

Les interférences lumineuses



Intérêt de l'étude des interférences et de la diffraction :

Les interférences sont utiles pour la métrologie, la spectrométrie par transformée de Fourier (largeur de raie), les mesures de défaut, d'indice de réfraction (interféromètre de Rayleigh), de distance angulaire entre étoiles, la vélocimétrie laser (voir exercice), interférométrie pour mettre en évidence d'éventuelles ondes gravitationnelles, filtres interférentiels, holographie ; ...

La diffraction apparaît dès qu'on limite l'ouverture d'une onde, par effets de bord ; elle accompagne inévitablement la formation des images et apparaît, lorsque les aberrations géométriques et chromatiques ont été réduites, comme la limite naturelle à la notion d'image ponctuelle. La diffraction peut néanmoins parfois être utile et recherchée (diffractions des rayons X par les cristaux, diffraction du son ou encore diffraction des ondes hertziennes en GO par une colline, par exemple).

I) Notions de vibration lumineuse :

1) Théorie scalaire de la lumière :

Les calculs d'optique ondulatoire consistent généralement à déterminer l'intensité résultant de la superposition de plusieurs ondes. Nous allons montrer que, pour le calcul de l'intensité, il est souvent possible d'oublier le caractère vectoriel du champ électrique.

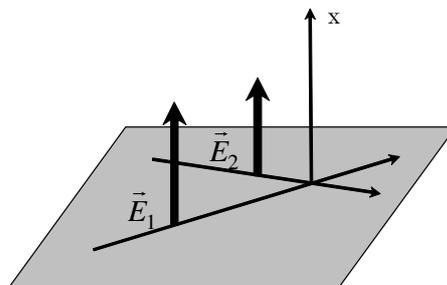
- Ondes polarisées rectilignement :

Une onde polarisée rectilignement selon la direction (Ox) est décrite par une fonction scalaire $s(M,t)$:

$$\vec{E}(M,t) = s(M,t) \vec{u}_x \quad \text{et} \quad I = k \langle s^2 \rangle$$

Etudions maintenant la superposition de deux ondes.

* On considère tout d'abord le cas de deux ondes polarisées selon la même direction \vec{u}_x , normale aux deux directions de propagations (voir figure) : $\vec{E}_1 = s_1(M,t) \vec{u}_x$ et $\vec{E}_2 = s_2(M,t) \vec{u}_x$.



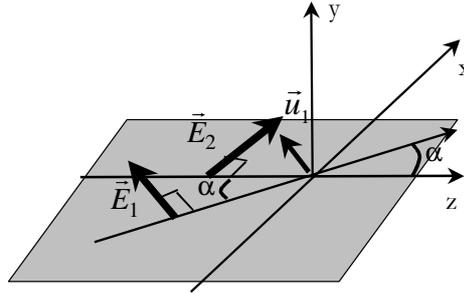
A la somme $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, on peut donc associer la fonction scalaire $s(M,t)$:

$$\vec{E} = s(M, t) \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$$

Pour déterminer l'intensité lumineuse, égale à $I = K \langle s^2 \rangle$, une représentation scalaire des ondes lumineuses est donc ici justifiée. On peut en effet ignorer la direction de polarisation et écrire que $I = K \langle (s_1 + s_2)^2 \rangle$.

Dans d'autres cas, la représentation scalaire est une approximation plus ou moins justifiée.

* Par exemple, on considère deux ondes polarisées dans le plan défini par leurs directions de propagation (voir figure, en choisissant le champ E_2 polarisé selon (Ox)).



Le champ électrique résultant vaut alors :

$$\vec{E}(M, t) = s_1(M, t) \vec{u}_1 + s_2(M, t) \vec{u}_x$$

Soit :

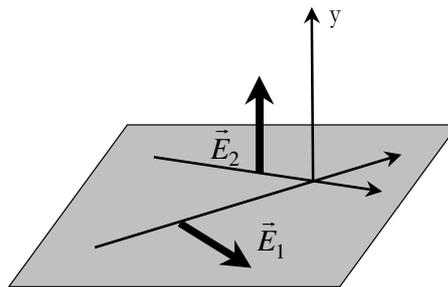
$$\vec{E}(M, t) = s_1(M, t)(\cos \alpha \vec{u}_x - \sin \alpha \vec{u}_z) + s_2(M, t) \vec{u}_x = (s_1(M, t) \cos \alpha \vec{u}_x + s_2(M, t) \vec{u}_x) - s_1(M, t) \sin \alpha \vec{u}_z$$

Si l'angle α est petit, alors :

$$\vec{E}(M, t) \approx s_1(M, t) \vec{u}_x + s_2(M, t) \vec{u}_x$$

et l'on se ramène au cas précédent : l'approximation scalaire sera justifiée, ce qui ne sera pas le cas si l'angle α est grand !

Les deux ont maintenant des directions de polarisation perpendiculaires. Avec les notations de la figure, il vient :



$$\vec{E}(M, t) = s_1(M, t) \vec{u}_1 + s_2(M, t) \vec{u}_2$$

Et :

$$\langle \vec{E}^2(M, t) \rangle = \langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle \neq \langle (s_1 + s_2)^2 \rangle$$

Il n'est pas possible, dans ce cas, de traduire la superposition des ondes $\vec{E}_1(M, t)$ et $\vec{E}_2(M, t)$ par une addition d'ondes scalaires.

Dans le cas de la lumière naturelle, la direction du champ électrique change de manière aléatoire au cours du temps. La durée moyenne entre deux changements est le temps de cohérence qui sera défini plus tard dans ce chapitre.

A ce stade, il suffit de savoir que ce temps est extrêmement bref par rapport à la durée d'une expérience (temps de réponse d'un détecteur, pour l'œil typiquement 0,1 s, pour une photodiode, typiquement 10^{-6} s). Ainsi, il n'est pas possible d'attribuer une direction au champ électrique. La lumière naturelle est non polarisée.

Pour une lumière non polarisée se propageant dans la direction (Oz), les deux composantes E_x et E_y du champ électrique sont parfaitement équivalentes (par isotropie dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation).

On appelle vibration lumineuse $s(M,t)$ une composante quelconque du champ électrique par rapport à un axe perpendiculaire à la direction de propagation.

Par conséquent, pour des ondes non polarisées, il suffira de considérer deux grandeurs scalaires correspondants aux deux axes (Ox) et (Oy). On pourra bien alors se limiter à une représentation scalaire à condition que leurs directions de propagation soit voisines.

En conclusion :

Dans un grand nombre de situations, l'intensité lumineuse, due à la superposition de plusieurs ondes EM, peut être déterminée au moyen d'un modèle simplifié, où le champ électrique est associé à une grandeur scalaire.

Cette approximation est justifiée :

- Dans le cas très fréquent d'ondes non polarisées dont les directions de propagation sont voisines.
- Pour des ondes polarisées dont on sait que les directions de polarisation sont voisines.

Les détecteurs usuels sont dits « quadratiques » : ils sont sensibles à la valeur moyenne temporelle (sur des temps très supérieurs à la période des ondes lumineuses qui est de l'ordre de quelques 10^{-15} s) du carré du module des champs électriques.

On définit alors la grandeur « Eclairement » ou « Intensité lumineuse » par :

$$I = k \left\langle s(M,t)^2 \right\rangle_t = \frac{1}{2} k \operatorname{Re}(\underline{s} \cdot \underline{s}^*) = \frac{1}{2} k |\underline{s}|^2$$

où k est une constante multiplicative.

L'éclairement s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ et est en fait relié au module du vecteur de Poynting.

On a vu en effet que, pour une OPPH : $\vec{\Pi} = \epsilon_0 c \vec{E}^2 \vec{u}_z$.

2) Composition de deux vibrations lumineuses :

On considère tout d'abord la composition de deux ondes lumineuses \vec{s}_1 et \vec{s}_2 se propageant selon des directions quasi – parallèles de vecteur unitaire \vec{u}_z ; ces vecteurs étant perpendiculaires à \vec{u}_z , on les projette sur des axes (Ox) et (Oy) formant avec (Oz) une base directe :

$$\vec{s}_1 + \vec{s}_2 = (\underline{s}_{1,x} + \underline{s}_{2,x}) \vec{u}_x + (\underline{s}_{1,y} + \underline{s}_{2,y}) \vec{u}_y$$

L'éclairement total est donc :

$$I = \frac{1}{2} k |\underline{s}_1 + \underline{s}_2|^2 = \frac{1}{2} k \left((\underline{s}_{1,x} + \underline{s}_{2,x})^2 + (\underline{s}_{1,y} + \underline{s}_{2,y})^2 \right)$$

L'éclairement total est la somme des éclairements correspondant aux deux directions de projection ; on pourra se contenter d'étudier la composition de deux vibrations lumineuses de même polarisation rectiligne.

Avec un choix convenable de l'origine des temps et en faisant une analyse harmonique du problème, on peut écrire :

$$\underline{s}_1(M, t) = A_1 e^{i\omega t} \quad ; \quad \underline{s}_2(M, t) = A_2 e^{i(\omega t - \varphi(M, t))}$$

L'onde résultante est :

$$\underline{s}(M, t) = \underline{s}_1(M, t) + \underline{s}_2(M, t) = (A_1 + A_2 e^{-i\varphi(M, t)}) e^{i\omega t}$$

On revient en notation réelle pour calculer la valeur moyenne de l'éclairement :

$$s(M, t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \cos(\omega t - \varphi(M, t))$$

L'éclairement total est donné par :

$$I = k \langle s(M, t)^2 \rangle_t = k \langle A_1^2 \cos^2 \omega t + A_2^2 \cos^2(\omega t - \varphi(M, t)) + 2A_1 \cos \omega t \cdot A_2 \cos(\omega t - \varphi(M, t)) \rangle_t$$

Soit :

$$I = k \left(\frac{1}{2} A_1^2 + \frac{1}{2} A_2^2 + 2A_1 A_2 \langle \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi(M, t)) \rangle_t \right)$$

Or :

$$\langle \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi(M, t)) \rangle_t = \frac{1}{2} \langle \cos(\varphi(M, t)) + \cos(2\omega t - \varphi(M, t)) \rangle_t = \frac{1}{2} \langle \cos(\varphi(M, t)) \rangle_t$$

Par conséquent :

$$I = \frac{1}{2} k A_1^2 + \frac{1}{2} k A_2^2 + k A_1 A_2 \langle \cos \varphi(M, t) \rangle_t$$

Soit finalement :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \varphi(M, t) \rangle_t$$

avec $I_1 = \frac{1}{2} k A_1^2$ et $I_2 = \frac{1}{2} k A_2^2$ les éclairements des ondes (1) et (2) lorsqu'elles sont seules.

Deux cas peuvent alors se produire :

* $\langle \cos \varphi(M, t) \rangle_t = 0$: alors $I = I_1 + I_2$ et l'éclairement total est la somme des éclairements obtenus pour chacune des ondes prises séparément. Les vibrations lumineuses sont dites incohérentes. Il n'y a pas d'interférences.

* $\langle \cos \varphi(M, t) \rangle_t \neq 0$: les vibrations sont dites « cohérentes » et l'éclairement total fait intervenir un terme d'interférences qui dépend du point d'observation :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \varphi(M, t) \rangle_t$$

Souvent, les deux ondes ont la même amplitude ; l'éclairement total sera alors :

$$I = 2I_0(1 + \langle \cos \varphi(M, t) \rangle_t)$$

Le déphasage entre les deux ondes est relié à la différence de chemin optique :

$$\varphi(M, t) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M, t)$$

Que vaut en général $\langle \cos \varphi \rangle$? Quand dit-on que deux sources sont cohérentes ?

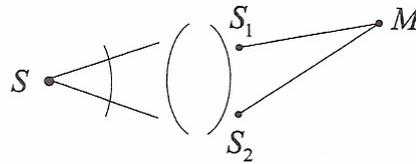
Qu'en déduit-on expérimentalement sur les sources S_1 et S_2 ?

Quand doit-on additionner les amplitudes complexes ? Quand peut-on sommer les intensités ?

Réponse :

Si S_1 et S_2 sont deux sources différentes, elles vont émettre des radiations avec entre elles une différence de phase aléatoire dans le temps : $\cos \varphi$ varie de -1 à $+1$ et ceci 10^7 fois en $0,1$ s et donc en général $\langle \cos \varphi \rangle = 0$. Dans ce cas les deux sources sont incohérentes entre elles et il n'y a pas d'interférence : $I = I_1 + I_2$ (situation de la vie courante).

Pour avoir interférence, les ondes issues de S_1 et S_2 doivent provenir de la désexcitation du même atome. Alors les variations aléatoires de phase au cours du temps affectent S_1 et S_2 de la même manière et la différence de phase φ est alors constante dans le temps. S_1 et S_2 doivent être les images d'une source unique S (souvent au moyen d'un dispositif d'optique géométrique), les ondes parcourent simplement des chemins optiques différents, mais sont émises par le même point S . On dit alors que les deux sources secondaires S_1 et S_2 sont cohérentes entre elles.



Conclusion : Pour des sources non cohérentes, il suffit d'ajouter les intensités.

Pour des sources cohérentes, il faut ajouter les amplitudes complexes.

Remarque :

Pourquoi dans la plupart des cas fait-on interférer deux ondes cohérentes *de même amplitude* ? Pour répondre quantitativement à cette question, déterminer le contraste $C(r)$ des franges observées entre deux ondes cohérentes d'amplitude $a_1 = a$ et $a_2 = ra$ ($0 < r \leq 1$) lorsqu'elles passent en S_1 et S_2 , tracer son graphe et le commenter pour $r \geq 0,5$.

Réponse :

Au point M d'observation où les deux ondes sont déphasées de φ , leurs amplitudes complexes sont : $\underline{A}_1(M) = a$ et $\underline{A}_2(M) = rae^{-i\varphi(M)}$, correspondant à des intensités respectives $I_1 = \frac{1}{2}ka^2$ et

$$I_2 = \frac{1}{2}kr^2a^2 = r^2I_1.$$

L'amplitude totale au point M est $\underline{A}(M) = \underline{A}_1(M) + \underline{A}_2(M) = a(1 + r e^{-i\varphi(M)})$
 d'où l'éclairement :

$$I(M) = \frac{k a^2}{2} (1 + r e^{-i\varphi(M)})(1 + r e^{+i\varphi(M)}) = I_0 (1 + r^2 + 2r \cos \varphi(M))$$

$$\text{ou mieux : } I(M) = (I_1 + I_2) \left(1 + \frac{2r}{1+r^2} \cos \varphi(M) \right)$$

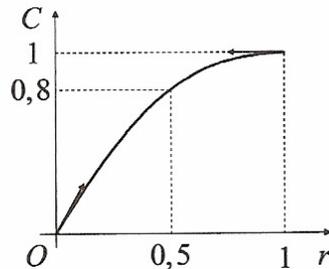
Sous cette forme, le contraste des franges vaut directement :

$$C = \frac{2r}{1+r^2}$$

Pour $r = 0,5$ (l'un des faisceaux est 4 fois moins lumineux que l'autre !), on a toujours $C = 0,8$, ce qui est un excellent contraste.

Et pour $r \geq 0,5$, on a $C \geq 0,8$.

La différence d'amplitude (par exemple lorsque deux fentes d'Young ne sont pas de la même largeur) n'est pas un facteur très critique pour la visibilité des franges.



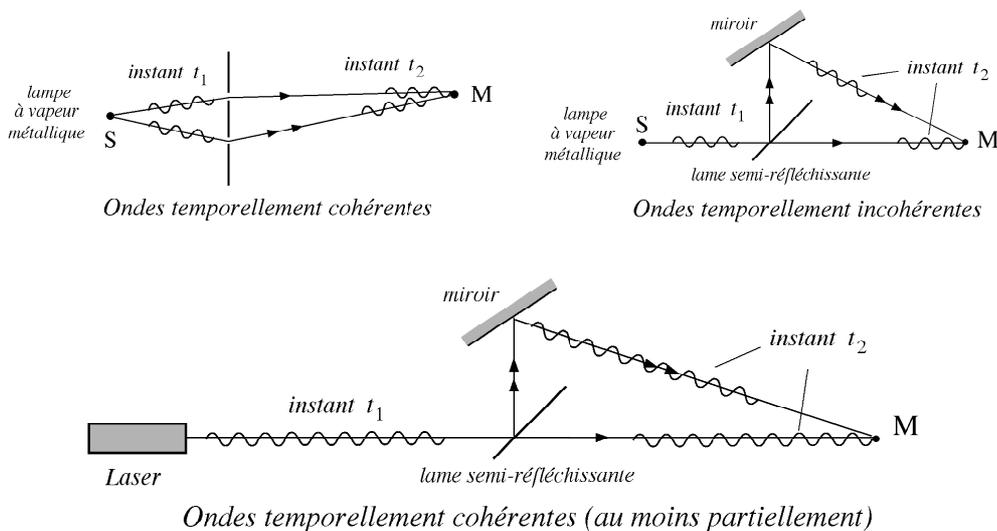
3) Cohérence temporelle :

On se limite à une source ponctuelle (S) qui émet des trains d'ondes de durée moyenne τ_c qui occupent dans l'espace une longueur $L_c = c\tau_c$ (longueur de cohérence).

Chaque train d'ondes issu de (S) se divise en deux trains d'ondes et présente au point M un retard temporel :

$$\Delta t = \frac{(SM)_2}{c} - \frac{(SM)_1}{c} = \frac{\delta}{c}$$

- Si $\Delta t \ll \tau_c$, soit $\delta_{\text{géo}} \ll L_c$: les deux trains d'ondes qui interfèrent en M sont issus du même train d'ondes émis par (S). Le déphasage entre les deux ondes est constant, les deux ondes sont cohérentes et on observe des interférences.



- $\Delta t \gg \tau_c$, soit $\delta_{géo} \gg L_c$, les deux trains d'ondes qui se superposent en M sont issus de deux trains d'ondes différents émis par (S), avec des phases à l'origine différentes et aléatoires. Les deux ondes sont incohérentes et il est impossible d'observer des interférences.
- Dans le cas intermédiaire, les deux trains d'ondes issus d'un même train d'ondes primaires ne se superposent que partiellement en M. Les deux ondes sont partiellement cohérentes. Les interférences existent mais avec un contraste plus faible.

	λ_0 (nm)	radiation	ν_0 (en 10^{14} Hz)	$\Delta\nu_0$ (en Hz)	τ_c (s)	L_c	L_c
Lumière blanche	400 à 800		7,5 – 3,5	$4 \cdot 10^{14}$	$2,5 \cdot 10^{-15}$	750 nm	$\approx \lambda_0$
Vapeur de mercure (haute pression)	546,1	Verte	5,49	10^{12}	10^{-12}	0,3 mm	$\approx 550\lambda_0$
Vapeur de mercure (basse pression)	546,1	Verte	5,49	10^9	10^{-9}	0,3 m	$\approx 5 \cdot 10^5 \lambda_0$
Vapeur de cadmium	643,8	Rouge	4,66	10^9	10^{-9}	0,3 m	$\approx 5 \cdot 10^5 \lambda_0$
Laser He – Ne ordinaire	632,8	Rouge	4,74	10^9	10^{-9}	0,3 m	$\approx 5 \cdot 10^5 \lambda_0$
Laser He – Ne stabilisé	632,8	Rouge	4,74	10^4	10^{-4}	30 km	$\approx 5 \cdot 10^{10} \lambda_0$

Pour avoir interférences, les ondes issues de S_1 et de S_2 doivent provenir de la désexcitation du même atome. Alors les variations aléatoires de phase au cours du temps affectent S_1 et S_2 de la même manière et la différence de phase ϕ est alors constante dans le temps. S_1 et S_2 doivent être les images d'une source unique S (souvent au moyen d'un dispositif d'optique géométrique), les ondes parcourent simplement des chemins optiques différents mais sont émises par le même point S. On dit ainsi que les sources secondaires S_1 et S_2 sont cohérentes entre elles.

4) Cohérence spatiale :

On considère une source « large », constituée d'un ensemble de sources ponctuelles incohérentes entre elles, réparties sur une surface ou dans un volume.

