Champs, géométrie et physique

Ordre du jour

1. Pourquoi a-t-on inventé les champs ?
2. Modéliser les champs
3. La forme des champs
4. L’exemple du champ électromagnétique

Pourquoi a-t-on inventé les champs ?

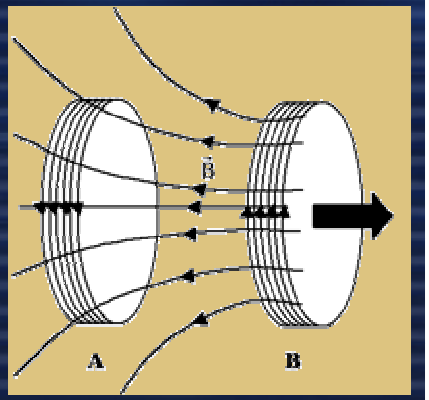
- Action à distance
- L'induction électromagnétique ou la mise en évidence de transferts d'énergie
- L'idée de champ

Action à distance

- La loi de la gravitation universelle de Newton (1687) nécessite l'action d'une force à distance entre les corps
- A l'époque de Newton, d'autres forces agissant à distance étaient connues
  - Forces électrostatiques
  - Forces magnétiques
- Qu'est-ce qui véhicule ces forces ?

L'induction électromagnétique ou la mise en évidence de transferts d'énergie

- Découverte de l'induction électromagnétique par Michael Faraday en 1831
  - Transfert d'énergie d'une bobine à l'autre à travers l'espace
  - Faraday imagine que la force est transportée par ce qu'il appelle « **contiguous magnetic action** »
- Les actions à distance se propageraient dans l'espace sous forme de « lignes de force » ou **champs** de manière continue de proche en proche



L'idée de champ

- Avant Faraday : les actions à distance sont transportées dans l'espace entre les corps en interaction deux à deux
- Idée de Faraday : le champ emplit tout l'espace. Il précède l'interaction, en est la cause
- Champ = « influence » rayonnée dans l'espace par les corps

Modéliser les champs

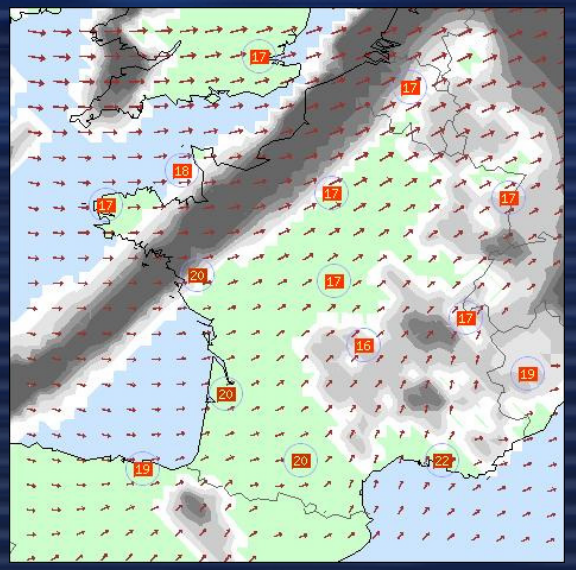
- Représenter une grandeur dans l'espace
- Champs scalaires, vectoriels, tensoriels
- Au-delà des champs : les espaces fibrés

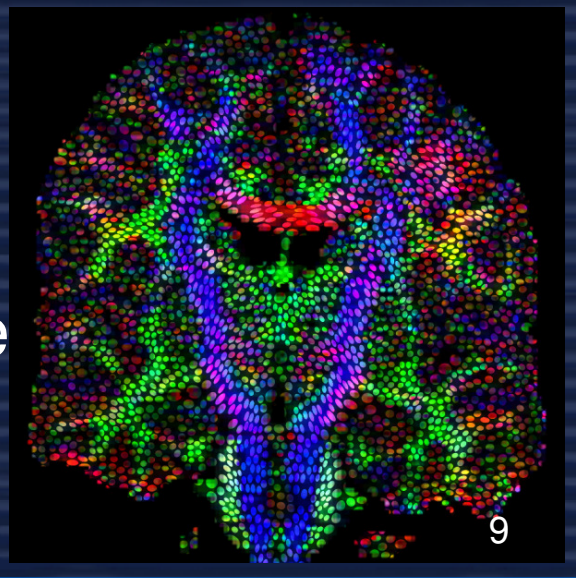
Représenter une grandeur dans l'espace

- Un champ couvre tout ou partie de l'espace
  - En chaque point de l'espace où il est défini il prend une valeur
  - Quelle est cette valeur ?
- Cas des champs de force
  - En chaque point ils définissent une force
  - Force = grandeur ayant une intensité et une direction = vecteur
  - Champs de force = ensemble de vecteurs dont la valeur varie d'un point à un autre
- De la même façon, on peut définir une collection de nombres réels (scalaires) dont la valeur varie d'un point à un autre → champ scalaire (ex. champ de température dans un solide)

