TRAVAUX DIRIGES DE PHYSIQUE DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES PC/PC*

Ce TD comporte deux séries d'exercices :

1) Des exercices d'applications directes du cours

2) Des exercices d'entrainement à l'écrit des concours (issus des annales X-ENS, Mines-Ponts, Centrale-Supélec et CCP)

Dans la première série vous trouverez, pour chacune des parties « ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs » et « ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques » donnant :

- ☞ Conseils
- 🖹 Méthodes
- ⚐ Erreurs à éviter
- 🔔 Indications

afin de vous permettre de vous aiguiller dans la résolution d'un exercice et d'acquérir les bons réflexes pour aborder une situation nouvelle.

Sommaire

1ère série : exercices d'applications directes du cours

◊ Remarques générales pour les ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs

☞ Conseils :

- Bien se rappeler l'expression des sources de champ (ρ et $\vec{j}$) :
  - dans le vide : $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$
  - dans un milieu conducteur : $\rho = 0$ et $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ avec γ la conductivité du milieu

Méthodes :

- Pour déterminer l'équation d'onde pourle champ électrique (ou magnétique) :
  - calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\right)$ en « imbriquant » les équations de Maxwell et donner le résultat en fonction de $\vec{E}$ uniquement (il faut éliminer $\vec{B}$) ;
  - puis utiliser la définition du laplacien vectoriel : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\vec{E}\right) - \varDelta\vec{E}$.

- Pour déterminer $\vec{B}$ connaissant $\vec{E}$:
  - on utilise la relation de structure $\vec{B} = \dfrac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$, valable pour une onde <u>plane</u> se propageant dans le <u>vide</u> ;
  - tous les autres cas : il faut utiliser l'équation de Maxwell-Faraday.

- Pour déterminer $\vec{E}$ connaissant $\vec{B}$:
  - on utilise la relation de structure $\vec{E} = -c\vec{u} \wedge \vec{B}$, valable pour une onde <u>plane</u> se propageant dans le <u>vide</u> ;
  - tous les autres cas : il faut utiliser l'équation de Maxwell-Ampère.

- Pour déterminer la relation de dispersion :
  - détermination de l'équation de propagation ;
  - recherche de solution d'OPPH : on injecte $\underline{s} = s_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$, avec $\underline{k} = k' + jk''$ *a priori* complexe et ω réel, dans l'équation de propagation et on obtient la relation de dispersion $\underline{k}(\omega)$.

- Pour interpréter la relation de dispersion :
  - bien se rappeler que k' est lié à la propagation (avec dispersion éventuelle) et k'' à l'absorption de l'onde ;
  - détermination de k' et k'' ;
  - on réécrit la solution réelle $s(x,t)$;
  - interprétations :
    - si la relation $k'(\omega)$ n'est pas linéaire la propagation s'effectue avec dispersion (le milieu est dispersif) ;
    - si $k'' < 0$ l'onde est absorbée ;

▪ si $k''>0$ l'onde est amplifiée ;
▪ puis conclure sur les caractéristiques de l'onde.

• Pour étudier le comportement d'une onde à l'interface de deux milieux :
- pour justifier que les ondes incidente, réfléchie et transmise ont la même pulsation on utilise les relations de passage (continuité de la composante tangentielle du champ électrique) ;
- pour le calcul des coefficients de réflexion et de transmission en énergie R et T : il faut regarder le rapport de la valeur moyenne des normes des vecteurs de Poynting correspondants, à la position de l'interface (souvent $x=0$).

• Pour déterminer les charges surfaciques et les courants surfaciques sur un conducteur :
Lorsqu'une onde électromagnétique se propage au voisinage d'un conducteur, il apparaît des charges en surface du conducteur de densité surfacique σ et des courants de densité surfacique $\overrightarrow{j_s}$.
- pour déterminer σ on utilise la discontinuité de la composante normale du champ électrique $\overrightarrow{E_{N2}}-\overrightarrow{E_{N1}}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_{n1\to 2}}$. Connaissant $\overrightarrow{E_{N1}}$ et $\overrightarrow{E_{N2}}$ on déduit σ.
- pour déterminer $\overrightarrow{j_s}$ on utilise la discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique $\overrightarrow{B_{T2}}-\overrightarrow{B_{T1}}=\mu_0\overrightarrow{j_s}\wedge\overrightarrow{u_{n1\to 2}}$. Connaissant $\overrightarrow{B_{T1}}$ et $\overrightarrow{B_{T2}}$ on déduit $\overrightarrow{j_s}$.

Erreurs à éviter :

• Ne pas se tromper dans l'écriture des opérateurs (gradient, divergence, rotationnel, laplacien) en notation complexe suivant la convention de signe pour la phase de l'onde : $e^{j(\omega t-kx)}$ ou $e^{j(kx-\omega t)}$.

• Ne pas confondre « direction de propagation » et « direction de polarisation ».

• Si on obtient $k''>0$, ne pas conclure hativement que la situation physique est impossible car il existe des milieux amplificateurs (le Laser par exemple), bien lire l'énoncé !

• L'énoncé peut proposer $\underline{k}=k'-jk''$, attention aux erreurs de signe et aux mauvaises interprétations.

• Ne pas écrire la vitesse de phase $v_\varphi=\dfrac{\omega}{\underline{k}}$ (aucun sens !).

• Ne pas oublier de reporter μ_0 dans les calculs de vecteur de Poynting (oubli classique !).

• Ne pas dire qu'une onde de la forme $e^{k"x}\cos(\omega t - k'x)$ est évanescente puisqu'elle se propage !

Indications :

• Pour passer de la notation complexe à la notation réelle on utilisera :
- $R_e\left(e^{ju}\right) = \cos u$
- $R_e\left(je^{ju}\right) = -\sin u$

• Pour le calcul des valeurs moyennes, on utilisera :
- $< \cos(\omega t)\sin(\omega t) >= 0$
- $< \cos^2(\omega t) >= \dfrac{1}{2}$
- $< \sin^2(\omega t) >= \dfrac{1}{2}$

• La vitesse de phase est $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'}$ et n'a pas de signification physique, la vitesse de groupe est $v_g = \dfrac{d\omega}{dk'}$ et représente la vitesse de propagation de l'énergie.

• Si la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'}$ ne dépend pas de ω alors le milieu de propagation est non dispersif.

• Dans un milieu conducteur, l'énergie (ou la puissance) cédée par l'onde aux porteurs de charge est gouvernée par le terme $\vec{j}\cdot\vec{E}$ apparaissant dans le théorème de Poynting.

• Dans un conducteur parfait la conductivité est infinie, ce qui entraine qu'à l'intérieur du conducteur $\overrightarrow{E_{\text{int}}} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{B_{\text{int}}} = \vec{0}$.

◊ Exercice 1 : Propagation d'une onde électromagnétique dans le vide

1. Rappeler les équations de Maxwell en présence de charges et de courants. Quelles sont les traductions globales, dites aussi formes intégrales, de ces lois locales ?
2. Etablir l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}(\mathrm{M},t)$ dans le vide (en l'absence de charges et de courants).
3. On considère une onde dont le champ électrique en notation complexe s'écrit : $\underline{\vec{E}}(\mathrm{M},t) = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u_y}$ où E_0 et k sont des réels positifs non nuls. Caractériser cette onde (donner 5 qualificatifs).
4. A quelle condition sur k et ω cette onde est-elle une solution de l'équation de propagation ? Comment appelle-t-on cette relation ? Le vide est-il un milieu dispersif (à justifier) ?
5. Déterminer l'expression réelle du champ magnétique $\vec{B}(\mathrm{M},t)$.
6. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\pi}(\mathrm{M},t)$. Quelle est la signification physique du flux de $\vec{\pi}$ à travers une surface S ouverte, arbitrairement orientée ?

Solution

1. Les équations de Maxwell et leurs traductions globales sont les suivantes :

Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \oiint_S \vec{E}\vec{dS} = \dfrac{Q_{\text{int à } S}}{\varepsilon_0}$: théorème de Gauss

Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_C \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\iint_S \vec{B}\cdot\vec{dS}\right)$: loi de Faraday pour l'induction

Maxwell-Thomson : $\mathrm{div}\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oiint_S \vec{B}\vec{dS} = 0$: le flux magnétique est conservatif

Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Leftrightarrow \underbrace{\oint_C \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = \mu_0 I_{enl}}_{\text{théorème d'Ampère}} + \underbrace{\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\iint_S \vec{E}\cdot\vec{dS}\right)}_{\exists\text{ ondes EM}}$

2. Dans le vide $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$, d'où : $\mathrm{div}\vec{E} = 0$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

On en déduit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\right)}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$.

Or $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\vec{E}\right) - \Delta\vec{E}$ et $\mathrm{div}\vec{E} = 0$, d'où : $\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$, ou bien $\boxed{\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$.

3. C'est une onde plane, progressive, harmonique, se propageant suivant les x croissants, polarisée rectilignement suivant $\vec{u_y}$ et d'amplitude constante (non atténuée, non amplifiée).

4. Remplaçons $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u_y}$ dans l'équation de propagation, avec $\Delta\underline{\vec{E}} = (-jk)^2\,\underline{\vec{E}}$ et $\dfrac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2\underline{\vec{E}}$, on obtient $-k^2 + \dfrac{\omega^2}{c^2} = 0$, soit $\boxed{k = \dfrac{\omega}{c}}$, appelée <u>relation de dispersion</u>.

La relation entre k et ω étant linéaire, <u>le vide n'est pas un milieu dispersif</u>.

5. L'onde étant plane et se propageant dans le vide on peut utiliser la relation de structure $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\vec{u_x} \wedge \underline{\vec{E}}}{c}$, d'où $\underline{\vec{B}} = \dfrac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u_z}$, et donc $\boxed{\vec{B} = \dfrac{E_0}{c} \cos\left(\omega t - kx\right) \vec{u_z}}$.

6. Le vecteur de Poynting est $\vec{\pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ et le champ réel est $\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega t - kx\right) \vec{u_y}$, on obtient : $\boxed{\vec{\pi} = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2\left(\omega t - kx\right) \vec{u_x}}$.

Le flux de $\vec{\pi}$ à travers une surface S ouverte est la puissance électromagnétique rayonnée par le champ électromagnétique à travers cette surface.

◊ Exercice 2 : Propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur

1. En absence de densité volumique de charges, mais en présence de densité volumique de courants $\vec{j}(\mathrm{M},t)$, établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(\mathrm{M},t)$ en fonction de $\vec{j}(\mathrm{M},t)$.
2. On considère une onde du type $\underline{\vec{E}}(\mathrm{M},t) = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}\overrightarrow{u_y}$ où E_0 est un réel positif non nul et $\underline{k}$ un complexe. On pose, en notation complexe, la loi d'Ohm : $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$ où $\underline{\gamma}$ est la conductivité électrique complexe du milieu, on suppose qu'elle ne dépend ni de l'espace ni du temps. Réécrire l'équation de propagation du champ $\underline{\vec{E}}(\mathrm{M},t)$ en fonction de $\underline{\gamma}$. A quelle condition sur $\underline{k}$ et ω cette onde est-elle une solution de l'équation de propagation ? On ne cherchera pas à résoudre cette équation.
3. On pose $\underline{k} = k_1 + jk_2$, avec k_1 et k_2 réels. Ecrire en notation réelle l'expression du champ électrique $\vec{E}(\mathrm{M},t)$. Par analogie avec le vide, dire ce que représente k_1, la partie réelle de $\underline{k}$. Donner une interprétation du signe de k_1. Quel phénomène physique traduit k_2, la partie imaginaire de $\underline{k}$? Que dire si le produit k_1k_2 est positif ? Que dire si le produit k_1k_2 est négatif ? Définir par une phrase la vitesse de phase v_φ et donner l'expression de la vitesse de phase de cette onde en fonction des grandeurs précédemment définies ?
4. Démontrer une relation simple entre les vecteurs $\underline{\vec{E}}(\mathrm{M},t)$, $\underline{k}$ (vecteur d'onde complexe) et $\underline{\vec{B}}(\mathrm{M},t)$. Déterminer les expressions de la représentation complexe du champ magnétique $\underline{\vec{B}}(\mathrm{M},t)$ et du champ réel $\vec{B}(\mathrm{M},t)$. Que dire des champs $\vec{E}(\mathrm{M},t)$ et $\vec{B}(\mathrm{M},t)$ si k_2 est non nul ?
5. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\pi}(\mathrm{M},t)$, puis l'expression de sa valeur moyenne $<\vec{\pi}(\mathrm{M},t)>$. Commenter.
6. Une onde incidente, $\underline{\vec{E}}_i(\mathrm{M},t) = E_{0i}e^{j(\omega t - \underline{k}_A x)}\overrightarrow{u_y}$ où E_{0i} est un réel positif non nul et $\underline{k}_A = k_{A1} + jk_{A2}$ avec k_{A1} et k_{A2} deux réels, se propageant dans le milieu (A) arrive en incidence normale sur une interface située en $x = 0$ et séparant le milieu (A) du milieu (B). Cette onde incidente donne naissance à deux ondes, l'une réfléchie, $\underline{\vec{E}}_r(\mathrm{M},t) = \underline{E}_{0r}e^{j(\omega t + \underline{k}_A x)}\overrightarrow{u_y}$, se propageant dans le milieu (A) et l'autre transmise, $\underline{\vec{E}}_t(\mathrm{M},t) = \underline{E}_{0t}e^{j(\omega t - \underline{k}_B x)}\overrightarrow{u_y}$ où $\underline{k}_B = k_{B1} + jk_{B2}$ avec k_{B1} et k_{B2} deux réels, se propageant dans le milieu (B). On définit les coefficients de réflexion et de transmission énergétiques au niveau de l'interface située en $x = 0$ par : $R = \dfrac{<\left\|\vec{\pi}_r(0,t)\right\|>}{<\left\|\vec{\pi}_i(0,t)\right\|>}$ et $T = \dfrac{<\left\|\vec{\pi}_t(0,t)\right\|>}{<\left\|\vec{\pi}_i(0,t)\right\|>}$ où $\vec{\pi}_i(0,t)$, $\vec{\pi}_r(0,t)$ et $\vec{\pi}_t(0,t)$ représentent respectivement les vecteurs de Poynting, au voisinage d'un point de l'interface, des ondes incidente, réfléchie et transmise. Justifier l'écriture du champ $\underline{\vec{E}}_r(\mathrm{M},t)$. Donner les expressions de R et T en fonction des données précédentes. Que vaut la somme $R+T$? Quelle est la signification de cette égalité ? Que dire des coefficients R et T si $k_{B1} = 0$? Quelle en est la signification ? Ne pouviez-vous pas prévoir ce résultat dès la question 5 ?