Les sources étant incohérentes entre elles, les intensités vont devoir s'ajouter : si la source est large, on n'observera plus d'interférences, par contre si la source est « peu étendue », on pourra observer des interférences mais avec un contraste affaibli.

La longueur de cohérence spatiale L_s est la largeur maximale de la source donnant une figure d'interférences peu brouillée.

En conclusion :

* Il n'est possible d'observer des interférences en optique que si les ondes qui se superposent :

* sont issues d'une même source

* et suivent des voies différentes

* Dans le cas d'une source ponctuelle S :

* $\delta_{\text{géo}}(M) = (SM)_2 - (SM)_1$ est la différence de marche géométrique au point M entre les deux voies 1 et 2.

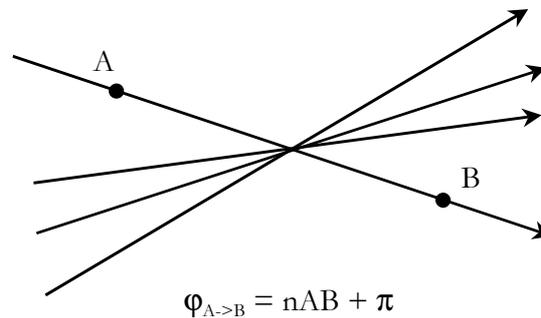
* $\delta(M) = \delta_{\text{géo}}(M) + \delta_{\text{sup}}$, qui tient compte des déphasages supplémentaires, est la différence de marche optique.

Rappels :

A la séparation entre deux milieux transparents, les rayons lumineux sont réfractés et réfléchis. Si les limites transversales du faisceau sont très grandes devant la longueur d'onde, les rayons sont déviés selon les lois de Snell - Descartes. Dans le cas, contraire, on observe le phénomène de diffraction (voir chapitre correspondant).

On note n_1 l'indice du milieu (1) et n_2 l'indice du milieu (2). Alors, en tout point du dioptre (surface de séparation entre ces deux milieux) :

- La phase de l'onde réfractée est égale à celle de l'onde incidente.
- Si $n_1 > n_2$, alors la phase de l'onde réfléchie est égale à celle de l'onde incidente.
- Si $n_1 < n_2$, alors la phase de l'onde réfléchie est égale à celle de l'onde incidente augmentée de π .
- Une réflexion sur un métal s'accompagne d'une discontinuité de phase de π .
- Lorsqu'une onde passe par un point de convergence (voir figure et devoir libre), on admettra qu'il faut ajouter π à la différence de phase calculée à partir de la distance.



* Deux ondes sont parfaitement cohérentes si elles présentent un déphasage $\varphi(M)$ indépendant du temps. Cela se produit lorsque les trains d'ondes qui se superposent en M proviennent du même train d'ondes émis par la source S.

L'intensité est alors donnée par la relation fondamentale des interférences à 2 ondes (qu'il faut savoir redémontrer) :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2I_1I_2 \cos \varphi(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2I_1I_2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) \right)$$

La différence de marche $\delta(M)$ est une fonction de la position du point M qui dépend du système interférentiel, c'est-à-dire de la façon dont on a réussi à fabriquer les deux ondes qui interfèrent à partir d'une même source.

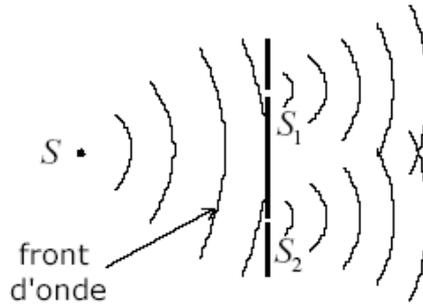
L'équation $\delta(M) = \delta(x, y, z) = cste = \delta_0$ définit dans l'espace une surface. A chaque valeur de δ_0 correspond une surface d'égale intensité.

L'intensité est maximale pour $\delta_0 = m\lambda_0$ et minimale pour $\delta_0 = (m + \frac{1}{2})\lambda_0$ (avec m entier).

II) Interférences par division du front d'onde :

1) Fonctionnement de principe en lumière monochromatique :

On isole spatialement deux parties d'un même front d'onde issu d'une seule source (S) en perçant, par exemple, deux trous dans un écran opaque (trous d'Young).



(S₁) et (S₂) constituent alors deux sources secondaires cohérentes : en effet, chaque train d'ondes issu de (S) se divise en deux trains d'ondes jumeaux ayant la même référence de phase. Il suffit alors de se faire rencontrer les ondes issues des sources secondaires dans une certaine région de l'espace pour observer des interférences.

On verra dans le cours sur la diffraction que si le trou a une dimension très petite vis-à-vis de la longueur d'onde, les deux ondes réémises par (S₁) et (S₂) sont bien cohérentes et d'amplitude pratiquement isotropes.

Quelques remarques :

* On parle pour ce type de dispositif de « division du front d'onde ».

* Lorsque la source placée en S est ponctuelle, la figure d'interférences est observable dans tout le volume où les faisceaux issus de (S₁) et (S₂) se superposent : on dit que les interférences sont non localisées. Lorsque l'on étend progressivement la source, les franges deviennent moins contrastées et la région dans laquelle les franges restent « assez visibles » se réduit : les interférences deviennent localisées (problème de cohérence spatiale).

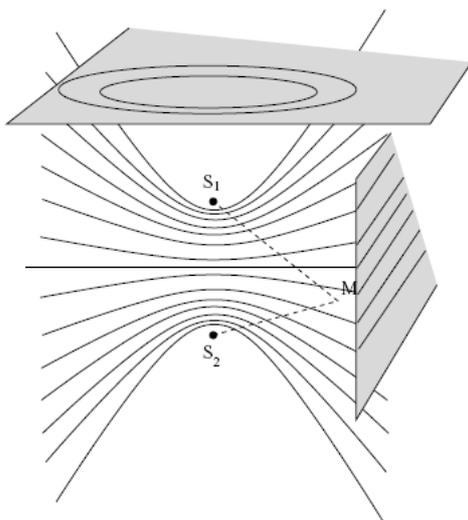
* Pour une onde monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 , la forme des franges (lieu des points M de même éclairement) est donnée par $\varphi(M) = cste$. Or :

$$\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (S_2M - S_1M)$$

Dans le cas des trous d'Young par exemple. La forme des franges est donnée par :

$$S_2M - S_1M = cste$$

ce qui définit une famille d'hyperboloïdes de révolution d'axe S₁S₂ ; selon la direction d'observation et la taille du champ d'observation, les franges pourront apparaître quasi-rectilignes, circulaires, ...

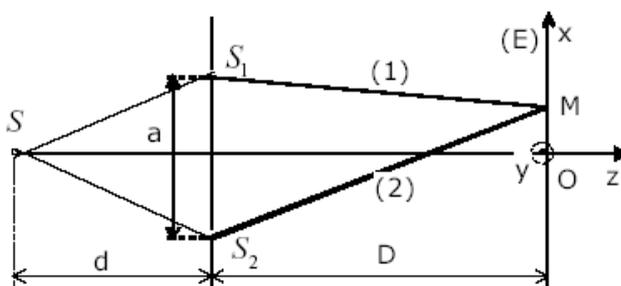


Si l'on place l'écran parallèlement à l'écran source, on observe des franges rectilignes parallèles entre elles et perpendiculaires à l'axe S_1S_2 .

Si l'on place l'écran perpendiculairement à l'écran source, on s'attend à observer des anneaux concentriques. Dans la réalité, ces anneaux sont très peu lumineux.

2) Exemple du dispositif des trous d'Young :

Dans le dispositif des trous d'Young, la source principale (S) est située sur la médiatrice du segment joignant les deux sources secondaires. Les interférences sont observées sur un écran (E) parallèle à l'axe des deux sources.



Comme les interférences sont visibles sur l'écran indépendamment de sa position, on parle d'interférences non localisées dans tout l'espace.

En pratique, on aura $D \gg a$ et on observera les franges en des points $M(x,y)$ proches de O, pour lesquels x et $y \ll D$.

La différence de chemin optique entre les rayons (2) et (1) vaut (les rayons se propagent dans de l'air, d'indice pratiquement égal à 1) :

$$\delta_{2/1} = (SS_2M) - (SS_1M) = (S_2M) - (S_1M) = S_2M - S_1M$$

Soit :

$$\delta_{2/1} = \sqrt{D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2} - \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}$$

On fait un DVL au 2nd ordre en a / D , x / D et y / D :

$$\delta_{2/1} = D \left(1 + \left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D} \right)^2 + \frac{y^2}{D^2} \right)^{1/2} - D \left(1 + \left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D} \right)^2 + \frac{y^2}{D^2} \right)^{1/2}$$

$$\delta_{2/1} = D \left(1 + \left(\frac{x^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} + \frac{ax}{2D^2} \right) + \frac{y^2}{D^2} \right)^{1/2} - D \left(1 + \left(\frac{x^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} - \frac{ax}{2D^2} \right) + \frac{y^2}{D^2} \right)^{1/2}$$

$$\delta_{2/1} = D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} + \frac{ax}{2D^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{y^2}{D^2} \right) - D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} - \frac{ax}{2D^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{y^2}{D^2} \right)$$

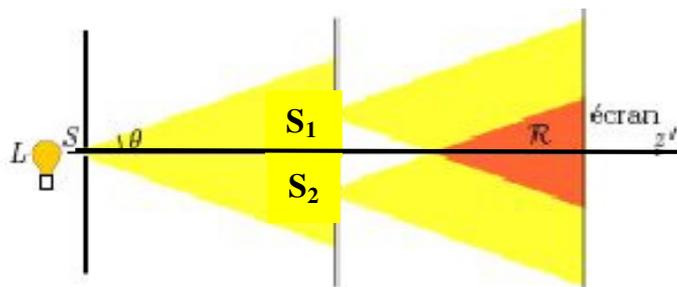
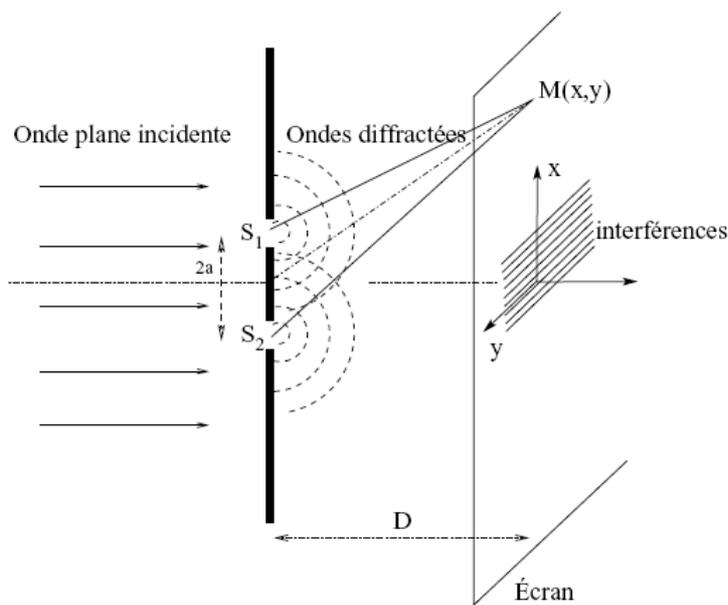
Finalement :

$$\delta_{2/1} = \delta = \frac{ax}{D}$$

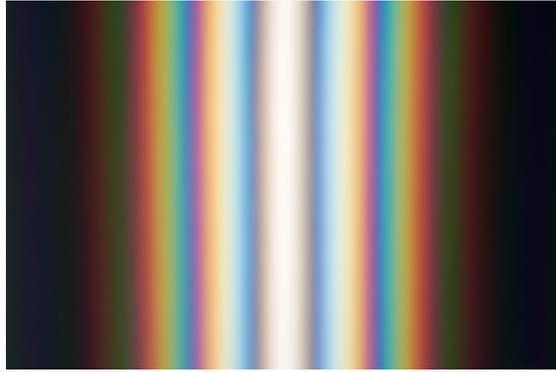
Et l'éclairement au point M :

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right]$$

Les franges d'interférences sont obtenues par $x = \text{cste}$ et sont donc des droites parallèles à l'axe (Oy).



Champ d'interférences (Intersection des faisceaux venant des deux sources secondaires)



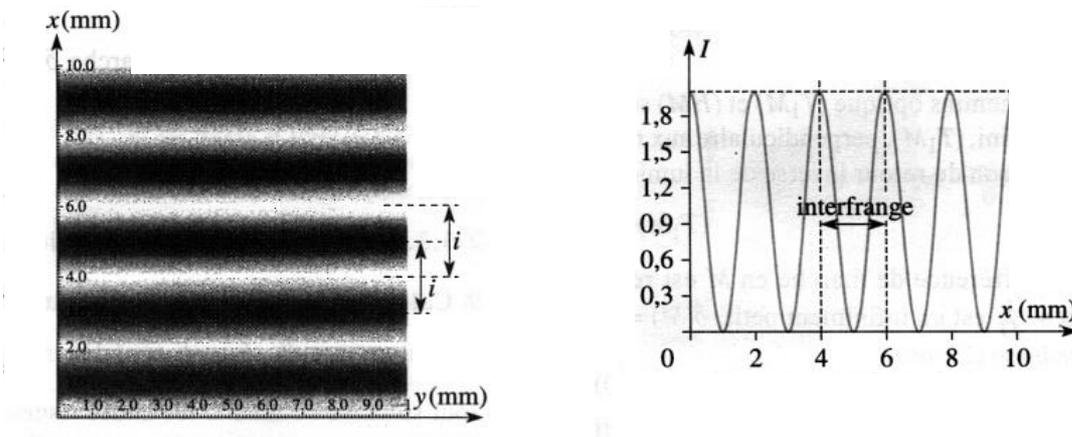
Sur l'écran, les franges de même nature seront séparées d'une distance appelée interfrange et notée i , qui est finalement la période spatiale du cosinus qui intervient dans l'intensité :

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right]$$

Ainsi :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{a}$$

Avec des trous écartés de $a = 1$ mm, de diamètre $1/10$ mm, avec un écran placé à 1 m, une dizaine de franges fines sont discernables au centre d'une figure de diffraction.



Aspect de l'écran et fonction correspondante $I(x,y)$ lorsque l'interfrange est égale à 2 mm.

Remarques :

- Les trous S , S_1 et S_2 peuvent être remplacés par des fentes (de très faible largeur selon Ox) parallèles à Oy ; en effet, les atomes (de position y différente) de la source placée derrière la fente (S) émettent des trains d'ondes incohérents entre eux. On peut donc sommer sur l'écran les éclaircissements dus à chacun de ces atomes. L'éclaircissement ne dépendant pas de la variable y , les intensités lumineuses vont se renforcer, sans se brouiller : le phénomène sera plus lumineux.

Pour le montrer, on peut considérer un autre système de trous d'Young, placés aux points de coordonnées $S_1(a/2, Y_0)$ et $S_2(-a/2, Y_0)$. Alors :

$$\delta = S_2M - S_1M = \sqrt{D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (y - Y_0)^2} - \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + (y - Y_0)^2}$$

On fait un DVL au 2nd ordre en a / D , x / D , y / D et Y_0 / D :

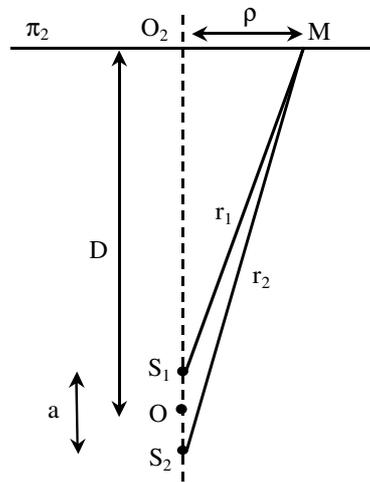
$$\delta = D \left(1 + \left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D} \right)^2 + \frac{(y - Y_0)^2}{D^2} \right)^{1/2} - D \left(1 + \left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D} \right)^2 + \frac{(y - Y_0)^2}{D^2} \right)^{1/2} \approx \frac{ax}{D}$$

et on obtient bien la même différence de marche, indépendante de y .

- D est de l'ordre de grandeur du mètre, a du millimètre et λ_0 du micromètre ; l'interfrange i est de l'ordre du millimètre ; c'est ainsi que pour la 1^{ère} fois, Thomas Young pu mesurer en 1804 des longueurs d'onde de radiations lumineuses.

Observation sur un écran perpendiculaire à l'axe des sources (plan π_2) :

Dans ce plan, les franges sont encore les lieux d'intersections avec les hyperboloïdes : l'invariance par rotation autour de l'axe S_1S_2 nous permet de déduire que les franges sont circulaires, centrées sur O_2 .



* Expression de la différence de marche en un point M de l'écran :

$$\delta = n(S_2M - S_1M)$$

Avec : (on utilise le fait que $D + \frac{a}{2} \gg \rho$ et $D \gg \frac{a}{2}$)

$$S_2M = \left[\left(D + \frac{a}{2} \right)^2 + \rho^2 \right]^{1/2} = \left(D + \frac{a}{2} \right) \left[1 + \frac{\rho^2}{\left(D + \frac{a}{2} \right)^2} \right]^{1/2} \approx D + \frac{a}{2} + \frac{\rho^2}{2 \left(D + \frac{a}{2} \right)} \approx D + \frac{a}{2} + \frac{\rho^2}{2D} \left(1 - \frac{a}{2D} \right)$$

De même :

$$S_1 M = \left[\left(D - \frac{a}{2} \right)^2 + \rho^2 \right]^{1/2} = \left(D - \frac{a}{2} \right) \left[1 + \frac{\rho^2}{\left(D - \frac{a}{2} \right)^2} \right]^{1/2} \approx D - \frac{a}{2} + \frac{\rho^2}{2 \left(D - \frac{a}{2} \right)} \approx D - \frac{a}{2} + \frac{\rho^2}{2D} \left(1 + \frac{a}{2D} \right)$$

La différence de marche devient :

$$\delta = n \left(a - \frac{a\rho^2}{2D^2} \right) = na \left(1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right)$$

* Intensité lumineuse :

L'intensité lumineuse dans le champ d'interférences se met alors sous la forme :

$$I(M) = I(\rho) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{na}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right) \right) \right)$$

Les surfaces d'égale intensité sont des anneaux centrés sur l'axe des sources secondaires et centrées en O_2 .

Les rayons des anneaux brillants sont donnés par :

$$2\pi \frac{na}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\rho_m^2}{2D^2} \right) = 2m\pi \quad \text{soit} \quad \rho_m = \sqrt{2D^2 \left(1 - m \frac{\lambda_0}{na} \right)}$$

L'ordre d'interférences est :

$$p = \frac{na}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right)$$

dont la valeur au centre ($p(O_2) = \frac{na}{\lambda_0}$) est très grande puisque $a \gg \lambda_0$. Cet ordre va décroître depuis le centre.

Si $na = m' \lambda_0$ (m' entier), O_2 est un point brillant. Si $na = (m' + 1/2) \lambda_0$, alors O_2 est un point sombre. Si a est quelconque, l'intensité lumineuse au point O_2 se situe de manière intermédiaire entre le brillant et le sombre.

* Expression du rayon des anneaux brillants dans le cas d'une frange centrale brillante :

On a alors $na = m' \lambda_0$ (m' entier), soit $\frac{\lambda_0}{na} = \frac{1}{m'}$, et donc ρ_m devient :

$$\rho_m = \sqrt{2D^2 \left(1 - \frac{m}{m'} \right)} = \sqrt{\frac{2D^2}{m'} (m' - m)} = D \sqrt{\frac{2\lambda_0}{na}} \sqrt{m' - m} = \rho_0 \sqrt{m' - m} = \rho_0 \sqrt{p}$$

Au centre, $m = m'$; plus on s'écarte du centre et plus m diminue ($m = m' - p$) ; le rayon des anneaux varie comme la racine carrée des entiers successifs (\sqrt{p}). Les anneaux sont donc de plus en plus proches lorsque l'on s'éloigne de O_2 .