Champs scalaires, vectoriels, tensoriels

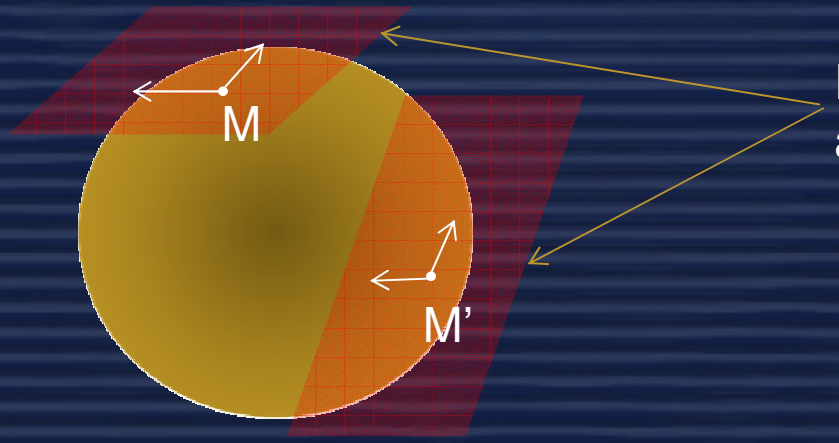
- Champ vectoriel
  - Un champ vectoriel est une construction qui associe à chaque point de l'espace un vecteur
- Extension à d'autres objets géométriques
  - Champ scalaire associe un scalaire à chaque point de l'espace $\Rightarrow$ fonction à 3 variables
  - Champ tensoriel associe à chaque point un tenseur





Au-delà des champs : les espaces fibrés

- On peut « attacher » des objets plus complexes en chaque point de l'espace → notamment un espace à N dimensions
- Un tel espace s'appelle un **espace fibré** - les espaces attachés en chaque point s'appellent les **fibres**
- Exemple d'école d'espace fibré : la sphère munie des plans qui lui sont tangents (fibré tangent)



- Chaque « espace attaché », càd chaque fibre, est indépendant des autres

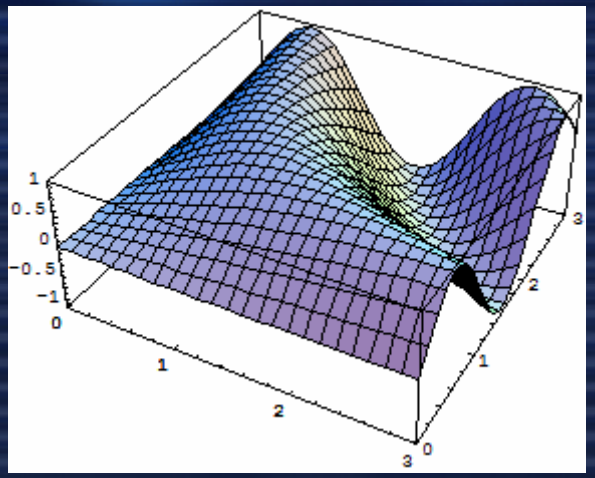
La forme des champs

- Mesurer le relief d'un champ scalaire : le gradient
- Le fluide des champs vectoriels
- Sources et puits : la divergence
- Loi de Gauss
- La forme des lignes de champ
- Rien ne se perd, rien ne se crée : l'équation de continuité
- Faire tourner des roues dans un champ vectoriel : le rotationnel
- Mesurer les accidents d'un relief : le laplacien