Solution

1. Les équations de Maxwell avec $\rho = 0$ sont les suivantes : $\mathrm{div}\vec{E} = 0$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On en déduit :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\right)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Or $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\vec{E}\right) - \Delta\vec{E}$ et $\mathrm{div}\vec{E} = 0$, d'où : $\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\dfrac{\partial \vec{j}}{\partial t}}$, ou bien $\boxed{\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\dfrac{\partial \vec{j}}{\partial t}}$.

2. Avec la loi d'Ohm $\underline{\vec{j}} = \gamma\underline{\vec{E}}$ en notation complexe, on obtient $\boxed{\Delta\underline{\vec{E}} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \mu_0\underline{\gamma}\dfrac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}}$.

Remplaçons $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}\overrightarrow{u_y}$ dans l'équation de propagation, avec $\Delta\underline{\vec{E}} = \left(-j\underline{k}\right)^2\underline{\vec{E}}$, $\dfrac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = j\omega\underline{\vec{E}}$ et $\dfrac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2\underline{\vec{E}}$, on obtient $\boxed{\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0\underline{\gamma}\omega}$.

3. En notation complexe $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}\overrightarrow{u_y}$ s'écrit, avec $\underline{k} = k_1 + jk_2$, $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{k_2 x} e^{j(\omega t - k_1 x)}\overrightarrow{u_y}$, soit en notation réelle : $\boxed{\vec{E} = E_0 e^{k_2 x}\cos\left(\omega t - k_1 x\right)\overrightarrow{u_y}}$.

k_1 représente <u>le terme de propagation</u>, si $k_1 > 0$: propagation suivant les x croissants, si $k_1 < 0$: propagation suivant les x décroissants.

k_2 représente une <u>modification de l'amplitude</u> de l'onde avec la position.

Si $k_1 k_2 > 0$ il y a <u>amplification</u> de l'onde, si $k_1 k_2 < 0$ il y a <u>atténuation</u> de l'onde.

<u>La vitesse de phase est la vitesse de propagation d'un plan équiphase</u> et $\boxed{v_\varphi = \dfrac{\omega}{k_1}}$.

4. L'équation de Maxwell-Faraday en notation complexe est $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$, soit $-j\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega\underline{\vec{B}}$, d'où $\boxed{\underline{\vec{B}} = \dfrac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}}$, ou bien $\boxed{\underline{\vec{B}} = \dfrac{\underline{k}}{\omega}E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}\overrightarrow{u_z}}$.

En remplaçant $\underline{k} = k_1 + jk_2$ on obtient $\underline{\vec{B}} = \dfrac{k_1 + jk_2}{\omega}E_0 e^{j(\omega t - (k_1 + jk_2)x)}\overrightarrow{u_z}$, et en développant :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{\omega}e^{k_2 x}\left(k_1\cos\left(\omega t - k_1 x\right) - k_2\sin\left(\omega t - k_1 x\right) + j\left(k_1\sin\left(\omega t - k_1 x\right) + k_2\cos\left(\omega t - k_1 x\right)\right)\right)\overrightarrow{u_z}.$$

Finalement : $\boxed{\vec{B} = \dfrac{E_0}{\omega}e^{k_2 x}\left(k_1\cos\left(\omega t - k_1 x\right) - k_2\sin\left(\omega t - k_1 x\right)\right)\overrightarrow{u_z}}$.

Si $k_2 \neq 0$ alors $\vec{E}$ et $\vec{B}$ <u>ne sont pas en phase</u>.

5. Le vecteur de Poynting est $\vec{\pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ et s'exprime :

$$\boxed{\vec{\pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0\omega}e^{2k_2 x}\left(k_1\cos^2\left(\omega t - k_1 x\right) - k_2\sin\left(\omega t - k_1 x\right)\cos\left(\omega t - k_1 x\right)\right)\overrightarrow{u_x}}.$$

Puisque $<\cos^2(\omega t-k_1x)>=\dfrac{1}{2}$ et $<\sin(\omega t-k_1x)\cos(\omega t-k_1x)>=0$ on obtient :

$\boxed{<\vec{\pi}>=\dfrac{E_0^2}{2\mu_0\omega}e^{2k_2x}k_1\overrightarrow{u_x}}$.

Commentaires : l'énergie électromagnétique se propage dans la direction de propagation ($<\vec{\pi}>$ proportionnelle à $k_1\overrightarrow{u_x}$) et elle est absorbée (ou amplifiée) par le milieu conducteur au cours de la propagation ($<\vec{\pi}>$ proportionnelle à e^{2k_2x}).

6. Le champ électrique est tangentiel donc est continu au passage de l'interface située en $x=0$. Soient ω_i, ω_r et ω_t les pulsations des champs électriques des ondes incidente, réfléchie et transmise. La relation de passage du champ électrique s'écrit $E_{0i}e^{j\omega_i t}+\underline{E}_{0r}e^{j\omega_r t}=\underline{E}_{0t}e^{j\omega_t t}$. La famille des $e^{j\omega t}$ étant libre on en déduit que nécessairement $\omega_i=\omega_r=\omega_t=\omega$: l'onde réfléchie a même amplitude que l'onde incidente.

De plus l'onde incidente arrive en incidence normale sur l'interface donc, d'après les lois de Descartes, elle repart en incidence normale et se propage suivant l'axe Ox suivant les x décroissants, ce qui justifie le $+$ devant $\underline{k}_A$.

D'autre part la réflexion peut engendrer un déphasage éventuel de l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente, son amplitude $\underline{E}_{0r}$ est *a priori* complexe.

$\rightarrow$ ces trois arguments justifient l'écriture du champ $\vec{\underline{E}}_r(\mathrm{M},t)$.

D'après la question 5, les vecteurs de Poynting des trois ondes s'écrivent :

$<\vec{\pi}_i>=\dfrac{E_0^2}{2\mu_0\omega}e^{2k_{A2}x}k_{A1}\overrightarrow{u_x}$, $<\vec{\pi}_r>=\dfrac{\underline{E}_{0r}^2}{2\mu_0\omega}e^{2k_{A2}x}k_{A1}\overrightarrow{u_x}$ et $<\vec{\pi}_i>=\dfrac{\underline{E}_{0t}^2}{2\mu_0\omega}e^{2k_{B2}x}k_{B1}\overrightarrow{u_x}$.

On en déduit $\boxed{R=\dfrac{\left|\underline{E}_{0r}^2\right|}{E_0^2}}$ et $\boxed{T=\dfrac{\left|\underline{E}_{0t}^2\right|}{E_0^2}\dfrac{k_{B1}}{k_{A1}}}$.

La <u>conservation de l'énergie</u> électromagnétique implique $\boxed{R+T=1}$.

Si $k_{B1}=0$ alors $T=0$ et $R=1$, ce qui signifie qu'il n'y a pas de propagation dans le milieu B, l'onde incidente est totalement réfléchie par l'interface.

Ce résultat était prévisible à la question 5 puisque si $k_1=0$ alors $<\vec{\pi}>=0$: pas de propagation.

◊ Remarques générales pour les ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques

☞ Conseils :

• Bien se rappeler qu'un diélectrique, ou isolant, laisse passer les ondes électromagnétiques, la plupart des diélectriques sont des milieux transparents.

• Dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié, on néglige toujours la force magnétique devant la force électrique (électrons non relativistes), on néglige le mouvement des noyaux car ils sont beaucoup plus massifs que les électrons, le champ électrique d'une onde traversant le milieu est considéré comme uniforme à l'échelle d'un atome.

Méthodes :

• Pour déterminer l'expression de la susceptibilité diélectrique complexe $\underline{\chi}$:

- déterminer l'équation différentielle du mouvement d'un électron vérifiée par le vecteur déplacement $\vec{r}$ (par rapport à sa position d'équilibre) ;
- puis utiliser la méthode des amplitudes complexes pour déterminer $\underline{\vec{r}}$;
- exprimer le moment dipolaire lié à un électron $\vec{p} = -e\vec{r}$;
- en déduire le vecteur polarisation $\vec{P} = n\vec{p}$ où n est la densité volumique de dipôles ;
- utiliser la définition de $\underline{\chi}$: $\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \underline{\chi} \underline{\vec{E}}$, puis identifier.

Erreurs à éviter :

• Ne pas oublier le signe $-$ dans l'expression du moment dipolaire $\vec{p} = -e\vec{r}$ ($\vec{r}$ est le déplacement d'un électron).

• Ne pas chercher à « calculer » le vecteur polarisation $\vec{P}$ comme le moment dipolaire moyen par unité de volume $\vec{P} = < \dfrac{d\vec{p}}{d\tau} >$ mais écrire simplement $\vec{P} = n\vec{p}$.

• Ne pas confondre moment dipolaire $\vec{p}$ et vecteur polarisation $\vec{P}$ (erreur classique).

Indications :

• La relation de structure d'une onde s'écrit $\vec{B} = n\dfrac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$ où n est l'indice du milieu et c la célérité de la lumière dans le vide.

• Le nombre d'onde complexe $\underline{k}$ et l'indice complexe $\underline{n}$ sont liés via $\underline{k} = \underline{n}\dfrac{\omega}{c}$ où c est la célérité de la lumière dans le vide.

◊ Exercice 3 : A propos du modèle de l'électron élastiquement lié

On s'intéresse à la propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique non magnétique, linéaire, homogène, isotrope, en l'absence de charges et de courants libres.

Données : masse du proton : $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27}$ kg, masse de l'électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, charge de l'électron : $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C, perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (SI), célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

I/ Détermination de la permittivité diélectrique relative complexe $\underline{\varepsilon}_r$ du milieu

Lorsqu'une onde lumineuse se propage dans un milieu diélectrique, son champ électromagnétique interagit avec les électrons (de charge $-e$, de masse m) des atomes du milieu. L'étude de cette interaction permet de caractériser le milieu diélectrique par la constante macroscopique $\underline{\varepsilon}_r$. Le noyau d'un atome, supposé fixe, est situé au point O. La position d'un électron de cet atome, situé au point M, est repérée par le vecteur position $\overrightarrow{\text{OM}} = \vec{r}$. Les interactions électrostatiques exercées sur l'électron par les autres charges de l'atome se réduisent à une force de rappel élastique notée $-m\omega_0^2\vec{r}$.

1. Quelle est la dimension de la grandeur ω_0 ? Que représente-t-elle ? Le déplacement de l'électron est contrarié par des forces de friction : leur résultante, qui s'oppose à la vitesse $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ de l'électron, est notée $-m\gamma\vec{v}$ (où γ est une constante positive).
2. Ecrire l'équation du mouvement de l'électron lorsqu'il est de plus soumis au champ électrique extérieur.
3. Comparer la taille d'un atome aux longueurs d'ondes du spectre visible. Quelle hypothèse peut-on faire alors quant au champ électromagnétique de l'onde lumineuse à l'échelle de l'atome ? Pourquoi peut-on négliger l'influence du champ magnétique de l'onde lumineuse ? Pourquoi est-il possible de limiter notre étude à un champ électrique monochromatique ? Est-il légitime de se borner à l'étude d'un champ électrique à polarisation rectiligne ?

On a désormais recours à la notation complexe et on écrit le champ électrique $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j\omega t}$, où $\underline{\vec{E}}_0$ est un vecteur constant et uniforme et ω une pulsation du domaine visible.

4. On étudie le mouvement de l'électron en régime permanent. Qualifier d'un adjectif le régime d'oscillations. Donner l'expression de la position $\underline{\vec{r}}$ de l'électron.
5. Déterminer l'expression du moment $\underline{\vec{p}}$ du dipôle électrique constitué par l'électron et un proton du noyau. On appelle n la densité volumique d'électrons du milieu sensible à l'onde lumineuse (tous ces électrons sont caractérisés par les mêmes constantes ω_0 et γ). Exprimer le vecteur polarisation $\underline{\vec{P}}$, densité volumique des moments dipolaires $\underline{\vec{p}}$, en fonction de ω, ε_0, ω_0, γ, $\underline{\vec{E}}$ et $\omega_p = \sqrt{\dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$.
6. On souhaite évaluer un ordre de grandeur de ω_p. En supposant que le milieu est dense et que chaque atome possède un seul électron sensible au champ électromagnétique extérieur, donner un ordre de grandeur numérique de la densité n d'électrons, puis de la pulsation ω_p. A l'aide des données fournies en début d'énoncé, justifier *a posteriori* l'hypothèse d'immobilité des noyaux des atomes.
7. On rappelle que dans un milieu diélectrique linéaire, homogène, isotrope, $\underline{\vec{P}}$ s'exprime par : $\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 (\underline{\varepsilon}_r - 1)\underline{\vec{E}} = \varepsilon_0 \underline{\chi}_e \underline{\vec{E}}$ où $\underline{\varepsilon}_r$ est la permittivité diélectrique relative du milieu ; $\underline{\varepsilon}_r$ et $\underline{\chi}_e$ sont *a priori* complexes. Quel nom donne-t-on à la grandeur $\underline{\chi}_e$? Préciser sa

dimension. Quelle valeur, exprimée en fonction de γ et ω_0, faut-il donner à la constante Q pour pouvoir écrire $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{\chi}_e(\omega)}{\underline{\chi}_e(\omega=0)}$ sous la forme $\dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}$? On qualifiera le filtre ainsi obtenu.

II/ Une solution des équations de Maxwell

On cherche une solution des équations de Maxwell dans le diélectrique linéaire, homogène et isotrope de permittivité diélectrique $\underline{\varepsilon}_r$ sous forme d'onde plane monochromatique se propageant dans la direction de l'axe des z (dans le sens des z croissants) : $\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}z)}\overrightarrow{u_x}$ et $\underline{\vec{B}} = \underline{B}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}z)}\overrightarrow{u_y}$ avec $\underline{E}_0$, $\underline{B}_0$ et $\underline{k}$ *a priori* complexes. $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ forment une base orthonormée directe. On note k_0 la quantité $\dfrac{\omega}{c}$.