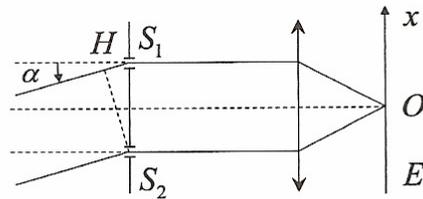
On ne peut donc pas définir globalement de période spatiale pour ce phénomène d'interférences : la notion d'interfrange, si l'on souhaite la définir, devra rester locale.

Exemple ; télescope placé à l'équateur :

On observe une étoile supposée ponctuelle à l'aide d'un télescope placé verticalement à l'équateur. Devant le télescope est disposé un système de fentes d'Young ainsi qu'un filtre ne laissant passer qu'une longueur d'onde. Pourquoi les franges défilent-elles ? Estimer leur période.

Réponse :

Pour le principe, observons au foyer O d'une lentille. À l'instant $t=0$, l'étoile est dans l'axe du télescope (en pointillé sur la figure), mais la Terre tourne et la direction de l'étoile se décale. Pour l'observateur pour lequel le télescope est fixe, tout se passe comme si à l'instant t l'étoile avait tourné de $\alpha = \Omega t$



avec $\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$, vitesse angulaire de rotation de la Terre. Les rayons

diffractés par S_1 et S_2 et interférant en O accusent alors une différence de marche $\delta = HS_1 = a \sin \alpha \approx a \Omega t$ car α est très petit et où $a = S_1 S_2$. On en déduit que les

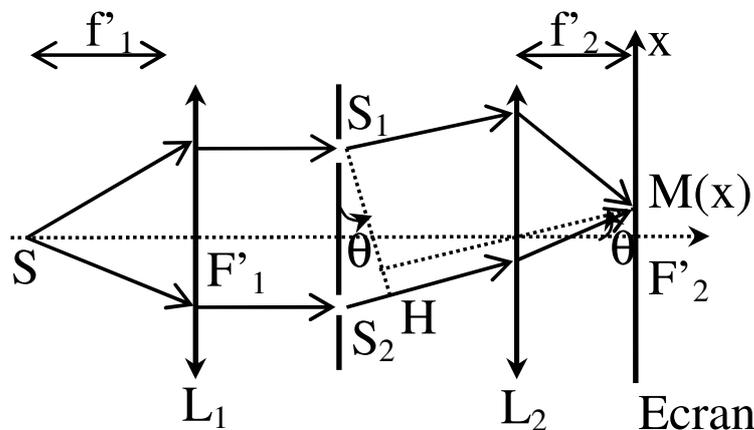
franges défilent en O ; leur période T est obtenue lorsque $\delta(t=T) = \lambda$ soit $T = \frac{\lambda}{a \Omega}$.

AN : On prend $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ et $a = 1 \text{ mm}$ (comme en TP), d'où $T \approx 8 \text{ s}$.

Si l'on augmente a , cette période devient encore plus courte... Dans la pratique, le télescope est entraîné par un moteur dont l'axe de rotation est parallèle à l'axe de rotation Sud Nord de la Terre.

3) Montages des trous d'Young avec lentilles :

Le montage classique des trous d'Young peut être amélioré. En effet, les rayons interférant en un point M de l'écran n'ont pas la même intensité, contrairement à l'hypothèse couramment faite. Lors du passage par un trou, la diffraction « étale » l'onde dans un cône autour de la direction de l'optique géométrique. Les rayons diffractés dans des directions différentes n'ont aucune raison d'avoir la même intensité. Le contraste des interférences n'est alors pas maximal. De plus, les zones les plus éclairées par chaque trou se recouvrent mal et le phénomène d'interférences est peu lumineux.



On remédie à ces inconvénients en ajoutant deux lentilles au dispositif. La source ponctuelle (S) est placée au foyer d'une lentille CV (L_1) et on met l'écran dans le plan focal d'une autre lentille CV (L_2).

Pour tracer cette figure, il faut partir d'un point M de l'écran et se donner un rayon « de construction » qui passe par le centre de la 2^{ème} lentille et incliné d'un angle θ par rapport à l'axe optique.

Les rayons qui interfèrent en M ont bien la même intensité puisqu'ils sont inclinés du même angle θ par rapport à l'horizontale, qui est la direction de propagation de l'optique géométrique.

Le phénomène est bien lumineux autour de $x = 0$ (c'est l'image de l'optique géométrique).

Détermination de la différence de marche :

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1$$

Les trous S_1 et S_2 appartiennent à une même surface d'onde : les deux ondes arrivent en phase au niveau des trous. Par conséquent, $(SS_1) = (SS_2)$ et donc :

$$\delta = (S_2M) - (S_1M)$$

Le principe de retour inverse de la lumière et le théorème de Malus permettent d'affirmer que :

$$(S_1M) = (HM)$$

Par conséquent :

$$\delta = (S_2H) = S_2H$$

L'angle θ étant petit et si a désigne la distance entre les deux sources :

$$\delta = S_2H \approx a\theta = \frac{ax}{f'_2}$$

Et l'éclairement dans le plan focal de la 2^{ème} lentille :

$$I(x) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{ax}{\lambda_0 f'_2} \right) \right)$$

Le résultat est similaire à celui obtenu sans lentille. La distance trous – écran est remplacée par la distance focale de la 2nde lentille.

Les franges sont évidemment rectilignes et l'interfrange vaut :

$$i = \frac{\lambda_0 f'_2}{a}$$

Exercices d'application : interférences à trois fentes d'Young

On réalise l'expérience des trous d'Young, utilisant deux lentilles convergentes, mais avec trois trous équidistants de a . Les deux lentilles sont identiques, de focale f . La source S (monochromatique de longueur d'onde λ_0 et ponctuelle) et l'écran sont respectivement placés aux foyers objet et image des deux lentilles.

1) Faire un schéma du dispositif expérimental. Quel est le rôle de chaque lentille ?

2) Evaluer la différence de marche δ entre les différents rayons interférant en un point M de de l'écran.

3) Quelle est l'intensité lumineuse observée sur l'écran en fonction de $\cos\varphi$, où $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta$? On

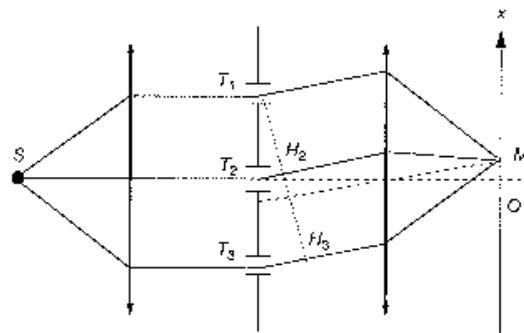
notera I_0 l'intensité en un point de l'écran quand un seul des trous d'Young laisse passer la lumière.

4) Représenter graphiquement l'allure de l'intensité sur l'écran. Expliquer l'annulation pour $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Solution :

1) La 1^{ère} lentille a pour rôle de créer un faisceau de lumière parallèle, arrivant en phase sur les trous.

La 2nd lentille permet de faire interférer des rayons diffractés dans la même direction. Ainsi, les rayons interférant ont même intensité et le contraste de la figure d'interférences est meilleur. De plus, le phénomène est très lumineux autour de O.



2) Les rayons sortent parallèlement à l'axe optique après la 1^{ère} lentille. Les rayons arrivent en phase sur les trous T_1 , T_2 et T_3 . En effet, le point S constitue une surface d'onde ainsi que le plan passant par les trois trous. La différence de marche entre S et un trou quelconque est la même.

Ensuite, les rayons sont diffractés par les trous. Les rayons interférant en M ressortent parallèles des trous et parallèles au rayon auxiliaire passant par le centre de la seconde lentille tracé sur la figure. Le plan perpendiculaire aux rayons émergents passant par T_1 définit H_2 et H_3 . Utilisons le principe du retour inverse de la lumière, avec une source placée en M. Le plan perpendiculaire aux rayons et passant par H_2 et H_3 est une surface d'onde. Par conséquent :

$$(T_1M) = (H_2M) = (H_3M)$$

On en déduit :

$$\delta = (TM) - (T_1M) = (T_2H_2) = a\theta = \frac{ax}{f'}$$

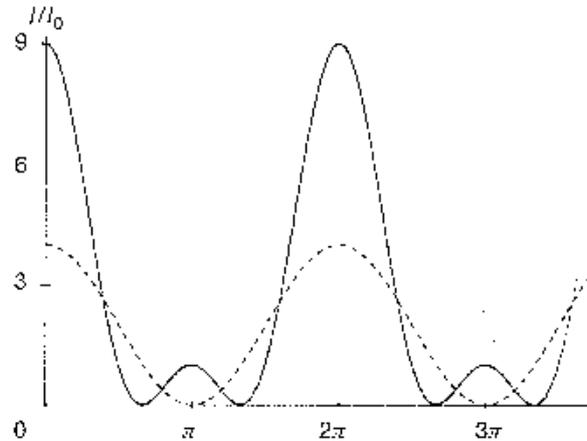
Il existe la même différence de marche entre les rayons passant par T_2 et T_3 .

3) Les rayons arrivant en M sont cohérents, on somme les amplitudes (on pose $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{f'}$) :

$$\underline{s} = s_0 [1 + e^{j\varphi} + e^{2j\varphi}] = s_0 e^{j\varphi} [1 + e^{-j\varphi} + e^{j\varphi}] = s_0 e^{j\varphi} [1 + 2 \cos \varphi]$$

On en déduit l'intensité :

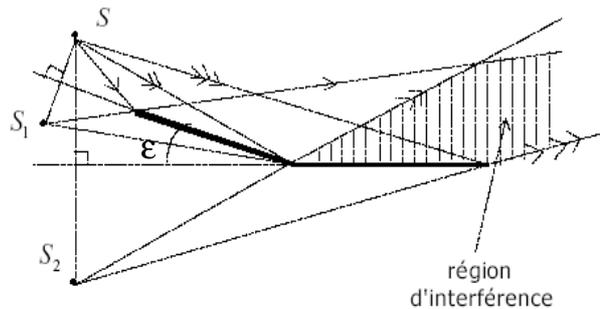
$$I = I_0 \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi ax}{\lambda_0 f'} \right)^2$$



Pour $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, déphasage entre les ondes issues de deux trous successifs, le calcul de l'amplitude revient à sommer 1 , $\exp(i\frac{2\pi}{3})$ et $\exp(i\frac{4\pi}{3})$: on obtient 0 .

4) Autre dispositif diviseur du front d'onde ; les miroirs de Fresnel :

Il s'agit de deux miroirs plans formant un dièdre d'angle ϵ très petit. La source (S) éclaire les miroirs sous une incidence rasante.

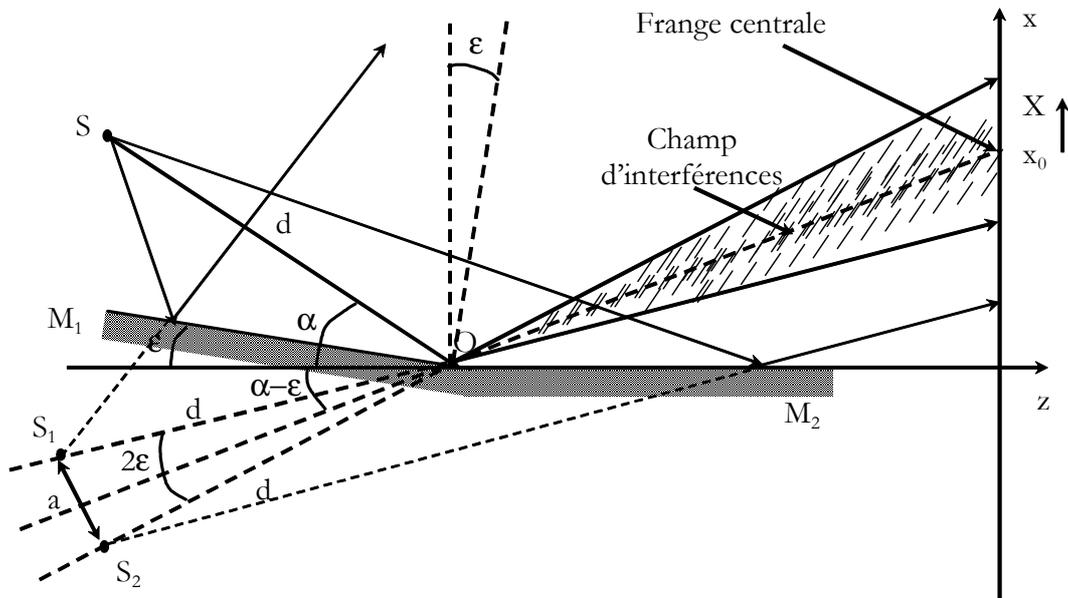
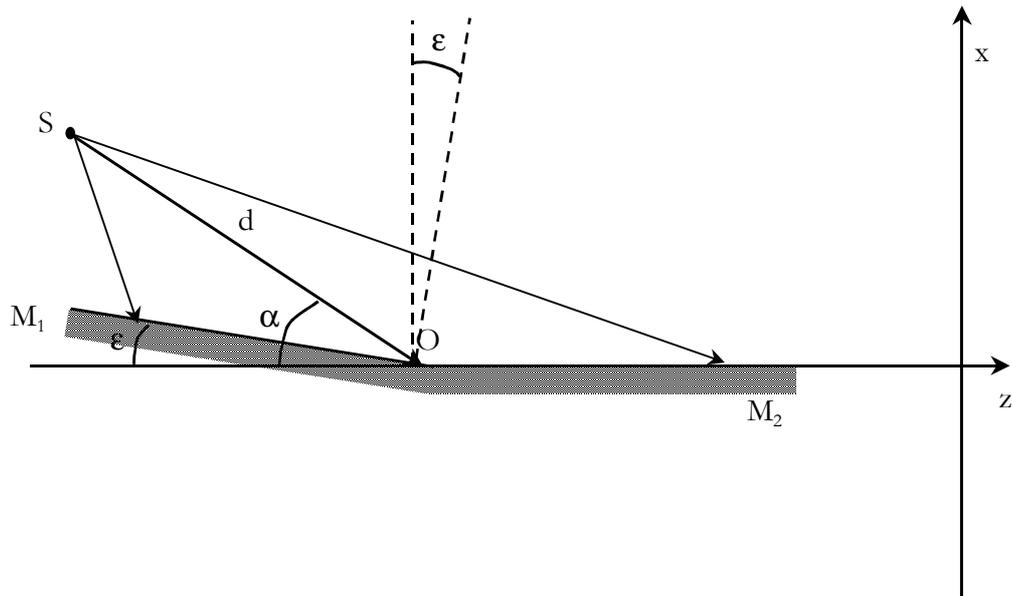


S_1 et S_2 sont les images de S et sont donc symétriques de S par rapport aux plans des miroirs. Tout se passe comme si les rayons provenaient de deux sources secondaires, cohérentes entre elles puisque situées sur un même front d'onde issu de S .

Les miroirs ont des dimensions de $5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ et $\epsilon = 15^\circ$. La source ($\lambda = 546 \text{ nm}$) est placée à une distance $d = 25 \text{ cm}$ de l'arête dans une position repérée par l'angle α très petit.

On observe le phénomène d'interférences sur un écran placé à une distance $D = 1,75 \text{ m}$ de l'arête.

On raisonne dans le plan ($y = 0$). S et ses deux images S_1 et S_2 sont situées sur un même cercle de centre O et de rayon d :



* La distance entre les deux sources fictives vaut : $a = 2\epsilon d$.

* La frange centrale (lieu où la différence de marche est nulle) est sur la médiatrice de S_1S_2 , repérée par l'angle $\alpha - \epsilon$.

* L'abscisse de la frange centrale est donc : $x_0 = D(\alpha - \epsilon)$.

* La droite S_1S_2 est pratiquement parallèle à l'écran, à une distance $D + d$.

* La différence de marche en un point de l'écran est : $\delta = \frac{2\epsilon d X}{D + d}$ (où X est l'abscisse repérée à partir de la frange centrale) et l'interfrange :

$$i = \frac{\lambda(D+d)}{2d\epsilon} = 0,5 \text{ mm}$$

* Le contraste est égal à 1 dans tout le champ d'interférences et les interférences ne sont pas localisées.

* La largeur du champ d'interférences est : $2\varepsilon D = 15 \text{ mm}$: on peut visualiser une trentaine de franges.

* La source n'est plus ponctuelle mais possède une étendue verticale (selon (Ox)) ; soit $\Delta\alpha$ la largeur angulaire de la source. Le déplacement angulaire de $\frac{\Delta\alpha}{2}$ provoque un déplacement de la frange centrale de $\Delta x_0 = D \frac{\Delta\alpha}{2}$. Les franges seront brouillées si ce déplacement est de l'ordre de grandeur de la demi-interfrange, soit :

$$D \frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{1}{2} \frac{\lambda(D+d)}{2d\varepsilon} \quad \text{soit} \quad \Delta\alpha = \frac{\lambda}{2d\varepsilon} \left(1 + \frac{d}{D}\right)$$

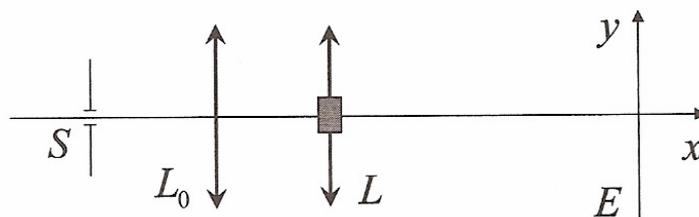
La largeur critique de la source, appelée longueur de cohérence spatiale, vaut alors :

$$\ell_s = d\Delta\alpha = \frac{\lambda}{2\varepsilon} \left(1 + \frac{d}{D}\right) = 0,07 \text{ mm} \quad (\text{Interférences peu lumineuses !})$$

Nous verrons en exercice un autre dispositif diviseur d'onde n'utilisant qu'un seul miroir : le miroir de Lloyd.

Un exercice d'application ; bilentilles à obturation :

Une fente source S fine, monochromatique ($\lambda = 589,3 \text{ nm}$) est placée dans le plan focal d'une lentille convergente L_0 . Un peu plus loin sont placées les deux moitiés d'une lentille convergente L de distance focale $f = 25 \text{ cm}$. Cette lentille a été sciée en deux suivant un diamètre ; les deux moitiés sont écartées symétriquement d'une distance $2\varepsilon = 2 \text{ mm}$. L'intervalle ainsi créé entre les demi-lentilles est obturé par un cache opaque (parallèle à la fente S). On observe dans un plan de front yEz situé à $d = 50 \text{ cm}$ de L .

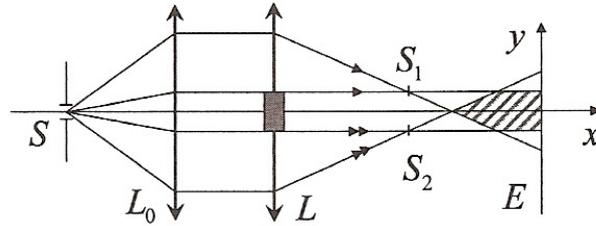


- Réaliser une figure claire et l'expliquer. Décrire le système de franges et déterminer la largeur du champ d'interférence sur l'axe Ey . Quelle est l'intensité lumineuse en un point M du champ ? Combien y a-t-il de franges brillantes visibles ?
- La source émet en réalité un doublet : $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$. Au bout de combien de franges les deux systèmes peuvent-ils se brouiller ? Conclusion.

c) On place entre les deux lentilles, sur la partie droite de l'axe (Sx) dans le sens de la lumière et perpendiculairement à cet axe, une lame à faces parallèles d'un verre d'indice $n = 1,52$. Déterminer son épaisseur e permettant de « visualiser » au centre de l'écran la première antioïncidence de la question (b). Qu'observe-t-on sur l'écran ?

Réponse :

Il faut avant tout faire une figure soignée avec deux faisceaux de part et d'autre de l'axe Sx (un rayon passant par le centre, même décalé, d'une lentille, n'est pas dévié !).