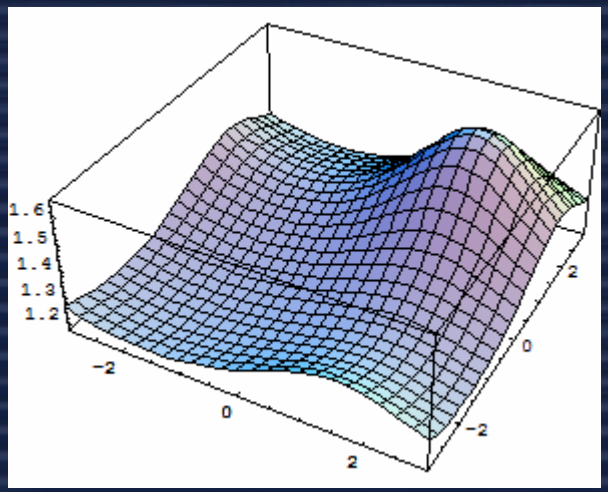
Mesurer le relief d'un champ scalaire : le gradient

- Les valeurs d'un champ scalaire = hyper-surface à 3 dimensions
- Comment mesurer la pente de cette surface ?
  - Calculer la pente selon chaque direction (Ox, Oy, Oz) → calculer la dérivée / chaque variable
  - La pente est un vecteur dont les composantes sont les dérivées / à chaque variable

$$\overrightarrow{pente\ de\ f} = \overrightarrow{grad\, f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$



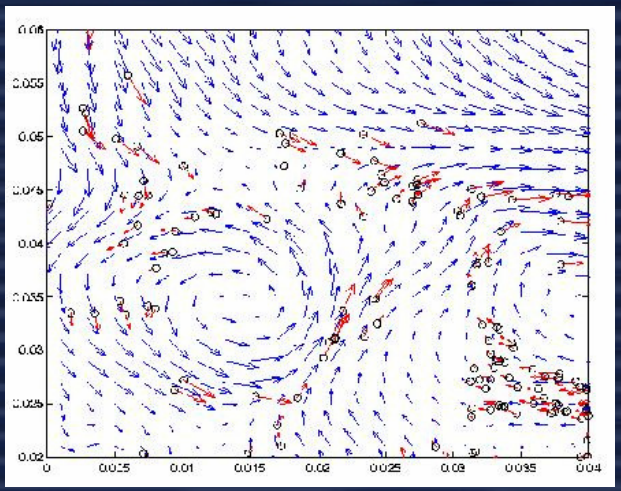
f(x,y) = sin(xy)



f(x,y) = exp (1/4 – sin x sin y)

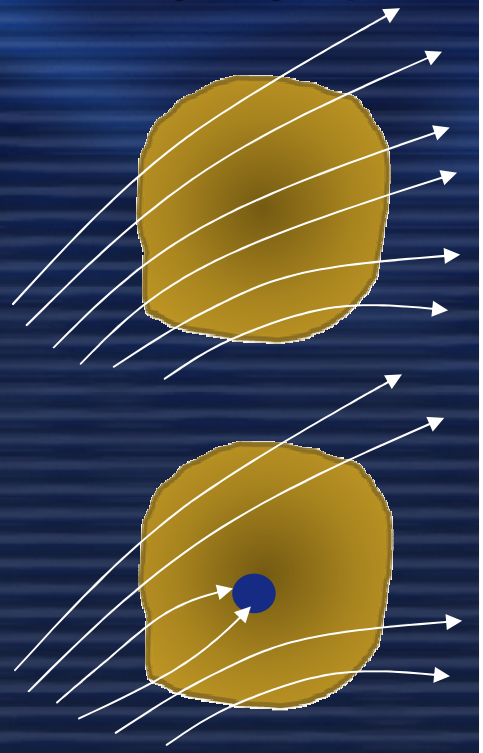
Le fluide des champs vectoriels

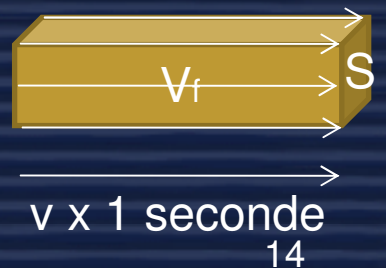
- Dans un fluide, chaque atome est entraîné par un mouvement d'ensemble du fluide
- $\rightarrow$ la vitesse d'écoulement des atomes du fluide est un bon modèle physique de champ vectoriel
- Tout champ vectoriel peut être assimilé au champ des vitesses des atomes d'un fluide virtuel
- Les caractéristiques géométriques du champ de vitesses caractérisent les propriétés physiques du fluide virtuel …
  - Compressibilité
  - Viscosité
  - Élasticité, etc.
- … et sa « forme » spatiale ou « topologie »
  - Présence de sources ou de puits dans le fluide
  - Présence de courants de convection, de tourbillons, etc.