1. Pourquoi peut-on choisir $\underline{E}_0$ réel (désormais noté E_0) ?
2. Exprimer les équations de Maxwell et en déduire la relation $\underline{k}^2 = k_0^2\underline{\varepsilon}_r(\omega)$. Comment s'appelle une telle relation ?
3. On note $\underline{k} = k' - jk'' = k_0(n' - jn'')$ (où k', k'', n' et n'' sont des quantités réelles). On ne demande pas de calculer k' et k'' pour l'instant. Quelle propriété du milieu se manifeste dans le fait que k'' est non nul ? Que représente $\delta = \dfrac{1}{k''}$? Le milieu est-il dispersif ? Justifier la réponse.
4. Expliciter $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en fonction de E_0, ω, t, k', k'', z et des vecteurs unitaires de base.

III/ Considérations énergétiques

1. Calculer la valeur moyenne temporelle $<\vec{\pi}>$ du vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique instantané $\vec{\pi}$ (vecteur de Poynting) en fonction de E_0, ω, k', k'', z, μ_0 et des vecteurs de base.
2. On rappelle que l'existence d'un vecteur polarisation $\underline{\vec{P}}$ variable dans le temps induit la présence d'une densité volumique de courants de polarisation $\underline{\vec{j}}_{\text{pol}} = \dfrac{\partial \underline{\vec{P}}}{\partial t}$ correspondant aux déplacements à l'échelle atomique des électrons élastiquement liés. Exprimer la puissance moyenne P_{milieu} reçue par le milieu en fonction de $\underline{\vec{j}}_{\text{pol}}$ et $\underline{\vec{E}}$, puis en fonction de E_0, ω, k'', z, ε_0 et ε_r'' (telle que $\underline{\varepsilon}_r = \varepsilon_r' - j\varepsilon_r''$). Quelle est la puissance moyenne $P_{\text{électron}}$ reçue par un électron, du fait des forces de friction ? En déduire la puissance moyenne P_{vol} reçue par le milieu du fait de ces forces. Conclure.
3. Faire un bilan de puissance moyenne sur une tranche de milieu d'épaisseur dz de façon à établir une relation différentielle liant $<\pi_z>(z)$ et P_{vol}, où π_z est la composante suivant l'axe Oz du vecteur de Poynting. A l'aide de l'expression de la question III.1., vérifier que cette relation est bien satisfaite De quelle relation plus générale l'expression traduisant le bilan de puissance est-elle un cas particulier ? Quel principe cette relation illustre-t-elle ?

Solution

I/ Détermination de la permittivité diélectrique relative complexe $\underline{\varepsilon}_r$ du milieu

1. Une force s'exprime en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, on en déduit que la dimension de ω_0 est l'inverse d'un temps. Elle représente la pulsation des oscillations libres de l'oscillateur constitué de l'électron soumis uniquement à la force de rappel.

2. L'électron est soumis à la force de rappel $-m\omega_0^2\vec{r}$, la force de friction $-m\gamma\vec{v}$ et la force de Lorentz $-e\vec{E}-e\vec{v}\wedge\vec{B}$. L'équation du mouvement de l'électron est donnée par le principe fondamental de la dynamique et s'écrit : $\boxed{m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}+m\gamma\dfrac{d\vec{r}}{dt}+m\omega_0^2\vec{r}=-e\vec{E}-e\vec{v}\wedge\vec{B}}$.

3. La taille a d'un atome est de l'ordre de 10^{-10} m et $\lambda \approx \mathrm{qq}\,100\,\mathrm{nm}$ dans le visible, soit $\boxed{a \ll \lambda}$. On peut alors considérer que le champ électromagnétique varie très peu sur l'extension spatiale d'un atome, on le considère uniforme.

Le rapport des normes des parties magnétique et électrique s'écrit : $\dfrac{\|\vec{F_m}\|}{\|\vec{F_e}\|}=\dfrac{\|\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|}\approx\dfrac{vB}{E}$.

Or la relation de structure pour une plane $\vec{B}=\dfrac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c}$ (avec $\vec{u}$ un vecteur unitaire de la direction de propagation) donne $B\approx\dfrac{E}{c}$, on a donc $\dfrac{\|\vec{F_m}\|}{\|\vec{F_e}\|}\approx\dfrac{v}{c}\ll 1$ (électron non relativiste) : les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant les effets de sa partie électrique.

Le théorème de Fourier montre que le champ électrique est une superposition de composantes monochromatiques. On étudie seulement le comportement d'une composante.

Un champ électrique de polarisation quelconque peut être décomposé en deux champs polarisés rectilignement. On étudie seulement le comportement d'une des deux composantes à polarisation rectiligne.

4. Il s'agit d'un régime d'oscillations forcées.

On utilise la notation complexe en régime sinusoïdal de pulsation ω.

On a alors $\dfrac{d\vec{\underline{r}}}{dt}=j\omega\vec{\underline{r}}$ et $\dfrac{d^2\vec{\underline{r}}}{dt^2}=-\omega^2\vec{\underline{r}}$.

En remplaçant dans l'équation du mouvement (où on a négligé la partie magnétique de la force de Lorentz), on déduit : $-m\omega^2\vec{\underline{r}}+m\gamma j\omega\vec{\underline{r}}+m\omega_0^2\vec{\underline{r}}=-e\vec{\underline{E}}$, soit $\boxed{\vec{\underline{r}}=-\dfrac{\frac{e}{m}\vec{\underline{E}}}{\omega_0^2-\omega^2+j\gamma\omega}}$.

5. Le moment dipolaire est $\vec{\underline{p}}=-e\vec{\underline{r}}$, d'où $\boxed{\vec{\underline{p}}=\dfrac{\frac{e^2}{m}\vec{\underline{E}}}{\omega_0^2-\omega^2+j\gamma\omega}}$.

Le vecteur polarisation est $\vec{\underline{P}}=n\vec{\underline{p}}=\dfrac{\frac{ne^2}{m}\vec{\underline{E}}}{\omega_0^2-\omega^2+j\gamma\omega}$, avec $\dfrac{ne^2}{m}=\varepsilon_0\omega_p^2$ on obtient :

$\boxed{\vec{\underline{P}}=\dfrac{\varepsilon_0\omega_p^2\vec{\underline{E}}}{\omega_0^2-\omega^2+j\gamma\omega}}$.

6. Pour un milieu dense $n \approx 10^{-30}\ \text{m}^{-3}$, on trouve alors $\boxed{\omega_p \approx 10^{16}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$.

La masse d'un noyau est quelque fois la masse d'un proton et $\dfrac{m_{\text{proton}}}{m_{\text{électron}}} \approx 2000$, les noyaux sont beaucoup plus lourds que les électrons, c'est pourquoi on néglige leurs déplacements devant ceux des électrons.

7. $\underline{\chi}_e$ est la susceptibilité diélectrique complexe du milieu, elle est sans dimension.

En identifiant $\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \underline{\chi}_e \underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{P}} = \dfrac{\varepsilon_0 \omega_p^2 \underline{\vec{E}}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega}$, on obtient $\underline{\chi}_e(\omega) = \dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega}$.

On en déduit $\underline{\chi}_e(\omega = 0) = \dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2}$ et $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{\gamma\omega}{\omega_0^2}}$, de la forme $\dfrac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}$ en prenant $\boxed{Q = \dfrac{\omega_0}{\gamma}}$. C'est un filtre passe-bas d'ordre 2.

<u>II/ Une solution des équations de Maxwell</u>

1. On peut écrire $\underline{E}_0 = E_0 e^{j\phi}$ avec E_0 réel, ce qui rajoute un terme ϕ à la phase $\omega t - \underline{k}z$, il suffit ensuite d'effectuer un changement d'origine des temps, ce qui revient à travailler avec une amplitude réelle.

2. Les équations de Maxwell dans le milieu s'écrivent, en notation complexe :

$$\boxed{\text{div}\underline{\vec{E}} = 0} \qquad \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}} \qquad \boxed{\text{div}\underline{\vec{B}} = 0} \qquad \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}}$$

Calculons : $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{E}}\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\dfrac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial\left(\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{B}}\right)}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \dfrac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \dfrac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$.

Or $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{E}}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\underline{\vec{E}}\right) - \Delta\underline{\vec{E}}$ et $\text{div}\underline{\vec{E}} = 0$, d'où : $\Delta\underline{\vec{E}} = \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \dfrac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$: équation de propagation.

Puis on injecte la solution $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}z)} \overrightarrow{u_x}$ dans l'équation de propagation, avec $\Delta\underline{\vec{E}} = -\underline{k}^2 \underline{\vec{E}}$ et $\dfrac{d^2 \underline{\vec{E}}}{dt^2} = -\omega^2 \underline{\vec{E}}$, d'où $\underline{k}^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r$.

Or $\mu_0 \varepsilon_0 = \dfrac{1}{c^2}$ et $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$, d'où $\boxed{\underline{k}^2 = k_0^2 \underline{\varepsilon}_r}$: c'est la <u>relation de dispersion</u>.

3. Le terme $e^{j(\omega t - \underline{k}z)}$ s'écrit, avec $\underline{k} = k' - jk''$: $e^{-k''z} e^{j(\omega t - k'z)}$.

$k'' \neq 0$ traduit une modification de l'amplitude de l'onde lorsque z varie, c'est-à-dire un phénomène d'absorption ou d'amplification, pour un diélectrique passif c'est un terme d'<u>absorption</u>.

L'amplitude est proportionnel à $e^{-k''z} = e^{-\frac{z}{\delta}}$, et tend vers 0 sur quelques δ, δ traduit la <u>distance caractéristique de pénétration</u> de l'onde dans le milieu.

Puisque $\underline{\varepsilon}_r$ dépend de ω, alors la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'}$ aussi, <u>le milieu est dispersif</u>.

4. De ce qui précède on déduit aisément $\boxed{\underline{\vec{E}} = E_0 e^{-k''z} e^{j(\omega t - k'z)} \overrightarrow{u_x}}$.

De $\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$ on déduit $\boxed{\underline{\vec{B}} = \dfrac{k' - jk''}{\omega} E_0 e^{-k''z} e^{j(\omega t - k'z)} \overrightarrow{u_y}}$.

III/ Considérations énergétiques

1. La valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting s'écrit $<\vec{\pi}>=\frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*\right)$.

Or $\underline{\vec{E}}=E_0e^{-k"z}e^{j(\omega t-k'z)}\overrightarrow{u_x}$ et $\underline{\vec{B}}^*=\frac{k'+jk"}{\omega}E_0e^{-k"z}e^{-j(\omega t-k'z)}\overrightarrow{u_y}$ donc $\boxed{<\vec{\pi}>=\frac{k'}{2\mu_0\omega}E_0^2e^{-2k"z}\overrightarrow{u_z}}$.

2. La puissance moyenne reçue par le milieu est $\boxed{P_{\text{milieu}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{j}}_{\text{pol}}\cdot\underline{\vec{E}}^*\right)}$.

Or $\underline{\vec{j}}_{\text{pol}}=\frac{\partial\underline{\vec{P}}}{\partial t}$ et $\underline{\vec{P}}=\varepsilon_0\left(\underline{\varepsilon}_r-1\right)\underline{\vec{E}}=\varepsilon_0\left(\varepsilon_r'-1-j\varepsilon_r"\right)\underline{\vec{E}}$.

On en déduit $P_{\text{milieu}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(j\omega\varepsilon_0\left(\varepsilon_r'-1-j\varepsilon_r"\right)E_0^2e^{-2k"z}\right)$, d'où $\boxed{P_{\text{milieu}}=\frac{1}{2}\omega\varepsilon_0\varepsilon_r"E_0^2e^{-2k"z}}$.

La puissance moyenne reçue par un électron du fait des forces de friction est $P_{\text{électron}}=-m\gamma<\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2>$.

Or $\frac{d\underline{\vec{r}}}{dt}=j\omega\underline{\vec{r}}=-\frac{j\omega}{ne}\underline{\vec{P}}=-\frac{j\omega}{ne}\varepsilon_0\left(\varepsilon_r'-1-j\varepsilon_r"\right)\underline{\vec{E}}$, soit :

$$\frac{d\underline{\vec{r}}}{dt}=-\frac{\omega\varepsilon_0E_0e^{-k"z}}{ne}\left(\varepsilon_r"-j\left(\varepsilon_r'-1\right)\right)\left(\cos\left(\omega t-k'z\right)+j\sin\left(\omega t-k'z\right)\right)\overrightarrow{u_x}.$$

On a donc en notation réelle $\frac{d\vec{r}}{dt}=-\frac{\omega\varepsilon_0E_0e^{-k"z}}{ne}\left(\varepsilon_r"\cos\left(\omega t-k'z\right)+\left(\varepsilon_r'-1\right)\sin\left(\omega t-k'z\right)\right)\overrightarrow{u_x}$.

On en déduit :

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2=\left(\frac{\omega\varepsilon_0E_0e^{-k"z}}{ne}\right)^2\left(\varepsilon_r"^2\cos^2\left(\omega t-k'z\right)+2\varepsilon_r"\left(\varepsilon_r'-1\right)\cos\left(\omega t-k'z\right)\sin\left(\omega t-k'z\right)+\left(\varepsilon_r'-1\right)^2\sin^2\left(\omega t-k'z\right)\right)\overrightarrow{u_x}$$

et $<\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2>=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega\varepsilon_0E_0e^{-k"z}}{ne}\right)^2\left(\varepsilon_r"^2+\left(\varepsilon_r'-1\right)^2\right)$.

Or $\underline{\chi}_e=\varepsilon_r'-1-j\varepsilon_r"=\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2+j\gamma\omega}=\frac{\omega_p^2\left(\omega_0^2-\omega^2-j\gamma\omega\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\gamma\omega\right)^2}$, d'où $\varepsilon_r'-1=\frac{\omega_p^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\gamma\omega\right)^2}$

et $\varepsilon_r"=\frac{\gamma\omega\omega_p^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\gamma\omega\right)^2}$.

Calculons : $\left(\varepsilon_r'-1\right)^2+\varepsilon_r"^2=\frac{\omega_p^4}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\gamma\omega\right)^2}=\frac{\omega_p^2}{\gamma\omega}\varepsilon_r"$.

On a alors $P_{\text{électron}}=-\frac{m\gamma}{2}\left(\frac{\omega\varepsilon_0E_0e^{-k"z}}{ne}\right)^2\frac{\omega_p^2}{\gamma\omega}\varepsilon_r"$.

Or $\omega_p=\sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$, d'où $\boxed{P_{\text{électron}}=-\frac{1}{2n}\omega\varepsilon_0\varepsilon_r"E_0^2e^{-2k"z}}$.

Le milieu reçoit alors $\boxed{P_{\text{vol}}=nP_{\text{électron}}=-\frac{1}{2}\omega\varepsilon_0\varepsilon_r"E_0^2e^{-2k"z}}$.

