\mathcal{A}(z) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} (\rho_2(z)^2 - \rho_1(z)^2)$, ce qui revient à considérer le volume \mathcal{V} comme un empilement de portions de disque, d'aires $\mathcal{A}(z)$ et de hauteur dz .

Écrivant alors $\mathcal{A}(z) = \mathcal{A}_d \frac{z^2}{h^2}$, l'intégrale se réduit à $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_d}{h^2} \int_0^h z^2 dz$ et on en déduit $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_d h}{3}$. En particulier, dans le cas du cône complet (avec $\mathcal{A}_d = \pi a_2^2$), on retrouve le résultat classique du volume d'un cône circulaire droit, $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \pi a_2^2 h$.

Plus généralement, le volume d'un cône (cf. ci-contre) construit sur la base d'une surface quelconque \mathcal{A}_b , sur une hauteur h mesurée perpendiculairement à \mathcal{A}_b se calcule par l'intégrale $\mathcal{V} = \int_{z=0}^h \mathcal{A}(z) dz$, où l'aire $\mathcal{A}(z)$ vérifie $\frac{\mathcal{A}(z)}{\mathcal{A}_b} = \frac{z^2}{h^2}$, soit ici encore $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_b h$.



Signalons aussi, parmi les autres résultats classiques qu'il vaut mieux connaître, l'aire latérale d'un cylindre (défini par $\rho = a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et $0 \leq z \leq h$), dont la valeur est

$$\mathcal{A}_c = \int_{\varphi=0}^{2\pi} a d\varphi \int_0^h dz = 2\pi ah, \text{ et le volume intérieur à ce cylindre (avec } 0 \leq \rho \leq a,$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq z \leq h), \text{ dont la valeur est } \mathcal{V}_c = \int_0^a \rho d\rho \int_{\varphi=0}^{2\pi} a d\varphi \int_0^h dz = \pi a^2 h.$$

11.1.4 Le système de coordonnées sphérique

□ *Définition* : On remplace encore les coordonnées (ρ, z) du point P dans le plan OPP' par un deuxième passage en coordonnées polaires (r, θ) pour obtenir les coordonnées sphériques, comme le montre la figure 11.5.

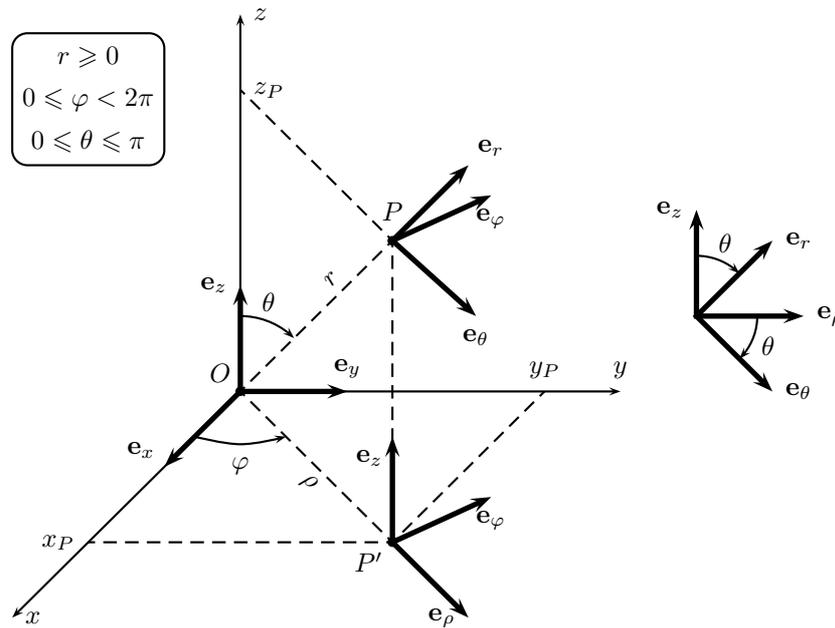


Figure 11.5 – Coordonnées sphériques

On peut alors définir $\mathbf{r} = \mathbf{OP} = r\mathbf{e}_r$, où \mathbf{e}_r est le vecteur unitaire de la direction OP , donc encore $\mathbf{e}_r = \cos\theta\mathbf{e}_z + \sin\theta\mathbf{e}_\rho$.

