TRAVAUX DIRIGES DE PHYSIQUE DES ONDES MECANIQUES ET ACOUSTIQUES PC/PC*

Ce TD comporte deux séries d'exercices :

1) Des exercices d'applications directes du cours
2) Des exercices d'entrainement à l'écrit des concours (issus des annales X-ENS, Mines-Ponts, Centrale-Supélec et CCP)

Dans la première série vous trouverez, pour chacune des parties « ondes mécaniques » et « ondes acoustiques » donnant :

☞ Conseils

🗎 Méthodes

⚐ Erreurs à éviter

🔔 Indications

afin de vous permettre de vous aiguiller dans la résolution d'un exercice et d'acquérir les bons réflexes pour aborder une situation nouvelle.

Sommaire

1ère série :

Remarques générales pour les ondes mécaniques …………..……………………..……… page 3

Exercice 1 : Emission sonore d’une corde de guitare électrique …………..………….. page 6

Exercice 2 : Propagation d’une onde sismique ……………...………………..………. page 11

Exercice 3 : Dispersion et absorption par une corde vibrante verticale …………..…... page 14

Remarques générales pour les ondes acoustiques …..…………………………….…..... page 18

Exercice 4 : Propagation d’une onde sonore dans un fluide ………………..……… page 21

Exercice 5 : Influence de la viscosité de l’air sur la propagation du son ………..……. page 24

2ème série :

Exercice 6 : Vibrations d’une corde verticale fixée à ses deux extrémités ..………..... page 27

Exercice 7 : Reproduction artificelle électromagnétique d’un écho …………..………. page 31

Exercice 8 : Clarinette et saxophone ……………………………………..…………..…… page 34

$1^{ère}$ série : exercices d'applications directes du cours

◊ Remarques générales pour les ondes mécaniques

☞ Conseils :

• Toujours écrire l'équation de d'Alembert pour la grandeur $s(x,t)$ sous la forme : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$ où C est la célérité de l'onde de manière à bien identifier l'expression de C.

• Il vaut mieux écrire dm la masse d'un élément mésoscopique plutôt que m afin d'éviter les confusions et de faire apparaître la masse volumique $\rho = \frac{dm}{d\tau}$ ou la masse linéique $\mu = \frac{dm}{dx}$.

• Pour une corde verticale il faut inverser les coordonnées d'un point de la corde : la fonction d'onde est $x(z,t)$ au lieu de $z(x,t)$ pour une corde horizontale.

🗎 Méthodes :

• Pour déterminer l'équation d'onde :
Il existe plusieurs méthodes :
▪ La méthode des éléments finis :
- on isole un élément mésoscopique du système mécanique, de longueur « dx » par exemple (un petit bout de corde, une tranche de système comprise entre x et $x+dx$) ;
- puis on lui applique une loi d'évolution mécanique, le principe fondamental de la dynamique le plus souvent, on obtient alors une équation d'onde vérifiée par une des grandeurs qui caractérise le mouvement de l'élément de système étudié ;
- le terme en $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ vient de l'accération du système, le terme en $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (si la propagation s'effectue suivant l'axe des x) vient de considérations sur des différences de forces qui s'appliquent sur l'élément de système, via un développement de Taylor (bien sur à l'ordre 2 !).

▪ La méthode de passage à la limite continue :
Cette méthode s'utilise pour une chaine d'oscillateurs :
- on détermine l'équation du mouvement du $n^{\text{ième}}$ oscillateur faisant intervenir les termes d'une suite discrète : z_{n-1}, z_n, z_{n+1} ;
- puis on passe à la limite continue en attribuant à la suite discrète $z_n(t)$ une fonction continue $z(x,t)$;
- les termes $z_{n-1}(t)$ et $z_{n+1}(t)$ s'écrivent $z(x-x_0,t)$ et $z(x+x_0,t)$, que l'on développe à l'ordre 2 ;

- puis on remplace dans l'équation du mouvement et on obtient l'équation d'onde.

• Pour déterminer la relation de dispersion :
- détermination de l'équation de propagation ;
- recherche de solution d'OPPH : on injecte $\underline{s} = s_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$, avec $\underline{k} = k' + jk''$ *a priori* complexe et ω réel, dans l'équation de propagation et on obtient la relation de dispersion $\underline{k}(\omega)$.

• Pour interpréter la relation de dispersion :
- bien se rappeler que k' est lié à la propagation (avec dispersion éventuelle) et k'' à l'absorption de l'onde ;
- détermination de k' et k'' ;
- on réécrit la solution réelle $s(x,t)$;
- interprétations :
  - ▪ si la relation $k'(\omega)$ n'est pas linéaire la propagation s'effectue avec dispersion (le milieu est dispersif) ;
  - ▪ si $k'' < 0$ l'onde est absorbée ;
  - ▪ si $k'' > 0$ l'onde est amplifiée ;
  - ▪ puis conclure sur les caractéristiques de l'onde.

Erreurs à éviter :

• Ne pas confondre C^2 et $\dfrac{1}{C^2}$ en analysant la forme de l'équation de d'Alembert.

• Si on obtient $k'' > 0$, ne pas conclure hativement que la situation physique est impossible car il existe des milieux amplificateurs (le Laser par exemple), bien lire l'énoncé !

• L'énoncé peut proposer $\underline{k} = k' - jk''$, attention aux erreurs de signe et aux mauvaises interprétations.

• Ne pas se tromper en écrivant la force de rappel d'un ressort : $\vec{f_r} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}$, où ℓ est la longueur du ressort, ℓ_0 sa longueur à vide et $\vec{u}$ un vecteur directeur de la direction du ressort.

• Ne pas écrire la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{\underline{k}}$ (aucun sens !).

Indications :

• La formule de Taylor à l'ordre 2 : $f(x+h) = f(x) + h\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{h^2}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

• La vitesse de phase est $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'}$ et n'a pas de signification physique, la vitesse de groupe est $v_g = \dfrac{d\omega}{dk'}$ et représente la vitesse de propagation de l'énergie.

• Si la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'}$ ne dépend pas de ω alors le milieu de propagation est non dispersif.

◊ **Exercice 1 : Emission sonore d'une corde de guitare électrique**

On considère une corde homogène initialement au repos et confondue avec l'axe Ox, inélastique, de masse linéique μ, tendue par une tension de norme T. Le dispositif global est représenté figure 1.
La corde est tendue par une masse par l'intermédiaire d'une poulie.
La corde est fixée au point O et un guidage impose $y = 0$ à chaque instant à l'abscisse $x = L$.

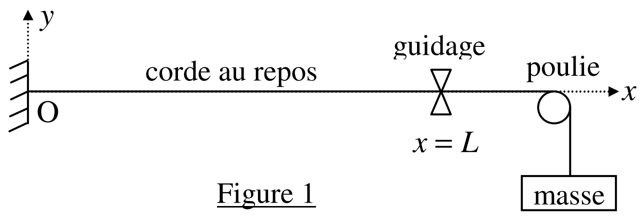


Figure 1

On étudie les petits mouvements transversaux de la corde dans le plan xOy, autour de la position d'équilibre. L'élongation à l'instant t du point M d'abscisse x est notée $y(x,t)$. La tangente en M à la corde fait avec l'axe Ox un angle $\theta(x,t)$. Les déplacements étant de faibles amplitudes, cet angle θ reste petit (voir figure 2). Dans l'étude du mouvement de la corde, on négligera l'action du champ de pesanteur ainsi que toute cause d'amortissement. La géométrie du problème est représentée figure 2 ; on y a représenté les tensions appliquées à l'élément de corde MN.

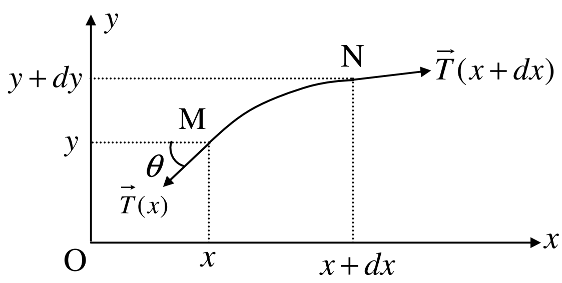


Figure 2

1. Expliquer qualitativement devant quelle grandeur on néglige l'action du champ de pesanteur et pourquoi on peut le faire.
2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'élément de corde MN. Que peut-on en conclure pour T ? En déduire l'équation $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$. Comment se nomme cette équation ? Exprimer la constante C en fonction de T et μ et en donner la dimension.
3. Montrer que les solutions de l'équation différentielle précédente sont de la forme : $y(x,t) = f(Ct - x) + g(Ct + x)$. Interpréter le sens physique de la fonction f par exemple et donner le sens physique de Cv.
4. On rappelle que la corde est fixée de façon rigide en $x = 0$ et guidée en $x = L$. On cherche les solutions de l'équation de propagation sous la forme : $y(x,t) = f(x)\cdot g(t)$ (ondes stationnaires) et on admet que les fonctions $f(x)$ et $g(t)$ sont sinusoïdales et on pose : $\begin{cases} f(x) = a_1 \sin(kx + \varphi_1) \\ g(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$. En déduire la relation qui lie k à ω, comment s'appelle cette relation ?

Montrer que ω ne peut prendre qu'une série de valeurs discrètes ω_n. Exprimer ω_n en fonction de L, n et C.

A chaque valeur de ω_n correspond un mode propre. Le mode $n=1$ est appelé mode fondamental. Les modes correspondant à n supérieur à 1 sont les harmoniques. Exprimer l'élongation $y_n(x,t)$ du mode d'indice n et donner une représentation graphique de la corde en mouvement (à un instant donné) pour les trois premiers harmoniques.

5. Calculs sur les cordes d'une guitare électrique

Une guitare électrique comporte six cordes en acier.

Le tableau ci-dessous fournit pour chaque corde, la valeur de sa fréquence fondamentale et son diamètre.

Corde n°	1	2	3	4	5	6
f_1 = fréquence fondamentale (Hz)	82,5	110	147	196	247	330
Diamètre d (mm)	1,12	0,89	0,70	0,55	0,35	0,25

Toutes les cordes ont une longueur $L = 0{,}63\ \mathrm{m}$ et une masse volumique $\rho = 7800\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$.

Déterminer T en fonction de ρ, π, d, L et $f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi}$ pour le mode fondamental.

Calculer numériquement les tensions nécessaires pour que la guitare soit accordée.

Quelle variation relative peut être tolérée sur la tension d'une corde pour que sa fréquence fondamentale ne varie pas de plus de 1% en valeur relative ? Application numérique. L'instrumentiste veut produire un son de fréquence fondamentale de 500 Hz puis 1 kHz avec une tolérance de 1% sur la corde n°6. Avec quelle précision absolue doit-il placer son doigt pour raccourcir la corde ?

Comment varie la précision absolue avec la fréquence fondamentale du son à produire ? Application numérique. Commenter.

Solution

1. On étudie le système « élément de corde MN » de masse dm dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Cet élément de corde subit 3 forces : la tension en M $\vec{T}(x)$, la tension en N $\vec{T}(x+dx)$, et son poids $dm\vec{g}$. La tension est supposée suffisamment importante pour que la corde, au repos, puisse être considérée comme horizontale. Cette tension est apportée par l'intermédiaire d'une masse m et d'une poulie. Si la masse de la corde est négligeable devant m, alors le poids de la corde est négligeable devant la tension.

2. On applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) à cet élément de corde : $dm\vec{a} = \vec{T}(x) + \vec{T}(x+dx)$.

La masse dm de l'élément de corde de longueur $d\ell$ s'écrit $dm = \mu d\ell$ avec $d\ell = \sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$, soit $d\ell \approx dx$ au 1er ordre, l'élément de corde conserve la même longueur, en effet la corde est inextensible. Cet élément de corde a alors une masse $dm = \mu dx$.

Puisqu'on étudie les mouvements transversaux de la corde, MN n'a pas de mouvement longitudinal (selon l'axe Ox), son vecteur accélération s'écrit alors $\vec{a} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\overrightarrow{u_y}$.

En projetant le PFD sur l'axe Ox : $-T_x(x)+T_x(x+dx)=0$.

En effectuant un développement de Taylor au 1[er] ordre : $\dfrac{\partial T_x}{\partial x}=0$ et $T_x = cte$.

Puisque $T_x = T\cos\theta = cte$, et $\theta << 1$, on a alors $\cos\theta \approx 1$ et on obtient $\boxed{T = cte}$.

En projetant le PFD sur l'axe Oy : $\mu dx\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T_y(x)+T_y(x+dx)$.

En développant au 1[er] ordre : $\mu\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\dfrac{\partial T_y}{\partial x}$. Or $T_y = T\sin\theta$, donc $\dfrac{\partial T_y}{\partial x} = T\dfrac{\partial \sin\theta}{\partial x}$.

Comme $\theta << 1$, on a $\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta$. De plus $\tan\theta = \dfrac{\partial y}{\partial x}$, donc $\dfrac{\partial(\sin\theta)}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

D'où : $\mu\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. On obtient bien une équation de la forme $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$.
Cette équation est l'équation de d'Alembert.