Conclusion : $\boxed{P_{\text{vol}}=-P_{\text{milieu}}}$: toute la puissance que l'onde électromagnétique fournit au milieu est dissipée par les forces de friction.

3. Considérons une tranche de milieu d'épaisseur dz (comprise entre les cotes z et $z+dz$) et de section S, le volume de cette tranche est Sdz.
Effectuons un bilan de puissance :
La puissance entrant dans la tranche est le flux du vecteur de Poynting :
$\left(<\pi_z>(z) - <\pi_z>(z+dz)\right)S$, c'est aussi la puissance moyenne reçue par le milieu : $P_{\text{vol}}Sdz$.

On en déduit $\left(<\pi_z>(z) - <\pi_z>(z+dz)\right)S = P_{\text{vol}}Sdz$, d'où $\boxed{\frac{d<\pi_z>}{dz} = -P_{\text{vol}}}$.

Vérifions à l'aide de la question III. 1. qui donne $<\pi_z> = \frac{k'}{2\mu_0\omega}E_0^2 e^{-2k''z}$ et donc $\frac{d<\pi_z>}{dz} = -\frac{k'k''}{\mu_0\omega}E_0^2 e^{-2k''z}$.

Or $\underline{k}^2 = k_0^2\underline{\varepsilon}_r$, soit $\left(k' - jk''\right)^2 = k'^2 - 2jk'k'' + k''^2 = k_0^2\left(\varepsilon_r' - 1 - j\varepsilon_r''\right)$.

On a donc $k'k'' = \frac{k_0^2\varepsilon_r''}{2} = \frac{\omega^2\varepsilon_r''}{2c^2}$.

On a alors $\frac{d<\pi_z>}{dz} = -\frac{\omega\varepsilon_r''}{2\mu_0 c^2}E_0^2 e^{-2k''z}$.

Avec $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$, on a bien $\frac{d<\pi_z>}{dz} = -P_{\text{vol}} = -\frac{1}{2}\omega\varepsilon_0\varepsilon_r'' E_0^2 e^{-2k''z}$.

L'expression traduisant le bilan de puissance traduit le théorème de Poynting et illustre le principe général de conservation de l'énergie.

◊ Exercice 4 : Couleurs par transparence

L'exercice étudie l'interprétation de certains phénomènes colorés de la vie quotidienne.
On pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent.
On s'intéresse ici aux couleurs perçues lorsque l'on regarde la lumière du jour (lumière blanche) à travers certains milieux diélectriques (solutions aqueuses, verre, pierres précieuses, …).
On admet que ω et ω_p ont des ordres de grandeur comparables et on rappelle que γ est très inférieur à ω_0.

1. Entre quelles longueurs d'onde se situe le spectre des ondes lumineuses humainement visibles ? Donner un ordre de grandeur des fréquences correspondant aux couleurs rouge et violette.
2. On envisage des valeurs de ω appartenant au visible suffisamment éloignées de ω_0 pour pouvoir considérer $|\omega-\omega_0| >> \gamma$; ε_r'' est alors négligeable devant 1. Comment qualifie-t-on alors le milieu pour la pulsation ω ? Comment évolue l'onde en se propageant dans le milieu ? Comment apparaît le diélectrique si, comme pour le verre, les valeurs de ω_0 de ses charges n'appartiennent pas au domaine du visible ?
3. Justifier soigneusement le fait que l'on peut se contenter de l'expression simplifiée de l'indice de réfraction $n' = \sqrt{1+\dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}}$.
4. On envoie un fin rayon de lumière blanche sur l'une des faces d'un prisme de verre de section triangulaire. On suppose que pour ce verre, les pulsations ω_0 sont situées dans l'ultraviolet. Dessiner et justifier l'aspect (géométrie et couleurs) du faisceau émergeant. (On précisera en particulier les positions relatives du rayon rouge et du rayon violet).

On se place maintenant à la pulsation ω_0 et on suppose le rapport $\dfrac{\omega_p^2}{\gamma\omega_0}$ très grand devant 1.

5. Montrer que $n'' = \sqrt{\dfrac{\omega_p^2}{2\gamma\omega_0}}$. Donner de même une expression simplifiée de n' en fonction de ω_0, ω_p et γ. Comment alors qualifier le milieu du point de vue d'une onde lumineuse de pulsation ω_0 ? Comment évolue l'onde en se propageant dans le milieu ? Comment apparaît le milieu pour la pulsation ω_0 ?
6. Le rubis possède une pulsation ω_0 correspondant à la couleur bleue. De quelle couleur apparaît-il « par transparence » ? Pour l'aigue-marine $\omega_0 \approx 4{,}5\cdot 10^{14}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Quelle est sa couleur « par transparence » ?
7. L'eau possède-t-elle des valeurs de ω_0 dans le visible ? L'eau d'une piscine chauffe au Soleil, pourquoi ?
8. Une application à la mesure en chimie : certaines solutions aqueuses sont colorées. Comment varie la norme de la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting moyen en fonction de l'épaisseur d de solution traversée ? Quelle est la loi utilisée en chimie qui utilise ce résultat ? Quelle grandeur caractéristique de la solution colorée peut-on ainsi mesurer ?

Solution

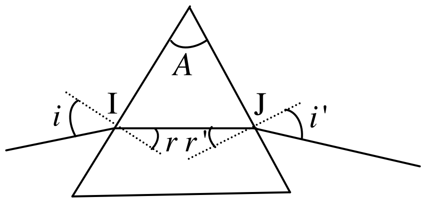
1. Le spectre des longueurs d'onde humainement visibles s'étale du violet au rouge dans l'intervalle $\boxed{[400\text{ nm}\,;780\text{ nm}]}$. La fréquence se déduit de la longueur d'onde via $f=\frac{c}{\lambda}$, où c est la célérité de la lumière dans le vide, d'où $\boxed{f_{\text{violet}}=7{,}5\cdot10^{14}\text{ Hz}}$ et $\boxed{f_{\text{rouge}}=3{,}8\cdot10^{14}\text{ Hz}}$.

2. Puisque $\varepsilon_r^{''}$ est alors négligeable devant 1, il n'y a pas d'absorption et le milieu est qualifié de transparent et l'onde se propage sans atténuation. Le milieu reste dispersif.
Le diélectrique apparaît transparent pour toutes les ondes du domaine visible.

3. Utilisons les résultats de l'exercice précédent :
La relation de dispersion $\underline{k}^2=k_0^2\underline{\varepsilon}_r=k_0^2\varepsilon_r^{'}$ est réel car $\varepsilon_r^{''}<<1$. Pas clair ??
De plus $\underline{k}=k_0\underline{n}$, soit $\underline{n}^2=\underline{\varepsilon}_r=\varepsilon_r^{'}$. On en déduit que $\underline{k}$ et $\underline{n}$ sont réels : $\underline{k}=k'$ et $\underline{n}=n'$, avec $\underline{n}^2=n'^2=\varepsilon_r^{'}=1+\frac{\omega_p^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\gamma\omega\right)^2}$.

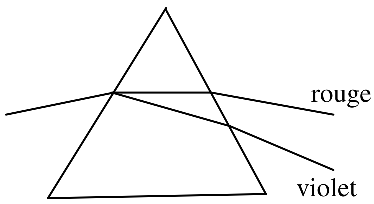
Or $\left|\omega-\omega_0\right|>>\gamma$, d'où $n'^2=1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}$ et donc $\boxed{n'=\sqrt{1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}}}$.

4. Considérons un rayon lumineux constitué de lumière blanche arrivant sur un prisme, d'angle au sommet A et d'indice n, avec l'angle d'incidence i.



La loi de Descartes pour la réfraction en I s'écrit $\sin i=n\sin r$ et en J $\sin i'=n\sin r'$. De plus $A=r+r'$.

Or $\omega_{\text{rouge}}<\omega_{\text{violet}}$, on en déduit d'après $n'=\sqrt{1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}}$, que $n'_{\text{rouge}}<n'_{\text{violet}}$, $r_{\text{rouge}}>r_{\text{violet}}$, $r'_{\text{rouge}}<r'_{\text{violet}}$ et $i'_{\text{rouge}}<i'_{\text{violet}}$: le rayon violet est plus dévié que le rayon rouge.



5. Reprenons les relations $\varepsilon_r^{'}=1+\frac{\omega_p^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\gamma\omega\right)^2}$ et $\varepsilon_r^{''}=\frac{\gamma\omega\omega_p^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\gamma\omega\right)^2}$.

Plaçons nous à $\omega=\omega_0$: $\varepsilon_r^{'}=1$ et $\varepsilon_r^{''}=\frac{\omega_p^2}{\gamma\omega_0}$.

Or $\underline{n}^2 = \underline{\varepsilon}_r = \varepsilon_r^{'} - j\varepsilon_r^{"}$, soit $\underline{n}^2 = 1 - j\dfrac{\omega_p^2}{\gamma\omega_0} \approx -j\dfrac{\omega_p^2}{\gamma\omega_0}$ car $\dfrac{\omega_p^2}{\gamma\omega_0} >> 1$, ce qui s'écrit aussi :

$(n' - jn")^2 = \left(\sqrt{\dfrac{\omega_p^2}{2\gamma\omega_0}}(1-j)\right)^2$, on en déduit $\boxed{n' = n" = \sqrt{\dfrac{\omega_p^2}{2\gamma\omega_0}}}$.

D'après ce qui précède $n" \neq 0$ donc le milieu est absorbant. L'onde se propage en s'atténuant rapidement car $n" >> 1$, la longueur caractéristique de pénétration de l'onde dans le milieu est très faible. Si le milieu est assez épais il apparaît opaque.

6. Pour le rubis la couleur bleue n'est pas transmise donc le rubis apparaît rouge par transparence.

Pour l'aigue-marine $\omega_0 \approx 4{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, soit une fréquence $f_0 \approx 7{,}2 \cdot 10^{13}\ \text{Hz}$ qui appartient au domaine infrarouge. L'aigue-marine est donc transparente (théoriquement), elle apparaît en fait légèrement bleutée (qui doit correspondre à une légère absorption dans le rouge).

7. L'eau est transparente donc elle ne possède pas de valeur de ω_0 dans le visible.

L'eau possède des valeurs de ω_0 dans l'infrarouge, en absorbant les ondes infrarouges émises par le Soleil, elle chauffe.

8. D'après les résultats de l'exercice précédent, la norme de la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting moyen est de la forme $\boxed{<\pi> = <\pi>_0\, e^{-2k"d}}$.

Ce résultat est utilisé en chimie avec la loi de Beer-Lambert, elle permet de mesurer des concentrations par spectrophotométrie.

◊ Exercice 5 : Observation de la Terre

Un satellite d'observation de la Terre situé en limite de l'ionosphère envoie des ondes radar à travers l'ionosphère.
L'ionosphère, couche de l'atmosphère située à plus de 60 km d'altitude, peut être considérée comme un plasma : c'est un milieu ionisé, caractérisé par une densité volumique d'électrons libres de charge $-e$, de masse m_e, égale à $n_1 = 1{,}00 \cdot 10^{11}\ \text{m}^{-3}$ et une densité volumique de cations de charge $+e$, de masse m_c, égale aussi à n_1, l'ensemble est donc globalement neutre. La valeur de n_1 est supposée constante.
On se propose d'étudier dans ce milieu la propagation d'ondes du type $\vec{\underline{E}}(\text{M},t) = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \overrightarrow{u_y}$ où E_0 est un réel positif non nul et $\underline{k}$ un complexe. On pose $\underline{k} = k_1 + jk_2$, avec k_1 et k_2 réels ; si $k_1 \neq 0$, alors on choisira $k_1 > 0$.
Dans le plasma, les électrons et les ions sont soumis à la force de Lorentz due aux champs électrique et magnétique de l'onde. On négligera l'effet de la pesanteur et les interactions entre particules chargées, et on supposera que les particules sont non relativistes (i.e. leurs vitesses sont très petites devant la célérité de la lumière dans le vide c).

1. En admettant que le rapport $\dfrac{\omega}{|\underline{k}|}$ est de l'ordre de c, montrer que les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant les effets de la partie électrique de la force de Lorentz.
2. En régime établi, et en supposant que l'amplitude des déplacements des charges reste petite devant la longueur d'onde, déterminer l'expression du vecteur $\vec{\underline{v}}_e$ (dans le référentiel galiléen d'étude) d'un électron, positionné en M à l'instant t, en fonction de m_e, e, ω et $\vec{\underline{E}}(\text{M},t)$. Donner l'expression du vecteur vitesse $\vec{\underline{v}}_i$ d'un cation. En déduire l'expression de la conductivité électrique complexe du plasma $\underline{\gamma}$ telle que le plasma vérifie la loi d'Ohm : $\vec{\underline{j}} = \underline{\gamma}\vec{\underline{E}}$, où $\vec{\underline{j}}$ est le vecteur densité volumique de courant complexe. A la vue des valeurs numériques, montrer que $\underline{\gamma} = -j\dfrac{n_1 e^2}{m_e \omega}$.
3. Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.
4. Etablir l'expression de $\underline{k}^2$ dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique dite pulsation plasma ω_p ; donner son expression et calculer sa valeur numérique pour l'ionosphère. Calculer la longueur d'onde dans le vide λ_p associée. A quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette longueur d'onde ?
5. On se place dans le cas $\omega < \omega_p$: donner l'expression de $\underline{k}$ en fonction de ω_p, ω et c (on prendra $k_2 < 0$). Donner les expressions des champs réels $\vec{E}(\text{M},t)$ et $\vec{B}(\text{M},t)$. Caractériser l'onde obtenue. Donner l'expression de $<\vec{\pi}(\text{M},t)>$ dans le plasma.
6. On se place dans le cas $\omega > \omega_p$: donner l'expression de $\underline{k}$ en fonction de ω_p, ω et c. Commenter. Donner les expressions de $\vec{E}(\text{M},t)$ et $\vec{B}(\text{M},t)$. Caractériser l'onde obtenue

(donner 5 qualificatifs). Donner l'expression de $<\vec{\pi}(\mathrm{M},t)>$. Déterminer l'expression de la vitesse de phase $v_\varphi(\omega)$ de cette onde en fonction de ω_p, ω et c. Le milieu est-il dispersif (justifier la réponse) ? Calculer la vitesse de groupe $v_g(\omega)$ en fonction de ω_p, ω et c. Donner la signification physique de cette vitesse. Comparer $v_\varphi(\omega)$ et $v_g(\omega)$ à c. Que penser du fait que $v_\varphi(\omega)$ puisse être supérieure à c ?