□ *Déplacement élémentaire* : le calcul du déplacement élémentaire se fait aisément en remarquant que $d\mathbf{e}_r = -\sin\theta d\theta\mathbf{e}_z + \cos\theta d\theta\mathbf{e}_\rho + \sin\theta d\varphi\mathbf{e}_\varphi$; on reconnaît dans le premier terme $-\sin\theta\mathbf{e}_z + \cos\theta\mathbf{e}_\rho$ le vecteur unitaire directement orthogonal à \mathbf{e}_r dans le plan OPP' , que l'on note \mathbf{e}_θ . On a alors :

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + r d\theta\mathbf{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\mathbf{e}_\varphi \quad (11.4)$$

où bien sûr $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ forme encore une base locale. Ainsi, les multiplicateurs dans le système de coordonnées sphérique sont donnés par $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = r$ et $\mu_3 = r \sin\theta$.

On notera bien que la variable φ et le vecteur unitaire \mathbf{e}_φ sont communs aux systèmes cylindro-polaire et sphérique. Malgré cela, on adopte parfois les notations (r, θ, z) pour les coordonnées cylindro-polaires, malgré le risque de confusion qui en résulte.

□ *Calculs en coordonnées sphériques* : ce système est particulièrement adapté à la description de dispositifs coniques ou sphériques. La figure 11.6 montre un exemple d'application de ce système de coordonnées : on y a représenté une sphère de rayon a coupée par un cône de sommet O , d'axe (Oz) et de demi-angle au sommet α .

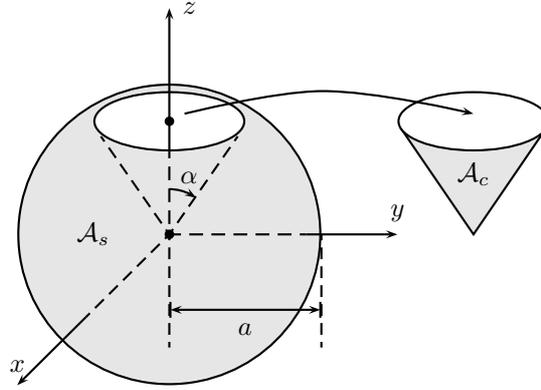


Figure 11.6 – Application des coordonnées sphériques

On peut alors s'intéresser au calcul de deux aires : celle \mathcal{A}_s de la portion de sphère ainsi définie par $r = a$, $\alpha \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et celle \mathcal{A}_c du cône défini par $0 \leq r \leq a$, $\theta = \alpha$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Dans chaque cas, l'expression du déplacement élémentaire $d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + r d\theta\mathbf{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\mathbf{e}_\varphi$ permet d'exprimer les deux éléments de surface, $d\mathcal{A}_s = a^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ pour la portion de sphère, et $d\mathcal{A}_c = r dr \sin\alpha d\varphi$ pour la portion de cône.

On en déduit $\mathcal{A}_s = \int_{\theta=\alpha}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} a^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi a^2 (1 + \cos\alpha)$; en particulier, pour $\alpha = 0$, on retrouve l'aire $4\pi a^2$ de la sphère complète. De même, on obtient pour l'aire du cône $\mathcal{A}_c = \sin\alpha \int_{r=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} r dr d\varphi = \pi a^2 \sin\alpha$; le résultat était évidemment prévisible dans le cas particulier où $\alpha = \frac{\pi}{2}$, quand le cône se réduit à un disque.

On peut encore déterminer le volume délimité par ce cône et cette portion de sphère, donc dans la zone délimitée par $0 \leq r \leq a$, $\alpha \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; le déplacement élémentaire le plus général $d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + r d\theta\mathbf{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\mathbf{e}_\varphi$ permet alors d'écrire l'élément de volume $d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$, d'où un volume total donné par $\mathcal{V} = \int_0^a r^2 dr \int_{\alpha}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3} (1 + \cos\alpha)$; en particulier, dans le cas de la sphère complète, $\alpha = 0$ et on retrouve le résultat bien connu $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi a^3$.