Sources et puits dans un fluide

- Dans un fluide **incompressible,** à travers n'importe quelle surface fermée
  - Absence de compression ⇒ il entre autant de matière qu'il en sort
  - Sauf si il y a dans le volume défini par la surface
    - des sources ⇒ création de fluide
    - des puits ⇒ disparition de fluide
- Quantité de matière sortante – quantité de matière entrante
  - = 0 si le volume ne contient ni sources ni puits
  - > 0 si le volume contient une source
  - < 0 si le volume contient un puits
- Or, quantité de matière d'un fluide incompressible passant à travers une surface / seconde =
  - Densité x (volume de fluide traversant la surface/s) x surface = densité x vitesse x surface = flux du champ vitesse
- → Flux à travers une surface fermée est proportionnel à la quantité de matière créée par une source ou engloutie dans un puits

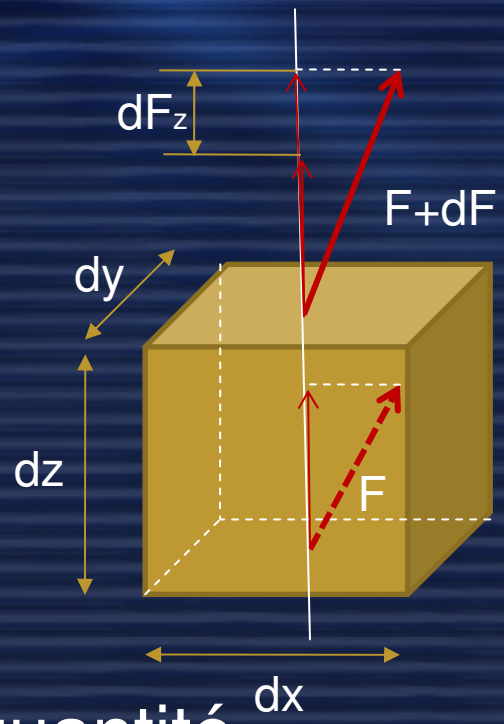




Calcul des sources et des puits

- Flux selon l'axe Oz

$$d\mathbf{F}_z.d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial z}dz\right)dxdy = \frac{\partial F_z}{\partial z}dv$$



- Flux total

$$d\phi = \frac{\partial F_x}{\partial x}dv + \frac{\partial F_y}{\partial y}dv + \frac{\partial F_z}{\partial z}dv = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)dv$$

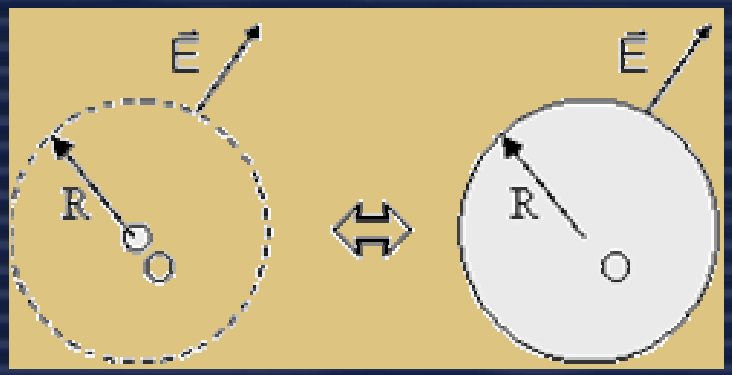
- On définit la divergence comme la quantité

$$div\,\mathbf{F} = \nabla\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

proportionnelle à la densité de sources / puits dans le volume dxdydz

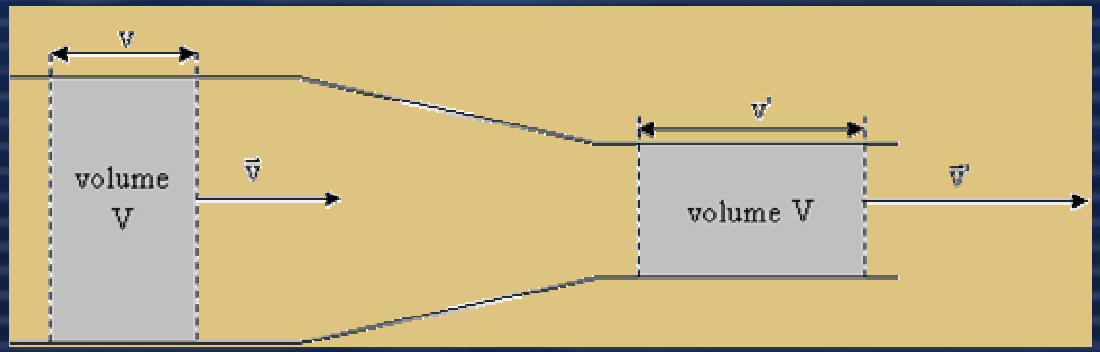
Loi de gauss

- à une distance R, le flux du « fluide vectoriel » ne dépend que des sources contenues dans la sphère de rayon R, quelles que soient la forme et la taille des sources
- $\Rightarrow$ La divergence du champ de la vitesse d'un « fluide vectoriel » en un point ne dépend que de l'intensité de la source en ce point
- C'est la loi (ou théorème) de Gauss