7. Un satellite d'observation de la Terre envoie des ondes radar à travers l'ionosphère à la fréquence $f = 13{,}6\ \mathrm{GHz}$, ce choix de fréquence vous semble-t-il correct ?

   Données numériques :

Masse d'un proton : $m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg

Masse d'un électron : $m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}$ kg

Charge élémentaire : $e = 1{,}60\cdot 10^{-19}$ C

Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}}$

Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{H\cdot m^{-1}}$

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00\cdot 10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Solution

1. La force de Lorentz s'écrit $\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}$. Le rapport des normes des parties magnétique et électrique s'écrit : $\dfrac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{F}_e\|} = \dfrac{\|\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \approx \dfrac{vB}{E}$.

Or l'équation de Maxwell-Faraday en notation complexe est $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t}$, soit $-j\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{E}} = -j\omega\underline{\vec{B}}$, d'où $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}$, d'où $B \approx \dfrac{|k|}{\omega}E$ et on admet que $\dfrac{|k|}{\omega} \approx \dfrac{1}{c}$.

On a donc $\dfrac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{F}_e\|} \approx \dfrac{v}{c} << 1$: les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant les effets de sa partie électrique.

2. Appliquons le principe fondamental de la dynamique à un électron, qui ne subit que la force de Lorentz $\vec{F}_L = -e\vec{E}$: $m_e\dfrac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}$. On en déduit, en notation complexe, $m_e j\omega\underline{\vec{v}}_e = -e\underline{\vec{E}}$, soit $\boxed{\underline{\vec{v}}_e = j\dfrac{e}{m_e\omega}\underline{\vec{E}}}$.

Avec le même raisonnement pour un cation de charge $+e$ et de masse m_c : $\boxed{\underline{\vec{v}}_i = -j\dfrac{e}{m_c\omega}\underline{\vec{E}}}$.

Le vecteur densité volumique de courant complexe s'écrit $\underline{\vec{j}} = -n_1 e\underline{\vec{v}}_e + n_1 e\underline{\vec{v}}_i$, soit $\underline{\vec{j}} = -j\dfrac{n_1 e^2}{\omega}\left(\dfrac{1}{m_e} + \dfrac{1}{m_c}\right)\underline{\vec{E}}$.

Or le plasma vérifie la loi d'Ohm : $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$, d'où $\underline{\gamma} = -j\dfrac{n_1 e^2}{\omega}\left(\dfrac{1}{m_e} + \dfrac{1}{m_c}\right)$.

Or d'après les valeurs numériques : $m_p = 1,67\cdot10^{-27}$ kg et $m_e = 9,11\cdot10^{-31}$ kg , et $m_c \approx \text{qq}\, m_p$, on en déduit $\frac{1}{m_c} << \frac{1}{m_e}$, et finalement $\boxed{\underline{\gamma} = -j\frac{n_1 e^2}{m_e\omega}}$.

3. La puissance volumique fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres est $P_v = \vec{j}\cdot\vec{E}$.

Or $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}\overrightarrow{u_y} = E_0 e^{k_2 x} e^{j(\omega t - k_1 x)}\overrightarrow{u_y}$, soit $\vec{E} = E_0 e^{k_2 x}\cos(\omega t - k_1 x)\overrightarrow{u_y}$.

De plus $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}} = -j\frac{n_1 e^2}{m_e\omega}E_0 e^{k_2 x}e^{j(\omega t - k_1 x)}\overrightarrow{u_y}$, soit $\vec{j} = \frac{n_1 e^2}{m_e\omega}E_0 e^{k_2 x}\sin(\omega t - k_1 x)\overrightarrow{u_y}$.

On en déduit $P_v = \frac{n_1 e^2}{m_e\omega}E_0^2 e^{2k_2 x}\sin(\omega t - k_1 x)\cos(\omega t - k_1 x)$.

Puisque $<\sin(\omega t - k_1 x)\cos(\omega t - k_1 x)>= 0$, on a donc $\boxed{<P_v>= 0}$.

Commentaire : le champ électromagnétique ne fournit pas d'énergie aux électrons libres du plasma, en moyenne.

3. Les équations de Maxwell dans le plasma ($\rho = 0$) sont les suivantes : $\text{div}\vec{E} = 0$, $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\text{div}\vec{B} = 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

On en déduit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}\right)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Or $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\vec{E}\right) - \vec{\Delta E}$ et $\text{div}\vec{E} = 0$, d'où : $\boxed{\vec{\Delta E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}}$, ou bien $\boxed{\vec{\Delta E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}}$.

Avec la loi d'Ohm $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$ en notation complexe, on obtient $\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \mu_0\underline{\gamma}\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}$.

Remplaçons $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}\overrightarrow{u_y}$ dans l'équation de propagation, avec $\Delta\underline{\vec{E}} = (-j\underline{k})^2\underline{\vec{E}}$, $\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = j\omega\underline{\vec{E}}$ et $\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2\underline{\vec{E}}$, on obtient $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0\underline{\gamma}\omega$.

Or $\underline{\gamma} = -j\frac{n_1 e^2}{m_e\omega}$, d'où $\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n_1 e^2}{m_e}}$.

Cette relation de dispersion peut s'écrire : $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \frac{\mu_0 c^2 n_1 e^2}{m_e}}{c^2} = \frac{\omega^2 - \frac{n_1 e^2}{m_e\varepsilon_0}}{c^2}$ (car $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$).

Suivant les valeurs relatives de ω^2 et $\frac{n_1 e^2}{m_e\varepsilon_0}$ le comportement mathématique de $\underline{k}^2$ ne sera pas le même (réel ou imaginaire pur), on peut alors mettre en évidence une pulsation caractéristique dite pulsation plasma $\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{n_1 e^2}{m_e\varepsilon_0}}}$ telle que $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$.

Application numérique : $\boxed{\omega_p = 1,78\cdot10^7\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$.

La longueur d'onde dans le vide associée est $\lambda_p = \dfrac{2\pi c}{\omega_p}$, soit $\boxed{\lambda_p = 106 \text{ m}}$. Cette longueur d'onde appartient domaine des ondes radio.

5. Dans le cas $\omega < \omega_p$, $\dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} < 0$ et $\underline{k} = \pm j\sqrt{\dfrac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$, de la forme $\underline{k} = jk_2$.

Or $k_2 < 0$ (donné dans l'énoncé, milieu non amplificateur) donc $\boxed{\underline{k} = -j\sqrt{\dfrac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}}$, et on est dans le cas $k_1 = 0$ et $k_2 = -\sqrt{\dfrac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$.

De $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}\overrightarrow{u_y} = E_0 e^{k_2 x} e^{j\omega t}\overrightarrow{u_y}$ on déduit $\boxed{\vec{E} = E_0 e^{k_2 x}\cos(\omega t)\overrightarrow{u_y}}$.

Or $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$, ou bien $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\underline{k}}{\omega} E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}\overrightarrow{u_z} = j\dfrac{k_2}{\omega} E_0 e^{k_2 x} e^{j\omega t}\overrightarrow{u_z}$, et donc :

$\boxed{\vec{B} = -\dfrac{k_2}{\omega} E_0 e^{k_2 x}\sin(\omega t)\overrightarrow{u_z}}$.

L'onde obtenue est stationnaire amortie, on dit qu'elle est évanescente.

Le vecteur de Poynting est $\vec{\pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ et s'exprime : $\vec{\pi} = -\dfrac{k_2 E_0^2}{\omega} e^{2k_2 x}\cos(\omega t)\sin(\omega t)\overrightarrow{u_x}$.

On en déduit $\boxed{<\vec{\pi}> = \vec{0}}$ car $<\cos(\omega t)\sin(\omega t)> = 0$.

6. Dans le cas $\omega > \omega_p$, $\dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} > 0$ et $\underline{k} = \pm\sqrt{\dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$.

Or $k_1 > 0$ (énoncé) donc $\boxed{\underline{k} = \sqrt{\dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}}$, et on est dans le cas $k_1 = \sqrt{\dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$ et $k_2 = 0$.

De $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}\overrightarrow{u_y} = E_0 e^{j(\omega t - k_1 x)}\overrightarrow{u_y}$ on déduit $\boxed{\vec{E} = E_0\cos(\omega t - k_1 x)\overrightarrow{u_y}}$.

Comme précédemment : $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\underline{k}}{\omega} E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}\overrightarrow{u_z} = \dfrac{k_1}{\omega} E_0 e^{j(\omega t - k_1 x)}\overrightarrow{u_z}$ on déduit :

$\boxed{\vec{B} = \dfrac{k_1 E_0}{\omega}\cos(\omega t - k_1 x)\overrightarrow{u_y}}$.

C'est une onde plane, progressive, harmonique, se propageant suivant les x croissants, polarisée rectilignement suivant $\overrightarrow{u_y}$ et d'amplitude constante (non atténuée, non amplifiée).

Le vecteur de Poynting est $\vec{\pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ et s'exprime : $\vec{\pi} = \dfrac{k_1 E_0^2}{\mu_0 \omega}\cos^2(\omega t - k_1 x)\overrightarrow{u_x}$.

On en déduit $\boxed{<\vec{\pi}> = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0\omega} k_1 \overrightarrow{u_x}}$ car $<\cos^2(\omega t - k_1 x)> = \dfrac{1}{2}$.

La vitesse de phase est $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k_1}$, d'où $\boxed{v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}}$. v_φ dépend de ω donc le milieu est dispersif.

La vitesse de groupe est $v_g = \dfrac{d\omega}{dk_1}$.

Différencions la relation $k_1^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$: $2k_1 dk_1 = \dfrac{2\omega d\omega}{c^2}$, d'où $\dfrac{d\omega}{dk_1} = c^2 \dfrac{k_1}{\omega} = \dfrac{c^2}{v_\varphi}$, on en déduit $\boxed{v_g = c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$.

La vitesse de groupe représente la vitesse de propagation de l'énergie ou de l'information, c'est aussi la vitesse de l'enveloppe du paquet d'onde.

Des expressions précédentes on déduit, comme $\omega > \omega_p$, $\boxed{v_\varphi > c}$ et $\boxed{v_g < c}$.

La vitesse de phase est la vitesse de propagation d'une OPPH qui n'a aucun sens physique, elle ne représente pas la vitesse de matière ou d'énergie, cela n'a pas d'importance si elle est supérieure à c.

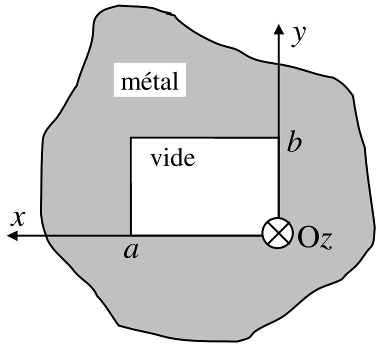
7. A la fréquence $f = 13{,}6\ \text{GHz}$ correspond la pulsation $\omega = 2\pi f = 8{,}54 \cdot 10^{10}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On est dans le cas $\omega > \omega_p$, il y a propagation, les ondes radar émises par le satellite peuvent traverser l'ionosphère. Ce choix de fréquence est correct.

◊ Exercice 6 : Etude d'un guide d'onde électromagnétique

On considère un guide d'onde rectangulaire constitué d'un matériau métallique dans lequel on a réalisé une cavité dont les parois forment un cylindre creux de section rectangulaire d'équations mathématiques $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$.

Dans la partie I, on considère que le métal est parfait. On remettra en cause cette hypothèse dans la deuxième partie.



I. Onde guidée

Un émetteur disposé dans la cavité (vide de charge et de courant) génère une onde électromagnétique dont le champ électromagnétique est choisi sous la forme : $\vec{E}(x,y,z,t)=E_0 f(x,y)\cos(\omega t-kz)\vec{u_y}$ où $f(x,y)$ est une fonction à valeurs réelles sans dimension physique, E_0 est une constante et ω et k deux constantes réelles positives.

1. Quelles sont les dimensions physiques des constantes introduites E_0, ω et k ?
2. Montrer que cette écriture du champ électrique introduit un terme de propagation. Préciser la vitesse correspondante.
3. Peut-on dire que cette onde est : a) polarisée ? b) plane ?
4. En utilisant une équation de Maxwell, montrer que la fonction $f(x,y)$ ne peut en aucun cas dépendre de y.
5. En utilisant les équations de Maxwell, donner une équation du 2ème ordre à laquelle satisfait $f(x)$.

Dans la suite, on choisit $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$.

6. Justifier ce choix.
7. Etablir le lien entre les constantes ω et k. On posera $c=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$, avec ε_0 la permittivité diélectrique du vide et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.
8. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(x,y,z,t)$ associé.
9. Exprimer le vecteur de Poynting dans la section droite du guide $z=cte$ et en déduire la puissance moyenne $P(z)$ traversant ce guide (de section ab). Vérifier alors la conservation de la puissance transportée par l'onde électromagnétique.
10. Exprimer les différents courants surfaciques $\vec{j_s}(x=0)$, $\vec{j_s}(x=a)$, $\vec{j_s}(y=0)$, $\vec{j_s}(y=b)$ circulant sur les quatre parois du guide.

II. Atténuation

La conductivité des parois est, hélas, finie et nous la noterons γ. Cependant, elle reste suffisamment importante pour admettre que la structure précédente du champ électromagnétique en son sein peut être conservée localement de telle sorte qu'en fait

l'amplitude E_0 devient désormais une fonction évoluant lentement avec z ainsi que la fonction $P(z)$ (question 9).
De plus on admettra que les courants surfaciques précédents doivent être remplacés par des courants volumiques répartis uniformément en profondeur sur une épaisseur $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$.

11. Vérifier l'homogénéité de la relation donnant δ. Quelle est l'origine physique du fait que δ décroît avec la pulsation ?
12. En utilisant les résultats de la question 11, donner les densités de courants volumiques correspondantes $\overrightarrow{j_v}(x=0)$, $\overrightarrow{j_v}(x=a)$, $\overrightarrow{j_v}(y=0)$, $\overrightarrow{j_v}(y=b)$.
13. Donner le lien entre la densité volumique de courant $\overrightarrow{j_v}$ (dans les parois) et la puissance volumique perdue par l'onde électromagnétique du fait de ces courants volumiques.
14. En déduire la puissance moyenne perdue dP par l'onde au niveau des quatre parois sur une longueur dz et aboutir à une expression du type $\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{dz}{\ell}$ avec $\ell = \dfrac{kab\gamma\delta\mu_0\omega}{4\left(\dfrac{\pi^2 b}{a^2} + \dfrac{\pi^2}{2a} + \dfrac{k^2 a}{2}\right)}$.
15. Mettre l'expression de ℓ pour un guide de section carrée (soit $a = b$) sous la forme : $\ell = f(a, c, \mu_0, \gamma)\dfrac{\sqrt{\dfrac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}\sqrt{\dfrac{\omega}{\omega_c}}}{1 + \dfrac{\omega^2}{2\omega_c^2}}$ en introduisant une pulsation critique de coupure ω_c.