11.1.5 Géométrie des systèmes de coordonnées orthogonaux

□ *Changement de coordonnées* : la simple lecture des figures 11.3 et 11.5 permet d'établir les formules classiques de projection permettant de changer de système de coordonnées, par passage des coordonnées cylindro-polaires aux coordonnées cartésiennes, et des coordonnées sphériques aux coordonnées cylindro-polaires :

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi & y &= \rho \sin \varphi \\ \rho &= r \sin \theta & z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (11.5)$$

On peut ensuite passer des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta \quad (11.6)$$

□ *Changement de base de projection* : la lecture des mêmes figures permet aussi de retrouver les formules classiques de projection permettant de changer de base de projection entre les bases cylindro-polaire et cartésienne d'une part, et entre les bases sphérique et cylindro-polaire d'autre part :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi & \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi \\ \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_z \cos \theta + \mathbf{e}_\rho \sin \theta & \mathbf{e}_\theta &= -\mathbf{e}_z \sin \theta + \mathbf{e}_\rho \cos \theta \end{aligned} \quad (11.7)$$

11.2 Opérateurs de l'analyse vectorielle

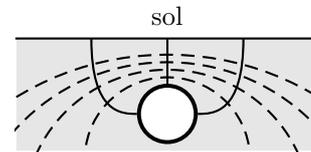
11.2.1 Opérateurs de gradient

□ *Gradient d'une fonction scalaire* : considérons une fonction *scalaire* quelconque $f(P)$. La variation infinitésimale de f lorsque la position $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ de P varie de $d\mathbf{r}$ est notée df ; dans un système de coordonnées orthogonales quelconque (s_1, s_2, s_3) , on peut écrire, comme pour toute fonction de trois variables, $df = \sum_{PC} \frac{\partial f}{\partial s_1} ds_1$. Compte tenu de l'expression (11.2) ci-dessus, on peut encore écrire $df = \sum_{PC} \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial f}{\partial s_1} \times \mu_1 ds_1$ qui apparaît comme un produit scalaire :

$$df = \mathbf{grad} f \cdot d\mathbf{r} \quad \mathbf{grad} f = \sum_{PC} \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial f}{\partial s_1} \mathbf{e}_1 \quad (11.8)$$

□ *Géométrie du gradient* : on appelle *surface iso- f* l'ensemble des points P de l'espace pour lesquels $f(P)$ prend une valeur constante, où f est une fonction scalaire quelconque. Sur une telle surface, tout déplacement $d\mathbf{r}$ est donc associé à $df = 0$, donc $d\mathbf{r} \perp \mathbf{grad} f$: les surfaces iso- f sont orthogonales au gradient de f .

Le tracé ci-contre représente les lignes iso- T (en pointillés) et les lignes de champ du vecteur $\mathbf{grad} T$ (en traits pleins) de la répartition de température dans la zone entourant un tuyau chauffé enterré en profondeur sous le sol horizontal, lui-même isotherme.



Plus généralement, le gradient de f décrit le sens de variation de la grandeur f dans l'espace ; il est toujours dirigé dans le sens de l'augmentation de f puisque la variation de f vérifie $df > 0$ pour tout déplacement tel que $\mathbf{grad} f \cdot d\mathbf{r} > 0$, orienté donc dans le même sens que le gradient de f .

Interprétation géométrique du gradient



Le vecteur $\mathbf{grad} f$ est dirigé dans le sens de l'augmentation de la grandeur scalaire f ; il est perpendiculaire aux surfaces iso- f .

□ *Expressions de l'opérateur gradient* : la relation (11.8), appliquée aux coordonnées cartésiennes, avec $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$, puis aux coordonnées cylindro-polaires, avec $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \rho$ et $\mu_3 = 1$, et enfin aux coordonnées sphériques, avec $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = r$ et $\mu_3 = r \sin \theta$, permet d'expliciter l'opérateur gradient dans les trois systèmes de coordonnées orthogonaux.

Ainsi, en coordonnées cartésiennes, $\mathbf{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z$; on peut aussi utiliser la notation symbolique nabla $\mathbf{grad} f = \nabla f$, le vecteur nabla ∇ étant défini en coordonnées cartésiennes par la notation symbolique $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$.

On prendra garde à ne jamais employer la notation symbolique nabla pour d'autres systèmes de coordonnées que le système cartésien.