En identifiant : $\boxed{C=\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}}$. En regardant la dimension de l'équation de d'Alembert précédente on remarque que C est une vitesse.

3. On pose $u = Ct - x$ et $v = Ct + x$. On a alors :

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v} \text{ car } \frac{\partial u}{\partial x}=-1 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x}=1.$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}=C\frac{\partial y}{\partial u}+C\frac{\partial y}{\partial v} \text{ car } \frac{\partial u}{\partial t}=C \text{ et } \frac{\partial v}{\partial t}=C.$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)=C\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right)+C\left(\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial t}\right)=C^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+2C^2\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+C^2\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

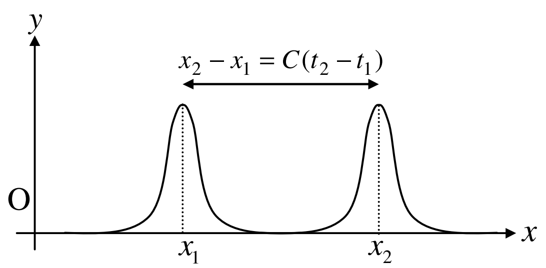
En reportant dans l'équation $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$, on obtient $\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}=0$. En intégrant par rapport à u : $\dfrac{\partial y}{\partial v}=G(v)$. Puis en intégrant par rapport à v : $y(u,v)=f(u)+g(v)$.

On a bien : $y(x,t)=f(Ct-x)+g(Ct+x)$ (c'est le théorème de d'Alembert).

Interprétation : supposons que la fonction g soit nulle : $y(x,t)=f(Ct-x)$.

La fonction y a la même valeur dans le plan à la position x_1 observé à l'instant t_1 et dans le plan à la position x_2 observé à l'instant t_2 si $f\left(Ct_1-x_1\right)=f\left(Ct_2-x_2\right)$, soit pour $Ct_1-x_1=Ct_2-x_2$, ou encore $x_2-x_1=C\left(t_2-t_1\right)$.

Ceci signifie que le phénomène s'est propagé « en bloc », suivant l'axe Ox, dans le sens des x croissants, sans déformation ni atténuation, à la vitesse C (onde progressive).



4. Avec $f(x) = a_1 \sin(kx + \varphi_1)$ et $g(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$, l'onde stationnaire s'écrit : $y(x,t) = a_1 a_2 \sin(kx + \varphi_1)\sin(\omega t + \varphi_2)$. On en déduit $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y$ et $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y$.

En reportant dans l'équation de propagation, on obtient $\left(-k^2 + \dfrac{\omega^2}{C^2}\right) y = 0$ et ce $\forall\ y$, d'où

$\boxed{C = \dfrac{\omega}{k}}$, appelée relation de dispersion de l'onde.

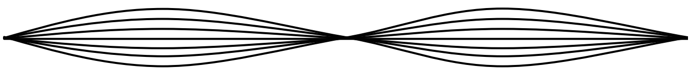
Les points $x = 0$ et $x = L$ sont fixés, donc $y(0,t) = 0$ et $y(L,t) = 0$ (conditions aux limites).
Puisque $y(x,t) = f(x)g(t)$ on en déduit $f(0) = 0$ et $f(L) = 0$.
$f(0) = 0 \Rightarrow \sin\varphi_1 = 0$ et $f(L) = 0 \Rightarrow \sin(kL + \varphi_1) = 0 = \sin(kL)\cos\varphi_1 + \cos(kL)\sin\varphi_1$.
On en déduit donc $\sin(kL) = 0$, soit $kL = n\pi$ avec n entier.

Or $\omega = kC$ est quantifiée et ne peut prendre qu'une série de valeurs discrètes $\boxed{\omega_n = n\dfrac{\pi C}{L}}$.

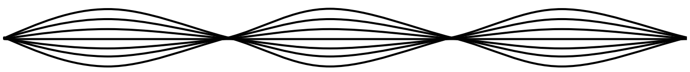
L'élongation $y_n(x,t)$ du mode de rang n s'écrit : $y_n(x,t) = \pm a_1 a_2 \sin(k_n x)\sin(\omega_n t + \varphi_2)$, que l'on note, avec les résultats précédents : $\boxed{y_n(x,t) = A_n \sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi Ct}{L} + \varphi\right)}$.

Représentons graphiquement la corde en mouvement (à un instant donné) pour les trois premiers harmoniques :

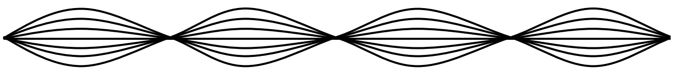
Pour $n = 2$:



Pour $n = 3$:



Pour $n = 4$:



5. Calculs sur les cordes d'une guitare électrique.

Pour le mode fondamental : $\omega = \omega_1 = \dfrac{\pi C}{L} = \dfrac{\pi}{L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ et $\omega_1 = 2\pi f_1$, d'où $T = 4\mu L^2 f_1^2$.

Or $\mu = \rho\pi r^2 = \rho\pi\dfrac{d^2}{4}$, d'où $\boxed{T = \pi\rho d^2 L^2 f_1^2}$.

Corde n°	1	2	3	4	5	6
T en Newton	83	93	103	113	73	66

Différentions logarithmiquement l'expression $T = 4\mu L^2 f_1^2$ à μ et L constants : $\dfrac{dT}{T} = 2\dfrac{df_1}{f_1}$.

En passant aux variations on obtient : $\dfrac{\Delta T}{T} = 2\dfrac{\Delta f_1}{f_1}$, soit $\boxed{\Delta T = 2T\dfrac{\Delta f_1}{f_1}}$.

Avec les valeurs précédentes $T \approx 100\text{ N}$ et $\frac{\Delta f_1}{f_1} = 1\%$, on obtient $\boxed{\Delta T \approx 2\text{ N}}$.

Différentions logarithmiquement l'expression $T = 4\mu L^2 f_1^2$ à μ et T constants :

$0 = 2\frac{dL}{T} + 2\frac{df_1}{f_1}$.

En passant aux variations on obtient : $\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta f_1}{f_1}$, soit $\boxed{\Delta L = L\frac{\Delta f_1}{f_1}}$, soit, avec $\frac{\Delta f_1}{f_1} = 1\%$,

$\Delta L = \frac{L}{100}$.

Pour la corde n° 6 : $L_0 = 0,63\text{ m}$ et $f_{1_0} = 330\text{ Hz}$.

Puisque μ et T sont constants dans la relation $T = 4\mu L^2 f_1^2$, on en déduit $Lf_1 = cte = L_0 f_{1_0}$.

On a donc : $L = L_0\frac{f_{10}}{f_1}$ et $\Delta L = \frac{L}{100}$, et on obtient :

f_1 (Hz)	L (m)	ΔL (m)
500	0,42	$4,2.10^{-3}$
1000	0,21	$2,1.10^{-3}$

On en déduit que l'instrumentiste doit placer son doigt pour raccourcir la corde avec une précision absolue de l'ordre du millimètre.

De $\Delta L = \frac{L_0}{100}\frac{f_{10}}{f_1}$, on déduit que la précision absolue varie inversement proportionnelle avec la fréquence fondamentale du son à produire.

Plus un son est aigu, plus il est difficile de l'émettre juste.

Application numérique : prenons $\Delta L = 0,5\text{ mm}$ (cas difficile), on a alors $f_1 = 4158\text{ Hz}$.

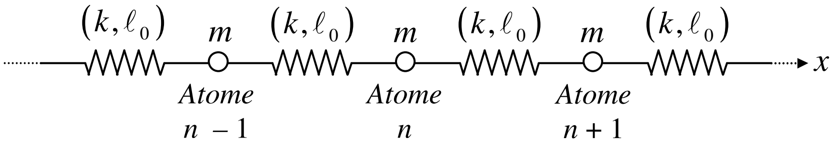
On en déduit qu'il est difficile de jouer un son juste au-delà de 4000 Hz.

◊ Exercice 2 : Propagation d'une onde sismique

Les ondes sismiques sont des ondes de déformation élastique qui se propagent à l'intérieur du globe terrestre (ondes de volume) ou en surface (ondes de Love et de Rayleigh). Nous étudions ici un type particulier d'ondes de volume longitudinales : les ondes P (primaires) qui peuvent se propager à l'intérieur de la Terre après une explosion ou un séisme. L'étude de cette propagation permet d'accéder à des informations importantes concernant la structure géologique interne du globe terrestre.

I/ Modèle microscopique

Modélisons un solide unidimensionnel comme une ligne composée d'une infinité d'atomes identiques, assimilés à des points matériels de masse m, reliés entre eux par des ressorts identiques (ressorts parfaits, de masse nulle, de longueur à vide ℓ_0 constante et de raideur k constante), c'est le modèle d'Einstein. On suppose que les déplacements s'effectuent sans frottement suivant l'horizontale Ox.



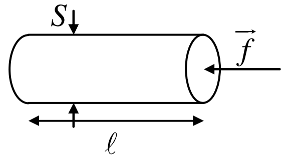
Supposons que l'on déplace le 1er atome de la chaîne de sa position d'équilibre, il va se mettre à osciller, ce qui va faire osciller son voisin, et de proche en proche, une vibration longitudinale se propage le long de la chaîne d'atomes. On repère l'atome n par son abscisse x_n et on étudie le mouvement de cet atome autour de sa position d'équilibre $x_n^0 = n\ell_0$, et on note $\varepsilon_n(t)$ son déplacement par rapport à sa position d'équilibre, de sorte que $x_n(t) = n\ell_0 + \varepsilon_n(t)$, et on suppose bien sur que $\varepsilon_n \ll \ell_0$.

1. Déterminer une relation entre ε_n, ε_{n-1} et ε_{n+1} faisant intervenir m et k.
2. On utilise l'approximation des milieux continus et on attribue à $\varepsilon_n(t)$ une fonction continue $\varepsilon(x,t)$, et non plus une suite discrète ε_n, ε_{n+1}, … Justifier cette approximation et montrer que $\varepsilon(x,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} - \dfrac{m}{k\ell_0^2}\dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}$. Quelle est l'expression de la célérité de l'onde ?

II/ Modèle macroscopique

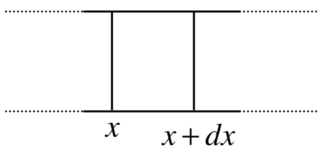
La vibration longitudinale est maintenant traitée à l'échelle macroscopique (milieu continu). On note E le module d'Young.

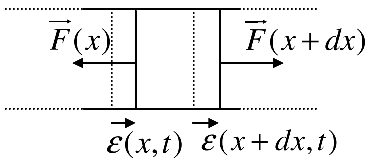
3. Pour une tige cylindrique de masse volumique ρ, de section S, de longueur ℓ, de température T, on note $\vec{f}$ la force qu'on applique de manière longitudinale pour faire varier sa longueur.



   Définir le module d'Young, quelle est son unité ?
   Enoncer la loi de Hooke.
4. Considérons une tranche de solide au repos comprise entre les abscisses x et $x+dx$. Lorsqu'une vibration longitudinale se propage dans le solide, la section de la tranche située en x se déplace d'une distance $\varepsilon(x,t)$, et la section de la tranche située en $x+dx$ se déplace d'une distance $\varepsilon(x+dx,t)$, en subissant chacune une force $\vec{F}(x)$ et $\vec{F}(x+dx)$. Montrer que la

variation de longueur de cette tranche de solide s'écrit au 1[er] ordre : $d\ell = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx$, puis montrer que ε verifie l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = 0$. Quelle est l'expression de la célérité de l'onde ?





III/ Lien entre les deux modèles

5. Au sein d'un réseau cristallin métallique, l'énergie potentielle d'interaction de deux atomes distants de r est de la forme $E_p(r) = -\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\mu}{r^{10}}$, ce qui correspond à une constante de raideur $k = \frac{16\lambda}{r_0^4}$ où r_0 représente la position d'équilibre. Pour le tungstène : $\rho = 19,35 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $m = 3 \cdot 10^{-25}$ kg, $r_0 = 0,274$ nm et $\lambda = 0,37 \text{ eV} \cdot \text{nm}^2$ ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J), en déduire le module d'Young du tungstène.

Solution

I/ Modèle microscopique

1. L'atome n subit de la part de l'atome $n+1$ la force $\vec{F}_{n+1} = k\left(x_{n+1} - x_n - \ell_0\right)\vec{u_x}$, et de la part de l'atome $n-1$ la force $\vec{F}_{n-1} = -k\left(x_n - x_{n-1} - \ell_0\right)\vec{u_x}$.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'atome n :

$m\frac{d^2 x_n}{dt^2}\vec{u_x} = k\left(x_{n+1} - x_n - \ell_0\right)\vec{u_x} - k\left(x_n - x_{n-1} - \ell_0\right)\vec{u_x}$, on obtient :

$m\frac{d^2 x_n}{dt^2} = -k\left(2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}\right)$: équation différentielle du mouvement de l'atome n.

On pose $\varepsilon_n = x_n - x_n^0$ le déplacement relatif (par rapport à la position d'équilibre) de l'atome n : $\boxed{m\frac{d^2 \varepsilon_n}{dt^2} = -k\left(2\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n-1}\right)}$.