    Vérifier l'homogénéité de cette relation. Tracer l'allure de ℓ en fonction de $\dfrac{\omega}{\omega_c}$ et déduire ainsi la pulsation ω_0 qui optimise la propagation de l'onde.
16. Applications numériques : en prenant $a = b = 1\,\text{cm}$, $\gamma = 6 \cdot 10^7\ \text{S} \cdot \text{m}^{-1}$, donner : a) la pulsation de coupure ω_c du guide d'onde (ou la fréquence f_c associée), b) la pulsation ω_0.
17. Au bout de quelle distance, la puissance moyenne sera-t-elle réduite à 1 % de sa valeur de départ, pour un champ de pulsation ω_0 ?

III. Réflexion

Le guide est fermé en $z = L$ par une plaque qui réfléchit partiellement l'onde incidente avec un coefficient de réflexion complexe $\underline{r} = \left(\dfrac{\underline{E_r}}{\underline{E_i}}\right)_{z=L} = re^{j\varphi}$ avec r et φ le module et l'argument de $\underline{r}$, $\underline{E_i} = E_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)e^{j(\omega t - kz)}$ grandeur complexe de l'onde incidente et $\underline{E_r}$ grandeur complexe du champ électrique attaché à l'onde réfléchie.

18. Ecrire la grandeur complexe $\underline{E_r}(x,z,t)$ de l'onde réfléchie pour $z < L$.
19. En déduire la grandeur complexe $\underline{E_t}(x,z,t)$ associée au champ électrique global régnant dans le guide d'onde en amont de la plaque, soit pour $z < L$.
20. Lorsqu'on promène un détecteur le long du guide (déplacement à x et y fixés), on constate que l'amplitude du champ électrique passe par des maxima $E_{\max}$ et des minima $E_{\min}$. On mesure ainsi un « taux d'onde stationnaire » défini par $TOS = 20\log\left(\dfrac{E_{\max}}{E_{\min}}\right)$.

    Relier TOS à r.

21. On constate également que les positions des minima (de champ électrique) sont régulièrement espacées de d et que le minimum le plus proche de l'obstacle (en $z = L$) est positionné en $z_{\min} = L - \Delta z$ avec $0 < \Delta z < d$. Relier φ à Δz, on prendra $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

22. Applications numériques : $TOS = 5d = 3\,\text{cm}$, $\Delta z = 1\,\text{cm}$. Calculer r et φ.

On donne le rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$ en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_z}.$$

Solution

I. Onde guidée

1. Puisque la fonction $f(x,y)$ est sans dimension et que le cosinus est un nombre (sans dimension), on en déduit que $\boxed{E_0 \text{ a la dimension d'un champ électrique (en } \text{V}\cdot\text{m}^{-1})}$.

La phase $\omega t - kz$ est sans dimension, avec t le temps et z une distance, donc $\boxed{\omega \text{ est l'inverse d'un temps (en } \text{s}^{-1})}$ et $\boxed{k \text{ est l'inverse d'une distance (en m)}}$.

2. Le champ électromagnétique est $\vec{E}(x,y,z,t) = E_0 f(x,y)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_y}$.

Le terme $\cos(\omega t - kz)$ est un terme de propagation dans la direction $\overrightarrow{u_z}$, et dans le sens des z croissants.

Différentions la phase $\psi = \omega t - kz \Rightarrow d\psi = \omega dt - kdz$, dans un plan de phase $d\psi = 0$, soit $\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$, c'est $\boxed{\text{la vitesse de phase : } v_\varphi = \frac{\omega}{k}}$.

3. Le champ électrique n'a qu'une composante suivant un vecteur fixe donc $\boxed{\text{l'onde est polarisée rectilignement dans la direction } \overrightarrow{u_y}}$.

$\boxed{\text{L'onde n'est pas plane}}$, à cause du terme $f(x,y)$, il n'existe pas de plan tel que, à t fixé, le champ soit uniforme dans ce plan.

4. L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit dans une zone dépourvue de charge ($\rho = 0$) : $\text{div}\vec{E} = 0$, et puisque $\vec{E}(x,y,z,t) = E_0 f(x,y)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_y}$, $\frac{\partial E}{\partial y} = 0$.

Or $E = E_0 f(x,y)\cos(\omega t - kz)$, donc $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, et $\boxed{\text{la fonction } f(x,y) \text{ ne dépend pas de } y}$.

5. Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent avec $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$: $\text{div}\vec{E} = 0$, $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\text{div}\vec{B} = 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Or $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}\right)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$.

De plus $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\vec{E}\right) - \Delta\vec{E}$ et $\text{div}\vec{E} = 0$, d'où : $\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$: équation de propagation de $\vec{E}$, ou bien $\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$, avec $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$.

Puis on remplace l'expression $\vec{E} = E_0 f(x)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_y}$:

avec $\Delta\vec{E} = \Delta E\overrightarrow{u_y} = \left(\dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right)\overrightarrow{u_y} = \left(\dfrac{d^2 f}{dx^2} - k^2 f\right)E_0\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_y}$

et $\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 f\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_y}$, on obtient : $\boxed{\dfrac{d^2 f}{dx^2} + \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)f = 0}$.

6. Cette équation s'écrit $f'' + \Omega^2 f = 0$ avec $\Omega^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2$.

Les cas $\Omega = 0$ et $\Omega < 0$ aboutissent à des solutions nulles pour f.
Le cas $\Omega > 0$ aboutit à une solution de la forme $f(x) = A\cos(\Omega x) + B\sin(\Omega x)$ où A et B sont des constantes qui dépendent des conditions aux limites :

- $f(0) = 0 \Rightarrow A = 0$;
- $f(a) = 0 \Rightarrow \sin(\Omega a) = 0$, soit $\Omega a = n\pi$ avec n entier.

D'où $f(x) = B\sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right)$.

En choisissant $B = 1$ (sans dimension) et $n = 1$ (le mode fondamental), on en déduit que $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$ est solution, et $\vec{E} = E(x,z)\overrightarrow{u_y} = E_0\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_y}$.

Commentaire : le terme $\cos(\omega t - kz)$ montre un aspect propagatif de l'onde dans la direction $\overrightarrow{u_z}$, alors que le terme $\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$ montre un aspect stationnaire de l'onde dans la direction $\overrightarrow{u_x}$, ce qui donne un caractère hybride à l'onde (propagatif et stationnaire).

7. En reportant l'expression $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$ dans l'équation différentielle $\dfrac{d^2 f}{dx^2} + \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)f = 0$ on obtient la relation de dispersion : $\boxed{k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\pi^2}{a^2}}$.

8. Utilisons l'équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, avec

$\vec{E} = E(x,z)\overrightarrow{u_y} = E_0\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_y}$ et $\vec{B} = B_x\overrightarrow{u_x} + B_y\overrightarrow{u_y} + B_z\overrightarrow{u_z}$:

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial E}{\partial z}\overrightarrow{u_x} + \dfrac{\partial E}{\partial x}\overrightarrow{u_z}$ et $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \dfrac{\partial B_x}{\partial t}\overrightarrow{u_x} + \dfrac{\partial B_y}{\partial t}\overrightarrow{u_y} + \dfrac{\partial B_z}{\partial t}\overrightarrow{u_z}$.

$$\text{D'où}\ \begin{cases} \dfrac{\partial B_x}{\partial t} = \dfrac{\partial E}{\partial z} = E_0 k\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz) \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial B_z}{\partial t} = -\dfrac{\partial E}{\partial x} = -E_0\dfrac{\pi}{a}\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz) \end{cases}.$$

En intégrant : $\begin{cases} B_x = -E_0 \dfrac{k}{\omega}\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz) \\ B_y = 0 \\ B_z = -E_0 \dfrac{\pi}{\omega a}\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz) \end{cases}$.

Finalement : $\boxed{\vec{B} = -E_0 \dfrac{k}{\omega}\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{u_x} - E_0 \dfrac{\pi}{a\omega}\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\vec{u_z}}$.

9. Le vecteur de Poynting est $\vec{\pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$, soit :

$$\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0}E_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{u_y} \wedge \left(-E_0\frac{k}{\omega}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{u_x} - E_0\frac{\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\vec{u_z}\right)$$

ou bien :

$$\boxed{\vec{\pi} = -\frac{E_0^2\pi}{\mu_0 a\omega}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\cos(\omega t - kz)\vec{u_x} + \frac{E_0^2 k}{\mu_0\omega}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t - kz)\vec{u_z}}.$$

La puissance moyenne à travers une section droite Σ du guide est : $P = <\iint_\Sigma \vec{\pi}\cdot dS\vec{u_z}>$.

Or

$$\iint_\Sigma \vec{\pi}\cdot dS\vec{u_z} = \int_0^a \int_0^b \frac{E_0^2 k}{\mu_0\omega}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t - kz)dxdy = \frac{E_0^2 k}{\mu_0\omega}b\cos^2(\omega t - kz)\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx.$$

Avec $\displaystyle\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx = \int_0^a \frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right)dx = \frac{a}{2}$, on obtient :

$$\iint_\Sigma \vec{\pi}\cdot dS\vec{u_z} = \frac{E_0^2 kab}{2\mu_0\omega}\cos^2(\omega t - kz).$$

On obtient alors P en prenant la valeur moyenne : $P = \dfrac{E_0^2 kab}{2\mu_0\omega} < \cos^2(\omega t - kz) >$, soit :

$\boxed{P = \dfrac{E_0^2 kab}{4\mu_0\omega}}$ ($<\cos^2(\omega t - kz)> = \dfrac{1}{2}$).

Cette puissance ne dépend pas de la cote z, elle a donc la même valeur en toute section droite du guide, c'est-à-dire au cours de sa propagation selon $\vec{u_z}$, la puissance transportée par l'onde électromagnétique se conserve.

10. Pour déterminer les différents courants surfaciques circulant sur les quatre parois du guide on utilise les conditions aux limites du champ magnétique, qui expriment la continuité de sa composante normale : $\vec{B_{N2}} - \vec{B_{N1}} = \vec{0}$ et la discontinuité de sa composante tangentielle $\vec{B_{T2}} - \vec{B_{T1}} = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{u_{n1\to 2}}$.

Dans le plan $(x = 0, y, z)$, on prend $\vec{u_{n1\to 2}} = \vec{u_x}$, $\vec{B_{T2}} = \vec{B}_{métal}$ et

$$\vec{B_{T1}} = \vec{B}_{vide} = B_z(0)\vec{u_z} = -\frac{E_0\pi}{\omega a}\sin(\omega t - kz)\vec{u_z}.$$

Or dans le métal la loi d'Ohm locale énonce $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, ou bien $\vec{E} = \dfrac{\vec{j}}{\gamma}$. Le métal étant parfait, $\gamma \to \infty$ et $\vec{E}_{métal} = \vec{0}$. On en déduit d'après les équations de Maxwell que $\vec{B}_{métal} = \vec{0}$.

La condition aux limites s'écrit donc $B_z(0)\overrightarrow{u_z} = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{u_x}$, d'où $\overrightarrow{j_s} = -\frac{B_z(0)}{\mu_0}\overrightarrow{u_y}$, on en déduit : $\boxed{\overrightarrow{j_s}(x=0) = \frac{E_0\pi}{\mu_0\omega a}\sin(\omega t - kz)\overrightarrow{u_y}}$. De même : $\boxed{\overrightarrow{j_s}(x=a) = \frac{E_0\pi}{\mu_0\omega a}\sin(\omega t - kz)\overrightarrow{u_y}}$

Pour les deux autres parois :

$$\boxed{\overrightarrow{j_s}(y=0) = -\frac{E_0\pi}{\mu_0\omega a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\overrightarrow{u_x} + \frac{E_0 k}{\mu_0\omega}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_z}}$$

et $\boxed{\overrightarrow{j_s}(y=b) = -\overrightarrow{j_s}(y=0) = \frac{E_0\pi}{\mu_0\omega a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\overrightarrow{u_x} - \frac{E_0 k}{\mu_0\omega}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_z}}$.

II. Atténuation

11. μ_0 s'exprime en $\mathrm{H \cdot m^{-1}}$, soit, dans le système MKSA, en $\mathrm{m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}}$, γ s'exprime en $\mathrm{S \cdot m^{-1}}$, soit, dans le système MKSA, en $\mathrm{m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^{3} \cdot A^{2}}$, ω s'exprime en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, on en déduit que δ s'exprime en m, donc $\boxed{\text{la relation donnant } \delta \text{ est homogène}}$.

L'origine physique du fait que δ décroît avec la pulsation est le phénomène d'induction. En effet, les électrons de conduction, mis en mouvement par le passage de l'onde, créent des champs qui s'opposent au phénomène qui leur à donné naissance (loi de Lenz), c'est-à-dire la pénétration de l'onde dans le conducteur.
En régime sinusoïdal, les amplitudes de ces champs sont proportionnelles à la pulsation (la dérivée temporelle dans la loi de Faraday se traduit par une multiplication par $j\omega$), la profondeur de pénétration décroît donc avec la pulsation.

12. Les densités volumiques de courant s'obtiennent en divisant les densités surfaciques de courant précédentes par δ. En effet un vecteur élément de courant s'écrit en description surfacique $\overrightarrow{dI} = \overrightarrow{j_s}dS$ et en description volumique $\overrightarrow{dI} = \overrightarrow{j_v}d\tau$.
Avec $d\tau = \delta dS$ (les courants s'étendent maintenant sur une épaisseur δ) l'équivalence $\overrightarrow{j_s}dS = \overrightarrow{j_v}d\tau$ donne $\overrightarrow{j_v} = \frac{\overrightarrow{j_s}}{\delta}$.