Forme des lignes du champ

- Écoulement d'un fluide incompressible dans un tuyau



- Lorsque les lignes du champ de vitesse se resserrent, la vitesse augmente
  $\Rightarrow$ quand les lignes d'un champ se resserrent, l'intensité du champ augmente

Rien ne se perd, rien ne se crée : l'équation de continuité

- Dans un volume dV contenant un fluide incompressible
  - Quantité de fluide qui entre ou sort / seconde = - Variation de la quantité de fluide à l'intérieur de dV

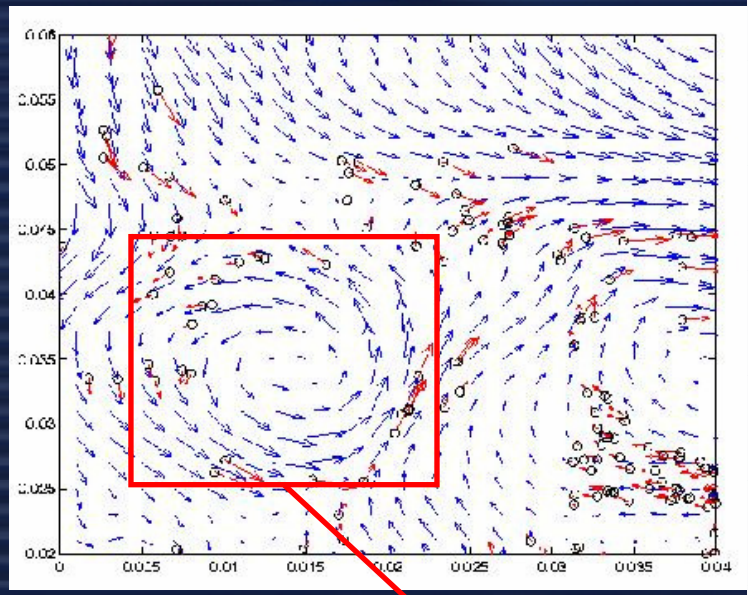
divergence du courant (champ de vitesse)

- variation de la densité de fluide = $\frac{\partial \rho}{\partial t}$

- D'où $div\,\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ C'est l'équation de continuité

Faire tourner des roues dans un champ vectoriel

- Les zones de tourbillon jouent un rôle important en hydrodynamique (turbulences)
- Tourbillon = circulation du fluide autour d'un axe
- En installant une roue à palettes dans le fluide on mesure la « force de rotation » ou moment angulaire du fluide
- « Force de rotation » est proportionnelle à la vitesse de rotation de la roue à palettes



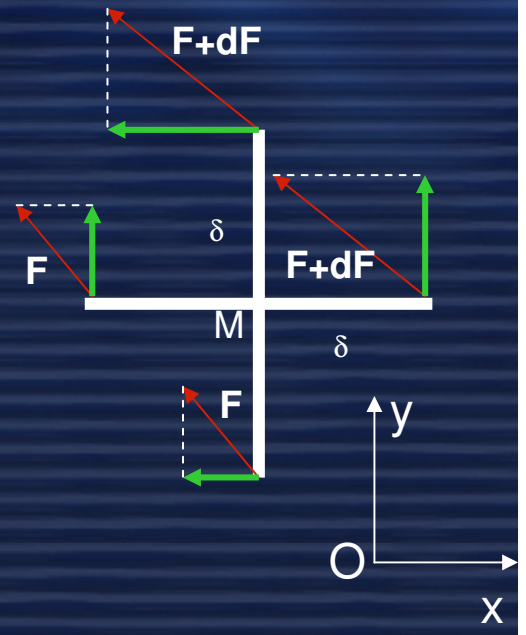
Calcul de la rotation d'un fluide

- Couple des forces de pression agissant sur une roue à palettes infinitésimale

$$C_x = [F_y(x+\delta) - F_y(x)]\delta = \frac{\partial F_y}{\partial x}\delta^2$$

$$C_x = [F_x(y) - F_x(y+\delta)]\delta = -\frac{\partial F_x}{\partial y}\delta^2$$

$$\vec{C}_{total} = (C_x + C_y) = \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\delta^2 - \frac{\partial F_y}{\partial x}\delta^2\right)\vec{e_z} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\right)\delta^2\,\vec{e_z}$$