2. La distance ℓ_0 entre deux atomes du solide est de l'ordre de 10^{-10} m, on peut alors faire l'approximation que cette distance est suffisamment petite devant la longueur d'onde pour attribuer à $\varepsilon_n(t)$ une fonction continue $\varepsilon(x,t)$, et non plus une suite ε_n, ε_{n+1}, …

On pose alors $\varepsilon_n(t) = \varepsilon(x,t)$, $\varepsilon_{n+1}(t) = \varepsilon(x+\ell_0,t)$ et $\varepsilon_{n-1}(t) = \varepsilon(x-\ell_0,t)$.

L'équation différentielle précédente s'écrit alors :

$m\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = -k\left(2\varepsilon(x,t) - \varepsilon(x+\ell_0,t) - \varepsilon(x-\ell_0,t)\right)$.

Puisque $\varepsilon_n << \ell_0$, on peut remplacer $\varepsilon(x+\ell_0,t)$ et $\varepsilon(x-\ell_0,t)$ par leurs développements de Taylor à l'ordre 2 :

$$\varepsilon(x+\ell_0,t)=\varepsilon(x,t)+\ell_0\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+\frac{\ell_0^2}{2}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} \text{ et } \varepsilon(x-\ell_0,t)=\varepsilon(x,t)-\ell_0\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+\frac{\ell_0^2}{2}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}.$$

On obtient alors $m\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}=k\ell_0^2\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}$, ou bien $\boxed{\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}-\frac{m}{k\ell_0^2}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}}$.

On obtient une équation de d'Alembert et la célérité des ondes s'écrit $\boxed{C=\sqrt{\frac{k\ell_0^2}{m}}}$.

<u>II/ Modèle macroscopique</u>

3. La définition du module d'élasticité isotherme, ou module d'Young est : $\boxed{E=\frac{\ell}{S}\left(\frac{\partial f}{\partial\ell}\right)_T}$, E s'exprime en Pascal (Pa).

Lorsqu'on applique une force longitudinale à une tige (à température constante), sa longueur varie et la force est proportionnelle à l'allongement relatif du solide, c'est la loi de Hooke : $\boxed{df=ES\frac{d\ell}{\ell}}$.

4. La variation de longueur de cette tranche de solide s'écrit $d\ell=\varepsilon(x+dx,t)-\varepsilon(x,t)$, soit en développant au 1er ordre : $\boxed{d\ell=\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}dx}$.

Sa longueur est $\ell=dx$, d'où l'allongement relatif $\frac{d\ell}{\ell}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}$.

La masse de cette tranche de solide est $dm=\rho S dx$.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à cette tranche de solide, en projection sur l'axe Ox : $\rho S dx\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}=-F(x)+F(x+dx)$.

Or, d'après la loi de Hooke, $F(x+dx)-F(x)=ES\left(\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)_{x+dx}-\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)_x\right)=ES\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}dx$.

On obtient alors $\rho\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}=-E\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}$, ou bien $\boxed{\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}-\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}=0}$.

On obtient une équation de d'Alembert et la célérité des ondes s'écrit $\boxed{C=\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$.

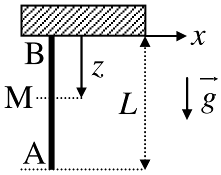
<u>III/ Lien entre les deux modèles</u>

5. Les deux modèles précédents nous donnent deux expressions différentes de la célérité de l'onde : $C=\sqrt{\frac{k\ell_0^2}{m}}$ et $C=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, on en déduit (avec $\ell_0=r_0$) : $E=\frac{\rho r_0^2 k}{m}$.

Avec les données de l'énoncé on trouve $k=10{,}5\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$, et $\boxed{E=5\cdot10^{10}\ \mathrm{Pa}}$.

◊ Exercice 3 : Dispersion et absorption par une corde vibrante verticale

L'objet de l'étude est une corde AB de longueur L, parfaitement flexible et sans frottements internes, de section négligeable, homogène, de masse totale m_T et de densité linéique uniforme μ. On l'étudie dans un plan vertical défini par le repère (O, x, z).
L'extrémité B est fixe, l'extrémité A est libre.



1. La corde est en équilibre. Montrer que la tension de la corde au point M est donnée par $T(z) = \mu g(L - z)$.
2. La corde vibre. On note $\theta(z,t)$ l'angle que fait localement la corde avec l'axe vertical. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'élément dz de corde à la cote z, montrer que la fonction d'onde vérifie l'équation [1] : $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g\left(L - z\right)\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g\dfrac{\partial x}{\partial z}$, en négligeant les termes du deuxième ordre en θ (approximation des petits mouvements).
3. Que devient l'équation d'onde si l'on tient compte de la force de frottement visqueux $\overrightarrow{df} = -\alpha \dfrac{\partial x}{\partial t} dz\, \overrightarrow{u_x}$ agissant sur l'élément de corde dz, $\alpha > 0$ étant la constante de frottement ?
4. On cherche une solution à l'équation d'onde au voisinage du point de fixation $(z << L)$. Montrer qu'une onde sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude complexe $\underline{x}(z,t) = \underline{x_0} e^{j(\omega t - kz)}$, où k est une constante réelle ne peut se propager que pour une certaine valeur α_0 de la constante de frottement, que l'on exprimera en fonction de μ, g et L.
5. Donner, pour $\alpha = \alpha_0$, les expressions de la vitesse de phase v_φ et de la vitesse de groupe v_g de l'onde. Y a-t-il dispersion ?
6. On néglige maintenant le terme de frottement et on cherche une solution à l'équation [1] dans la région $(z << L)$ sous la forme $\underline{x}(z,t) = \underline{a} e^{j(\omega t - \underline{k} z)}$, avec $\underline{k} = k_1 + jk_2$ complexe (k_1 et k_2 étant réels). Exprimer k_2. En déduire que l'amplitude de l'onde augmente pendant la propagation. Le résultat est-il cohérent avec celui de la question 4 ?
7. Etablir alors la relation de dispersion. Comment se nomme cette relation de dispersion ? Poser $\omega_0^2 = \dfrac{g}{4L}$ et étudier les cas $\omega < \omega_0$ et $\omega > \omega_0$: y a-t-il propagation, dispersion, absorption ?
8. Déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe, ainsi que la relation qui lie ces deux vitesses.

Solution

1. Considérons un élément de corde, de masse $dm = \mu dz$, compris entre les cotes z et $z+dz$, et au repos (accélération nulle). Il subit son poids $\vec{P} = dm\vec{g} = \mu dzg\overrightarrow{u_z}$ et les tensions de la corde à chacune de ses extrémités $\vec{T}(z) = -T(z)\overrightarrow{u_z}$ et $\vec{T}(z+dz) = T(z+dz)\overrightarrow{u_z}$.
Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors, en projection sur Oz :
$0 = -T(z) + T(z+dz) + \mu dzg$.
Or au 1er ordre $T(z+dz) - T(z) = \dfrac{\partial T}{\partial z}dz$, et on en déduit $\dfrac{dT}{dz} = -\mu g$, soit $T(z) = -\mu gz + cte$.
De plus $T(z=L) = T(\mathrm{A}) = 0$ car l'extrémité A est libre, d'où $cte = \mu gL$.
Finalement : $\boxed{T(z) = \mu g\left(L-z\right)}$.
2. Considérons un élément de corde, de longueur ds, compris entre les points M et M' situés aux abscisses x et $x+dx$ et aux cotes z et $z+dz$.
La longueur de l'élément de corde s'écrit $ds = \sqrt{dx^2+dz^2} = dz\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^2}$.
Dans l'approximation des petits mouvements, l'angle θ reste négligeable devant 1 radian, et $\tan\theta = \dfrac{\partial x}{\partial z}$ est négligeable devant 1, soit $ds = dz$ (l'élément de corde conserve la même longueur).
Cet élément de corde, de masse $dm = \mu dz$, subit son poids $d\vec{P} = dm\vec{g} = \mu dzg\overrightarrow{u_z}$, la tension en z : $\vec{T}(z)$, et la tension en $z+dz$: $\vec{T}(z+dz)$.
On applique le principe fondamental de la dynamique à cet élément de corde :
$dm\vec{a} = \vec{T}(z) + \vec{T}(z+dz)$.
Or le vecteur accélération de cet élément de corde s'écrit $\vec{a} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}\overrightarrow{u_x}$ (pas de mouvement longitudinal).
En projetant sur l'axe Ox : $\mu dz\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -T_x(z) + T_x(z+dz) = \dfrac{\partial T_x}{\partial z}dz$.
Or $T_x = T\sin\theta$ avec $T = T(z) = \mu g\left(L-z\right)$ et $\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta = \dfrac{\partial x}{\partial z}$, soit $T_x = \mu g\left(L-z\right)\dfrac{\partial x}{\partial z}$.
On en déduit $\dfrac{\partial T_x}{\partial z} = \mu g\left[\left(L-z\right)\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \dfrac{\partial x}{\partial z}\right]$ et finalement : $\boxed{\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g\left(L-z\right)\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g\dfrac{\partial x}{\partial z}}$.
3. Si l'élément de corde subit en plus une force de frottement visqueux $\overrightarrow{df} = -\alpha\dfrac{\partial x}{\partial t}dz\,\overrightarrow{u_x}$, le principe fondamental projeté sur Ox devient $\mu dz\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \mu dz\left[g\left(L-z\right)\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g\dfrac{\partial x}{\partial z}\right] - \alpha\dfrac{\partial x}{\partial t}dz$.
L'équation d'onde devient $\boxed{\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g\left(L-z\right)\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g\dfrac{\partial x}{\partial z} - \dfrac{\alpha}{\mu}\dfrac{\partial x}{\partial t}}$.
4. On cherche une solution d'onde plane progressive harmonique dont l'amplitude complexe s'écrit $\underline{x}(z,t) = \underline{x_0}e^{j(\omega t-kz)}$ avec ω et k réels, cette solution vérifie :
$\dfrac{\partial^2 \underline{x}}{\partial t^2} = g\left(L-z\right)\dfrac{\partial^2 \underline{x}}{\partial z^2} - g\dfrac{\partial \underline{x}}{\partial z} - \dfrac{\alpha}{\mu}\dfrac{\partial \underline{x}}{\partial t}$.

Or $\frac{\partial \underline{x}}{\partial t}=j\omega\underline{x}$, $\frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial t^2}=-\omega^2\underline{x}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial z}=-jk\underline{x}$ et $\frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial z^2}=-k^2\underline{x}$. On remplace dans l'équation d'onde : $-\omega^2=g\left(L-z\right)\left(-k^2\right)-g\left(-jk\right)-\frac{\alpha}{\mu}j\omega$ ou bien $\omega^2=g\left(L-z\right)k^2+j\left(\frac{\alpha\omega}{\mu}-gk\right)$: la relation de dispersion.

ω et k étant réels, la relation de dispersion ne doit comporter que des termes réels et le terme imaginaire pur doit être nul, c'est-à-dire qu'il faut choisir la valeur α_0 de α telle que $\frac{\alpha_0\omega}{\mu}-gk=0$, soit $\alpha_0=\frac{\mu gk}{\omega}$.

Les termes réels de la relation de dispersion donnent $\omega^2=g\left(L-z\right)k^2$.

Au voisinage du point de fixation $z<<L$ et $\omega^2=gLk^2$, soit $\omega=\sqrt{gL}k$.

On en déduit $\frac{k}{\omega}=\frac{1}{\sqrt{gL}}$ et $\boxed{\alpha_0=\mu\sqrt{\frac{g}{L}}}$.

5. Pour $\alpha=\alpha_0$ la relation de dispersion dans l'approximation $z<<L$ est $\omega=\sqrt{gL}k$, cette relation est linéaire, on en déduit que le milieu n'est pas dispersif.

La vitesse de phase est $v_\varphi=\frac{\omega}{k}$, la vitesse de groupe est $v_g=\frac{d\omega}{dk}$, d'où $\boxed{v_\varphi=v_g=\sqrt{gL}}$.

6. Reprenons l'équation d'onde sans frottement : $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=g\left(L-z\right)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-g\frac{\partial x}{\partial z}$.

Dans l'approximation $z<<L$: $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=gL\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-g\frac{\partial x}{\partial z}$.

Cherchons une solution d'onde plane progressive harmonique dont l'amplitude complexe s'écrit $\underline{x}(z,t)=\underline{a}e^{j(\omega t-\underline{k}z)}$ avec ω réel et $\underline{k}$ complexe.

Or $\frac{\partial \underline{x}}{\partial t}=j\omega\underline{x}$, $\frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial t^2}=-\omega^2\underline{x}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial z}=-j\underline{k}\underline{x}$ et $\frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial z^2}=-\underline{k}^2\underline{x}$. On remplace dans l'équation d'onde : $-\omega^2=gL\left(-\underline{k}^2\right)-g\left(-j\underline{k}\right)$ ou bien $\omega^2=gL\underline{k}^2-jg\underline{k}$: la relation de dispersion.