- a) L'onde plane issue de la lentille L_0 converge après les deux demi-lentilles formées à partir de L aux deux « demi-foyers » notés S_1 et S_2 , car ces deux points servent de sources cohérentes au système d'interférence. Ce sont les sources secondaires au sommet chacune d'un faisceau lumineux ; le recouvrement de ces faisceaux délimite la zone d'interférence hachurée sur la figure. L'ensemble est équivalent à deux trous d'Young S_1 et S_2 , et les franges sont des segments de droite dans la direction Ez .

La largeur du champ d'interférence sur l'axe Ey donc simplement $2\varepsilon = 2 \text{ mm}$.

L'analogie avec les trous d'Young évite tout calcul ; la différence de marche en un point M du champ s'obtient par analogie :

$$\delta = \frac{ax}{D}, \text{ soit avec les notations d'ici : } \delta(M) = S_2M - S_1M = \frac{2\varepsilon y}{d-f}$$

$$\text{d'où l'intensité : } I(y) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{2\varepsilon y}{d-f} \right)$$

L'interfrange est $i = \frac{\lambda D}{a} = \frac{\lambda(d-f)}{2\varepsilon} \approx \underline{0,074 \text{ mm}}$ (les franges ne sont pas visibles à l'œil).

Le nombre de franges est : $\underline{N} = \frac{2\varepsilon}{i} = \frac{(2\varepsilon)^2}{\lambda(d-f)} = \underline{27}$ (formule homogène)

Rq 1 : En augmentant la taille 2ε du cache, on augmente d'autant la largeur du champ d'interférence en diminuant d'autant l'interfrange (car S_1 et S_2 s'écartent) ; il n'est donc pas étonnant que N soit en $(2\varepsilon)^2$.

Rq 2 : Pour évaluer plus correctement N , il conviendrait de rajouter à la frange centrale brillante, le nombre (entier) de franges brillantes de part et d'autre

$$\text{de l'axe soit : } N = 1 + 2 \times E \left(\frac{\varepsilon}{i} \right) = 1 + 2 \times 13 = 27.$$

- b) Soit y_0 l'ordonnée du point où se produirait la première antinœud et à laquelle correspond δ_0 . On a $\delta_0 = p_0\lambda_1 = (p_0 - 1/2)\lambda_2$ où p_0 est l'ordre entier soit :

$$\underline{p_0} = \frac{\lambda_2}{2\Delta\lambda} = \underline{491 \text{ franges}}$$

Or il y a seulement 13 franges dans le champ de chaque côté ; ce phénomène n'est donc pas visible (pas de problème d'incohérence temporelle) et le doublet se comporte comme une radiation monochromatique ($\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$).

- c) Placer une lame à faces parallèles sur le trajet 2 revient sur l'écran à translater le système de franges ; il faut que $\delta = (n-1)e = p_0\lambda_1$, soit :

$$e = \frac{p_0\lambda_1}{n-1} \approx \underline{0,56 \text{ mm}}$$

L'éclairement de l'écran est alors uniforme puisque le contraste à cet endroit est nul.

5) Problème de la cohérence spatiale :

a) Cas de deux sources ponctuelles décalées (de même longueur d'onde) :

On considère une source constituée de deux points P_1 et P_2 , séparés d'une distance h . Cette source éclaire deux trous d'Young. Ce cas peut représenter par exemple les deux composantes d'une étoile double vue de la Terre.

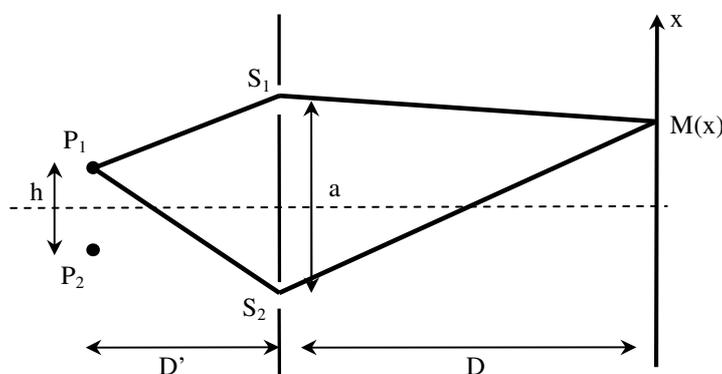
Les deux points sources sont incohérents : l'intensité totale sur l'écran sera donc la somme des intensités créées par chacune des sources séparément.

On s'intéresse à l'éclairement dû à la source P_1 ; la différence de marche totale est :

$$\delta = (P_1S_2M) - (P_1S_1M) = \frac{ah}{2D'} + \frac{ax}{D} \quad \left(x \Leftrightarrow \frac{h}{2} ; D \Leftrightarrow D'\right)$$

L'intensité vaut alors :

$$I_1(M) = 2I_{0,1} \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ah}{2D'} + \frac{ax}{D} \right) \right)$$



L'intensité due à la seconde source est :

$$I_2(M) = 2I_{0,2} \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(-\frac{ah}{2D'} + \frac{ax}{D} \right) \right)$$

On suppose dans la suite que $I_{0,1} = I_{0,2} = I_0$; alors, en utilisant :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

On obtient :

$$I(M) = 4I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ah}{2D'}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{D}\right) \right)$$

On reconnaît dans le second cosinus le terme d'interférences des trous d'Young pour une seule source ponctuelle. Les franges sont donc rectilignes et l'interfrange vaut $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$.

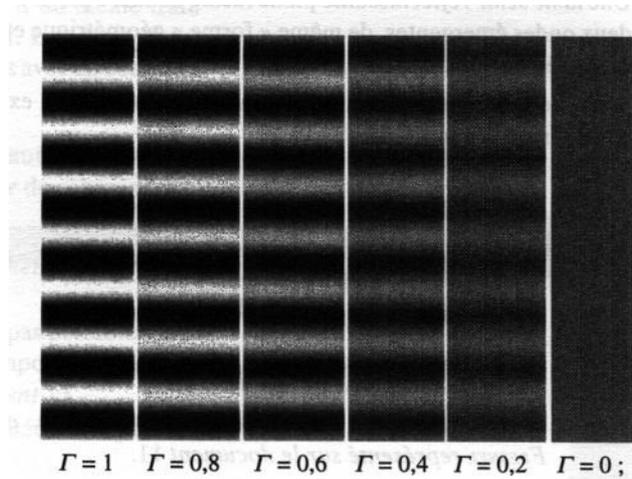
Le 1^{er} cosinus est indépendant du point d'observation. Il est appelé visibilité et noté V :

$$V = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ah}{2D'}\right)$$

Le contraste des franges vaut :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |V|$$

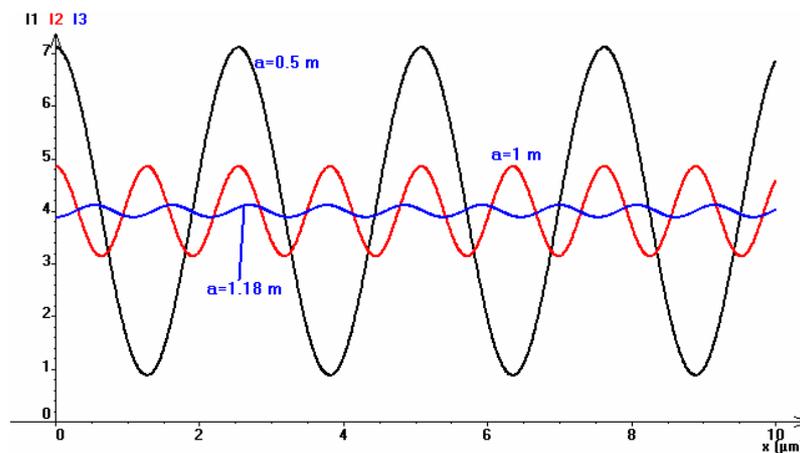
Contraste et visibilité sont donc égaux au signe près.



Allure des franges d'interférences pour quelques valeurs de C.

Application ; observation d'une étoile double au travers de fentes d'Young (CCP) :

Les deux composantes d'une étoile double sont vues sous un angle α depuis la Terre. On pointe un système de deux trous d'Young vers le milieu des deux étoiles et on place un écran à la distance D derrière les deux trous.



On obtient une 1^{ère} annulation de contraste pour $a = 1,16 \text{ m}$, dans le visible ($\lambda_0 = 635 \text{ nm}$).

Que vaut α ? (Courbes précédentes obtenues avec Regressi)

On a ici : $\alpha = \frac{h}{D'}$. L'éclairement devient :

$$I(M) = 4I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{a\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{D}\right) \right)$$

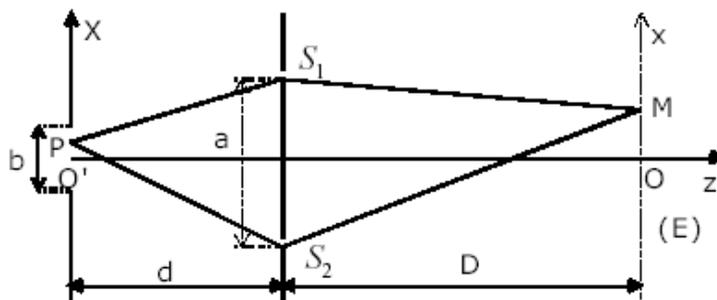
et le contraste : $C = \left| \cos\left(\frac{\pi}{\lambda_0} a\alpha\right) \right|$

Il s'annule la 1^{ère} fois pour :

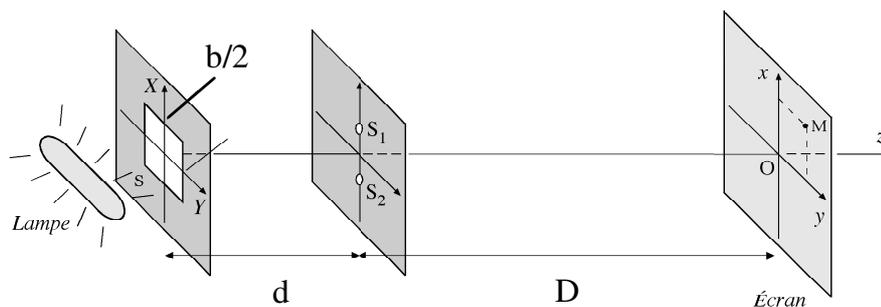
$$\frac{\pi}{\lambda_0} a\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \alpha = \frac{\lambda_0}{2a} = 2,74 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 5,6 \cdot 10^{-2}''$$

b) Cas d'une fente source large : (problème de cohérence spatiale)

Dans le dispositif des fentes d'Young utilisé en lumière monochromatique de longueur d'onde λ_0 , on va s'intéresser à l'influence de la largeur b de la fente source selon l'axe $O'X$. Les atomes de la lampe placée derrière les éléments de surface de la fente source sont incohérents entre eux : on pourra donc se contenter de sommer les éclairagements dus à chacun de ces éléments de surface.



On découpe la fente source en bandes de largeur élémentaire dX parallèles à l'axe Oy ; pour chacune de ces sources élémentaires, il y aura interférences à travers les sources secondaires S_1 et S_2 .



On peut donc écrire :

$$dI(M) = \frac{2I_0}{b} (1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta) dX$$

En supposant que l'éclairement est homogène sur la surface bdX et en notant δ la différence de marche entre les points P et M. Celle-ci vaut :

$$\delta = \frac{aX}{d} + \frac{ax}{D}$$

En intégrant, il vient :

$$I(M) = \frac{2I_0}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda_0} \left(\frac{X}{d} + \frac{x}{D} \right) \right) \right) dX$$

Soit :

$$I(M) = \frac{2I_0}{b} \left[b + \frac{\lambda_0 d}{2\pi a} \left(\sin \left(\frac{2\pi a}{\lambda_0} \left(\frac{b}{2d} + \frac{x}{D} \right) \right) - \sin \left(\frac{2\pi a}{\lambda_0} \left(\frac{-b}{2d} + \frac{x}{D} \right) \right) \right) \right]$$

Finalement :

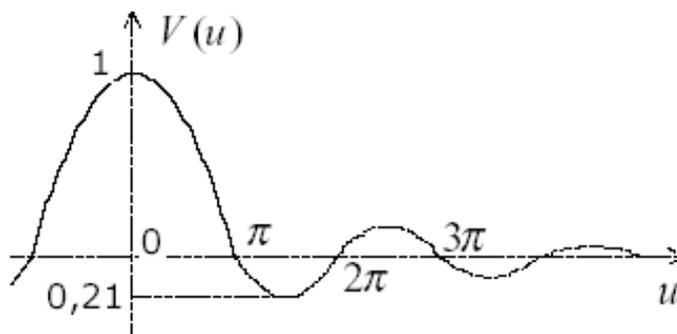
$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \frac{\lambda_0 d}{\pi ab} \sin \left(\frac{\pi ab}{\lambda_0 d} \right) \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right]$$

On définit le sinus cardinal, $\text{sin} cx = \frac{\text{sin} x}{x}$, alors :

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \text{sin} c \left(\frac{\pi ab}{\lambda_0 d} \right) \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right]$$

Le terme $V = \text{sin} c \left(\frac{\pi ab}{\lambda_0 d} \right) = \text{sin} c(u)$ est le terme de visibilité des franges (on a posé $u = \frac{\pi ab}{\lambda_0 d}$).

L'allure de la courbe $V(u)$ est la suivante : (Le contraste est égal à la valeur absolue de $V(u)$)



Pour $u = \pi$, le contraste s'annule pour la 1^{ère} fois et l'écran est uniformément éclairé ; pour $\pi \leq u \leq 2\pi$, le facteur de visibilité est négatif : les franges sombres occupent la position des franges brillantes (il y a inversion du système de franges).

Le contraste diminue lorsque u augmente, donc quand la largeur b de la fente source augmente : le critère de finesse de la fente source est sévère puisqu'en pratique b ne doit pas excéder 0,1 mm.

On peut interpréter l'annulation du contraste pour $u = \pi$; on a alors :

$$u = \frac{\pi ab}{\lambda_0 d} = \pi \quad \text{soit} \quad b = \frac{\lambda d}{a}$$

Considérons deux points sources P et P' distants de $\frac{b}{2} = \frac{\lambda d}{2a}$; alors :

$$\delta_{2/1}(P) = \frac{aX}{d} + \frac{ax}{D} \quad \text{et} \quad \delta_{2/1}(P') = \frac{a(X + b/2)}{d} + \frac{ax}{D}$$

Par conséquent :

$$\delta_{2/1}(P') - \delta_{2/1}(P) = \frac{ab}{2d} = \frac{\lambda}{2}$$

P et P' vont donc donner sur l'écran un système d'interférences en opposition de phase (les franges brillantes de l'un coïncident avec les franges sombres de l'autre) ; en regroupant tous les points sources par paires, on comprend que le contraste s'annule pour une telle valeur de b.

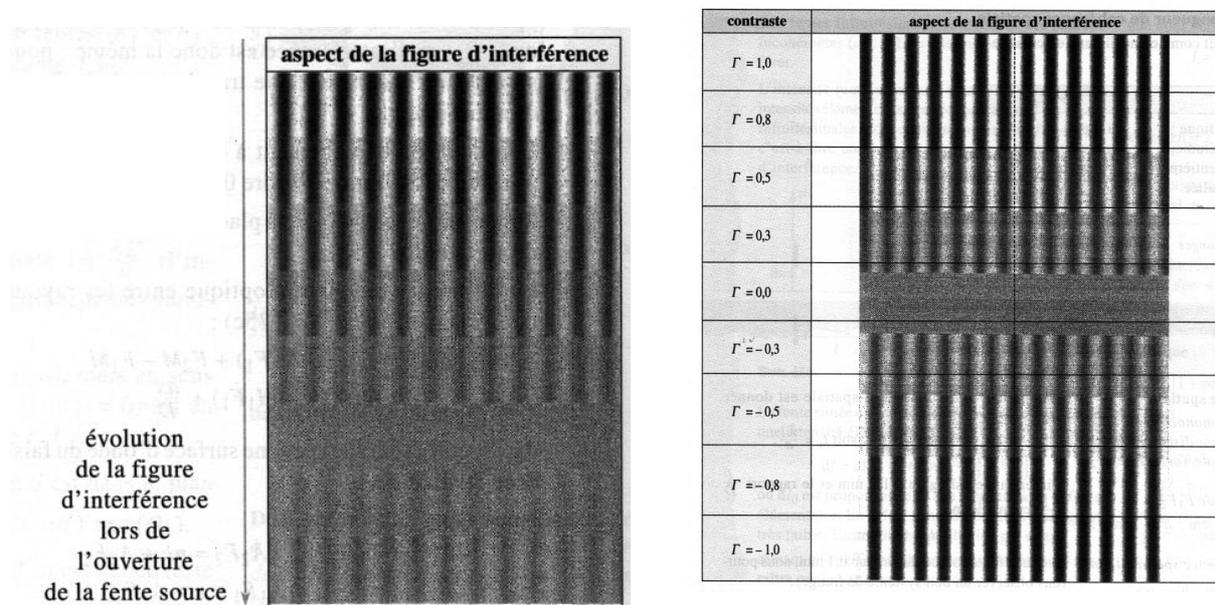


Figure de gauche : aspect de la figure d'interférences en fonction de l'ouverture de la fente source.
Figure de droite : aspect d'une figure d'interférences en fonction du contraste. On remarque l'inversion de contraste lorsque Γ change de signe.

On peut déterminer la longueur de cohérence spatiale, largeur de la fente source obtenue lorsque le contraste s'annule pour la 1^{ère} fois, soit pour $u = \pi$:

$$u = \frac{\pi ab}{\lambda_0 d} = \pi \quad \text{soit} \quad b = \ell_s = \frac{\lambda_0 d}{a}$$

6) Problème de la cohérence temporelle :

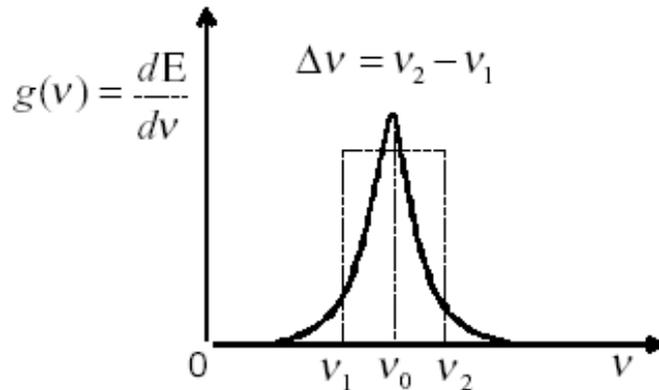
Une source n'est jamais parfaitement monochromatique. La théorie de la transformation de Fourier montre qu'à un train d'ondes de durée finie τ , correspond un élargissement spectral de largeur :

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau}$$

$\Delta\nu$ peut varier de 10^{10} Hz (lampe spectrale) à 10^5 Hz (laser monomode).

L'effet Doppler (les atomes émettant les trains d'ondes sont en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire) et les collisions entre atomes pendant l'émission du train d'ondes contribuent à élargir la raie.

On représente la densité spectrale de la source, $g(\nu) = \frac{dI}{d\nu}$, qui représente la contribution de la bande de fréquences de largeur $d\nu$ à l'éclairement total, soit :



La radiation émise par la source a un profil quelconque qu'il faut modéliser ; pour simplifier les calculs, on assimile le profil spectral à un rectangle, de même surface que le profil réel.

Deux radiations de fréquences différentes ne peuvent interférer : on peut définir un déphasage instantané entre ces ondes mais la valeur moyenne temporelle de ce déphasage sera nul.

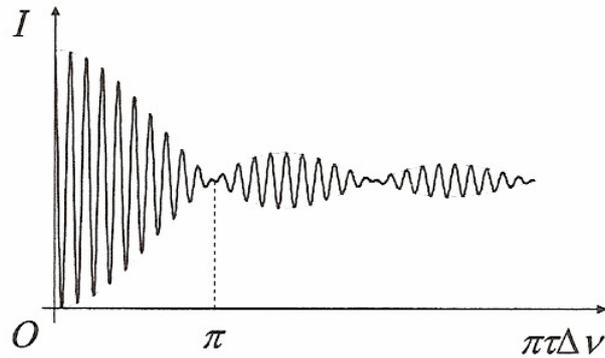
On sommera donc les éclairements de chaque bande de fréquences de largeur $d\nu$ (chacune interférant après division du front d'ondes à travers les sources secondaires).