On en déduit :

$$\boxed{\overrightarrow{j_v}(x=0) = \frac{E_0\pi}{\mu_0\omega a\delta}\sin(\omega t - kz)\overrightarrow{u_y}}, \quad \boxed{\overrightarrow{j_v}(x=a) = \frac{E_0\pi}{\mu_0\omega a\delta}\sin(\omega t - kz)\overrightarrow{u_y}},$$

$$\boxed{\overrightarrow{j_v}(y=0) = -\frac{E_0\pi}{\mu_0\omega a\delta}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\overrightarrow{u_x} + \frac{E_0 k}{\mu_0\omega\delta}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_z}},$$

$$\boxed{\overrightarrow{j_v}(y=b) = \frac{E_0\pi}{\mu_0\omega a\delta}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\overrightarrow{u_x} - \frac{E_0 k}{\mu_0\omega\delta}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_z}}.$$

13. La puissance volumique perdue par l'onde électromagnétique est donnée par $p = \overrightarrow{j_v} \cdot \overrightarrow{E}$.

Or, d'après la loi d'Ohm locale $\overrightarrow{j_v} = \gamma\overrightarrow{E}$, d'où $\boxed{p = \frac{\overrightarrow{j_v}^2}{\gamma}}$.

Ce qu'on peut écrire, avec $< p > = \frac{dP}{d\tau}$, $dP = < \frac{\overrightarrow{j_v}^2}{\gamma} > d\tau$: la puissance moyenne élémentaire.

14. Déterminons la puissance moyenne perdue par l'onde dans la tranche de conducteur de longueur dz : $dP = dP(x=0) + dP(x=a) + dP(y=0) + dP(y=b)$.

$\overrightarrow{j_v}(x=0)$ et $\overrightarrow{j_v}(x=a)$ ne dépendent pas de y donc $dP(x=0) = < \dfrac{\overrightarrow{j_v}^2(x=0)}{\gamma} > b\delta dz$ et $dP(x=a) = < \dfrac{\overrightarrow{j_v}^2(x=a)}{\gamma} > b\delta dz$,

$\overrightarrow{j_v}(y=0)$ et $\overrightarrow{j_v}(y=b)$ dépendent de x donc $dP(y=0) = \left(\int_0^a < \dfrac{\overrightarrow{j_v}^2(y=0)}{\gamma} > dx \right) \delta dz$ et $dP(y=b) = \left(\int_0^a < \dfrac{\overrightarrow{j_v}^2(y=b)}{\gamma} > dx \right) \delta dz$.

$$
\begin{aligned}
dP = {} & 2\left(\frac{E_0 \pi}{\mu_0 \omega a \delta}\right)^2 \frac{b\delta}{2\gamma} dz \\
& + 2\left(\frac{E_0}{\mu_0 \omega \delta}\right)^2 \frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \int_0^a \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx \frac{\delta}{\gamma} < \sin^2(\omega t - kz) > dz \\
& - 4\left(\frac{E_0}{\mu_0 \omega \delta}\right)^2 \frac{\delta}{\gamma}\frac{\pi k}{a} \int_0^a \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx < \sin(\omega t - kz)\cos(\omega t - kz) > dz \\
& + 2\left(\frac{E_0}{\mu_0 \omega \delta}\right)^2 \frac{\delta}{\gamma} k^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx < \cos^2(\omega t - kz) > dz
\end{aligned}
$$

Or $\int_0^a \cos^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right) dx = \int_0^a \sin^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right) dx = \dfrac{a}{2}$ et $\int_0^a \cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right) dx = 0$.

En utilisant $< \sin^2(\omega t - kz) > = < \cos^2(\omega t - kz) > = \dfrac{1}{2}$ et $< \sin(\omega t - kz)\cos(\omega t - kz) > = 0$, on obtient $dP = \dfrac{E_0^2}{\mu_0^2 \omega^2 \delta\gamma}\left[\dfrac{\pi^2 b}{a^2} + \dfrac{\pi^2}{2a} + \dfrac{k^2 a}{2}\right] dz$.

Or, on a établi à la question 9 : $P = \dfrac{E_0^2 kab}{4\mu_0 \omega}$, on peut alors écrire $E_0^2 = \dfrac{4\mu_0 \omega P}{kab}$, et $dP = \dfrac{4P}{kab\gamma\delta\mu_0\omega}\left[\dfrac{\pi^2 b}{a^2} + \dfrac{\pi^2}{2a} + \dfrac{k^2 a}{2}\right] dz$, de la forme $\boxed{\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{dz}{\ell}}$ avec $\boxed{\ell = \dfrac{kab\gamma\delta\mu_0\omega}{4\left(\dfrac{\pi^2 b}{a^2} + \dfrac{\pi^2}{2a} + \dfrac{k^2 a}{2}\right)}}$.

15. De la relation de dispersion $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\pi^2}{a^2}$, on déduit $\omega_c = \dfrac{\pi c}{a}$ et $k = \dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c} = \dfrac{\omega_c}{c}\sqrt{\dfrac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}$.

D'où $\dfrac{\pi^2 b}{a^2} + \dfrac{\pi^2}{2a} + \dfrac{k^2 a}{2} = \dfrac{3\pi^2}{2a} + \dfrac{a}{2c^2}\left(\omega^2 - \omega_c^2\right) = \dfrac{\pi^2}{a} + \dfrac{a\omega^2}{2c^2} = \dfrac{\pi^2}{a}\left(1 + \dfrac{a^2\omega^2}{2\pi^2 c^2}\right) = \dfrac{\pi^2}{a}\left(1 + \dfrac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)$.

De plus $\delta=\sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$, en remplaçant et en simplifiant on aboutit à $\boxed{\ell=\sqrt{\dfrac{a^3\gamma\mu_0 c}{8\pi}}\dfrac{\sqrt{\dfrac{\omega^2}{\omega_c^2}-1}\sqrt{\dfrac{\omega}{\omega_c}}}{1+\dfrac{\omega^2}{2\omega_c^2}}}$,

soit $\boxed{f(a,c,\mu_0,\gamma)=\sqrt{\dfrac{a^3\gamma\mu_0 c}{8\pi}}}$.

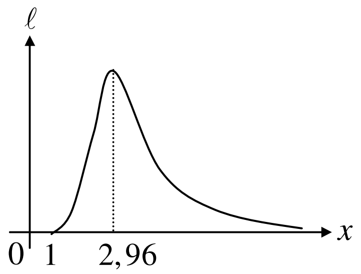
La grandeur $\sqrt{a^3\gamma\mu_0 c}$ est bien homogène à une distance puisque $\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\gamma\omega}}$ l'est aussi.

On pose $x=\dfrac{\omega}{\omega_c}$ et ℓ est de la forme $\ell(x)=\ell_0\dfrac{\sqrt{\left(x^2-1\right)x}}{1+\dfrac{x^2}{2}}$, pour $x>1$.

Dérivons : $\ell'(x)=-\dfrac{\ell_0\left(x^4-9x^2+2\right)}{4\sqrt{\left(x^2-1\right)x}\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)^2}$ et s'annule lorsque $x^4-9x^2+2=0$, soit pour

$x=\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{73}}{2}}=2,96$

L'allure de $\ell(x)$ est la suivante :



16. Applications numériques : a. $\boxed{\omega_c=9,4\cdot10^{10}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}}$. b. $\boxed{\omega_c=2,8\cdot10^{11}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}}$.

17. De $\dfrac{dP}{P}=-\dfrac{dz}{\ell}$ on déduit que $P(z)$ est de la forme $P(z)=P_0e^{-\frac{z}{\ell}}$.

On cherche la distance d telle que $P(d)=0,01P_0$, soit $\boxed{d=\ell\ln100\approx4,6\ell}$.

<u>III. Réflexion</u>

18. Le champ électrique de l'onde réfléchie est de la forme $\underline{E}_r=\underline{E}_{r0}e^{j(\omega t+kz)}$, avec $+kz$ car la propagation s'effectue dans le sens des z décroissants. Or en $z=L$: $\underline{E}_r=\underline{E}_{r0}e^{j(\omega t+kL)}$ et $\underline{E}_{r0}=\underline{r}E_0\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)e^{-2jkL}$, soit $\boxed{\underline{E}_r=\underline{r}E_0\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)e^{-2jkL}e^{j(\omega t+kz)}}$.

19. Le champ total s'écrit $\underline{E}_t=\underline{E}_i+\underline{E}_r=E_0\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)e^{j(\omega t-kz)}+\underline{r}E_0\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)e^{-2jkL}e^{j(\omega t+kz)}$, soit

$\underline{E}_t=E_0\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\left(e^{-jkz}+\underline{r}e^{-2jkL}e^{jkz}\right)e^{j\omega t}$, ou bien $\boxed{\underline{E}_t=E_0\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\left(e^{-jkz}+re^{j(\varphi-2kL+kz)}\right)e^{j\omega t}}$.

20. De l'expression précédente on déduit $E_{\max} = E_0(1+r)$ et $E_{\min} = E_0(1-r)$.

Or $TOS = 20\log\left(\dfrac{E_{\max}}{E_{\min}}\right)$, d'où $\boxed{TOS = 20\log\left(\dfrac{1+r}{1-r}\right)}$.

21. En mettant le champ total sous la forme $\underline{E_t} = E_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\left(1+re^{j(\varphi-2kL+2kz)}\right)e^{j(\omega t-kz)}$, on constate que les minima correspondent à des valeurs quantifiées de z telles que $\varphi - 2kL + 2kz_n = \pi + 2n\pi$, avec n entier, soit $z_n = L - \dfrac{1}{2k}\left(\varphi - (2n+1)\pi\right)$.

La distance d entre deux minima est $d = z_{n+1} - z_n$, d'où $d = \dfrac{\pi}{k}$.

Le minima le plus proche de l'obstacle correspond à $n = 0$, soit $z_{\min} = z_0 = L - \dfrac{1}{2k}(\varphi - \pi)$, de la forme $z_{\min} = L - \Delta z$, avec $\Delta z = -\dfrac{1}{2k}(\varphi - \pi)$, ou bien $\boxed{\varphi = \pi - 2k\Delta z}$.

22. Applications numériques :

De $TOS = 20\log\left(\dfrac{1+r}{1-r}\right)$ on tire $r = \dfrac{10^{TOS/20}-1}{10^{TOS/20}+1}$, soit $\boxed{r = 0,0017}$.

Avec $\varphi = \pi - 2k\Delta z$ on obtient $\varphi = \pi - \dfrac{2\pi\Delta z}{d}$, soit $\boxed{\varphi = -\dfrac{7\pi}{10}}$.

◊ **Exercice 7 : Amplification d'une émission Laser**

Un Laser est constitué d'un mélange gazeux hélium-néon qui permet d'amplifier une onde électromagnétique et d'obtenir en sortie un faisceau lumineux de puissance importante.
Un milieu gazeux monoatomique peu dense, linéaire, homogène et isotrope, contenant N électrons par unité de volume est soumis à une onde électromagnétique plane progressive harmonique (dans le domaine IR – UV), décrite par les deux vecteurs champ électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$: $\vec{E} = \vec{E_0} e^{i(\omega t - kz)}$ et $\vec{B} = \vec{B_0} e^{i(\omega t - kz)}$.

Le vecteur $\vec{r}(x, y, z)$ représente l'élongation moyenne de l'électron par rapport au noyau ; pour un atome au repos, la position moyenne de l'électron est ainsi confondue avec celle du proton et l'on a $\vec{r} = \vec{0}$. Le mouvement d'un électron représentatif est décrit par le modèle classique de *l'électron élastiquement lié*. En l'absence de rayonnement, l'équation du mouvement de cet électron est : $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2\vec{r} - e\left(\vec{E} + \dfrac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B}\right) - 2m\alpha\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ [1].

On suppose que les constantes α et ω_0 sont identiques pour tous les électrons, avec $\dfrac{\alpha}{\omega_0} = 5{,}0 \cdot 10^{-6}$ et $\lambda_0 = \dfrac{2\pi c}{\omega_0} = 0{,}83 \cdot 10^{-6}$ m.

1. Quelle est la signification physique du terme $-m\omega_0^2\vec{r}$?
2. Quelles sont, dans ce modèle d'oscillateur, la dimension et la signification physique de α ?
3. En les validant par des considérations d'ordre de grandeur, d'une part sur B, d'autre part sur e^{-ikz}, proposer deux simplifications de l'équation non linéaire [1]. La simplification relative au terme e^{-ikz} rend cette équation linéaire.
4. Compte tenu des simplifications de la question précédente calculer en régime permanent l'amplitude complexe $\underline{r_0}$ du vecteur $\underline{\vec{r}}(t)$ et celle du dipôle induit $\underline{\vec{p}}$. Exprimer l'amplitude $\underline{P_0}$ du vecteur polarisation $\underline{\vec{P}}$, et la susceptibilité diélectrique $\underline{\chi}$, définie par $\underline{P_0}(\omega) = \varepsilon_0 \underline{\chi}(\omega) \underline{E_0}(\omega)$.
5. Dans l'équation de Maxwell relative à un milieu non magnétique $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, $\vec{J}$ est le courant total, somme du courant de conduction et du courant de déplacement $\underline{\vec{J_d}} = \dfrac{\partial\vec{P}}{\partial t}$. Etablir alors que, en l'absence de courant de conduction, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\vec{B}} = \mu_0\varepsilon_0\left(1 + \underline{\chi}\right)\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \mu_0\varepsilon_0\underline{\varepsilon_r}\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}$. Cette équation définit la permittivité diélectrique relative $\underline{\varepsilon_r}(\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega)$. Exprimer $\varepsilon'(\omega)$ et $\varepsilon''(\omega)$. Tracer sommairement les courbes correspondantes. On posera $\omega_p^2 = \dfrac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$.
6. Dans l'équation $\mathrm{div}\left(\varepsilon_0\vec{E}\right) = \rho$, ρ représente la densité volumique de charge totale, $\rho = \rho_{libre} + \rho_{lié} = \rho_{libre} - \mathrm{div}\left(\vec{P}\right)$. Etablir que, en l'absence de charges libres, $\mathrm{div}\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) = 0$.
7. Le milieu considéré étant dépourvu de charges et de courants libres, déterminer l'équation de propagation vérifiée par le champ $\vec{E}$ dans le milieu (pour tout vecteur $\vec{V}$ suffisamment

différentiable $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}\right)=\overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\vec{V}\right)-\Delta\vec{V}$). Remarquer que, avec ce formalisme, k est complexe, $k=k'+ik''$ et déterminer la relation de dispersion. On suppose $\varepsilon'(\omega)-1<<1$ et $\varepsilon''(\omega)<<1$. Etablir, en fonction de $\varepsilon'(\omega)$, $\varepsilon''(\omega)$, ω et c (la célérité de la lumière dans le vide), des expressions simplifiées de la partie réelle k' et de la partie imaginaire k'' de k. Identifier le terme de dispersion et celui d'absorption. Comment introduire la notion d'indice complexe ?