On pose $\underline{k}=k_1+jk_2$, soit $\underline{k}^2=k_1^2-k_2^2+2jk_1k_2$, d'où :

$\omega^2=gL\left(k_1^2-k_2^2+2jk_1k_2\right)-jg\left(k_1+jk_2\right)$, ou bien $\omega^2=gL\left(k_1^2-k_2^2\right)+gk_2+jg\left(2k_1k_2L-k_1\right)$.

On en déduit, en identifiant les parties réelles et imaginaires : $\omega^2=gL\left(k_1^2-k_2^2\right)+gk_2$ et $\left(2k_2L-1\right)k_1=0$ et finalement on obtient : $\boxed{k_2=\frac{1}{2L}}$.

La solution $\underline{x}(z,t)=\underline{a}e^{j(\omega t-\underline{k}z)}$ s'écrit avec $\underline{k}=k_1+jk_2$: $\underline{x}(z,t)=\underline{a}e^{k_2z}e^{j(\omega t-k_1z)}$. En passant aux valeurs réelles : $x(z,t)=ae^{k_2z}\cos\left(\omega t-k_1z\right)$.

Puisque $k_2=\frac{1}{2L}>0$, l'amplitude de l'onde ae^{k_2z} augmente avec z, c'est-à-dire pendant la propagation (dans le sens des z croissants).

Ceci est en désaccord avec le principe de conservation de l'énergie car l'amplitude de l'onde tend vers l'infini au cours de la propagation, il faut donc tenir compte des frottements (question 4).

7. Déterminons k_1 via $\omega^2 = gL\left(k_1^2 - k_2^2\right) + gk_2$ et $k_2 = \dfrac{1}{2L}$: $\omega^2 = gLk_1^2 + \dfrac{g}{4L}$ et $k_1^2 = \dfrac{\omega^2 - \frac{g}{4L}}{gL}$. Avec $\omega_0^2 = \dfrac{g}{4L}$ on obtient $\boxed{k_1^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{gL}}$.

C'est la relation de dispersion de Klein-Gordon.

Pour $\omega < \omega_0$: $k_1^2 < 0$ et k_1 est imaginaire pur de la forme $k_1 = jk_1^{'}$, ce qui conduit à $x(z,t) = ae^{\left(k_1^{'} + k_2\right)z} \cos\left(\omega t\right)$: l'onde est stationnaire amortie (on dit qu'elle est évanescente), il n'y a pas propagation et il y a absorption.

Pour $\omega > \omega_0$: $k_1^2 > 0$ et k_1 est réel : $k_1 = \sqrt{\dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{gL}}$ et il y a propagation.

La propagation s'effectue avec dispersion car la relation $k_1(\omega)$ n'est pas linéaire.

8. La vitesse de phase est $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k_1}$, soit $\boxed{v_\varphi = \sqrt{\dfrac{gL\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}}$.

La vitesse de groupe est $v_g = \dfrac{d\omega}{dk_1}$, avec $\omega = \sqrt{gLk_1^2 + \omega_0^2}$ on obtient $v_g = \dfrac{2gLk_1}{2\sqrt{gLk_1^2 + \omega_0^2}}$, soit $\boxed{v_g = gL\dfrac{k_1}{\omega}}$.

On en déduit $\boxed{v_\varphi v_g = gL}$.

◊ Remarques générales pour les ondes acoustiques

☞ Conseils :

• Bien se rappeler que l'approximation acoustique consiste à ne garder que les termes d'ordre 1 (et négliger les termes d'ordres supérieurs).

• Si la propagation s'effectue dans un tuyau de section variable (type pavillon), il faut utiliser la méthode des éléments finis pour traduire la conservation de la masse.

Les conseils du chapitre précédent :

• Toujours écrire l'équation de d'Alembert pour la grandeur $s(x,t)$ sous la forme : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=0$ où C est la célérité de l'onde de manière à bien identifier l'expression de C.

• Il vaut mieux écrire dm la masse d'un élément mésoscopique plutôt que m afin d'éviter les confusions et de faire apparaître la masse volumique $\rho=\frac{dm}{d\tau}$

🗎 Méthodes :

• Pour obtenir l'équation de propagation (pour la surpression ou la vitesse acoustique) :

- linéariser les équations de la mécanique des fluides et de la thermodynamique :
  - l'équation d'Euler pour un fluide parfait (l'équation de Navier-Stockes pour un fluide visqueux)
  - l'équation de conservation de la masse
  - la définition du coefficient de compressibilité isentropique
- on obtient trois équations à trois inconnues : le champ des vitesses $\vec{v}$, la surpression p et la masse volumique ρ ;
- combiner les trois équations pour « chasser » deux des inconnues et obtenir une équation d'onde pour une des trois inconnues.

• Pour obtenir l'équation de propagation (2) :
On peut aussi utiliser la méthode des éléments finis (à une dimension) :

- définir comme système une tranche mésoscopique de fluide ;
- appliquer le principe fondamental de la dynamique au système ;
- effectuer un bilan de masse au niveau de la surface de contrôle qui entoure la tranche de fluide ;
- utiliser la définition du coefficient de compressibilité isentropique ;
- on obtient trois équations à trois inconnues : le champ des vitesses, la surpression et la masse volumique ;
- combiner les trois équations pour « chasser » deux des inconnues et obtenir une équation d'onde pour une des trois inconnues.

• Pour déterminer une grandeur qui se propage (en en connaissant une) :

- si l'énoncé donne la vitesse acoustique $u(x,t)$ on obtient la surpression en utilisant l'équation d'Euler linéarisée en intégrant par rapport à x, et la masse volumique en utilisant l'équation de conservation de la masse linéarisée ou la définition du coefficient de compressibilité isentropique ;
- on peut aussi utiliser la notion d'impédance acoustique.

• Pour déterminer la relation de dispersion et pour l'interpréter : voir chapitre 1.

Erreurs à éviter :

• Ne pas oublier de négliger les forces de pesanteur devant les forces de pression.

• Ne pas écrire l'impédance acoustique $\underline{Z} = \dfrac{\underline{v}}{\underline{p}}$.

Les erreurs du chapitre précédent :

• Ne pas confondre C^2 et $\dfrac{1}{C^2}$ en analysant la forme de l'équation de d'Alembert.

• Si on obtient $k">0$, ne pas conclure hativement que la situation physique est impossible car il existe des milieux amplificateurs (le Laser par exemple), bien lire l'énoncé !

• L'énoncé peut proposer $\underline{k} = k' - jk"$, attention aux erreurs de signe et aux mauvaises interprétations.

• Ne pas écrire la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{\underline{k}}$ (aucun sens !).

Indications :

• L'impédance acoustique complexe d'un milieu s'écrit $\underline{Z} = \dfrac{\underline{p}}{\underline{v}}$.

Les indications du chapitre précédent :

• La formule de Taylor à l'ordre 2 : $f(x+h) = f(x) + h\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{h^2}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

• La vitesse de phase est $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'}$ et n'a pas de signification physique, la vitesse de groupe est $v_g = \dfrac{d\omega}{dk'}$ et représente la vitesse de propagation de l'énergie.

• Si la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'}$ ne dépend pas de ω alors le milieu de propagation est non dispersif.

◊ Exercice 4 : Propagation d'une onde sonore dans un fluide

On étudie la propagation des ondes sonores dans un gaz, initialement au repos, assimilé à un gaz parfait subissant des transformations isentropiques. On note P, ρ et $\vec{v}$ la pression, la masse volumique et le vecteur vitesse en un point de l'air. On rappelle la définition du coefficient de compressibilité isentropique de l'air (que l'on supposera constant) : $\chi_s = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_s = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s$. On néglige les effets de la pesanteur. De plus, l'air, supposé parfait, est non visqueux.

1. Rappeler l'équation d'Euler de la mécanique des fluides (1) ainsi que l'équation locale de conservation de la masse (2).
2. En l'absence d'onde sonore, on a : $\vec{v} = \vec{0}$, $P = P_0$, $\rho = \rho_0$. En présence d'ondes sonores, on obtient : $\vec{v} \neq \vec{0}$, $P = P_0 + p$, $\rho = \rho_0 + \mu$, où p est la surpression acoustique et μ la variation de masse volumique. $\vec{v}$, p et μ ont en tout point du fluide une valeur moyenne nulle et sont considérés comme des infiniment petits ainsi que leurs dérivées spatiales et temporelles. Dans toute la suite on se place dans l'approximation acoustique. Cela signifie que tous les calculs seront menés à l'ordre 1 des infiniment petits, ce qui permettra d'obtenir des équations linéaires. Que deviennent les deux équations (1) et (2) dans cette approximation ?
3. Justifier la relation : $\mu = \rho_0 \chi_s p$ (3).
4. Montrer que la surpression vérifie l'équation (tridimensionnelle) de d'Alembert (On rappelle que $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f\right) = \Delta f$, f désignant une fonction scalaire et Δ l'opérateur laplacien). Donner l'expression de la vitesse de propagation du son, noté C (« célérité du son »).

On étudie la propagation d'une onde sonore dans l'air qui remplit un long cylindre d'axe Ox et de section S constante. On considère que l'onde est plane, progressive, sinusoïdale et qu'elle se propage selon Ox dans le sens des x croissants ($x < 0$).
On pose, en notation complexe : $\underline{p}(x,t) = p_0 e^{j(\omega t - kx)}$ pour la surpression instantanée, et $\underline{\vec{v}}(x,t) = \underline{v}(x,t)\overrightarrow{u_x} = v_0 e^{j(\omega t - kx - \phi)}\overrightarrow{u_x}$ pour la vitesse instantanée.
Dans ces expressions, k est supposé réel (et non pas complexe).

5. Etablir la relation entre k et ω. Le milieu est-il dispersif ?
6. Exprimer $\underline{p}$ en fonction de $\underline{v}$, ρ_0 et C (la célérité du son). En déduire la valeur de ϕ.
7. Définir l'impédance acoustique $\underline{Z}$ d'un milieu. Exprimer $\underline{Z}$ en fonction de ρ_0 et C.
8. Applications numériques : on veut calculer la valeur de Z pour l'air à 20 °C, à pression usuelle $P_0 = 10^5$ Pa. L'air est assimilé à un gaz parfait diatomique ($\gamma = 7/5$). Données numériques : masse molaire de l'air : $M = 29 \cdot 10^{-3}$ kg·mol^{-1}, constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31$ J·K^{-1}·mol^{-1}. Etablir la relation liant χ_s à P_0. Calculer χ_s, C et Z.

Solution

1. L'équation d'Euler s'écrit : $\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{grad}} P}$ (1).

L'équation locale de conservation de la masse s'écrit $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0}$ (2).

2. Linéarisons dans l'approximation acoustique :

Dans l'équation d'Euler $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}=-\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}}P$, le terme $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$ est du second ordre, on le néglige donc devant $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, on obtient donc après linéarisation : $\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\overrightarrow{\text{grad}}p}$.

Dans l'équation locale de conservation de la masse $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\text{div}\left(\rho\vec{v}\right)=0$, on peut développer la divergence : $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\text{div}\left(\vec{v}\right)+\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\rho=0$, le terme convectif $\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\rho$ est du second ordre, on le néglige donc devant $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, on obtient donc après linéarisation : $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\rho_0\text{div}\left(\vec{v}\right)}$.

3. La définition du coefficient de compressibilité isentropique de l'air (que l'on supposera constant) est : $\chi_s=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s$, ce qui s'écrit avec la notion de fluide en mouvement : $\chi_s=\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{DP}$, ou encore $\frac{D\rho}{Dt}=\chi_s\rho\frac{DP}{Dt}$.

Or $\frac{D\rho}{dt}=\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\rho+\frac{\partial \rho}{\partial t}$ et le terme convectif $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\rho$ est du second ordre, on le néglige donc devant $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, d'où $\frac{D\rho}{dt}=\frac{\partial \rho}{\partial t}$, et de même $\frac{DP}{dt}=\frac{\partial P}{\partial t}$.

On obtient donc après linéarisation : $\frac{\partial \rho}{\partial t}=\chi_s\rho_0\frac{\partial P}{\partial t}$, ou bien $\frac{\partial \rho}{\partial P}=\chi_s\rho_0$.

Or $P=P_0+p$ et $\rho=\rho_0+\mu$, d'où $\frac{\partial \rho}{\partial P}=\frac{\mu}{p}$ au 1er ordre, et finalement $\boxed{\mu=\rho_0\chi_s p}$.

4. Finalement on a obtenu trois équations : $\rho_0\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}=-\overrightarrow{\text{grad}}p$, $\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\rho_0\text{div}\left(\vec{v}\right)$ et $\frac{\partial \rho}{\partial t}=\chi_s\rho_0\frac{\partial p}{\partial t}$. On peut écrire :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=-\frac{1}{\chi_s}\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div}\left(\vec{v}\right)\right)=-\frac{1}{\chi_s}\text{div}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)=-\frac{1}{\chi_s}\text{div}\left(-\frac{1}{\rho_0}\overrightarrow{\text{grad}}p\right)=\frac{1}{\chi_s\rho_0}\text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}p\right)=\frac{1}{\chi_s\rho_0}\Delta p$$

soit $\boxed{\Delta p-\chi_s\rho_0\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0}$.

On en déduit par identification la célérité du son : $\boxed{C=\sqrt{\frac{1}{\chi_s\rho_0}}}$.