- La grandeur

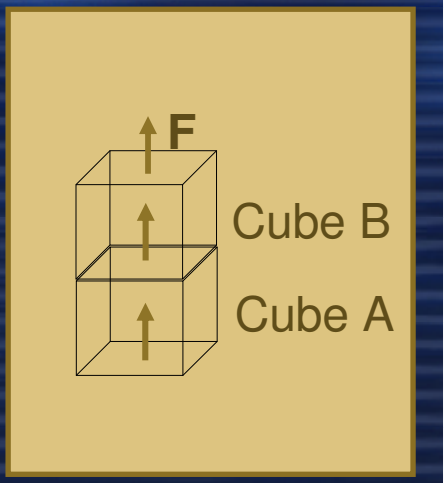
$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\right)\vec{e}_z$$

est proportionnelle au couple qu'exerce le fluide au point M

- Vous avez reconnu le **rotationnel** de **F** dans le plan Oxy

Théorème de Green-Ostrogradski

- Calcul du flux au travers de la pile A+B
  - Le flux sortant de A est le flux entrant dans B → leur somme est nulle
  - Il ne reste que les flux à l'entrée de A et à la sortie de B → flux à la surface de la pile
- Cas d'un volume quelconque
  - Tout volume peut être décomposé en un empilement de cubes infinitésimaux
  - Le flux qui passe au travers de ces cubes = au flux à la surface du volume



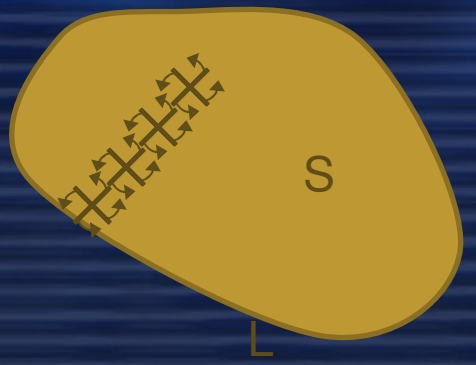
$$\iiint_{\substack{\text{tous les cubes } dV \\ \text{du volume } V}} \left(\text{flux entrant de } \vec{F} - \text{flux sorant de } \vec{F} \right) \text{pour un cube } dV$$

$$= \iiint_V div\ \vec{F}\ dV$$

$$= \oiint_S \vec{F}\ \vec{n}\ dS$$

Théorème de Stokes

- Soit un fluide qui traverse une surface
- Quelle est la valeur du couple qui s'applique sur la surface compte tenu de la circulation du fluide ?
- Plaçons des roues à palettes infinitésimales sur toute la surface
  Qu'observe-t-on ?
  - Les couples de deux roues contiguës s'annulent
  - Les seuls points où ils ne s'annulent pas sont ceux situés au bord de la surface
  - $\Rightarrow$ le couple résultant est égal au couple agissant le long de la courbe qui délimite la surface



$$\iint_S \left(couples\ de\ \vec{F}\ sur\ une\ roue\right) dS = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{F}\ dS$$

$$= \oint_L \vec{F}.d\vec{l}$$

Mesurer les accidents d'un relief

- Comment mesurer les accidents d'une pente ?
- Supposons que le relief soit recouvert d'une fine pellicule d'eau maintenue en « suspension ». Lorsque l'on relâche l'eau, elle s'écoule. Observons ce qui se passe pendant les premiers instants (la 1ère milliseconde par ex.)
  - L'eau s'écoule, moins vite quand la pente est faible, plus vite quand la pente est forte ⇒
    - accumulation relative quand la pente diminue
    - dispersion quand la pente augmente
  - La quantité d'eau à la surface du relief nous renseigne sur la forme de la pente, sa variation, la présence d'accidents plus ou moins importants
- Qu'avons-nous fait d'un point de vue mathématique ?
  - Calcul de la pente du relief : calcul du gradient de l'altitude du relief
  - Mesure des accumulations / dispersions : calcul de la divergence de la pente
- Conclusion : la divergence du gradient des altitudes nous renseigne sur la présence d'accidents de relief. C'est le Laplacien

$$div\left(\overrightarrow{grad}\, f\right) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Exemple d'application du laplacien : la détection des contours