En considérant le dispositif des fentes d'Young (avec fentes infiniment fines) et en notant $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ la largeur spectrale de la source, on peut écrire :

$$I(M) = \frac{2I_0}{\Delta\nu} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right) \right) d\nu = \frac{2I_0}{\Delta\nu} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{cD} \nu\right) \right) d\nu$$

Après calculs, on obtient, en posant $u = \frac{\pi ax \Delta\nu}{cD} = \pi \tau \Delta\nu$ (τ est la différence des temps de parcours, donné par $\delta = c\tau$) :

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + V(u) \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right) \right) \quad \text{avec} \quad V(u) = \sin cu = \frac{\sin u}{u}$$



Il apparaît un nouveau facteur de visibilité (de même forme mathématique que celui obtenu en cohérence spatiale et qui dépend du point M et qui diminue lorsque x augmente), qui est d'autant plus faible que le profil spectral est large ; on constate que le contraste reste acceptable tant que $u < \pi$, soit :

$$u = \frac{\pi ax \Delta \nu}{cD} \leq \pi \quad \text{soit} \quad \frac{ax}{D} \leq \frac{c}{\Delta \nu} = c\tau_0$$

où τ_0 est la durée moyenne d'un train d'ondes. On retrouve ainsi qu'il faut que $\delta = \frac{ax}{D} \leq L_c = c\tau_0$ pour qu'il y ait interférences. Ceci signifie que plus on s'éloigne de O sur l'écran et plus la différence de marche augmente et plus les deux trains d'ondes jumeaux issus de S_1 et de S_2 se décalent : si δ continue d'augmenter, les deux trains d'ondes finissent par se « rater » et ne plus interférer. La zone de l'écran devient alors uniformément éclairée, ce qui correspond bien à un contraste nul.

Dans la pratique, la différence de marche obtenue avec les fentes d'Young atteint quelques λ et n'atteint pas forcément la longueur de cohérence (c'est le cas pour la raie verte du mercure, pour laquelle la longueur de cohérence est de 5 cm).

Un exemple ; Le doublet du Sodium :

La source ponctuelle est à présent constituée de deux raies, par exemple le doublet jaune du sodium $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$. Expliquer qualitativement la situation et évaluer d'abord sans grand calcul l'abscisse x_0 où se produit le premier brouillage de franges. Comment confirmer ce résultat par un calcul ? Que vaut le contraste ? Tracer le graphe $I(x)$. Pourquoi le brouillage des franges avec le doublet jaune du sodium n'est-il pas observable avec un système de type fentes d'Young ? Quel dispositif permet de le voir facilement ?

Réponses :

L'interfrange valant $i = \lambda D / a$, chaque longueur d'onde donne son propre système de franges. Les deux systèmes se superposent puisque deux longueurs d'onde différentes donnent des éclaircissements incohérents : il suffit d'additionner les intensités. La différence de marche $\delta(M) = S_2M - S_1M = ax / D$ est inchangée et en particulier, $\delta(O) = 0 \quad \forall \lambda$: au centre O de l'écran, il y a une frange brillante pour toutes les longueurs d'onde.

Raisonnement qualitatif : le contraste s'annule pour la première fois, $C = 0$, en un point M_0 où une frange claire du système donné par λ_1 correspond à une frange sombre du système donné par λ_2 :

$$p(M_0, \lambda_1) = p(M_0, \lambda_2) + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_0}{\lambda_1 D/a} = \frac{x_0}{\lambda_2 D/a} + \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 \approx \frac{D\lambda^2}{2a\Delta\lambda}$$

Par rapport à $x = 0$, ceci se produit au bout d'un nombre de franges égal à :

$$p_0 = \frac{x_0 - 0}{i} = \frac{D\lambda^2 / 2a\Delta\lambda}{\lambda D/a} = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda} = 491 \text{ franges}$$

Ceci est énorme et ne joue pas avec un système de type fentes d'Young où, à cause de la diffraction des fentes, on voit au maximum 5 franges de chaque côté de O ; le contraste n'est donc pas limité par le doublet.

Par le calcul : on suppose les intensités I_0 identiques ; les intensités (systèmes de franges) dus à λ_1 et λ_2 sont, au point M de l'écran :

$$I_1(x) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi ax}{\lambda_1 D} \right) \text{ et } I_2(x) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi ax}{\lambda_2 D} \right)$$

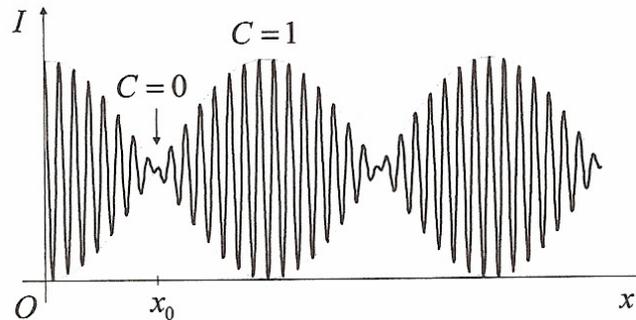
Par incohérence, leur somme est, en utilisant $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$

$$I(x) = 4I_0 \left[1 + \cos \frac{\pi a \Delta \lambda x}{\lambda^2 D} \cos \frac{2\pi ax}{\lambda D} \right]$$

Le second cosinus contient le terme de phase habituel $2\pi\delta/\lambda$ et donne les franges ; le premier, de variation beaucoup plus lente car $\Delta\lambda/\lambda \ll 1$ correspond au facteur de visibilité, d'où le contraste qui dépend cette fois de x donc de l'endroit sur l'écran :

$$C(x) = \left| \cos \frac{\pi a \Delta \lambda x}{\lambda^2 D} \right|$$

Il s'annule la 1ère fois pour $\frac{\pi a \Delta \lambda x_0}{\lambda^2 D} = \frac{\pi}{2}$, ce qui redonne la valeur précédente.



Dans un fuseau (entre deux annulations de contraste), on compte $2p_0 = 982$ franges, qui sont faciles à faire défiler avec un interféromètre de Michelson. Le graphe ci-dessus donne une idée de l'allure des franges, mais les rapports ne sont pas respectés.

Remarque :

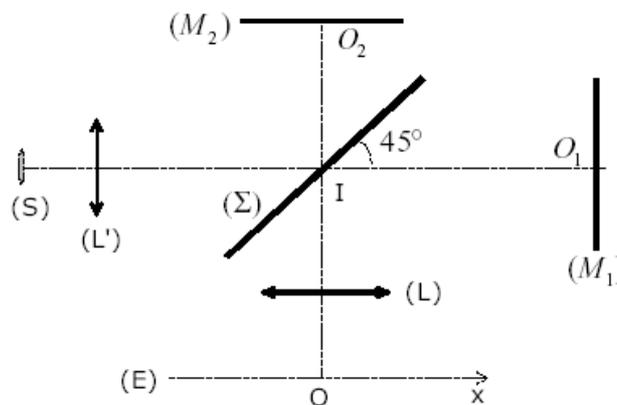
$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{c}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) = c \frac{(v_1 + v_2)/2}{v_1 v_2} = c \frac{v_0}{(v_0 - \Delta v)(v_0 + \Delta v)} = c \frac{v_0}{v_0^2 - (\Delta v)^2} \approx \frac{c}{v_0} = \lambda_0 \quad (\Delta v \ll v_0)$$

Le paragraphe suivant fait appel à un système interférentiel à division d'amplitude, appelé l'interféromètre de Michelson. On montre que seuls les systèmes à division d'amplitude permettent d'utiliser une source large en gardant un bon contraste des franges, non pas dans tout le champ d'interférences, mais sur une surface appelée surface de localisation ou alors à l'infini.

III) Interférences par division d'amplitude :

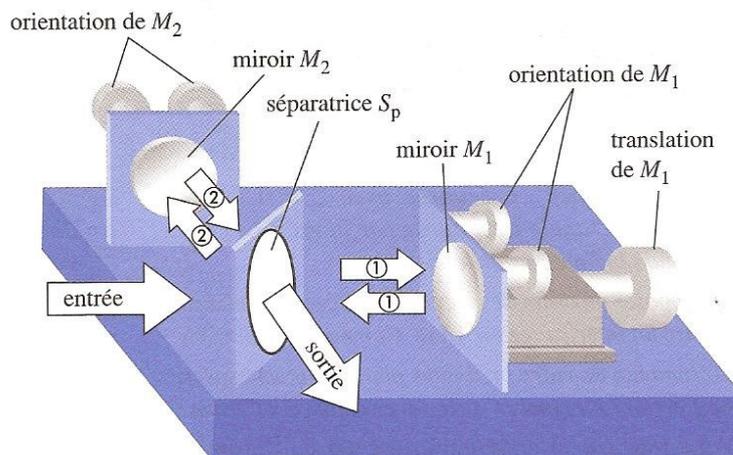
1) Description de l'interféromètre de Michelson :

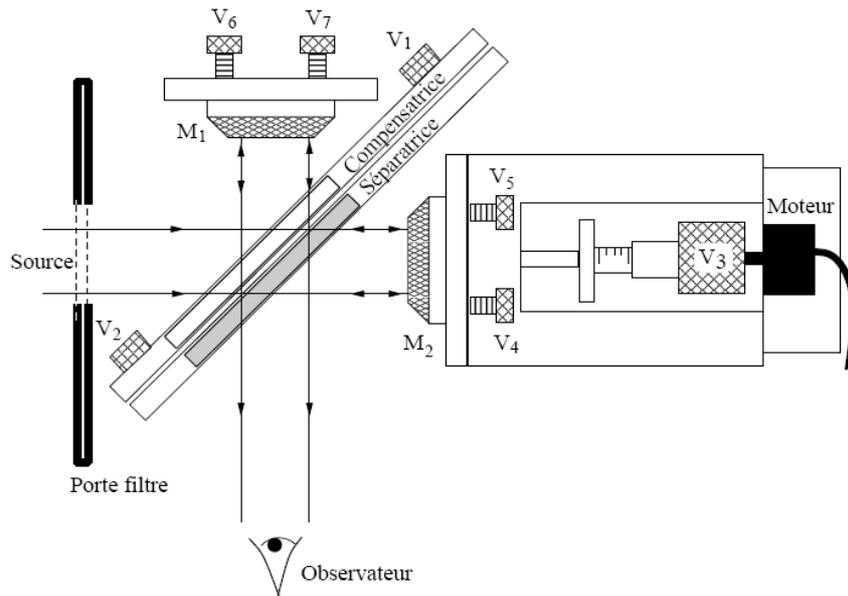
Une source (S) est placée au foyer d'une lentille collimatrice (L'). Le faisceau issu de (S) est divisé en deux par la lame semi-réfléchissante (Σ), appelée séparatrice. Il suffit alors de faire se superposer les rayons transmis et réfléchis par l'intermédiaire de deux miroirs. Le miroir (M_2) est fixe, l'autre est monté sur un chariot mobile. L'orientation des miroirs peut se régler par rotation autour d'un axe vertical et d'un axe horizontal.



L'observation peut se faire grâce à une lentille de projection sur un écran (E).

On parle de « division d'amplitude ».





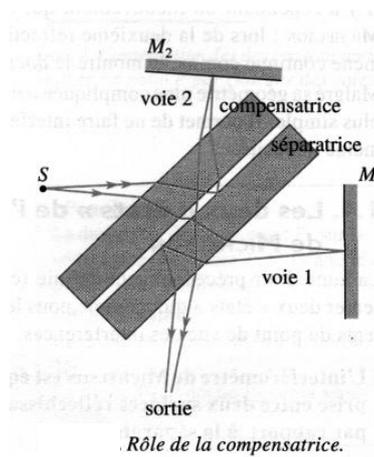
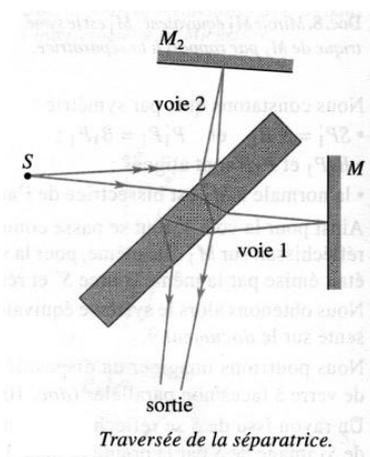
Complément : nécessité d'une séparatrice (voir TP)

La lame séparatrice est un verre à faces parallèles dont une des deux faces est traitée pour être semi-réfléchissante. Ainsi, un rayon traverse une fois la séparatrice lorsqu'il suit la voie 2 et trois fois sur la voie 1.

En plaçant une lame du même verre, de même épaisseur, parallèlement à la séparatrice, on compense cette dissymétrie gênante quand on souhaite calculer les différences de marche entre les deux voies. Cette lame s'appelle la compensatrice.

Sur chaque voie, les faisceaux traversent maintenant quatre fois l'épaisseur e du même verre, d'où une compensation des différences de marche supplémentaires dans le verre sur les deux trajets.

En général, cette compensation n'est pas parfaite puisque les épaisseurs traversées dépendent de l'incidence des rayons, mais elle s'avère suffisante expérimentalement.



La compensation n'est parfaite que si l'interféromètre est réglé en lame d'air à faces parallèles et si les interférences sont observées à l'infini.

Intérêt du Michelson :

La localisation des interférences visualisées avec le Michelson dépend non seulement de la taille de la source mais aussi de la configuration du Michelson.

- Michelson éclairé par une source ponctuelle :

Si le Michelson est éclairé par une source (quasi-)ponctuelle, comme par un laser HeNe, les interférences sont visibles dans toute la zone de recouvrement des faisceaux : on dit que les interférences ne sont pas localisées. On peut les observer sans aucun système optique.

- Michelson éclairé par une source large en lames à faces parallèles :

Quand on utilise le Michelson réglé en lames à faces parallèles, éclairé par une source large, les interférences ne sont pas brouillées mais elles sont localisées à l'infini. On peut les observer:

- * Soit en plaçant un écran dans le plan focal image d'une lentille convergente,
- * Soit en observant à l'œil nu sans accommoder.

- Michelson éclairé par une source large en coin d'air :

Si le Michelson, réglé en coin d'air, est éclairé par une source large, comme par une lampe spectrale ou bien une lampe blanche, les interférences ne sont pas brouillées mais elles sont localisées au voisinage du coin d'air. On peut les observer :

- * Soit en formant l'image du coin d'air (c'est-à-dire des miroirs) sur un écran grâce à une lentille convergente,
- * Soit en observant à l'œil nu le coin d'air (c'est-à-dire les miroirs) en accommodant.

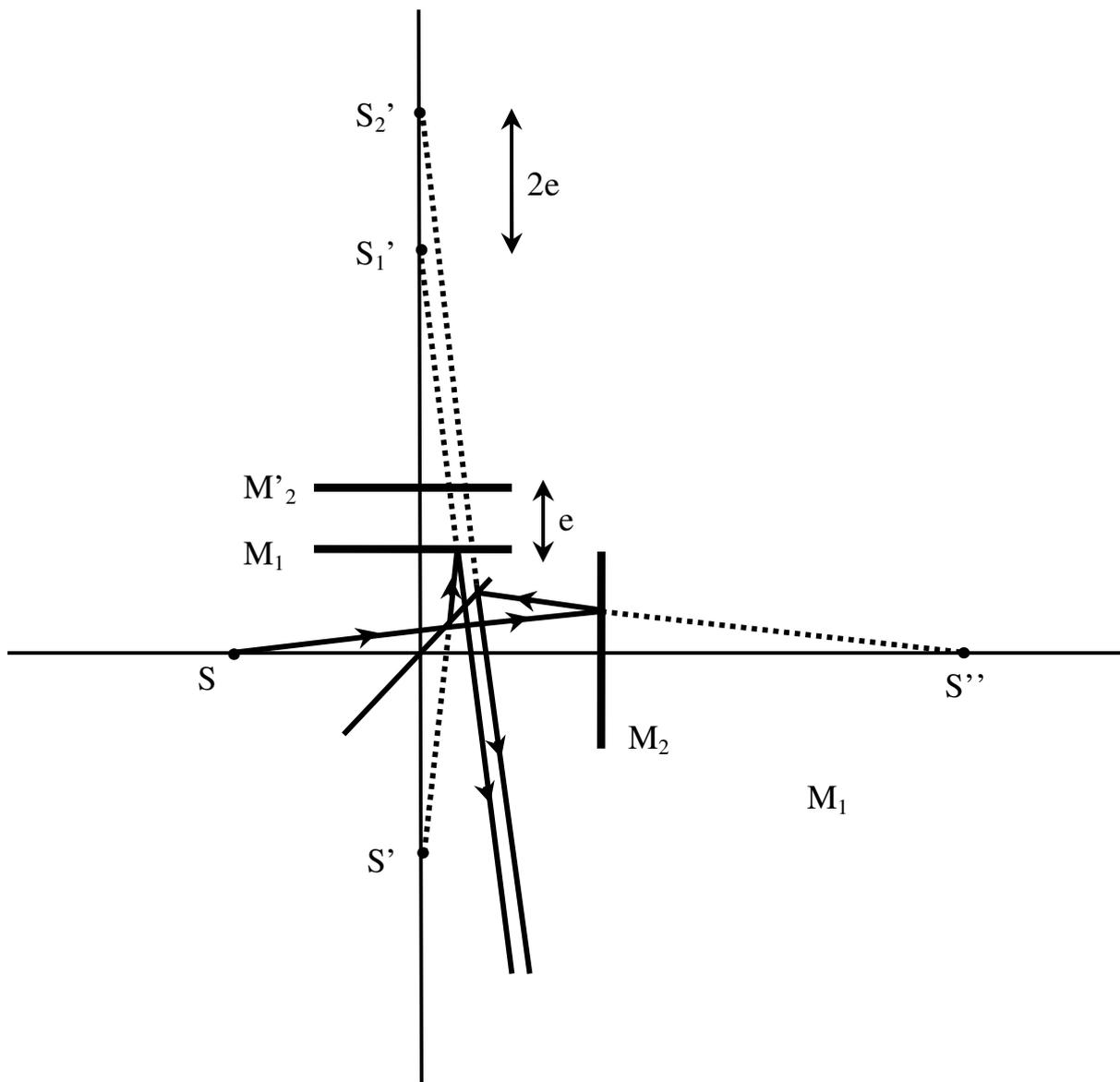
On peut signaler que l'interféromètre de Michelson permet de mesurer des distances macroscopiques à une fraction de longueur d'onde près, de déterminer des indices (par interposition d'une lame d'épaisseur connue sur l'un des « bras » de l'interféromètre), de résoudre un doublet comme celui du sodium, ...

2) Schéma équivalent de l'interféromètre de Michelson :

(Le présenter sur le cas de la lame d'air avec deux rayons parallèles)

La symétrie plane conservant les distances, le rayon réel transmis par la séparatrice, puis réfléchi par le miroir (M_1) et enfin réfléchi par la séparatrice, pourra être remplacé par un rayon virtuel réfléchi par la séparatrice, puis réfléchi par un miroir virtuel (M_1') symétrique de (M_1) par rapport à la séparatrice et enfin transmis par cette séparatrice.

Schéma équivalent dans le cas de la lame d'air



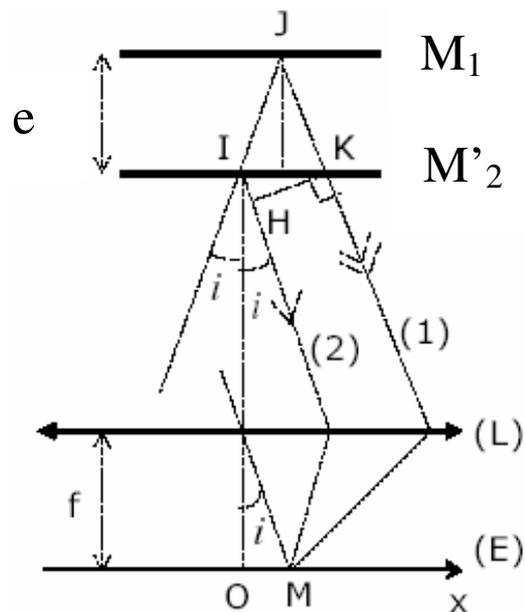
$$(SM)_1 = (S'M)_1$$

$$(SM)_2 = (S'M)_2 \text{ par le miroir } M'_2$$

Tout se passe comme si on pouvait placer la source (S) en (S') (son symétrique par rapport à la séparatrice) et étudier la propagation des rayons issus de (S') à travers les deux miroirs (M₁) et (M'₂), symétrique de (M₂) par rapport à la séparatrice.