5. A une dimension x l'équation de d'Alembert prend la forme $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0$.

En reportant l'expression de la surpression $\underline{p}(x,t)=p_0e^{j(\omega t-kx)}$, on obtient, avec $\frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial x^2}=\left(-jk\right)^2\underline{p}$ et $\frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2}=\left(j\omega\right)^2\underline{p}$: $\left(-k^2-\frac{1}{C^2}\left(-\omega^2\right)\right)\underline{p}=0$, soit $\boxed{k=\frac{\omega}{C}}$.

La relation entre k et ω étant linéaire, le milieu est non dispersif.

6. L'équation $\rho_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p$ s'écrit $\rho_0 \dfrac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\dfrac{\partial \underline{p}}{\partial x}$, soit $\rho_0 \left(j\omega \right) \underline{v} = -\left(-jk \right) \underline{p}$. On en déduit $\underline{p} = \rho_0 \dfrac{\omega}{k} \underline{v}$, ou encore $\boxed{\underline{p} = \rho_0 C \underline{v}}$.

En reportant $\underline{p}(x,t) = p_0 e^{j(\omega t - kx)}$ et $\underline{v}(x,t) = v_0 e^{j(\omega t - kx - \phi)}$, on obtient : $e^{-j\phi} = \dfrac{p_0}{\rho_0 C v_0}$: réel.

On en déduit $\dfrac{p_0}{\rho_0 C v_0} = 1$ et $\boxed{\phi = 0}$.

7. On définit l'impédance acoustique d'un milieu par la relation $\underline{Z} = \dfrac{\underline{p}}{\underline{v}}$, soit $\boxed{\underline{Z} = \rho_0 C}$.

Cette impédance est réelle.

8. L'air, assimilé à un gaz parfait, subit des transformations isentropiques. Une transformation isentropique d'un gaz parfait suit la loi de Laplace $PV^{\gamma} = Cte$, que l'on écrit sous la forme différentielle $\dfrac{dP}{P} + \gamma \dfrac{dV}{V} = 0$.

On a alors $\left(\dfrac{\partial V}{\partial P} \right)_S = -\dfrac{V}{\gamma P}$ et $\chi_s = \dfrac{1}{\gamma P}$, soit, avec $P \approx P_0$: $\boxed{\chi_s = \dfrac{1}{\gamma P_0}}$.

De l'expression précédente on déduit $\boxed{\chi_s = 7{,}14 \cdot 10^{-6}\ \text{Pa}^{-1}}$.

Le gaz étant parfait, il suit l'équation d'état des gaz parfaits : $PV = nRT$, d'où $\rho_0 = \dfrac{MP_0}{RT}$, soit $\rho_0 = 1{,}2\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

On en déduit $C = \sqrt{\dfrac{1}{\chi_s \rho_0}}$: $\boxed{C = 342{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$, et $Z = \rho_0 C$: $\boxed{Z = 408\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}}$.

◊ **Exercice 5 : Influence de la viscosité de l'air sur la propagation du son**

En réalité, à cause de la viscosité de l'air, le son est absorbé au cours de sa propagation.
L'air, de viscosité η et de masse volumique ρ, étant considéré comme visqueux, il obéit à l'équation de Navier-Stockes : $\rho\left(\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}+\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)=-\overrightarrow{\text{grad}}P+\eta\Delta\vec{v}$.

En l'absence d'onde sonore, on a : $\vec{v}=\vec{0}$, $P=P_0$, $\rho=\rho_0$. En présence d'ondes sonores, on obtient : $\vec{v}\neq\vec{0}$, $P=P_0+p$, $\rho=\rho_0+\mu$, où p est la surpression acoustique et μ la variation de masse volumique. On se place dans l'approximation acoustique.
Soit χ_s le coefficient de compressibilité isentropique de l'air.

1. Linéariser l'équation de Navier-Stockes, l'équation de conservation de la masse et rappeler le lien linéaire entre ρ et la surpression p.
2. Montrer que l'équation d'onde vérifiée par la surpression s'écrit :

$\Delta p-\dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}+\dfrac{\beta}{C^2}\dfrac{\partial(\Delta p)}{\partial t}=0$ et exprimer C et β en fonction de η, χ_s et ρ_0.

   On donne : $\text{div}\left(\Delta\vec{v}\right)=\Delta\left(\text{div}\vec{v}\right)$ et $\Delta p=\text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}p\right)$.

On suppose que l'onde se propage suivant la direction Ox et on considère que l'émetteur émet une onde sinusoïdale de pulsation ω et que β vérifie $\beta\omega<<C^2$. On cherche pour la surpression complexe une solution de la forme $\underline{p}(x,t)=p_0e^{j(\omega t-\underline{k}x)}$ avec $\underline{k}$ complexe : $\underline{k}=k_1-jk_2$ (k_1 et k_2 des réels positifs).

3. Exprimer k_1 et k_2 en fonction de β, C et ω en faisant les approximations qui s'imposent.
4. Donner l'expression réelle $p(x,t)$ de la surpression et mettre en évidence une distance caractéristique de l'atténuation δ que l'on exprimera en fonction des données.
5. Application numérique : calculer la valeur de δ avec $\rho_0=1{,}2\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $C=340\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $\eta=2\cdot10^{-5}$ Pl et une fréquence sonore $f=1\ \text{kHz}$. Commenter le résultat.
6. Donner l'expression de la vitesse de phase v_φ. Y a-t-il dispersion ?
7. Si on utilise des ultrasons dans l'air, quelle gamme de fréquence est-il préférable d'utiliser pour limiter leur atténuation au cours de la propagation ?

Solution

1. En linéarisant l'équation de Navier-Stockes on obtient : $\boxed{\rho_0\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\overrightarrow{\text{grad}}p+\eta\Delta\vec{v}}$ (1).

L'équation de conservation de la masse linéarisée s'écrit : $\boxed{\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=-\rho_0\text{div}\left(\vec{v}\right)}$ (2).

Le lien linéaire entre ρ et la supression p découle de χ_s et est $\boxed{\rho=\rho_0\chi_s p}$ (3).

2. De (2) et (3) on déduit $\text{div}\vec{v}=-\chi_s\dfrac{\partial p}{\partial t}$.

En prenant la divergence de l'équation de Navier-Stockes linéarisée :

$$\text{div}\left(\rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)=\text{div}\left(-\overrightarrow{\text{grad}}p+\eta\Delta\vec{v}\right)=-\Delta p+\eta\Delta\left(\text{div}\vec{v}\right).$$

Or $\operatorname{div}\left(\rho_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = \rho_0 \dfrac{\partial\left(\operatorname{div}\vec{v}\right)}{\partial t} = -\rho_0\chi_s \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}$, d'où $-\rho_0\chi_s \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\Delta p + \eta\Delta\left(-\chi_s \dfrac{\partial p}{\partial t}\right)$, et finalement : $\Delta p - \rho_0\chi_s \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \eta\chi_s \dfrac{\partial(\Delta p)}{\partial t} = 0$.

On pose $C = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_s}}$, soit $\chi_s = \dfrac{1}{\rho_0 C^2}$ et on obtient $\Delta p - \dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \dfrac{\eta}{\rho_0 C^2}\dfrac{\partial(\Delta p)}{\partial t} = 0$, la forme demandée avec $\boxed{C = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_s}}}$ et $\boxed{\beta = \dfrac{\eta}{\rho_0}}$.

3. A une dimension x l'équation d'onde s'écrit $\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = C^2 \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \beta \dfrac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t}$.

En reportant l'expression de la surpression $\underline{p}(x,t) = p_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ dans l'équation d'onde, on obtient : $(j\omega)^2\, \underline{p} = C^2\left(-j\underline{k}\right)^2 \underline{p} + \beta\left(-j\underline{k}\right)^2 (j\omega)\,\underline{p}$, soit $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{C^2 + j\beta\omega}$, ce qui s'écrit : $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{C^2}\dfrac{1}{1 + j\dfrac{\beta\omega}{C^2}}$.

Or $\dfrac{\beta\omega}{C^2} << 1$, d'où, en effectuant un développement limité au 1^er^ ordre : $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{C^2}\left(1 - j\dfrac{\beta\omega}{C^2}\right)$.

On en déduit $\underline{k} = \dfrac{\omega}{C}\sqrt{1 - j\dfrac{\beta\omega}{C^2}} \approx \dfrac{\omega}{C}\left(1 - j\dfrac{\beta\omega}{2C^2}\right)$, soit $\underline{k} = \dfrac{\omega}{C} - j\dfrac{\beta\omega^2}{2C^3}$.

Or $\underline{k} = k_1 - jk_2$, d'où $\boxed{k_1 = \dfrac{\omega}{C}}$ et $\boxed{k_2 = \dfrac{\beta\omega^2}{2C^3}}$.

4. La surpression complexe s'écrit $\underline{p}(x,t) = p_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ avec $\underline{k} = k_1 - jk_2$, soit $\underline{p}(x,t) = p_0 e^{j(\omega t - (k_1 - jk_2)x)}$, ou encore $\underline{p}(x,t) = p_0 e^{-k_2 x} e^{j(\omega t - k_1 x)}$.

En passant à l'expression réelle : $\boxed{\underline{p}(x,t) = p_0 e^{-k_2 x}\cos\left(\omega t - k_1 x\right)}$, ou bien $\boxed{\underline{p}(x,t) = p_0 e^{-\frac{\beta\omega^2}{2C^3}x}\cos\left(\omega t - \dfrac{\omega}{C}x\right)}$.

Le terme $\cos\left(\omega t - k_1 x\right)$ montre que l'onde est progressive donc le son se propage, mais l'onde est atténuée : le terme $e^{-k_2 x}$ montre que l'amplitude $p_0 e^{-k_2 x}$ de l'onde diminue exponentiellement pendant quelle se propage.

Cette amplitude peut s'écrire $p_0 e^{-x/\delta}$ où δ est la distance caractéristique de l'atténuation, soit $\delta = \dfrac{1}{k_2}$, ou bien $\boxed{\delta = \dfrac{2\rho_0 C^3}{\eta\omega^2}}$.

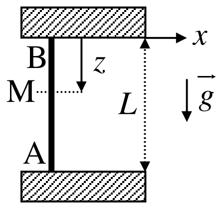
5. Application numérique : $\boxed{\delta = 120\ \text{km}}$. Cette valeur est évidemment absurde, la modélisation n'est pas assez fine. On peut remarquer que l'on utilise χ_s, ce qui suppose que l'air subit des transformations isentropiques (adiabatiques réversibles) au passage de l'onde sonore et le fluide est ici visqueux, ce qui implique des frottements internes et de l'irréversibilité.

6. La vitesse de phase est ici $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k_1}$, soit $\boxed{v_\varphi = C}$, elle ne dépend pas de ω, donc $\boxed{\text{il n'y a pas dispersion}}$.

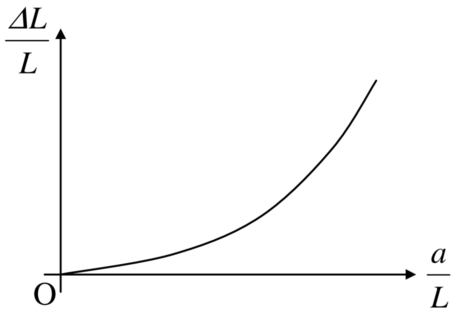
7. Pour limiter l'atténuation au cours de la propagation, il faut : $k_2 << k_1$, soit $\dfrac{\beta\omega^2}{2C^3} << \dfrac{\omega}{C}$, ou bien $\omega << \dfrac{2C^2}{\beta}$, $\boxed{\text{il faut travailler à fréquence faible}}$.

◊ Exercice 6 : Vibrations d'une corde verticale fixée à ses deux extrémités

On étudie une corde AB de longueur L, parfaitement flexible et sans frottements internes, de section négligeable, homogène, de masse totale m_T et de densité linéique uniforme μ. On l'étudie dans un plan vertical défini par le repère (O, x, z). La corde est verticale, fixée en ses deux extrémités A et B. La tension de la corde au point A, $T(\mathrm{A})$ est très grande devant le poids de la corde : $T(\mathrm{A}) >> m_T g$.