Laplacien

- Un contour sur une photo correspond à un changement rapide de couleur (ici des nuances de gris)
- Le niveau de gris définit un champ scalaire dans le plan de la photo
- Changement rapide de niveau de gris ⇒ laplacien non nul

Équation de poisson

- Équation de Poisson

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = V(x, y, z)$$

- La résolution de cette équation revient à trouver les dessins dont le contour est tracé par V(x, y, z)
- Cas intéressant

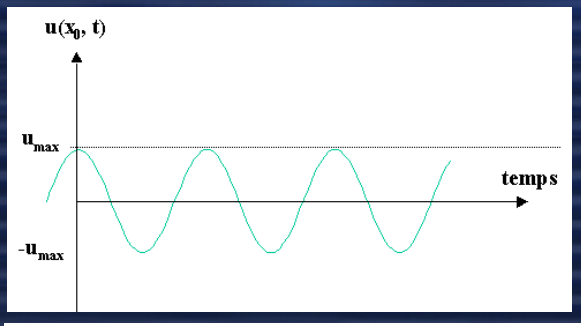
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

- **Solutions = dessins sans contours,** par exemple, une surface de forme sinusoïdale mais il y en a beaucoup d'autres !

Équation d'onde

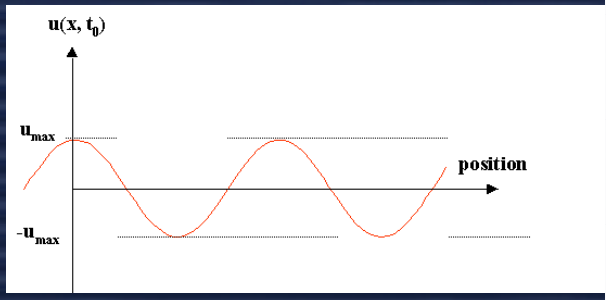
- Deux images de la même onde sur la surface d'une mare
  - On « bloque » l'espace (on se concentre sur un seul point qui oscille)
    - la variation de la position du point en fonction du temps est une sinusoïde dont l'équation est

$$\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right)_{en\ fixant\ x=x_0} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -ku(x_0,t)$$



  - On bloque le temps
    - La surface de l'eau forme aussi une sinusoïde dont l'équation est

$$\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)_{en\ fixant\ t=t_0} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -aku(x,t_0)$$



  - Les deux sinusoïdes reflètent le même phénomène → elles sont identiques

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

  -

- On en déduit que l'équation qui décrit le phénomène ondulatoire est donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Autre interprétation de l'équation d'onde

- Si l'on pose

$$t' = ivt$$

- Alors l'équation d'onde prend la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t'^2} = 0$$

- $\rightarrow$ c'est l'équation de Poisson dans un espace quadridimensionnel particulier {x, y, z, ivt}
- Onde = objet géométrique ne présentant pas « d'accident » dans l'espace **et** dans le temps !
- L'application du « laplacien quadri-dimensionnel » à une onde plane donne une image uniformément blanche (absence de contours)
- Cette analogie prend tout son sens en relativité

Un exemple concret : le champ électromagnétique

ou comment faire de l'électromagnétisme avec des courants d'eau !

- Le fluide électrique : sources et puits du champ électrique
- Le fluide magnétique : la roue magnétique
- Quand le champ magnétique crée des charges électriques virtuelles
- Un champ électrique qui devient un courant
- Des champs qui se propagent

Le fluide électrique : sources et puits du champ électrique

- Charges électriques sont à l'origine du champ électrique → les lignes de champ y convergent ou en divergent
- Si le champ électrique est assimilé au champ de vitesse d'un fluide incompressible, alors les charges sont des puits et des sources
- Par convention
  - Charges – : puits
  - Charges + : sources
- Appliquant ce que nous avons vu précédemment la divergence donne alors

$$div\vec{E} = \text{a (densité de charges)} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