3) Utilisation en lame d'air ; franges d'égal inclinaison :

Dans ce cas, les miroirs réels (M_1) et (M_2) sont perpendiculaires entre eux et, par conséquent, les miroirs (M_1) et (M'_2) sont parallèles. On raisonne sur la figure ci-dessous :

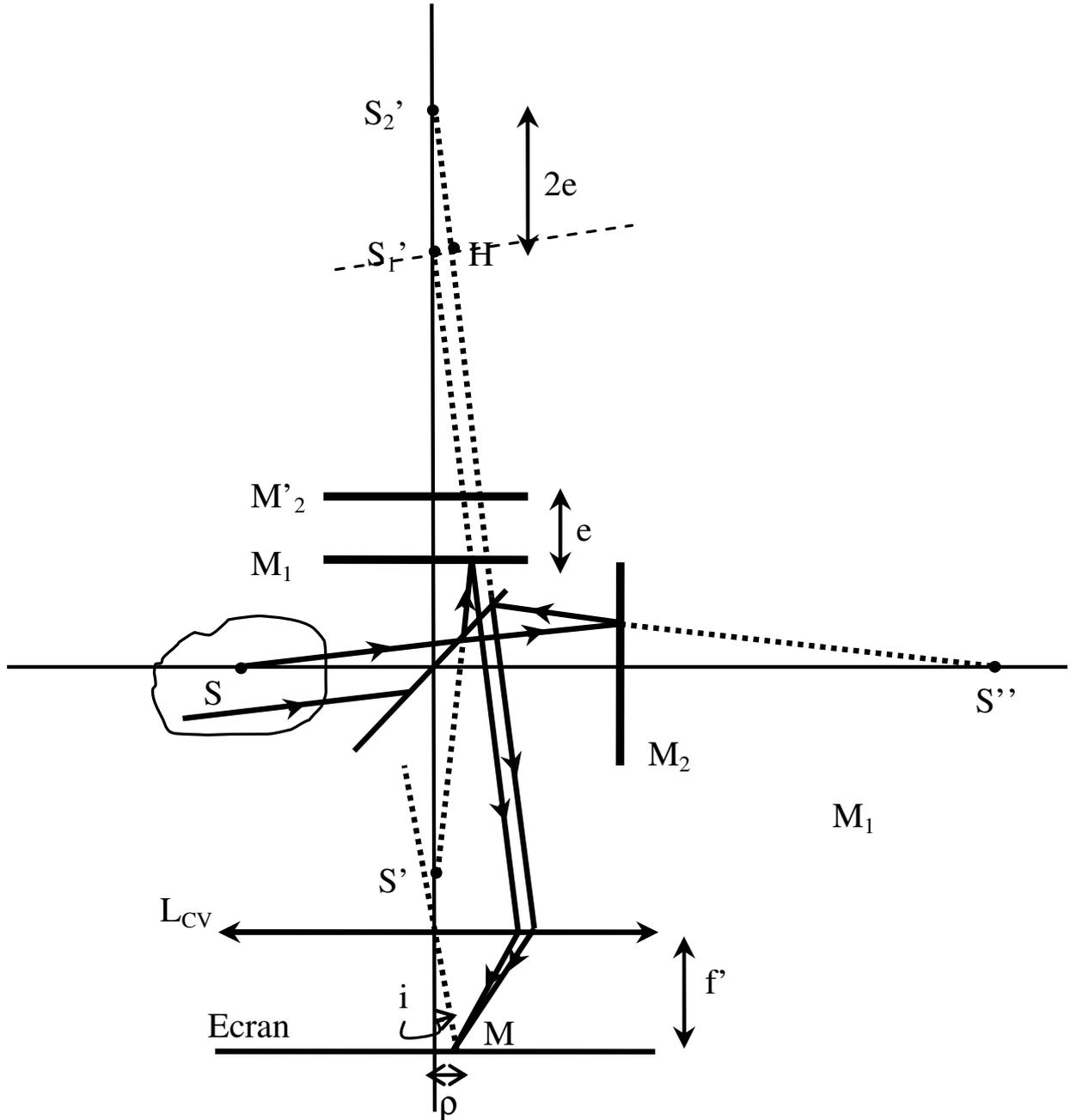


A cause de l'étendue de la source, les rayons étudiés font un angle i , qui reste très faible avec l'axe du système. Sur cette figure, la séparatrice et la compensatrice n'ont pas été représentées, car elles sont supposées réglées parfaitement et n'introduisent aucun déphasage.

Le miroir réel et le miroir virtuel constituent une lame d'air à faces parallèles, d'où le nom de ce type de réglage.

On constate que les rayons (1) et (2) ressortent parallèles. Ils vont donc interférer à l'infini qui est le lieu de localisation des franges : on pourra les observer sur un écran placé dans le plan focal d'une lentille convergente.

**Calcul de la différence de marche dans le cas de la lame d'air
(Interférences localisées à l'infini, observables dans
le plan focal d'une lentille CV)**



D'après le théorème de MALUS :

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = (S'_2 H) = 2e \cos i$$

$$\delta \approx 2e \left(1 - \frac{i^2}{2} \right) = 2e \left(1 - \frac{\rho^2}{2f'^2} \right)$$

Compléments : calcul de la différence de marche (méthode plus longue, à éviter !)

$$\delta_{1/2} = 2 IJ - IH$$

De plus :

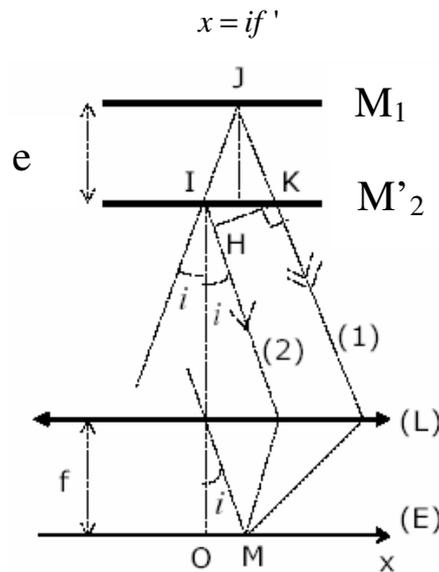
$$\cos i = \frac{e}{IJ} \quad ; \quad \sin i = \frac{IH}{IK} \quad ; \quad \tan i = \frac{IK/2}{e}$$

Par conséquent :

$$\delta_{1/2} = 2 \frac{e}{\cos i} - 2e \tan i \sin i = 2e \left(\frac{1}{\cos i} - \frac{\sin^2 i}{\cos i} \right) = 2e \cos i$$

Eclairement et rayon des anneaux :

Sachant que :



Alors, avec $\cos i \approx 1 - \frac{i^2}{2} = 1 - \frac{\rho^2}{2f'}$:

$$\delta_{1/2} = 2e \left(1 - \frac{\rho^2}{2f'} \right)$$

L'éclairement devient ensuite :

$$E(x) = 2E_{\max} \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} 2e \left(1 - \frac{\rho^2}{2f'} \right) \right] = 4E_{\max} \cos^2 \left[\frac{2\pi e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{2f'} \right) \right]$$

La forme des franges est donnée par $E(M) = \text{cste}$, soit $\rho = \text{cste}$: les franges sont des anneaux de centre O (pour une source ayant la symétrie de révolution).

Comme ces franges correspondent à un angle i fixé (angle sous lequel on voit un point de la source depuis le centre de la lentille de collimation (L)), on dit que l'on observe des « franges d'égale inclinaison ».

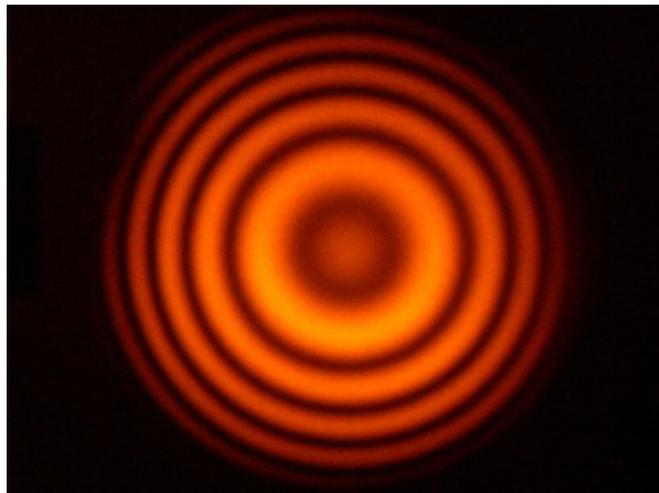
(A la frange d'ordre p correspond la différence de marche $p\lambda_0$ et l'angle d'inclinaison i tel que $\cos i = \frac{p\lambda_0}{2d}$, d'où le nom de franges d'égale inclinaison.)

* L'ordre d'interférence au centre vaut $p(0) = \frac{2e}{\lambda_0}$ et est donc quelconque ; si $p(0)$ est un entier, la figure est à centre brillant et si $p(0)$ est un demi-entier, elle est à centre noir.

* Attention, l'ordre d'interférence $p(i) = \frac{2e \cos i}{\lambda_0}$ diminue lorsqu'on s'éloigne du centre (c'est le contraire dans le cas des fentes d'Young).

* A un anneau donné, correspond un ordre d'interférence fixé. Si on diminue la distance d , $\cos i$ va augmenter, l'angle i va diminuer et les anneaux vont se contracter et disparaître par le centre ; corrélativement, le rayon du k -ième anneau (brillant par exemple) visible sur l'écran augmente. On verra de moins en moins d'anneaux sur l'écran.

Ces résultats sont particulièrement utiles dans la recherche du « contact optique », c'est-à-dire l'obtention de $e = 0$.



Sur l'écran, les franges sont des anneaux concentriques de centre O . Le rayon de l'anneau d'ordre p est :

$$\rho_p = x = if'$$

Avec $\cos i \approx 1 - \frac{i^2}{2} = \frac{p\lambda_0}{2e}$. Si on note $p_0 = \frac{2e}{\lambda_0}$ l'ordre d'interférence au centre de la figure (maximal pour $i = 0$), alors :

$$\cos i \approx 1 - \frac{i^2}{2} = \frac{p}{p_0} \quad \text{soit} \quad i = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{p_0}}$$

Finalement :

$$\rho_p = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{p_0}} f'$$

On suppose qu'au centre l'intensité soit maximale, c'est-à-dire que $p_0 = \frac{2e}{\lambda_0}$ soit un entier. Le premier anneau d'intensité maximale correspond à l'ordre d'interférence :

$$p = p_0 - 1$$

Son rayon est alors :

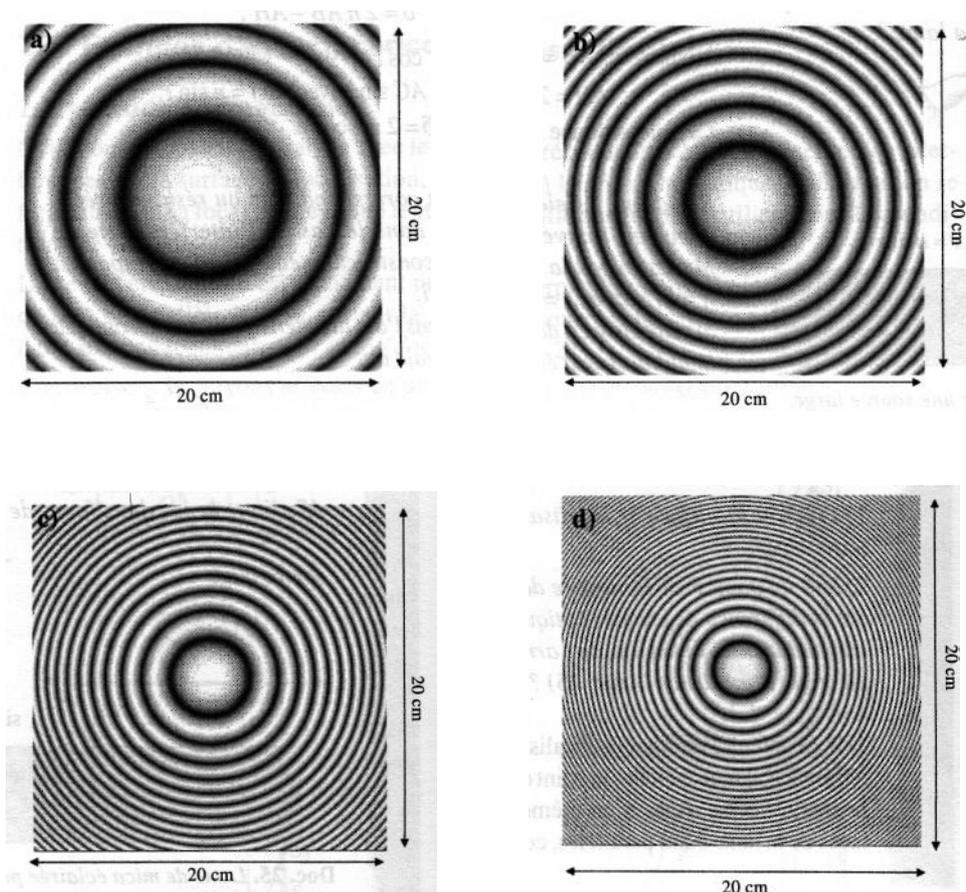
$$\rho_1 = \sqrt{\frac{2}{p_0}} f' \quad (\text{avec : } p_0 = \frac{2e}{\lambda_0})$$

Le rayon du $K^{\text{ième}}$ anneau visible (ne pas confondre K avec l'ordre d'interférence p) vaut :

$$\rho_p = \sqrt{\frac{2K}{p_0}} f' = \sqrt{K} \rho_1$$

Les figures suivantes correspondent à l'observation en lumière monochromatique (dans le plan focal d'une lentille de distance focale $f' = 1$ m) d'anneaux d'égale inclinaison. La zone d'observation est un carré de côté 20 cm, centré sur la figure d'interférences.

Les ordres d'interférences au centre ont été choisis ainsi : $p_0 = 500, 1\ 000, 2\ 000$ et $4\ 000$.



L'observation se fait dans le plan focal image d'une lentille de 1 m de distance focale. L'ordre d'interférence au centre est égal à 500, 1 000, 2 000 et 4 000.

Qu'observe-t-on ?

Le nombre d'anneaux dans le champ d'observation est d'autant plus grand que l'ordre d'interférences au centre est important, donc que l'épaisseur de la lame à faces parallèles est importante.

Le rayon du $K^{\text{ième}}$ anneau est :

$$\rho_p = \sqrt{\frac{2K}{p_0}} f' \quad d'o\grave{u} \quad K = \frac{1}{2f'^2} \rho_p^2 p_0$$

ρ_p^2 maximale étant constante (même zone d'observation), on voit que le nombre maximum d'anneaux visibles (K) est proportionnel à p_0 : ainsi, à chaque fois que p_0 double, le nombre d'anneaux visibles double également.

Détermination expérimentale de l'ordre d'interférence au centre et de l'épaisseur d de la lame d'air à faces parallèles :

Prenons l'exemple de la 1^{ère} photographie, pour laquelle le 3^{ème} anneau sombre a pour rayon $\rho_3 = 10 \text{ cm}$. Alors :

$$\rho_{3,\text{sombre}} = \sqrt{\frac{2(p_0 - (p_0 - 2,5))}{p_0}} f' = \sqrt{\frac{5}{p_0}} f' \quad d'o\grave{u} \quad p_0 = \frac{5f'^2}{\rho_{3,\text{sombre}}^2} = 500$$

On trouve bien la valeur attendue ; l'épaisseur e s'en déduit (on donne $\lambda_0 = 560 \text{ nm}$) :

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda_0} \quad d'o\grave{u} \quad e = \frac{p_0 \lambda_0}{2} = 0,14 \text{ mm}$$

Contact optique (teinte plate) :

Lorsque e tend vers zéro, l'ordre d'interférence tend vers zéro et l'intensité vaut $4E_{\text{max}}$ partout : l'intensité sur l'écran est uniforme. On dit qu'on a réalisé le contact optique et atteint la teinte plate.

Exercice de complément : lame à faces parallèles

La lame à faces parallèles est constituée d'un milieu transparent d'indice n , d'épaisseur e , compris entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 .

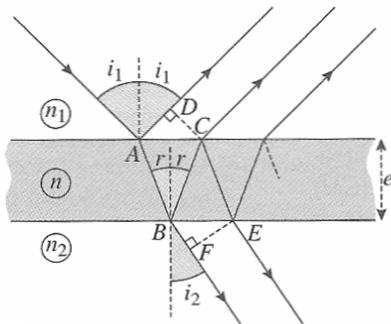
Éclairée par une source large, elle donne des interférences localisées à l'infini.

Suivant le caractère plus ou moins réfléchissant des faces en regard, ces interférences seront observées par réflexion ou par transmission.

1) Les interférences sont observées par réflexion : quelle est la valeur de la différence de marche « géométrique » $\delta_{\text{géo}}(i)$ entre deux rayons réfléchis successifs donnés par un incident arrivant dans le milieu d'indice n_1 à l'angle i ?

2) Dans le cas d'une lame de verre placée dans l'air ($n_1 = n_2 \approx 1 < n$), faut-il modifier ce résultat pour obtenir la différence de marche totale ?

3) Les interférences sont observées en transmission. Reprendre le calcul de $\delta_{\text{géo}}(i)$ pour deux rayons transmis successifs.



1) Reprenons un schéma analogue à celui construit pour la lame d'air . En prenant garde aux valeurs d'indice pour les différents trajets, nous voyons que :

$$\delta(S, M) = (SM)_2 - (SM)_1 = nAB + nBC - n_1 AD.$$

Les distances mises en jeu peuvent s'écrire :

$$AB = BC = \frac{e}{\cos r} \quad \text{et} \quad CD = AC \sin i_1 = (2e \tan r) \sin i_1.$$

La relation de Descartes $n_1 \sin i_1 = n \sin r$ donne finalement :

$$\delta(S, M) = \frac{2ne}{\cos i} - (2e \tan r) n \sin r = 2ne \cos r.$$

2) Ce résultat correspond à un calcul géométrique :

$$2ne \cos r = \delta_{\text{géo}}.$$

Il ne tient pas compte d'éventuels déphasages introduits lors des réflexions. Dans le cas de la lame de verre placée dans l'air ($n > n_1 \approx 1$), et pour des rayons peu inclinés, nous pouvons prévoir un déphasage de π à la réflexion sur la première face de la lame

, qui n'apparaît pas pour la réflexion interne sur l'autre face. Dans ces conditions, la différence totale est :

$$\delta = \delta_{\text{géo}} + \frac{\lambda_0}{2}.$$

3) Pour deux rayons transmis successifs (les deux premiers figurent sur le schéma), nous obtenons de façon analogue :

$$\delta(S, M) = nBC + nCE - n_2 BF.$$

En introduisant l'épaisseur e et l'angle de réfraction interne r , et en utilisant la relation de Descartes $n \sin r = n_2 \sin i_2$, nous trouvons ici aussi :

$$\delta_{\text{géo}} = 2ne \cos r.$$

Application : la lame précédente peut-être une couche mince antireflet placée sur une lame de verre (un verre de lunettes par exemple). On se place en incidence normale et on souhaite que l'intensité lumineuse réfléchi à l'interface air/couche mince soit nulle.