1. Définir ce qu'est la tension $T(\mathrm{M})$ de la corde en un point M. Exprimer $T(\mathrm{M})$ en fonction de $T(\mathrm{A})$, $m_T g$ et $\mu g z$. Montrer qu'à l'équilibre $T(\mathrm{M})$ est pratiquement constante le long de la corde.
2. La corde vibre et le point M, de cote z à l'équilibre, se déplace transversalement. Ce déplacement, noté x, est fonction de z et du temps t. On note $\theta(z,t)$ l'angle que fait localement la corde avec l'axe vertical. Déterminer l'équation des ondes suivie par la fonction $x(z,t)$ en négligeant les termes du deuxième ordre en θ (approximation des petits mouvements). Exprimer la célérité c des ondes en fonction de $T(\mathrm{A})$ et de la masse linéique μ. Calculer c pour $\mu = 10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot m^{-1}}$ et $T(\mathrm{A}) = 1\ \mathrm{N}$.
3. A l'instant initial, la forme de la corde est donnée par $x(z,0) = a\sin\left(\dfrac{\pi z}{L}\right)$, où a est une constante positive. Les vitesses initiales de tous les points de la corde sont nulles. Déterminer la fonction d'onde stationnaire $x(z,t)$ sous la forme $x(z,t) = X(z)A(t)$.
4. A l'instant initial, la corde est excitée selon deux modes propres : $x(z,0) = a\sin\left(\dfrac{\pi z}{L}\right) + b\sin\left(\dfrac{4\pi z}{L}\right)$, où a et b sont des constantes positives. Les vitesses initiales de tous les points de la corde sont nulles. Déterminer avec le minimum de calculs la nouvelle fonction d'onde $x(z,t)$.
5. La figure ci-dessous représente l'allongement relatif de la corde (en %) en fonction de l'amplitude relative de la déformation. Commentez ce résultat, par exemple en discutant l'hypothèse (implicite !) que la masse linéique ne changeait pas au cours du mouvement.



Solution

1. On définit la tension en M de la corde comme la force exercée par la partie AM sur la partie MB, cette force s'appliquant en M.
Considérons un élément de corde, de masse $dm = \mu dz$, compris entre les cotes z et $z+dz$, au repos (accélération nulle). Il subit son poids $d\vec{P} = dm\vec{g} = \mu dzg\overrightarrow{u_z}$ et les tensions de la corde à chacune de ses extrémités, le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors, en projection sur Oz : $0 = -T(z) + T(z+dz) + \mu dzg$. Or au 1$^{\text{er}}$ ordre $T(z+dz) - T(z) = \dfrac{\partial T}{\partial z}dz$, et on en déduit $\dfrac{dT}{dz} = -\mu g$, soit $T(z) = -\mu gz + cte$. Or $T(z=L) = T(\text{A})$, d'où $cte = T(\text{A}) + \mu gL$, et $T(z) = T(\text{A}) + \mu gL - \mu gz$.
Or $m_T = \mu L$ donc $\boxed{T(\text{M}) = T(\text{A}) + m_T g - \mu gz}$.
Or l'énoncé nous précise que $T(\text{A}) >> m_T g = \mu Lg$ on a donc aussi $T(\text{A}) >> \mu gz$ et finalement $\boxed{T(\text{M}) \approx T(\text{A})}$.
2. Considérons un élément de corde, de longueur ds, compris entre les points M et M' situés aux abscisses x et $x+dx$ et aux cotes z et $z+dz$.

La longueur de l'élément de corde s'écrit $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dz\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^2}$.

Dans l'approximation des petits mouvements, l'angle θ reste négligeable devant 1 radian, et $\tan\theta = \dfrac{\partial x}{\partial z}$ est négligeable devant 1, soit $ds = dz$ (l'élément de corde conserve la même longueur).
Cet élément de corde, de masse $dm = \mu dz$, subit son poids $d\vec{P} = dm\vec{g} = \mu dzg\overrightarrow{u_z}$, la tension en z : $\vec{T}(z)$, et la tension en $z+dz$: $\vec{T}(z+dz)$.
On applique le principe fondamental de la dynamique à cet élément de corde : $dm\vec{a} = \vec{T}(z) + \vec{T}(z+dz)$.

Or le vecteur accélération de cet élément de corde s'écrit $\vec{a} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}\overrightarrow{u_x}$ (pas de mouvement longitudinal).

En projetant sur l'axe Ox : $\mu dz\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -T_x(z) + T_x(z+dz) = \dfrac{\partial T_x}{\partial z}dz$. Or $T_x = T\sin\theta$ et $T = cte = T(\text{A})$, d'où $\mu\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = T(\text{A})\dfrac{\partial(\sin\theta)}{\partial z}$. Puisque $\theta << 1\,\text{rad}$, on $\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta$ et $\tan\theta = \dfrac{\partial x}{\partial z}$, donc $\dfrac{\partial(\sin\theta)}{\partial z} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2}$ et finalement $\boxed{\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \dfrac{\mu}{T(\text{A})}\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0}$. $x(z,t)$ vérifie l'équation de d'Alembert.
L'abscisse $x(z,t)$ d'un élément de corde se propage suivant la direction z, l'onde est longitudinale.

La célérité c des ondes s'écrit : $\boxed{c = \sqrt{\dfrac{T(\text{A})}{\mu}}}$. Application numérique : $\boxed{c = 31{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

3. Cherchons une solution d'onde stationnaire $x(z,t) = X(z)A(t)$: en remplaçant dans $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$ on obtient : $c^2 X''(z)A(t) = X(z)A''(t)$, ou bien $c^2 \frac{X''(z)}{X(z)} = \frac{A''(t)}{A(t)}$.

Dans l'égalité précédente, le terme $c^2 \frac{X''(z)}{X(z)}$ ne dépend que de z, et le terme $\frac{A''(t)}{A(t)}$ ne dépend que de t. Les variables z et t étant indépendantes l'égalité n'est possible que si les deux termes sont constants $c^2 \frac{X''(z)}{X(z)} = cte = \frac{A''(t)}{A(t)}$, et on note K cette constante.

Plusieurs situations se présentent suivant le signe de K :

• Si $K > 0$, on pose $K^2 = \Omega^2$ avec Ω réel.

$X''(z) - \frac{\Omega^2}{C^2} X(z) = 0 \Rightarrow X(z) = Ae^{\Omega z/C} + Be^{-\Omega z/C}$

et $A''(t) - \Omega^2 A(t) = 0 \Rightarrow A(t) = A'e^{\Omega t} + B'e^{-\Omega t}$.

Cette solution est innaceptable puisqu'il suffit d'attendre suffisamment longtemps pour que $A(t)$ donc $x(z,t)$ tende vers l'infini (ce qui contredit le principe de conservation de l'énergie).

• Si $K = 0$.

$X''(z) = 0 \Rightarrow X(z) = Az + B$ et $A''(t) = 0 \Rightarrow A(t) = A't + B'$.

Cette solution est innaceptable puisqu'il suffit d'attendre suffisamment longtemps pour que $A(t)$ donc $x(z,t)$ tende vers l'infini (ce qui contredit le principe de conservation de l'énergie).

• Si $K < 0$, on pose $K^2 = -\omega^2$ avec ω réel.

$X''(z) + \frac{\omega^2}{C^2} X(z) = 0 \Rightarrow X(z) = Ae^{j\omega z/C} + Be^{-j\omega z/C}$

et $A''(t) + \omega^2 A(t) = 0 \Rightarrow A(t) = A'e^{j\omega t} + B'e^{-j\omega t}$,

ou bien $X(z) = \lambda \cos(\omega z/C + \psi)$ et $A(t) = \mu \cos(\omega t + \varphi)$.

Finalement : $x(z,t) = x_0 \cos(kx + \psi)\cos(\omega t + \varphi)$ avec $x_0 = \lambda\mu$ et $k = \frac{\omega}{C}$.

Utilisons les conditions aux limites $x(0,t) = 0$ et $x(L,t) = 0$:

$x(0,t) = 0 \Rightarrow \cos(\psi) = 0$ et $x(L,t) = 0 \Rightarrow \cos(kL + \psi) = 0$.

On en déduit $\cos(kL)\cos(\psi) - \sin(kL)\sin(\psi) = 0$, soit $\sin(kL) = 0$, d'où $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$ et $kL = n\pi$, n un entier positif (car k et L sont positifs).

On a alors $k = n\frac{\pi}{L}$ et $\omega = n\frac{\pi C}{L}$.

La solution de l'équation de d'Alembert correspondante s'écrit :

$x_n(z,t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi Ct}{L} + \varphi_n\right)$ et est appelée « mode propre » ou « mode stationaire » de la corde, on parle de mode propre de rang n.

La solution générale de l'équation de d'Alembert s'écrit, puisqu'elle est linéaire à coefficients constants, comme combinaison linéaire de tous les modes propres (c'est le théorème de Fourier), soit $x(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi Ct}{L} + \varphi_n\right)$.

A l'instant initial, la forme de la corde est donnée par $x(z,0)=a\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$, où a est une constante positive, ce qui signifie que seul le mode de rang 1 est excité, soit $x_1(z,t)=A_1\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi Ct}{L}+\varphi_1\right)$.

$x_1(z,0)=A_1\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)\cos(\varphi_1)$, d'où $A_1\cos(\varphi_1)=a$.

Les vitesses initiales $\dot{x}(z,0)$ de tous les points de la corde sont nulles.

Or $\dot{x}_1(z,t)=A_1\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)\frac{\pi C}{L}\sin\left(\frac{\pi Ct}{L}+\varphi_1\right)$ et $\dot{x}_1(z,0)=A_1\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)\frac{\pi C}{L}\sin(\varphi_1)$; la condition $\dot{x}_1(z,0)=0$ implique $\sin(\varphi_1)=0$ et on choisit $\varphi_1=0$, donc $\cos(\varphi_1)=1$.

Finalement $\boxed{x(z,t)=a\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi Ct}{L}\right)}$.

4. La corde est excitée selon deux modes propres, l'équation de d'Alembert étant linéaire, on peut regarder l'influence de chacun des termes séparément et ajouter les solutions correspondantes.

Le mode propre de rang 1 : $x_1(z,t)=A_1\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi Ct}{L}+\varphi_1\right)$ est excité par $a\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$ et donne la solution $a\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi Ct}{L}\right)$ (question précédente).

De même le mode propre de rang 4 : $x_4(z,t)=A_4\sin\left(\frac{4\pi z}{L}\right)\cos\left(\frac{4\pi Ct}{L}+\varphi_4\right)$ est excité par $b\sin\left(\frac{4\pi z}{L}\right)$ et donne la solution $b\sin\left(\frac{4\pi z}{L}\right)\cos\left(\frac{4\pi Ct}{L}\right)$.

Finalement $\boxed{x(z,t)=a\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi Ct}{L}\right)+b\sin\left(\frac{4\pi z}{L}\right)\cos\left(\frac{4\pi Ct}{L}\right)}$.

5. Sur la courbe représentée, on constate que l'allongement relatif $\frac{\Delta L}{L}$ augmente avec l'amplitude relative de la déformation $\frac{a}{L}$. Puisque l'allongement de la corde augmente, la longueur de la corde aussi, ce qui signifie que la corde est élastique.

De plus $m_T=\mu L$ est une constante au cours du temps (principe de conservation de la matière), on en déduit donc que la masse linéique diminue.

◊ Exercice 7 : Reproduction artificielle électromagnétique d'un écho

Cet exercie concerne un procédé particulier, anciennement utilisé, capable de reproduire artificiellement un écho avec un retard donné.

1. En considérant que le son se propage à raison de 340 m / s, calculer le temps de retard ressenti par l'oreille, pour un son réfléchi qui a parcouru, dans l'air, 17 mètres de plus que par le trajet direct.
2. On peut provoquer artificiellement ce retard grâce à un moyen électromécanique, en construisant des dispositifs (figures a ou b) dans lesquels les vibrations de la membrane d'un haut-parleur actif (alimenté par un amplificateur) se propage le long d'un ressort à boudins. Dans le cas de la figure a, le ressort transmet les vibrations à la membrane d'un haut-parleur passif. Dans le cas de la figure b, les vibrations reviennent interférer sur l'émetteur après réflexion sur un obstacle immobile.

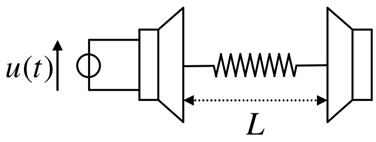


Figure a

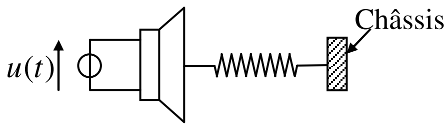


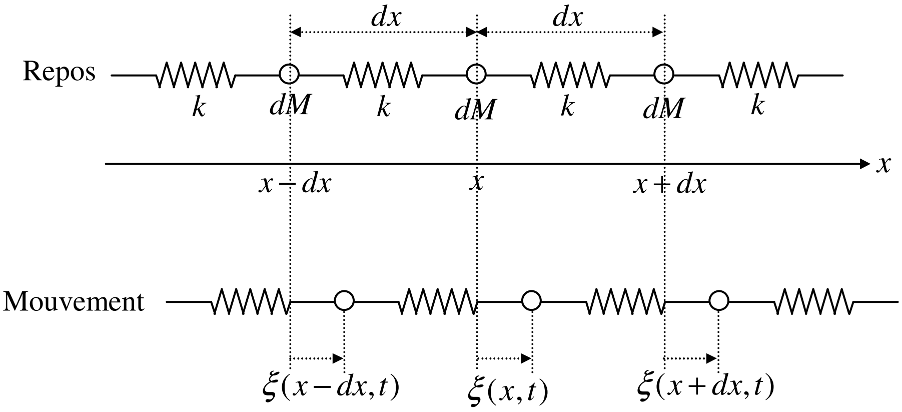
Figure b

On se limitera dans ce qui suit au cas de la figure a.