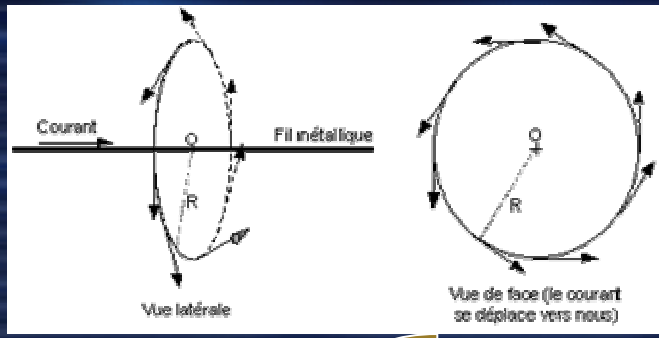
Signification de ε_0

- Coefficient de proportionnalité ε_0 dû au choix des unités ?
- Pour une même source (ou puits)
  - Quand ε_0 croît $\Rightarrow$ accumulation de fluide autour de la source $\Rightarrow$ moins grande quantité de fluide traverse la surface du volume / s $\Rightarrow$ fluide visqueux
  - Quand ε_0 décroît $\Rightarrow$ dispersion plus rapide du fluide $\Rightarrow$ plus grande quantité de fluide traverse la surface du volume / s $\Rightarrow$ fluide peu visqueux
- ε_0 mesure la viscosité du fluide
- Le vide présenterait donc une « viscosité » vis-à-vis de « l'écoulement » (ou propagation) du champ électrique (diffusion de la « quantité de mouvement » du champ dans le vide)
- L'écoulement d'un fluide est d'autant plus lent que sa viscosité est élevée $\Rightarrow$ vitesse d'écoulement inversement proportionnelle à la viscosité
- On peut s'attendre à ce qu'il y ait un rapport de proportionnalité inverse entre ε_0 et la vitesse de propagation du champ électrique (vitesse de la lumière notée c)
  et en effet

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

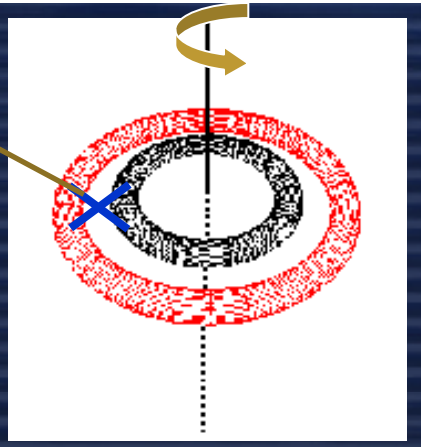
On note que si $\varepsilon_0 \nearrow$ alors $c \searrow$

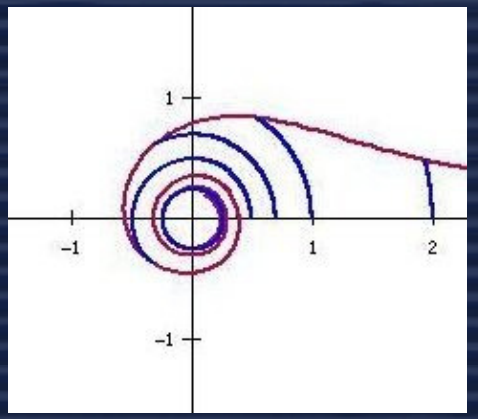
Le fluide magnétique



- L'expérience montre qu'un courant rectiligne crée un champ magnétique dont les lignes sont des cercles centrés sur le courant
- Le courant joue le rôle « d'arbre en rotation » qui entraîne le « fluide » magnétique avec lui
- Nous savons, qu'à l'exception des points situés sur le fil conducteur, partout ailleurs **rot B = 0**
- Quelle propriété du « fluide magnétique » pouvons-nous en tirer ?
- Considérons deux 2 tubes toriques concentriques contigus dans le fluide magnétique
  Quelle action ont-ils sur une roue à palettes infinitésimale ?
  - Le tube noir fait tourner la roue dans le sens des aiguilles d'une montre
  - Le tube rouge la fait tourner dans le sens contraire
- rot B = 0 ⇔ la roue ne tourne pas ⇔ la densité de moment angulaire dans les deux tubes est égale
- **Dans le « fluide magnétique » la densité de moment angulaire est constante ⇒ la vitesse du fluide en un point est inversement proportionnelle à la distance au fil**

Roue à palettes





Les ondes électromagnétiques

- Équation des ondes électromagnétiques

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0$$

- En procédant au changement variable t' = ict il vient

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}=0$$

- Équation de Poisson dans un espace quadri-dimensionnel {x, y, z, ict} → c'est l'espace de Minkowski

- Une onde électromagnétique est donc équivalente à une image sans contour … dans un espace à 4 dimensions (dont une imaginaire !)