Pour que cette intensité soit nulle, il faut que : $\delta = 2ne \cos(r) + \frac{\lambda_0}{2} = (2p+1) \frac{\lambda_0}{2}$

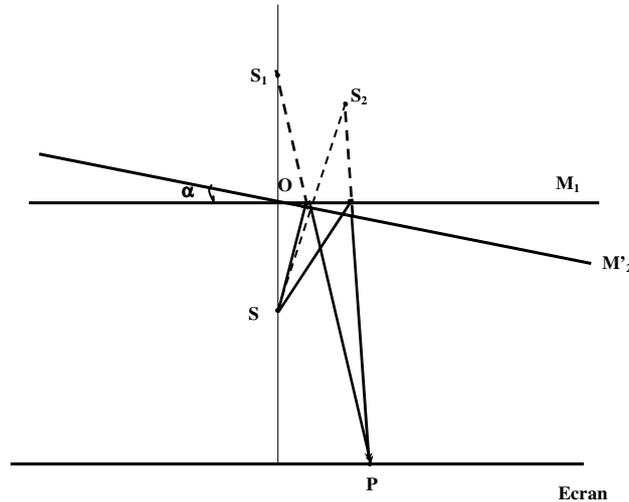
Soit, avec $r = 0$ incidence normale) et $p = 1$ (pour avoir e minimale) :

$$e_{\text{min}} = \frac{\lambda_0}{4n}$$

4) Utilisation en coin d'air ; franges d'égale épaisseur :

L'interféromètre est réglé en lame d'air avec une source large et on se place au contact optique. A ce moment là, on change l'orientation de l'un des deux miroirs d'un très petit angle α (de l'ordre de grandeur de 10^{-4} rad). On obtient la configuration en « coin d'air ».

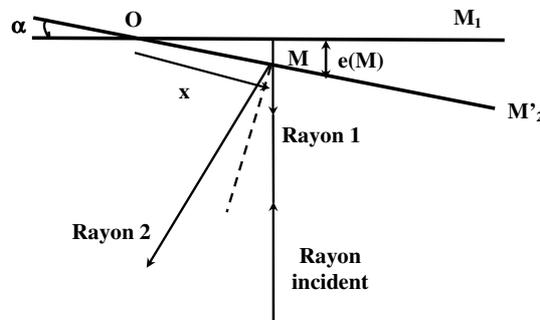
Lorsque la source (S) est ponctuelle, on se ramène (voir figure suivante) au dispositif des trous d'Young en définissant deux sources synchrones (S_1) et (S_2) symétriques de (S) par rapport aux miroirs (M_1) et (M_2). Les interférences ne sont plus localisées mais elles sont peu lumineuses.



(Voir également à la fin de ce paragraphe)

On se place désormais dans le cas d'une source large.

On raisonne sur le schéma équivalent en utilisant l'image du miroir M_2 .



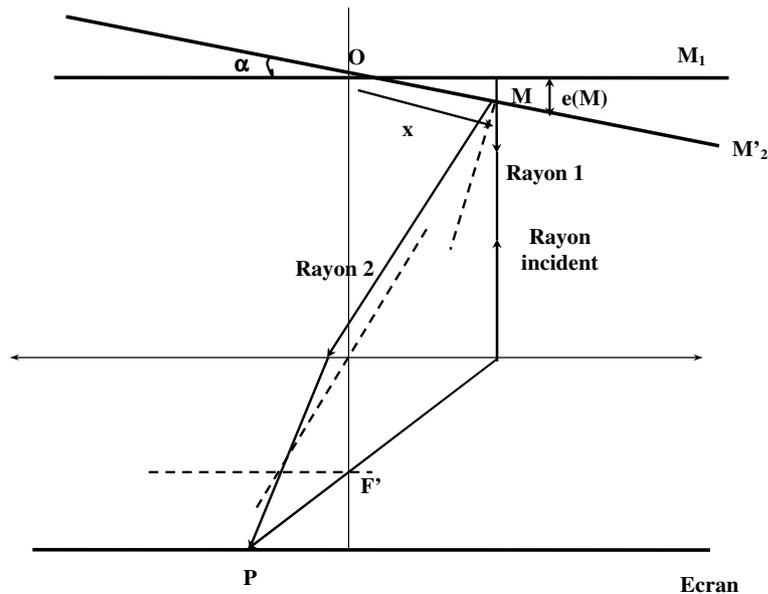
On se place en incidence normale. Le rayon (1) repart dans sa direction initiale et le rayon (2) est réfléchi symétriquement par rapport à la normale du miroir (M_2).

Les deux rayons interfèrent en M, au niveau du miroir (M_2) : les interférences sont localisées au niveau du coin d'air.

La différence de marche entre les deux rayons vaut :

$$\delta = 2e(M) \approx 2\alpha x$$

où $e(M)$ est l'épaisseur du coin d'air au niveau du point M et x l'abscisse de M.



En effet, si on place une lentille (ou l'œil) pour observer les franges du coin d'air localisées sur le miroir (M_2), alors la différence de chemin optique entre les deux rayons qui interfèrent au point P de l'écran (qui n'est pas dans le plan focal image de la lentille !) est bien égal à $\delta = 2e(M) \approx 2\alpha x$ (utiliser le principe de retour inverse de la lumière et la propriété de stigmatisme).

Compte tenu du fait que le miroir M_2 est incliné par rapport au miroir M_1 , on perd la propriété d'invariance par rotation autour de la normale à M_1 qui avait permis d'expliquer l'obtention d'anneaux dans la situation de la lame d'air.

Les franges d'interférences seront rectilignes.

La condition pour obtenir une frange brillante est alors :

$$\delta = 2\alpha x = p\lambda_0 \quad \text{soit} \quad x = \frac{\lambda_0}{2\alpha} p \quad (p \text{ entier})$$

La forme des franges est donnée par $p(x) = \text{cste}$, soit $x = \text{cste}$: les franges sont rectilignes, parallèles à l'arête du dièdre formé par les miroirs ; puisque l'éclairement est constant pour une distance $e(x)$ entre les miroirs constante, on dit que l'on observe des « franges d'égale épaisseur ».

On peut calculer l'interfrange qui vaut :

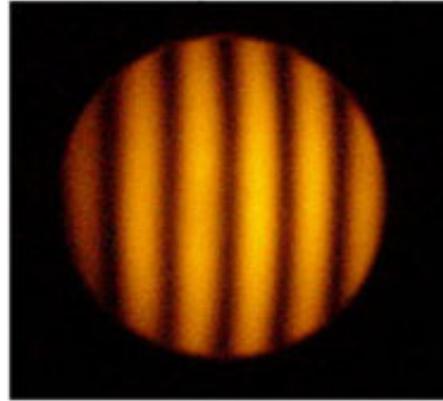
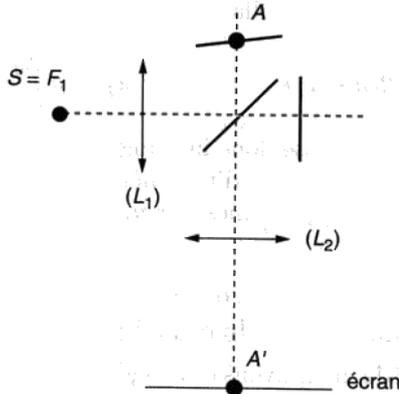
$$i = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

Ainsi l'interfrange augmente lorsque l'angle α entre les deux miroirs diminue. Ce fait est utilisé lorsqu'on veut passer d'un interféromètre monté en coin d'air à un interféromètre monté en lame d'air : il suffit de faire tourner un des miroirs dans le sens qui augmente l'interfrange pour diminuer α et atteindre progressivement un angle nul.

L'interfrange étant proportionnel à λ_0 , chaque longueur d'onde donne son propre système de franges, d'où un problème de cohérence temporelle, sauf au voisinage de l'arête où la différence de marche est nulle, quelle que soit la longueur d'onde.

Observation des franges d'égal épaisseur :

Les franges étant localisées dans l'interféromètre au voisinage des miroirs, on ne peut les observer directement sur un écran. On réalise une projection du miroir (M_1) sur un écran à la distance D à l'aide d'une lentille mince convergente (L_2) de distance focale F_2 (typiquement, 20 cm). L'écran n'est en tout cas pas situé dans le plan focal image de la lentille (L_2). On rappelle qu'avec une lentille CV de distance focale f , la distance minimale entre un objet et son image est $4f$ (typiquement 80 cm).



Franges du coin d'air en lumière du Sodium

D'autre part, pour éclairer le coin d'air sous incidence quasi-normale, on réalise un collimateur en plaçant un trou-source au foyer d'une lentille mince convergente (L_1) de distance focale assez courte.

L'interfrange $i_{\text{écran}}$ mesuré expérimentalement sur l'écran est alors relié à l'interfrange réel i par le grandissement γ de la projection : $i_{\text{écran}} = \gamma i$.

On rappelle à ce propos les relations de Descartes, avec des notations habituelles :

$$-\frac{1}{OA} + \frac{1}{OA'} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

La mesure de l'interfrange peut permettre une mesure de λ_0 ou de l'angle α .

Numériquement, pour obtenir des franges visibles à l'œil nu, on doit avoir typiquement $i_{\text{écran}} > 1 \text{ mm}$, soit avec un grandissement de l'ordre de 10, $i > 0,1 \text{ mm}$. Avec $\lambda_0 \approx 600 \text{ nm}$, on obtient $\alpha \leq 3 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$. En pratique, l'angle entre les miroirs doit être très faible.

Cas où la source est ponctuelle :

On fait le schéma de l'interféromètre de Michelson en « coin d'air » d'angle α éclairé par une source ponctuelle en localisant les deux sources secondaires S_1 et S_2 .

Figure 1 : Le miroir M_1 est incliné d'un faible angle α sur la normale au dispositif.

Ici $e = M_1 M_2 = 0$ mais $\alpha = \widehat{M_1 M_2} \neq 0$. Les miroirs constituent un « coin d'air ». Pour simplifier, on se limite à l'incidence normale. Le rayon \rightarrow réfléchi sur M_1 (ou son symétrique M_1' par rapport à Sp) et le rayon \rightarrow réfléchi sur M_2 semblent tous les deux provenir d'une région de l'espace au voisinage du miroir M_2 .

Figure 2 : Soit S' le symétrique du point source S par rapport à la séparatrice Sp . Les sources secondaires S_1 et S_2 respectivement symétriques de S' par rapport à M'_1 et M_2 sont cohérentes ; elles sont pratiquement dans un plan parallèle à M_2 . La situation se compare aux trous d'Young et les franges sont rectilignes.

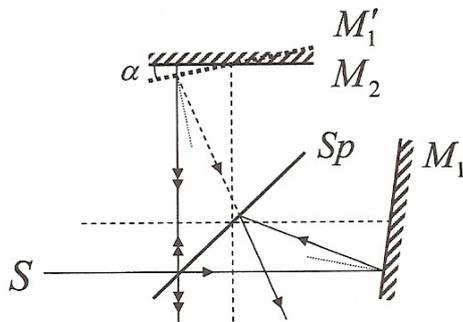


Figure 1

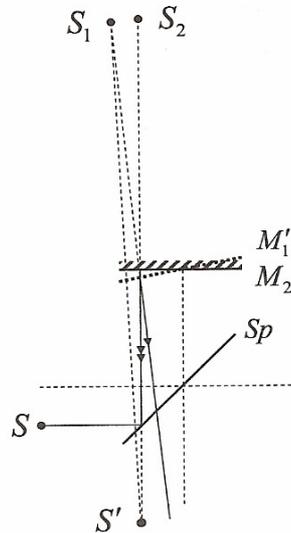


Figure 2

Quand la source S est ponctuelle, les franges ne sont pas localisées (on peut les voir dans tout l'espace), mais elles sont très peu lumineuses. L'emploi d'une source étendue permet d'y remédier. À α fixé, pour qu'il ait franges, il faut x variable ce qui est atteint avec un faisceau qui couvre les miroirs, et ceci sous incidence nulle. La source étendue est placée au foyer d'une lentille convergente L_1 (sans problème de cohérence spatiale car la différence de marche est indépendante du point S choisi dans la source étendue). Néanmoins, les sources secondaires S_1 et S_2 sont différentes pour chaque point source. Les franges se brouillent presque partout sauf au voisinage du miroir M_2 d'où la localisation des franges (l'endroit de la localisation est l'intersection de deux émergents issus d'un même incident).

Quelques remarques générales sur les coins d'air :

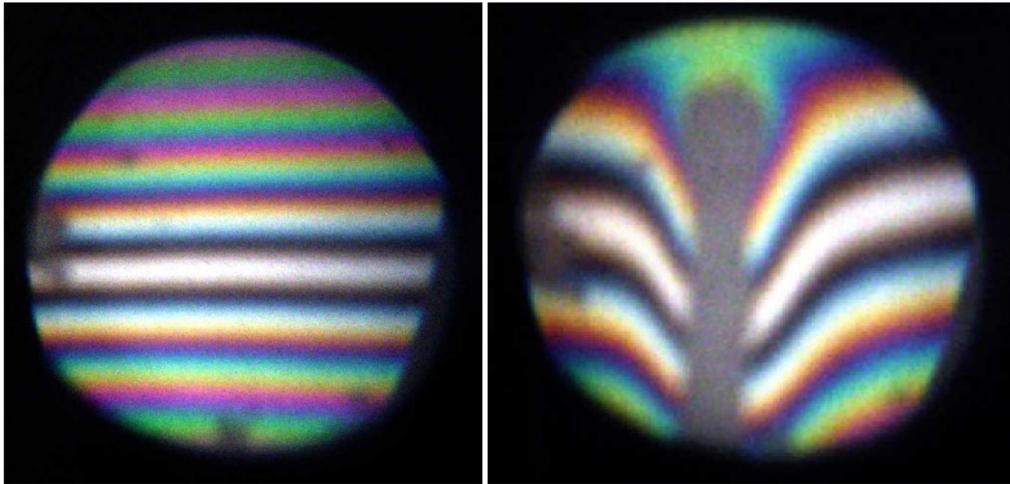
* Observation courante : dans le quotidien on observe facilement des interférences d'égale épaisseur qui sont souvent irisées (Irisation : propriété que possèdent certains corps de disperser la lumière en rayons colorés comme l'arc-en-ciel) :

- Une mince couche d'huile sur l'asphalte humide les fait apparaître
- On les rencontre à la surface d'une bulle de savon
- Si l'on presse deux lames de verre l'une contre l'autre et que l'on emprisonne quelques poussières, on forme une lame d'air d'épaisseur variable. On voit alors apparaître des franges d'égale épaisseur. Serrez plus ou moins les lames et vous déformez les franges.

* Applications :

- Le contrôle des surfaces par interférométrie (mesures de faibles épaisseurs, vibrations de surfaces, ...) est basée sur l'observation de franges d'égale épaisseur. Par exemple, le polissage et le contrôle des miroirs pour les astronomes amateurs repose sur l'interférométrie. On atteint une précision dans le contrôle de l'état de surface de l'ordre du dixième de micron.

- Etude du contact de micro – gouttes ou de vésicules sur un substrat par microscopie interférentiel.



(a) franges irisées en lumière blanche.

(b) déformation des franges autour d'une allumette chaude.

Franges rectilignes d'interférence en coin d'air observées en lumière blanche.

6 - Etude d'un interférogramme :

On éclaire l'interféromètre de Michelson, réglé en lame à faces parallèles, par une source étendue. On projette les anneaux d'égale inclinaison dans le plan focal image d'une lentille CV.

On place un petit détecteur (une photodiode ou une barrette CCD, par exemple) au centre des anneaux. On mesure alors l'éclairement correspondant à la différence de marche $\delta = 2e$, où e est l'épaisseur entre les deux miroirs (ici, $i = 0$).

Un des miroirs se déplace à vitesse constante et on mesure ainsi l'interférogramme $I(\delta)$ relatif à la source lumineuse utilisée.

On va montrer que l'interprétation de cet interférogramme permet d'analyser le spectre lumineux.

On considère l'exemple des interférences avec la lumière jaune du sodium :

La lumière émise par les lampes à vapeur de sodium est essentiellement constituée d'un doublet jaune de longueurs d'ondes proches, notées $\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}$ et $\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$ (de nombres d'onde voisins,

notés $\sigma_1 = \sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}$ et $\sigma_2 = \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}$ (avec $\sigma_0 = 1/\lambda_0$)).

Chaque radiation étant incohérente, on ajoute les intensités :

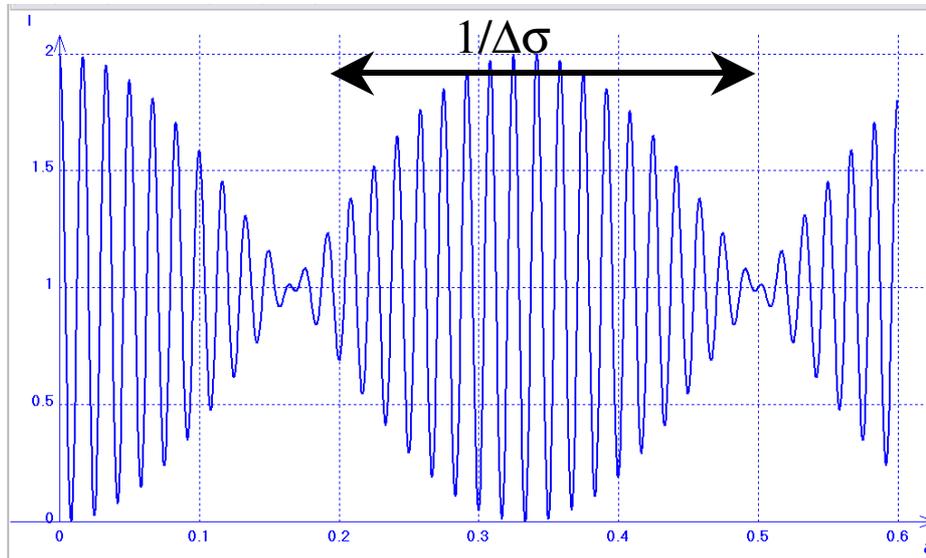
$$I(\delta) = I_1 + I_2 = 2I_0 [1 + \cos(2\pi\sigma_1\delta)] + 2I_0 [1 + \cos(2\pi\sigma_2\delta)]$$

Soit, après calculs : $(\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2})$

$$I(\delta) = 4I_0 [1 + \cos(\pi \Delta\sigma \delta) \cos(2\pi \sigma_0 \delta)]$$

L'interférogramme $I(\delta)$ est donc identique à celui d'une radiation monochromatique de nombre d'ondes σ_0 , modulé par un contraste Γ à variation lente :

$$\Gamma(\delta) = \cos(\pi \Delta\sigma \delta)$$



Les franges sombres sont noires et le contraste est maximal lorsque $|\Gamma|=1$. L'éclairement est uniforme et le contraste est nul lorsque $|\Gamma|=0$.

On appelle battements ce type de modulation créée par la somme de deux fonctions sinusoïdales de fréquences voisines.

L'analyse de l'interférogramme permet de déterminer l'écart spectral entre les deux radiations du doublet. En effet, l'écart entre deux franges claires ou deux franges sombres est :

$$\Delta_1 \delta = \frac{1}{\sigma_0}$$

L'écart entre deux annulations du contraste est $\Delta_2 \delta = \frac{1}{\Delta\sigma}$ (il suffit que l'argument du cos varie de π). Le nombre N de franges entre deux annulations du contraste est donc :

$$N = \frac{\sigma_0}{\Delta\sigma} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$$

(On a utilisé : $\frac{d\sigma}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = -\frac{1}{\lambda^2}$, soit $\Delta\sigma = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$)

Ainsi, en comptant le nombre de franges, on a accès à $\Delta\sigma$.

Ordre de grandeur :

$$\lambda_1 = 589,0 \text{ nm} ; \lambda_2 = 589,6 \text{ nm} ; \Delta\lambda = 0,6 \text{ nm} ; N = \frac{589,3}{0,6} \approx 982$$

Ceci est un premier exemple de « spectrométrie interférentielle », une des applications de l'interférométrie. L'analyse d'un interférogramme permet de déterminer le profil spectral d'une source de lumière.