Afin d'étudier la propagation des vibrations d'un haut-parleur à l'autre, connaissant la masse M, la longueur L et la raideur K du ressort de liaison, on peut modéliser ce ressort selon une succession de masses dM séparées par des liaisons élastiques identiques (quant à elles dépourvues de masse), de longueur au repos dx et de raideur individuelle k.

On peut imaginer que ces masses effectuent, à partir de leurs positions d'équilibre respectives $x-dx$, x et $x+dx$, de petites oscillations $\xi(x-dx,t)$, $\xi(x,t)$ et $\xi(x+dx,t)$, comptées positivement dans le sens de l'axe $\mathrm{O}x$.

Exprimer, à l'instant t, la résultante dF_e des forces élastiques qui s'exercent sur la masse dM en mouvement autour de l'abscisse x. On pourra simplifier l'expression obtenue en faisant usage de développements de Taylor limités au second ordre



3. Un nombre N de ressorts en série, de longueur L_0 et de raideur k est équivalent à un ressort unique de longueur $L = NL_0$ et de raideur globale K : démontrer que $K = \dfrac{k}{N}$. A partir de ce résultat, exprimer k en fonction de K, L et dx.
4. Ecrire, en projection sur l'axe $\mathrm{O}x$, le principe fondamental qui régit le déplacement $\xi(x,t)$, abstraction faite des frottements. Simplifier cette équation en remplaçant k par l'expression qui vient d'être trouvée et la masse dM par son expression en fonction de M, L et dx.

5. Faire apparaître une équation de d'Alembert et identifier la vitesse de propagation c' des ébranlements dans le ressort. Montrer que le retard τ de l'onde transmise entre les deux haut-parleurs peut se déduire de la connaissance de K et de M exclusivement.
6. En supposant que le ressort ait une raideur globale $K = 24\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et une masse linéique égale à $2\ \mathrm{g \cdot cm^{-1}}$, calculer sa longueur L afin de simuler le retard considéré plus haut.

Solution

1. Puisque la célérité $c = 340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ est constante, le retard sur une distance $d = 17\ \mathrm{m}$ est $\tau = \dfrac{d}{c}$, soit $\boxed{\tau = 0{,}05\ \mathrm{s}}$.

2. La masse dM située à l'abscisse x subit : la force de rappel du ressort situé à l'équilibre entre $x - dx$ et x, et la force de rappel du ressort situé à l'équilibre entre x et $x + dx$.
On en déduit :
$dF_e = k\left(\xi(x-dx,t) - \xi(x,t)\right) - k\left(\xi(x,t) - \xi(x+dx,t)\right) = k\left(\xi(x+dx,t) + \xi(x-dx,t) - 2\xi(x,t)\right)$.
Avec $\xi(x+dx,t) = \xi(x,t) + \dfrac{\partial \xi}{\partial x}dx + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \xi}{dx^2}\left(dx\right)^2$ et $\xi(x-dx,t) = \xi(x,t) - \dfrac{\partial \xi}{\partial x}dx + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \xi}{dx^2}\left(dx\right)^2$,
on obtient $\boxed{dF_e = k\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(dx)^2}$.

3. D'après le principe de l'action et de la réaction appliqué à chaque masse entre deux ressorts, tous les ressorts sont soumis à la même tension T.
L'allongement total a du ressort global est la somme des allongements a_i de chaque ressort :
$a = \sum_i a_i$, avec $a_i = \dfrac{T}{k_i}$ pour un ressort de raideur k_i.
On en déduit $a = \sum_i a_i = \sum_i \dfrac{T}{k_i} = T\sum_i \dfrac{1}{k_i}$.
Pour le ressort global $a = \dfrac{T}{K}$, d'où $\dfrac{1}{K} = \sum_i \dfrac{1}{k_i}$.
Or chaque ressort a la même raideur $\forall\, i, k = k_i$, d'où $\sum_i \dfrac{1}{k_i} = \dfrac{N}{k}$, et donc $\boxed{K = \dfrac{k}{N}}$.
Or $L = Ndx$, donc $\boxed{k = K\dfrac{L}{dx}}$.

4. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse dM s'écrit $dM\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = dF_e$.
Or $dF_e = k\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(dx)^2$ et $k = K\dfrac{L}{dx}$.
Avec $M = NdM = dM\dfrac{L}{dx}$, on obtient $dM = M\dfrac{dx}{L}$.
En reportant : $\dfrac{Mdx}{L}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \dfrac{KL}{dx}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(dx)^2$, et en simplifiant : $\boxed{\dfrac{M}{L}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = KL\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}$.

5. On obtient une équation de d'Alembert de la forme $\boxed{\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \dfrac{M}{KL^2}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0}$.

La vitesse de propagation c' des ébranlements dans le ressort s'écrit donc $\boxed{c' = L\sqrt{\dfrac{K}{M}}}$.

Le retard τ de l'onde transmise entre les deux haut-parleurs s'écrit, puisque $c' = cte$, $\tau = \dfrac{L}{c'}$,

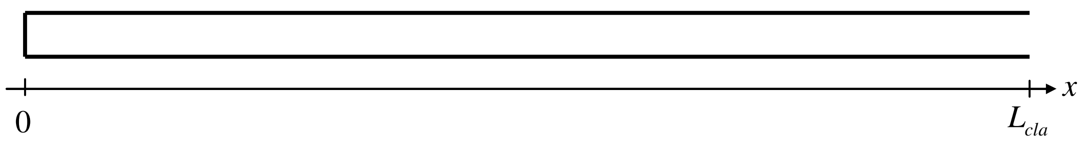
soit $\boxed{\tau = \sqrt{\dfrac{M}{K}}}$, donc exclusivement de la connaissance de K et de M.

6. Soit μ la masse linéique du ressort supposée uniforme, alors $M = \mu L$ et $\tau = \sqrt{\dfrac{\mu L}{K}}$.

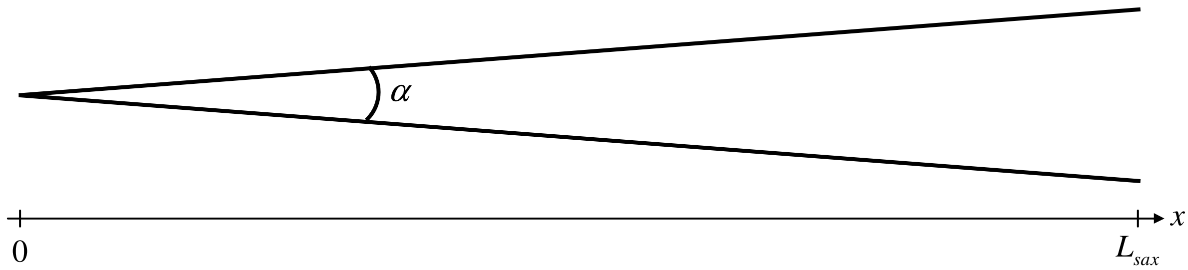
On en déduit $\boxed{L = \dfrac{K\tau^2}{\mu}}$. Avec $\tau = 0{,}05\ \mathrm{s}$ et $\mu = 0{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-1}}$, on obtient : $\boxed{L = 0{,}3\ \mathrm{m}}$.

◊ Exercice 8 : Clarinette et saxophone

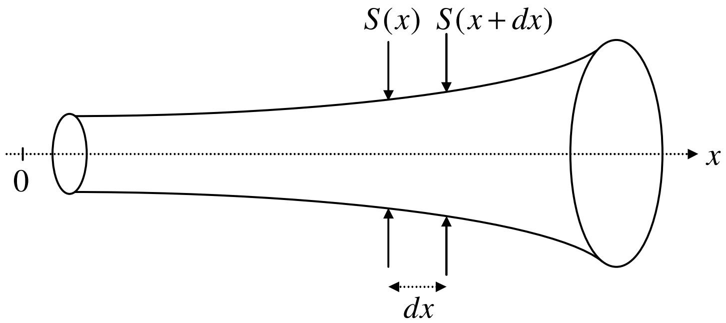
L'objet de cet exercice est d'appliquer la propagation d'une onde sonore dans un gaz au comportement de deux instruments à vent : la clarinette et le saxophone.
Le tube de la clarinette est modélisé par un cylindre de longueur L_{cla}, fermé du côté de l'embouchure (à gauche) et ouvert du côté du pavillon (à droite).



Le tube du saxophone est modélisé par un simple tuyau conique de longueur un peu plus grande que celle de la clarinette (soit L_{sax}) et d'un angle au sommet α.



I/ Equation de propagation d'une onde sonore dans un tube
On considère un tube indéformable de longueur L, d'axe de révolution (Ox) rempli d'air, supposé être un gaz parfait à la température moyenne ambiante T_0 et à la pression P_0. Soit ρ_0 la masse volumique moyenne de cet air. La section transverse du tube est une fonction de l'abscisse x : soit $S(x)$ cette section.



En présence de l'onde sonore, le champ de vitesse de l'air est le suivant : $\vec{u}(x,t) = u(x,t)\overrightarrow{u_x}$ où $u(x,t)$ est faible. On note $\rho(x,t)$ la masse volumique de l'air à l'instant t et à l'abscisse x. On supposera qu'en présence de l'onde sonore, la masse volumique de l'air s'écrit $\rho(x,t) = \rho_0 + \mu(x,t)$ où $\mu(x,t) << \rho_0$ et que la pression de l'air s'écrit $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$ avec $p(x,t) << P_0$.
On s'intéresse à l'air compris entre les sections x et $x + dx$. Ce système est ouvert.

1. Exprimer la masse $dm(t)$ de ce système à l'instant t en fonction de $S(x)$ notamment. Même question pour l'instant $t + dt$.

2. Exprimer la masse δm_e de fluide entrant dans le système pendant la durée dt en fonction de $\rho(x,t)$, $S(x)$ et $u(x,t)$. Exprimer aussi la masse δm_s de fluide sortant du système pendant la même durée.
3. En se limitant à des termes du premier ordre, montrer que l'on obtient l'équation de conservation de la masse suivante : $S(x)\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\rho_0\dfrac{\partial (Su)}{\partial x}=0$.
4. On rappelle l'équation d'Euler régissant la dynamique des fluides parfaits : $\rho\left(\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{u}\right)=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}P$. A l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, exprimer la quantité $\rho_0\dfrac{\partial u}{\partial t}$ en fonction de $\dfrac{\partial p}{\partial x}$.
5. On rappelle que le coefficient de compressibilité isentropique χ_s est égal à $\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s$.

   Toujours à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, établir une relation entre $\mu(x,t)$, χ_s, ρ_0 et $p(x,t)$.
6. En combinant les résultats des questions précédentes, montrer que :

   $\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}=c^2\left(\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\left(\dfrac{1}{S}\dfrac{dS}{dx}\right)\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)$ (équation E_1)

   $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\dfrac{1}{S}\dfrac{dS}{dx}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{S}\dfrac{dS}{dx}\right)\cdot u\right)$ (équation E_2).

   Préciser l'expression de la constante c en fonction de ρ_0 et χ_s.

<u>II/ Ondes stationnaires dans une clarinette</u>

Tous les trous de la clarinette sont bouchés. La clarinette est alors modélisée par un tube cylindrique de section S constante.

7. Que deviennent les équations E_1 et E_2 obtenues à la question 6 dans le cas de la clarinette ? Que représente alors la constante c ?
8. Que valent la vitesse $u(x,t)$ en $x=0$ et la surpression $p(x,t)$ en $x=L_{cla}$?
9. On cherche des solutions stationnaires pour la surpression et la vitesse qui sont donc de la forme $p(x,t)=f(x)\cdot\cos(\omega t)$ et $u(x,t)=g(x)\cdot\sin(\omega t)$. Montrer que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ doivent être solutions d'une équation différentielle à préciser.
10. On montre alors que la vitesse $u(x,t)$ est une fonction du type $u(x,t)=u_1\sin(kx)\sin(\omega t)$ où u_1 est l'amplitude. Préciser l'expression de k. Vérifier que la condition limite en $x=0$ est vérifiée.
11. Déterminer alors complètement la fonction $p(x,t)=f(x)\cdot\cos(\omega t)$ à l'aide des grandeurs ρ_0, u_1 et c (on pourra se servir de la question 4). En déduire aussi que seules des ondes stationnaires de pulsations bien particulières peuvent exister dans la clarinette.
12. Donner l'expression de la fréquence f_0 du mode fondamental existant dans la clarinette en fonction de c et L_{cla}. Donner aussi l'expression de la fréquence du premier harmonique.

<u>III/ Ondes stationnaires dans un saxophone</u>

Tous les trous du saxophone sont bouchés. Le saxophone est formé par un tube conique de hauteur L_{sax}, d'origine O et d'angle au sommet α.

13. Calculer la section $S(x)$ en fonction de x et de α.
14. Monter alors que l'équation E_1 obtenue à la question 6 s'écrit aussi : $\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\dfrac{c^2}{x}\left(\dfrac{\partial^2 (xp)}{\partial x^2}\right)$.