On retiendra :

$$\mathbf{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (11.9)$$

De même, en coordonnées cylindro-polaires :

$$\mathbf{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (11.10)$$

Enfin, en coordonnées sphériques :

$$\mathbf{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (11.11)$$

□ *Dérivation d'un produit* : tout comme on dérive un produit de deux fonctions d'une seule variable par la relation générale $(fg)' = f'g + fg'$, on peut vérifier directement, par simple développement en coordonnées cartésiennes, la relation :

$$\mathbf{grad} (fg) = f \mathbf{grad} g + g \mathbf{grad} f \quad (11.12)$$

□ *Variations d'une grandeur vectorielle* : considérons maintenant une grandeur vectorielle quelconque \mathbf{W} , fonction du point P ; lorsque P se déplace de $d\mathbf{r}$, on peut bien sûr appliquer le résultat précédent à chacune des composantes de \mathbf{W} et écrire par exemple $dW_x = (\mathbf{grad} W_x) \cdot d\mathbf{r}$; cette expression se développe immédiatement selon $dW_x = dx \frac{\partial W_x}{\partial x} + dy \frac{\partial W_x}{\partial y} + dz \frac{\partial W_x}{\partial z}$.

La même relation, appliquée aux deux autres composantes de \mathbf{W} , peut amener à l'écriture de la variation infinitésimale $d\mathbf{W} = dx \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} + dy \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y} + dz \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial z}$. On définit alors, *exclusivement en coordonnées cartésiennes*, la notation $\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}$ par la relation :

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{W} = a_x \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial z} \quad (11.13)$$

qui permet en particulier d'écrire, pour un vecteur quelconque, $d\mathbf{W} = (d\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{W}$.

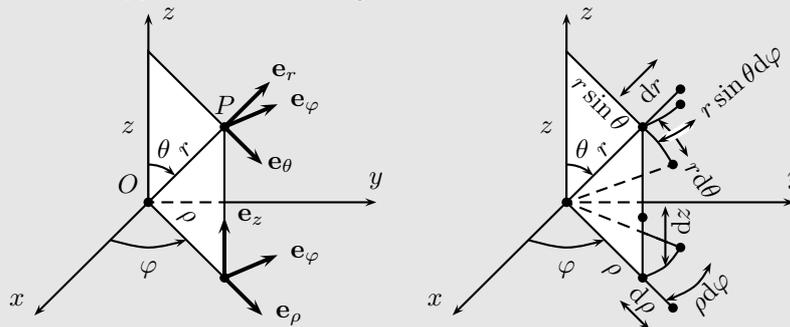
Notons qu'on peut généraliser la même écriture pour la variation d'une fonction scalaire, $df = (d\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad}) f$, puisque la notation (11.13) se généralise immédiatement à une fonction scalaire f selon :

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}) f = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{grad} f) \quad (11.14)$$

Ce qu'il faut absolument savoir

Le repérage en coordonnées cartésiennes, cylindro-polaires et sphériques se fait respectivement selon $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, $\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$ ou $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$.

Le déplacement élémentaire dans les mêmes systèmes de coordonnées s'écrit respectivement $d\mathbf{r} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z$, $d\mathbf{r} = d\rho\mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi\mathbf{e}_\varphi + dz\mathbf{e}_z$ ou enfin $d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + r d\theta\mathbf{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\mathbf{e}_\varphi$. Les composantes de ces déplacements élémentaires apparaissent sur la figure ci-dessous.



La figure montre les relations de changement de coordonnées, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ et $\rho = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$, ainsi que les relations de changement de base, $\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi$, $\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi$ et $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_z \cos \theta + \mathbf{e}_\rho \sin \theta$ et $\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_z \sin \theta + \mathbf{e}_\rho \cos \theta$.

La variation d'une grandeur scalaire s'écrit $df = \mathbf{grad} f \cdot d\mathbf{r}$, où le gradient $\mathbf{grad} f$ est dirigé dans le sens de l'augmentation de f , perpendiculairement aux surfaces iso- f .

Selon le système de coordonnées, on aura $\mathbf{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z$,
 $\mathbf{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z$ ou $\mathbf{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi$.