C'est une des applications importantes de l'interféromètre de Michelson.

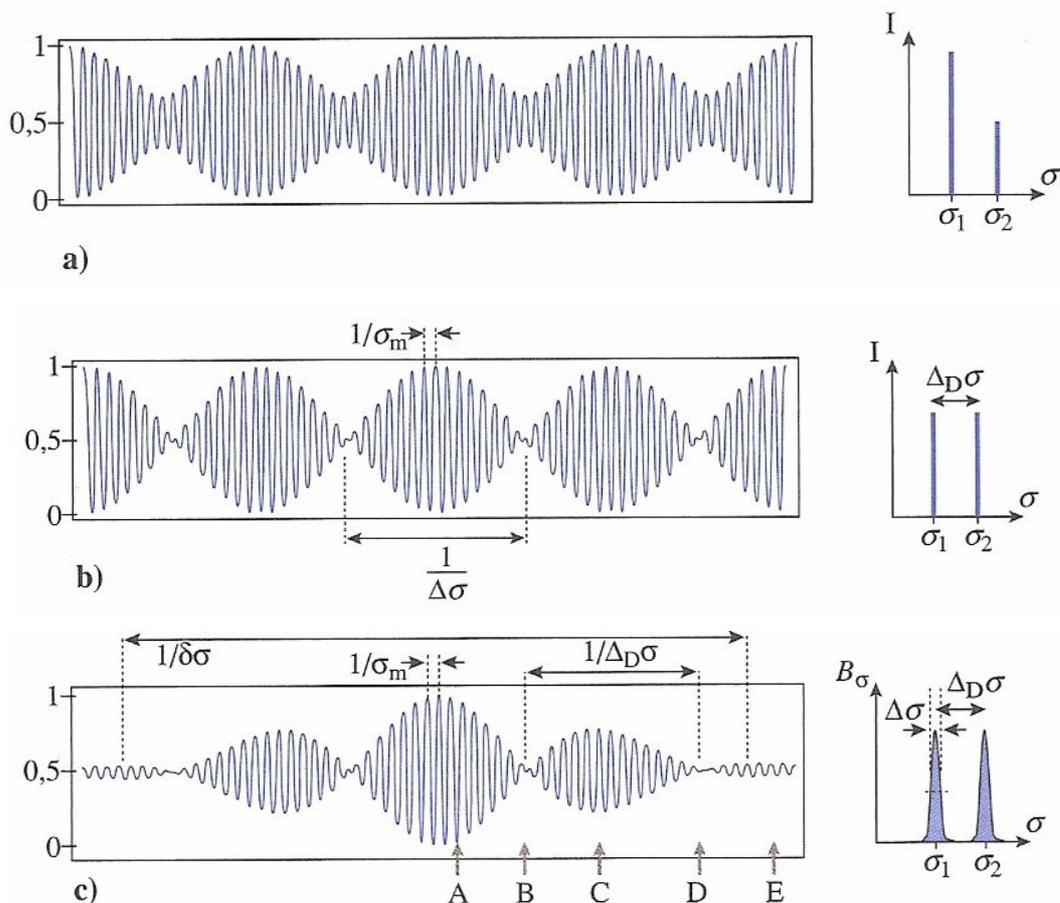
Si l'on ne réalise pas d'interférogramme, on peut déterminer (voir TP) la variation d'épaisseur Δe entre les miroirs pour deux annulations successives du contraste ; alors :

$$\Delta_2 \delta = 2\Delta e \quad \text{et} \quad \Delta \lambda = \frac{\lambda_0}{2\Delta e}$$

Les figures suivantes donnent d'autres exemples d'interférogrammes :

Interférogramme $I(\delta) / I(0)$ pour un doublet de longueurs d'onde :

- Deux raies monochromatiques d'intensités différentes
- Deux raies monochromatiques de même importance
- Deux raies quasi – monochromatiques
- Allure des anneaux du cas (c), en A, B, C, D et E.



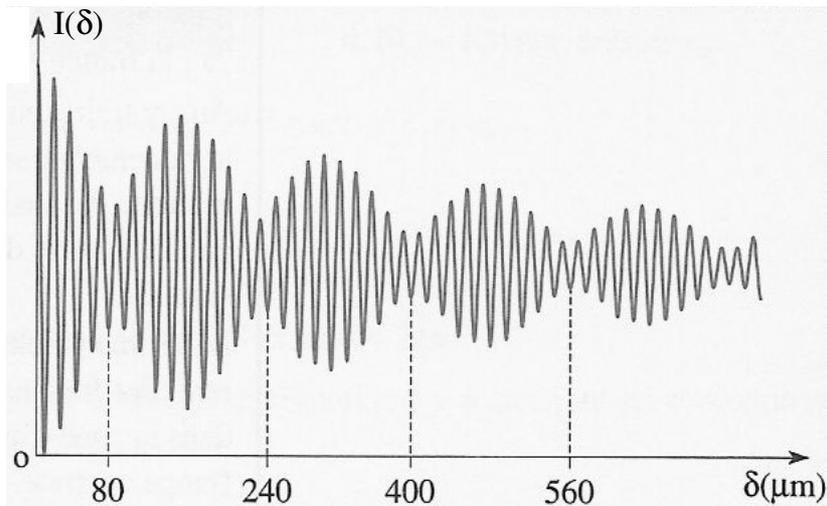


d) A B (anti-coïncidence) C (coïncidence) D (anti-coïncidence) E (coïncidence)

Exercice d'application, analyse d'un interférogramme :

On considère un interférogramme comme celui de la figure, à ceci près que l'on peut compter 275 franges entre deux minima de visibilité.

Déterminer la ou les longueurs d'onde, le rapport des éclaircissements ainsi qu'une estimation de la largeur des raies et de la longueur de cohérence.



Données :

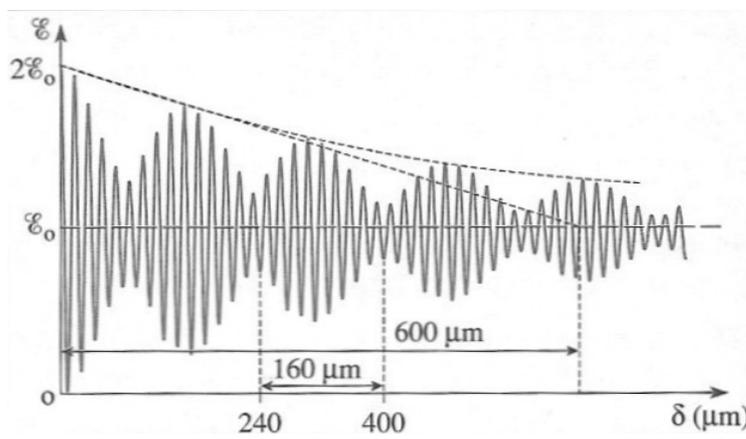
$$A \cos[(\alpha + \Delta\alpha)x] + B \cos[(\alpha - \Delta\alpha)x] = a(x) \cos[(\alpha x + \varphi(x))]$$

Avec :

$$a^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos(2\Delta\alpha x) \quad ; \quad \tan \varphi = \tan(\Delta\alpha x) \frac{A - B}{A + B}$$

Solution :

On observe trois structures :



* Une sinusoïde de période $0,58 \mu\text{m}$ égale à la longueur d'onde moyenne.

* Un phénomène de battements caractéristiques d'un doublet. Comme le contraste Γ ne s'annule pas, les deux éclairagements I_1 et I_2 ne sont pas identiques.

Si les deux radiations sont monochromatiques :

$$I = I_1 + I_2 + a(\delta) \cos[2\pi\sigma_0\delta + \varphi(\delta)]$$

Avec $a_{\max} = I_1 + I_2$ et $a_{\min} = |I_1 - I_2|$. D'après le graphique de l'énoncé, $a_{\max} \approx 3a_{\min}$ et donc $I_2 \approx 2I_1$. Ensuite :

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \approx \frac{1}{160} \mu m^{-1} = 6,2 \cdot 10^{-3} \mu m^{-1}, \text{ ou } |\lambda_1 - \lambda_2| \approx 2,1 \text{ nm}$$

Une décroissance (\approx exponentielle) de la visibilité, avec une longueur caractéristique ℓ_c de l'ordre de $600 \mu m$. On en déduit un ordre de grandeur de la largeur de chaque pic :

$$\Delta\sigma = 1,7 \cdot 10^{-3} \mu m^{-1}, \text{ soit } \Delta\lambda = 0,4 \text{ nm}$$

IV) Utilisation de ces dispositifs en lumière blanche

La lumière blanche contient toutes les radiations du spectre visible, de $0,4 \mu m$ (violet) à environ $0,8 \mu m$ (rouge).

Comme il n'y a pas d'interférences entre des sources de fréquences différentes, on obtient sur l'écran la superposition des phénomènes correspondant aux différentes longueurs d'onde.

Ce sont donc les éclairagements qui vont s'ajouter.

Pour une longueur d'onde λ_0 donnée, l'intensité en un point M vaut, dans le cas des fentes d'Young par exemple :

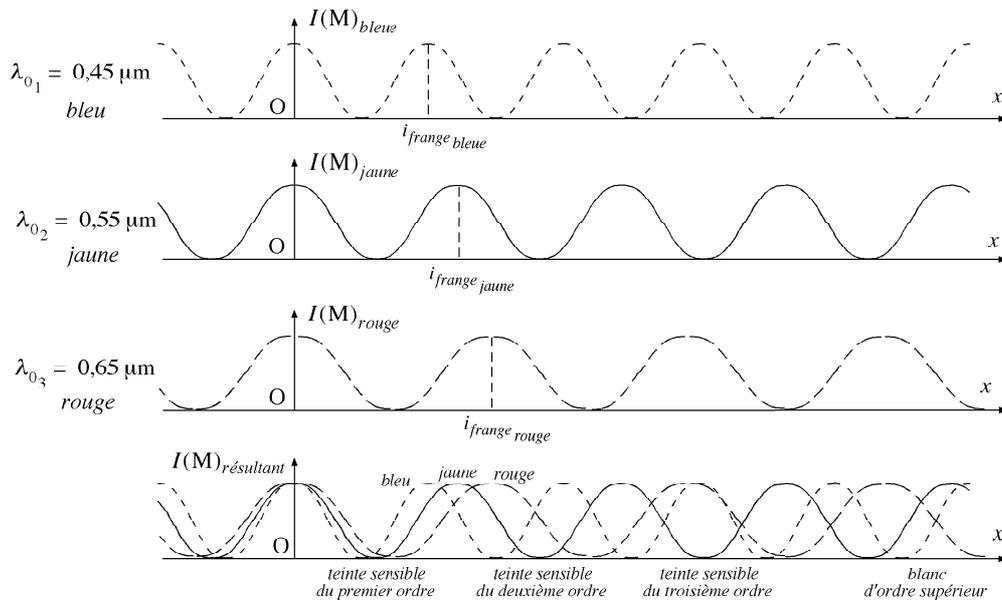
$$I(M) = 2 I_0(M) \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{ax}{\lambda_0 D} \right) \right]$$

L'interfrange dépend de la longueur d'onde λ_0 dans le vide : $i_{frange} = \frac{\lambda_0 D}{a}$.

* Au centre de la figure d'interférences, la différence de marche est nulle, quelle que soit la longueur d'onde : on observe une frange « d'ordre zéro » brillante et achromatique.

* Cette frange brillante sera bordée de deux franges sombres.

* L'interfrange vaut $i_{frange} = \frac{\lambda_0 D}{a}$ et est donc minimum pour le violet et maximum pour le rouge : plus on s'éloigne du centre, plus les systèmes de franges se décalent. Les deux franges brillantes suivantes sont irisées, le bord violet étant tourné vers la frange d'ordre 0.

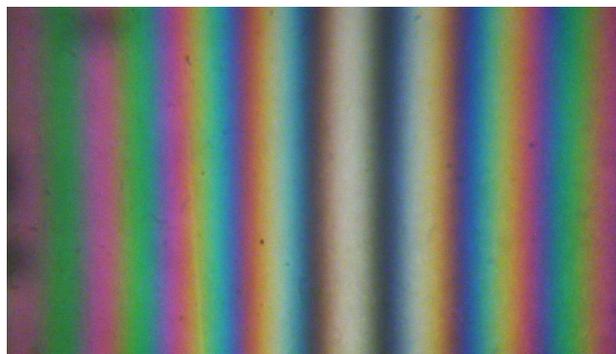


Quand $x = 0$, l'intensité est maximale, quelle que soit la longueur d'onde λ_0 : il y a donc une frange brillante blanche.

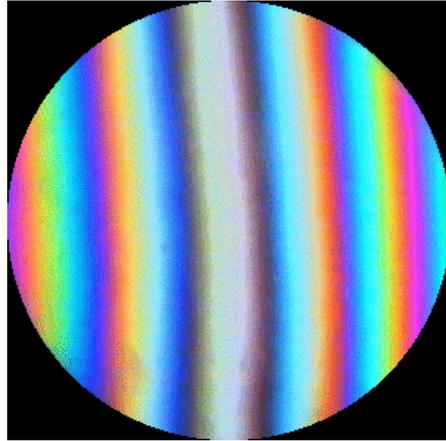
Quand on s'éloigne du centre, les franges correspondant aux différentes longueurs d'onde se décalent de plus en plus ; on observe des franges très colorées.

Au voisinage des points où l'intensité du jaune est nulle, la teinte dominante est le pourpre (mélange de bleu et de rouge). La couleur varie très rapidement ; on dit que la teinte est sensible.

Quand l'intensité du jaune s'annule pour la 1^{ère} fois (respectivement 2^{ème} fois), on dit que la teinte est sensible du 1^{er} ordre (resp. du 2^{ème} ordre).



Système de franges produites par deux fentes d'Young éclairées en lumière blanche : chaque longueur d'onde produit sa figure d'interférences avec une interfrange proportionnelle à λ . Le point central est une frange brillante pour toutes les longueurs d'onde.



Franges rectilignes, interféromètre en coin d'air, observation en lumière blanche

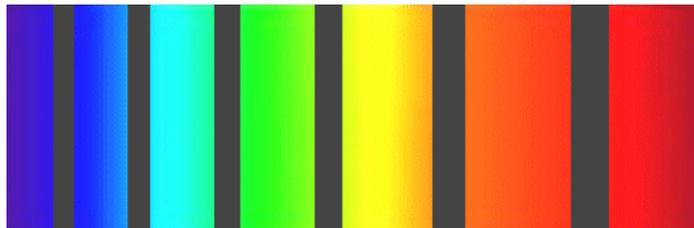
Quand on s'éloigne davantage du centre de l'écran, les franges disparaissent ; l'écran est uniformément éclairé en blanc (on parle de *blanc d'ordre supérieur*). Les franges brillantes de certaines longueurs d'onde occupent la même place que les franges sombres d'autres longueurs d'onde.

Si l'on analyse cette lumière avec un spectroscopie, il apparaît des raies noires correspondant aux longueurs d'onde pour lesquelles il y a une frange sombre.

Remarque : Le jaune est la couleur pour laquelle la sensibilité de l'œil est maximale.

Observation d'un spectre cannelé :

* Le processus s'amplifie au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre ; on finit par obtenir un brouillage des franges et on observe un « blanc d'ordre supérieur » (blanc sale, nettement moins lumineux que celui de la frange achromatique).



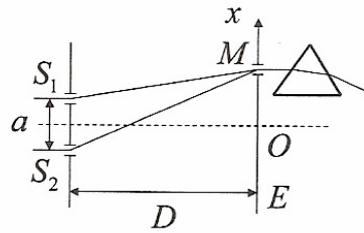
* Si l'on observe un point d'abscisse x de ce blanc d'ordre supérieur avec un spectroscopie, on constate que sur un fond coloré (arc-en-ciel) apparaissent des cannelures noires correspondant à des longueurs d'ondes manquantes : ce sont celles pour lesquelles les interférences sont destructives, c'est-à-dire pour lesquelles on a :

$$\varphi_{2/1} = \frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} = (2k+1)\pi$$

On parle de « spectre cannelé », voir figures.

Exemple :

On réalise en lumière blanche une expérience de fentes d'Young classique avec $a = 1,5 \text{ mm}$ et $D = 1,5 \text{ m}$. On perce dans l'écran à $x = 5 \text{ mm}$ de la médiatrice de S_1S_2 une petite fente (parallèle aux fentes d'Young) derrière laquelle on place un prisme disperser. Combien peut-on observer de raies sombres, appelées cannelures, dans le spectre formé derrière le prisme ?



Réponse :

La différence de marche au point M considéré est $\delta = ax/D = 5 \mu\text{m}$; elle est la même pour toutes les longueurs d'onde du spectre visible.

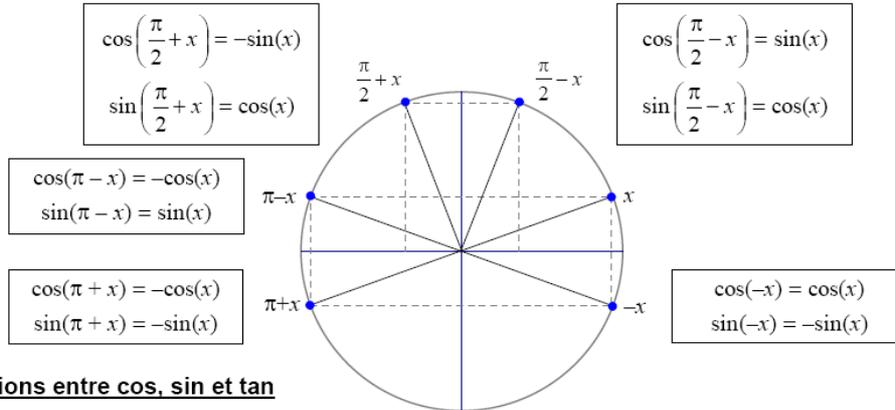
En revanche, les radiations présentent en M (franges brillantes) correspondent aux longueurs d'onde données par $\delta = p\lambda$; cela va de l'ordre $p = 7$ (l'entier supérieur) pour le rouge à l'ordre $p = 12$ (l'entier inférieur) pour le violet. Il y a donc 6 pics de lumière de couleur différente dans le spectre donné par le prisme, et par conséquent 5 cannelures.



TRIGONOMÉTRIE : FORMULAIRE

Angles associés

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :



Relations entre cos, sin et tan

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Formules d'addition

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \tan(b)}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \tan(b)}$$

Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a) \quad \sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a) \quad \tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

Extensions : $\cos(3a) = 4 \cos^3(a) - 3 \cos(a)$

$\sin(3a) = 3 \sin(a) - 4 \sin^3(a)$

$\tan(3a) = \frac{3 \tan(a) - \tan^3(a)}{1 - 3 \tan^2(a)}$

Au delà, utiliser la formule de Moivre.

Formules de linéarisation

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

$$\tan^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{1 + \cos(2a)}$$

Extensions : $\cos^3(a) = \frac{\cos(3a) + 3 \cos(a)}{4}$

$\sin^3(a) = \frac{-\sin(3a) + 3 \sin(a)}{4}$

$\tan^3(a) = \frac{-\sin(3a) + 3 \sin(a)}{\cos(3a) + 3 \cos(a)}$

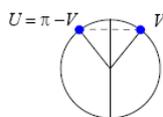
Au delà, utiliser les formules d'Euler. Les formules d'Euler permettent également de montrer que :

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)] \quad \cos(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)] \quad \sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

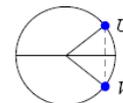
Résolution d'équations trigonométriques



$$\cos(U) = \cos(V) \Leftrightarrow (U = V [2\pi] \text{ ou } U = -V [2\pi])$$

$$\sin(U) = \sin(V) \Leftrightarrow (U = V [2\pi] \text{ ou } U = \pi - V [2\pi])$$

$$\tan(U) = \tan(V) \Leftrightarrow U = V [\pi]$$



Expression du cosinus, sinus et tangente en fonction de la tangente de l'angle moitié

Si $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$, on a : $\cos(a) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$; $\sin(a) = \frac{2t}{1 + t^2}$; $\tan(a) = \frac{2t}{1 - t^2}$