15. On effectue le changement de variable suivant : $\Pi(x,t) = x \cdot p(x,t)$. Préciser l'équation vérifiée par $\Pi(x,t)$. Quelles sont les conditions aux limites (en $x = 0$ puis en $x = L_{sax}$) pour $\Pi(x,t)$?
16. On recherche une solution stationnaire pour $\Pi(x,t)$ sous la forme $\Pi(x,t) = h(x)\cdot\cos(\omega t)$. Préciser l'équation vérifiée par $h(x)$. A partir des conditions aux limites, montrer que $h(x)$ est de la forme $h(x) = E\sin(kx)$. En déduire que seules des ondes stationnaires de pulsations particulières à déterminer peuvent être engendrées dans le saxophone.
17. Tous les trous du saxophone sont bouchés : tout le tube est alors le siège d'une onde stationnaire. Donner l'expression de la fréquence f_1 du mode fondamental existant dans le saxophone soprano en fonction de c et L_{sax}. Donner aussi l'expression de la fréquence du premier harmonique.
18. Comparer au cas de la clarinette.

Solution

I/ Equation de propagation d'une onde sonore dans un tube

1. Au premier ordre, la petite tranche d'air comprise entre les sections x et $x+dx$ est assimilable à un cylindre et son volume élémentaire s'écrit : $d\tau = S(x)dx$, d'où $\boxed{dm(t) = \rho(x,t)S(x)dx}$. De même, à l'instant $t+dt$: $\boxed{dm(t+dt) = \rho(x,t+dt)S(x)dx}$.

2. Pendant la durée dt, la masse δm_e de fluide entrant dans le système est comprise dans un cylindre de longueur $u(x,t)dt$ et de volume $S(x)u(x,t)dt$, soit $\boxed{\delta m_e = \rho(x,t)S(x)u(x,t)dt}$.
De même $\boxed{\delta m_s = \rho(x+dx,t)S(x+dx)u(x+dx,t)dt}$.

3. Le principe de conservation de la masse exprime ici que la variation de masse de la tranche d'air pendant dt correspond exactement à la différence des masses entrante et sortante, soit : $dm(t+dt) - dm(t) = \delta m_e - \delta m_s$. D'où :
$\rho(x,t+dt)S(x)dx - \rho(x,t)S(x)dx = \rho(x,t)S(x)u(x,t)dt - \rho(x+dx,t)S(x+dx)u(x+dx,t)dt$.
En développant au 1^er^ ordre on obtient : $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}dtS(x)dx = -\dfrac{\partial(\rho Su)}{\partial x}dxdt$, soit :
$S(x)\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = -\dfrac{\partial(\rho Su)}{\partial x}$. De plus $\dfrac{\partial(\rho Su)}{\partial x} = \rho\dfrac{\partial(Su)}{\partial x} + \dfrac{\partial\rho}{\partial x}Su$.
Or $\rho(x,t) = \rho_0 + \mu(x,t)$, d'où $\dfrac{\partial(\rho Su)}{\partial x} = \underbrace{\rho_0\dfrac{\partial(Su)}{\partial x}}_{ordre\,1} + \underbrace{\mu\dfrac{\partial(Su)}{\partial x}}_{ordre\,2} + \underbrace{\dfrac{\partial\rho}{\partial x}Su}_{ordre\,2}$.
En négligeant les termes d'ordre 2 devant les termes d'ordre 1, on obtient :
$\boxed{S(x)\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \rho_0\dfrac{\partial(Su)}{\partial x} = 0}$: équation de conservation de la masse.

4. Projetons l'équation d'Euler sur l'axe (Ox) en négligeant $\left(\vec{u}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{u}$ devant $\dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t}$:
$\rho\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial P}{\partial x}$. Or $\rho = \rho_0 + \mu$ et $P = P_0 + p$, d'où $\underbrace{\rho_0\dfrac{\partial u}{\partial t}}_{ordre\,1} + \underbrace{\mu\dfrac{\partial u}{\partial t}}_{ordre\,2} = -\underbrace{\dfrac{\partial p}{\partial x}}_{ordre\,1}$.

A l'ordre 1 on obtient : $\boxed{\rho_0 \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}}$.

5. De la définition $\chi_s = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s$, on peut écrire, à entropie constante : $d\rho = \rho\chi_s dP$.

Or $d\rho = \rho - \rho_0 = \mu$ et $dP = P - P_0 = p$, soit $\mu = \rho\chi_s p$, ou bien, avec $\rho = \rho_0 + \mu$:

$\mu = \underbrace{\rho_0\chi_s p}_{ordre\,1} + \underbrace{\mu\chi_s p}_{ordre\,2}$. A l'ordre 1 on obtient : $\boxed{\mu(x,t) = \rho_0\chi_s p(x,t)}$.

6. De la question 3 on déduit $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\dfrac{\rho_0}{S}\left(S\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{dS}{dx}\right)$, ou bien $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\left(\dfrac{1}{S}\dfrac{dS}{dx}\right)\right)$.

De la question 4 on déduit $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x}$.

De la question 5 on déduit $\rho - \rho_0 = \rho_0\chi_s p$, ou bien $\dfrac{\partial p}{\partial t} = \dfrac{1}{\rho_0\chi_s}\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$, ou encore

$\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\rho_0\chi_s}\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$.

Combinons ces trois équations :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0\chi_s}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0\chi_s}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial x} + u\left(\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\right)\right)\right) = -\frac{1}{\chi_s}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{\chi_s}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\right)\right)$$

D'où $\boxed{\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\rho_0\chi_s}\left(\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left(\dfrac{1}{S}\dfrac{dS}{dx}\right)\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)}$ (E_1).

On obtient bien une équation de la forme $\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left(\dfrac{1}{S}\dfrac{dS}{dx}\right)\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)$ avec $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_s}}}$.

De même : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial p}{\partial t}\right) = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\rho_0\chi_s}\dfrac{\partial \rho}{\partial t}\right) = -\dfrac{1}{\rho_0^2\chi_s}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\rho_0\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \left(\dfrac{1}{S}\dfrac{dS}{dx}\right)u\right)\right)$

D'où $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\rho_0\chi_s}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\dfrac{1}{S}\dfrac{dS}{dx}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{S}\dfrac{dS}{dx}\right)\cdot u\right)}$ (E_2).

On obtient bien une équation de la forme $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\dfrac{1}{S}\dfrac{dS}{dx}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{S}\dfrac{dS}{dx}\right)\cdot u\right)$ avec

$\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_s}}}$.

<u>II/ Ondes stationnaires dans une clarinette</u>

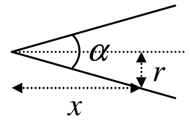
7. La clarinette étant de section S constante, on a alors $\dfrac{dS}{dx} = 0$.

L'équation E_1 devient : $\boxed{\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}}$ et l'équation E_2 devient : $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$.

8. Les conditions aux limites sont :
• pour la vitesse : $\boxed{u(0,t)=0}$ car la clarinette est fermée en $x=0$;
• pour la surpression : $\boxed{p(L_{cla},t)=0}$ car la clarinette est ouverte en $x=L_{cla}$ $\left(P(L_{cla},t)=P_0\right)$.
9. On cherche $p(x,t)$ de la forme $p(x,t)=f(x)\cdot\cos(\omega t)$.
On a donc $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}=f''\cdot\cos(\omega t)$ et $\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}=-\omega^2 f\cdot\cos(\omega t)$, en reportant dans l'équation de d'Alembert on obtient : $\boxed{f''+\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2 f=0}$.
On cherche $u(x,t)$ de la forme $u(x,t)=g(x)\cdot\sin(\omega t)$.
On a donc $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=g''\cdot\sin(\omega t)$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\omega^2 g\cdot\sin(\omega t)$, en reportant dans l'équation de d'Alembert on obtient : $\boxed{g''+\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2 g=0}$.
10. Puisque $u(x,t)$ est une fonction du type $u(x,t)=u_1\sin(kx)\sin(\omega t)$ alors $g(x)=u_1\sin(kx)$.
On a alors $g''=-k^2u_1\sin(kx)$, en reportant dans l'équation différentielle vérifiée par g on obtient $\boxed{k=\dfrac{\omega}{c}}$. La solution $u(x,t)=u_1\sin(kx)\sin(\omega t)$ vérifie bien $u(0,t)=0$.
11. On a trouvé à la question 5 : $\rho_0\dfrac{\partial u}{\partial t}=-\dfrac{\partial p}{\partial x}$.
Avec $u(x,t)=u_1\sin(kx)\sin(\omega t)$ on obtient $\dfrac{\partial p}{\partial x}=-\rho_0 u_1\omega\sin(kx)\cos(\omega t)$.
En intégrant : $p(x,t)=\dfrac{\rho_0 u_1\omega}{k}\cos(kx)\cos(\omega t)+C(t)$ où C est une fonction du temps.
Or lorsqu'il n'y a pas d'onde $p=0$ donc $C=0$.
Finalement, avec $\dfrac{\omega}{k}=c$ on obtient : $\boxed{p(x,t)=\rho_0 u_1 c\cos(kx)\cos(\omega t)}$.
La condition $p(L_{cla},t)=0$ impose $\cos(kL_{cla})=0$, soit $kL_{cla}=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ où n est un entier.
Or $\omega=kc$, on en déduit que ω est quantifiée et s'écrit $\boxed{\omega_n=\dfrac{\pi c}{L_{cla}}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)}$.
12. Le mode fondamental correspond à $n=0$: $\omega_0=\dfrac{\pi c}{2L_{cla}}$.
On en déduit la fréquence $f_0=\dfrac{\omega_0}{2\pi}$ correspondante : $\boxed{f_0=\dfrac{c}{4L_{cla}}}$.
Le premier harmonique correspond à $n=1$ et sa fréquence est $\boxed{f_1=\dfrac{3c}{4L_{cla}}}$.

III/ Ondes stationnaires dans un saxophone

13. La section du saxophone à l'abscisse x, où son rayon est $r(x)$ s'écrit $S(x)=\pi r^2$.



Or $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{r}{x}$, donc $\boxed{S(x)=\pi x^2\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, de la forme $S(x)=Ax^2$ avec $A=\pi\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

14. On a alors $\frac{dS}{dx}=2Ax$ et $\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}=\frac{2}{x}$.

L'équation E_1 devient alors : $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial p}{\partial x}\right)$ ou bien $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\frac{c^2}{x}\left(x\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+2\frac{\partial p}{\partial x}\right)$.

Or $\frac{\partial^2(xp)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial p}{\partial x}+p\right)=x\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+2\frac{\partial p}{\partial x}$. On en déduit $\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\frac{c^2}{x}\left(\frac{\partial^2(xp)}{\partial x^2}\right)}$.

15. On pose $\Pi=xp$. On a alors $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\Pi}{x}\right)=\frac{1}{x}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}$, l'équation précédente devient $\boxed{\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2}}$. $\Pi=xp$ vérifie une équation de d'Alembert et se propage à la célérité c.

Conditions aux limites :

- en $x=0$: $\boxed{\Pi(0,t)=0}$ (indépendant de la valeur de p) ;
- en $x=L_{sax}$: $\boxed{\Pi(L_{sax},t)=0}$ car le saxophone est ouvert $\left(P(L_{sax},t)=P_0\right)$.

16. On cherche $\Pi(x,t)$ de la forme $\Pi(x,t)=h(x)\cdot\cos(\omega t)$.

On a donc $\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2}=h''\cdot\cos(\omega t)$ et $\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}=-\omega^2 h\cdot\cos(\omega t)$, en reportant dans l'équation de d'Alembert on obtient : $\boxed{h''+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 h=0}$.

Cette équation s'écrit $h''+k^2h=0$ (avec $k=\frac{\omega}{c}$) dont la solution est de la forme $h(x)=E\sin(kx)+E'\cos(kx)$.

La condition $\Pi(0,t)=0$ implique $h(0)=0$, d'où $E'=0$, et donc $\boxed{h(x)=E\sin(kx)}$.

La condition $\Pi(L_{sax},t)=0$ implique $\sin(kL_{sax})=0$, soit $kL_{sax}=n\pi$ où n est un entier.

Or $\omega=kc$, on en déduit que ω est quantifiée et s'écrit $\boxed{\omega_n=\frac{n\pi c}{L_{sax}}}$.

17. Le mode fondamental correspond à $n=1$: $\omega_1=\frac{\pi c}{L_{sax}}$, la fréquence correspondante est $\boxed{f_1=\frac{c}{2L_{sax}}}$. Le premier harmonique correspond à $n=2$ et sa fréquence est $\boxed{f_2=\frac{c}{L_{sax}}}$.

18. Comparons la clarinette et le saxophone pour les fréquences des modes fondamentaux :

$f_{fondamental\ clarinette}=\frac{c}{4L_{cla}}$ et $f_{fondamental\ saxophone}=\frac{c}{2L_{sax}}$, soit $\frac{f_{fondamental\ saxophone}}{f_{fondamental\ clarinette}}=2\frac{L_{cla}}{L_{sax}}$.

$\rightarrow$ à longueur équivalente, le saxophone émet des sons plus aigus que la clarinette.

Les spectres sonores des deux instruments sont différents.

On appelle « timbre » d'un instrument de musique la répartition des harmoniques qu'il créé lorsqu'on joue une note.

Le saxophone et la clarinette ont des timbres différents, ce qui permet de les différencier « à l'oreille ».