Le modèle de l'électron élastiquement lié ne rend pas compte de l'ensemble des phénomènes observés ; il faut utiliser la mécanique quantique et la physique statistique … dont aucune connaissance n'est nécessaire pour traiter ce qui suit. Admettons seulement que : les atomes peuvent passer d'un état d'énergie E_1 à un état d'énergie supérieure E_2 par absorption d'un photon de pulsation $\omega_0=2\pi\frac{E_2-E_1}{h}$. Lorsque le milieu est dit en équilibre thermique à la température T, les nombres d'atomes par unité de volume N_1 et N_2 d'énergies respectives E_1 et E_2 satisfont la relation de Boltzmann $\frac{N_2}{N_1}=e^{-\left(\frac{E_2-E_1}{k_BT}\right)}$. On prendra $T=300$ K.

8. L'expression quantique complexe de ε_r est $\varepsilon_r(\omega)=1+\frac{e^2}{2m\varepsilon_0}\frac{\left(N_1-N_2\right)f}{\omega_0\left(\omega_0-\omega+i\alpha\right)}$, où f est un réel positif nommé *force d'oscillateur*. Quelle est la dimension de f ?
9. Quel est, à l'équilibre thermique, le signe de N_1-N_2 ? Justifier, sans calculs détaillés, que dans ce cas le milieu est absorbant.
10. Dans un laser, on réalise, en régime permanent, l'inégalité $N_2>N_1$; justifier le nom d'inversion *de population* donné à cette situation. Que se passe-t-il lors de la propagation d'une onde électromagnétique dans ce milieu ? LASER est l'acronyme de la traduction anglaise de « Amplification de lumière par émission stimulée de radiation » ; justifier cette appellation.
11. Quelles caractéristiques présentent les lasers par rapport aux autres sources de lumière ? Citez des utilisations du laser autres que la réalisation d'expériences au lycée.

Solution

1. L'équation [1] résulte de l'application du principe fondamental de la dynamique à l'électron *élastiquement lié*, le terme $-m\omega_0^2\vec{r}$ correspond à la $\boxed{\text{force de rappel élastique}}$ qui ramène l'électron vers sa position d'équilibre.

2. D'après l'équation [1] les termes $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ et $2m\alpha\frac{d\vec{r}}{dt}$ ont la même dimension, celle d'une accélération, on en déduit que $\boxed{\alpha \text{ est l'inverse d'un temps}}$.

Le terme $-2m\alpha\frac{d\vec{r}}{dt}$ correspond à une force de frottement visqueux, cette force modélise l'interaction avec les autres électrons qui freine l'électron étudié, comme s'il était en mouvement dans un fluide visqueux.

$\boxed{\alpha \text{ s'interprète comme le coefficient de frottement visqueux}}$.

3. Dans l'équation [1] le terme $-e\left(\vec{E}+\dfrac{d\vec{r}}{dt}\wedge\vec{B}\right)$ correspond à la force électromagnétique de Lorentz : $\overrightarrow{F_{em}}=-e\vec{E}-e\vec{v}\wedge\vec{B}$. La vitesse des électrons autour du noyau est de l'ordre de $v\approx\dfrac{c}{100}$ (électrons non relativistes), et puisque $B\approx\dfrac{E}{c}$ (d'après la structure d'onde plane), on néglige la force magnétique $-e\vec{v}\wedge\vec{B}$ devant la force électrique $-e\vec{E}$ ($\left\|\vec{v}\wedge\vec{B}\right\|\approx\dfrac{1}{100}\left\|\vec{E}\right\|$).

Examinons maintenant le terme e^{-ikz} : $kz\approx 2\pi\dfrac{z}{\lambda}$ avec $z\approx 1\,\text{nm}$ (taille d'un atome) et $10^{-8}\text{ m}<\lambda<10^{-3}\text{ m}$ dans le domaine IR-UV, donc $kz<6{,}28\cdot10^{-2}<<1$. Le champ électrique s'écrit alors $\vec{E}=\overrightarrow{E_0}e^{i\omega t}$. L'équation [1] devient alors : $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-m\omega_0^2\vec{r}-e\vec{E}-2m\alpha\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, ou bien $\boxed{m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}+2m\alpha\dfrac{d\vec{r}}{dt}+m\omega_0^2\vec{r}=-e\overrightarrow{E_0}e^{i\omega t}}$, elle est maintenant linéaire.

4. On cherche une solution harmonique de la forme : $\underline{\vec{r}}(t)=\underline{\vec{r_0}}e^{i\omega t}$ pour l'équation à variable complexe $m\dfrac{d^2\underline{\vec{r}}}{dt^2}+2m\alpha\dfrac{d\underline{\vec{r}}}{dt}+m\omega_0^2\underline{\vec{r}}=-e\overrightarrow{E_0}e^{i\omega t}$. En utilisant $\dfrac{d\underline{\vec{r}}}{dt}=i\omega\underline{\vec{r}}$ et $m\dfrac{d^2\underline{\vec{r}}}{dt^2}=-\omega^2\underline{\vec{r}}$, on obtient $m\left(\omega_0^2-\omega^2+2i\omega\alpha\right)\underline{\vec{r_0}}=-e\overrightarrow{E_0}$. On en déduit $\boxed{\underline{r_0}=-\dfrac{e}{m\left(\omega_0^2-\omega^2+2i\omega\alpha\right)}\underline{E_0}}$.

Le moment dipolaire du dipôle induit est $\vec{p}=-e\vec{r}$, donc $\underline{p_0}=-e\underline{r_0}$, soit

$$\boxed{\underline{p_0}=\frac{e^2}{m\left(\omega_0^2-\omega^2+2i\omega\alpha\right)}\underline{E_0}}.$$

Le vecteur polarisation est $\vec{P}=N\vec{p}$, donc $\underline{P_0}=N\underline{p_0}$, soit $\boxed{\underline{P_0}=\dfrac{Ne^2}{m\left(\omega_0^2-\omega^2+2i\omega\alpha\right)}\underline{E_0}}$.

De la définition de la susceptibilité diélectrique $\underline{\chi}$: $\underline{P_0}(\omega)=\varepsilon_0\underline{\chi}(\omega)\underline{E_0}(\omega)$, on déduit son expression dans ce modèle : $\boxed{\underline{\chi}=\dfrac{Ne^2}{m\varepsilon_0\left(\omega_0^2-\omega^2+2i\omega\alpha\right)}}$.

5. En l'absence de courant de conduction : $\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{B}}=\mu_0\underline{\overrightarrow{J_d}}+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}$.

Or $\underline{\overrightarrow{J_d}}=\dfrac{\partial\underline{\vec{P}}}{\partial t}$ et $\underline{\vec{P}}=\varepsilon_0\underline{\chi}\underline{\vec{E}}$, soit $\underline{\overrightarrow{J_d}}=\varepsilon_0\underline{\chi}\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}$.

On a donc $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{B}}=\mu_0\varepsilon_0\left(1+\underline{\chi}\right)\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}=\mu_0\varepsilon_0\underline{\varepsilon_r}\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}}$ en posant $\boxed{\underline{\varepsilon_r}=1+\underline{\chi}}$.

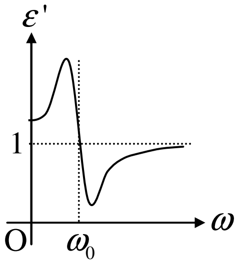
On en déduit $\underline{\varepsilon_r}=1+\dfrac{Ne^2}{m\varepsilon_0\left(\omega_0^2-\omega^2+2i\omega\alpha\right)}=1+\dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2+2i\omega\alpha}$.

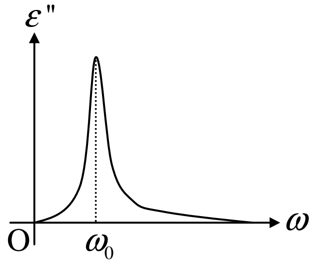
En développant : $\underline{\varepsilon_r}=1+\dfrac{\omega_p^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\omega\alpha)^2}-i\dfrac{2\omega_p^2\alpha\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\omega\alpha)^2}$.

En posant $\underline{\varepsilon_r} = \varepsilon' - i\varepsilon''$ et en identifiant parties réelles et imaginaires on obtient :

$\boxed{\varepsilon'(\omega) = 1 + \dfrac{\omega_p^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\omega\alpha)^2}}$ et $\boxed{\varepsilon''(\omega) = \dfrac{2\omega_p^2\alpha\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\omega\alpha)^2}}$.

Les courbes repésentatives de $\varepsilon'(\omega)$ et $\varepsilon''(\omega)$ sont les suivantes :





6. D'après l'énoncé, $\mathrm{div}\left(\varepsilon_0 \vec{E}\right) = \rho$ avec $\rho = \rho_{libre} + \rho_{lié} = \rho_{libre} - \mathrm{div}\left(\vec{P}\right)$, on en déduit $\mathrm{div}\left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_{libre}$. L'équation précédente s'écrit donc, en l'absence de charges libres $\left(\rho_{libre} = 0\right)$, $\boxed{\mathrm{div}\left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = 0}$.

7. Pour déterminer l'équation de propagation vérifiée par le champ $\vec{E}$ dans le milieu, utilisons la propriété d'analyse vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\vec{E}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\underline{\vec{E}}\right) - \Delta\underline{\vec{E}}$. Or, d'après l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = -i\omega\underline{\vec{B}}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\vec{B}} = \mu_0\varepsilon_0\underline{\varepsilon_r}\dfrac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = \mu_0\varepsilon_0\underline{\varepsilon_r}i\omega\underline{\vec{E}}$.

De plus $\mathrm{div}\left(\varepsilon_0\underline{\vec{E}} + \underline{\vec{P}}\right) = 0$ avec $\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0\underline{\chi}\underline{\vec{E}}$, soit $\varepsilon_0\left(1 + \underline{\chi}\right)\mathrm{div}\underline{\vec{E}} = 0$ et $\mathrm{div}\underline{\vec{E}} = 0$, on obtient finalement : $\boxed{\Delta\underline{\vec{E}} = -\omega^2\mu_0\varepsilon_0\underline{\varepsilon_r}\underline{\vec{E}}}$.

Pour déterminer la relation de dispersion, on regarde la solution d'onde plane progressive harmonique $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}e^{i(\omega t - kz)}$, telle que $\Delta\underline{\vec{E}} = -k^2\underline{\vec{E}}$;

On en déduit par identification $\boxed{k^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0\underline{\varepsilon_r}}$: la relation de dispersion.

Puisque $\underline{\varepsilon_r}$ est complexe, alors k aussi est complexe, on pose $k = k' + ik''$.

Remarque : $\mu_0\varepsilon_0 = \dfrac{1}{c^2}$ et la relation de dispersion s'écrit $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{\varepsilon_r}$.

On peut alors écrire $k = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\underline{\varepsilon_r}}$, avec $\underline{\varepsilon_r} = \varepsilon' - i\varepsilon''$. Or $\varepsilon' - 1 = u << 1$ et $\varepsilon'' << 1$, d'où $\sqrt{\underline{\varepsilon_r}} = \sqrt{\varepsilon' - i\varepsilon''} = \sqrt{1 + u - i\varepsilon''}$. En effectuant un développement limité au 1^er^ ordre : $\sqrt{\underline{\varepsilon_r}} \approx 1 + \dfrac{u - i\varepsilon''}{2}$, soit $\sqrt{\underline{\varepsilon_r}} \approx 1 + \dfrac{\varepsilon' - 1 - i\varepsilon''}{2} = \dfrac{\varepsilon' + 1}{2} - i\dfrac{\varepsilon''}{2}$. D'où $k = \dfrac{\omega}{2c}\left(\varepsilon' + 1\right) - i\dfrac{\omega\varepsilon''}{2c}$, et en identifiant avec $k = k' + ik''$ on obtient : $\boxed{k' = \dfrac{\omega}{2c}\left(\varepsilon' + 1\right)}$ et $\boxed{k'' = -\dfrac{\omega\varepsilon''}{2c}}$.

Le champ électrique de l'onde s'écrit $\vec{E} = \vec{E_0}e^{i(\omega t - kz)}$ avec $k = k' + ik''$, soit $\vec{E} = \vec{E_0}e^{k''z}e^{i(\omega t - k'z)}$.

Le terme $e^{i(\omega t - k'z)}$ avec $k'(\omega)$ non linéaire montre que la propagation s'effectue avec dispersion.

Le terme $e^{k''z}$ est le terme d'absorption.

On définit l'indice optique d'un milieu via $n=\frac{c}{v}$ avec c la vitesse de la lumière dans le vide et v la vitesse de la lumière dans le milieu.

Pour un milieu non dispersif $v=v_\varphi=v_g=\frac{\omega}{k}=c$, soit $n=k\frac{c}{\omega}$, ou bien $k=\frac{\omega}{c}n$.

Pour un milieu dispersif, la relation de dispersion $k^2=\frac{\omega^2}{c^2}\underline{\varepsilon_r}$ montre que l'on peut définir un indice complexe $\underline{n}$ tel que $\boxed{\underline{n}^2=\underline{\varepsilon_r}}$.

8. Comparons l'expression quantique $\varepsilon_r(\omega)=1+\frac{e^2}{2m\varepsilon_0}\frac{(N_1-N_2)f}{\omega_0(\omega_0-\omega+i\alpha)}$ et l'expression classique $\varepsilon_r(\omega)=1+\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0(\omega_0^2-\omega^2+2i\omega\alpha)}$, on en déduit que $\boxed{f\text{ est sans dimension}}$.

9. La relation de Boltzmann $\frac{N_2}{N_1}=e^{-\left(\frac{E_2-E_1}{k_BT}\right)}$ avec $E_2>E_1$ est telle que $\frac{E_2-E_1}{k_BT}>0$ et $e^{-\left(\frac{E_2-E_1}{k_BT}\right)}<1$, d'où $\frac{N_2}{N_1}<1$ et $\boxed{N_1-N_2>0}$.

Développons :

$$\varepsilon_r(\omega)=1+\frac{e^2}{2m\varepsilon_0}\frac{(N_1-N_2)f}{\omega_0(\omega_0-\omega+i\alpha)}=1+\frac{e^2(N_1-N_2)f(\omega_0-\omega)}{2m\varepsilon_0\omega_0\left((\omega_0-\omega)^2+\alpha^2\right)}-i\frac{e^2(N_1-N_2)f\alpha}{2m\varepsilon_0\omega_0\left((\omega_0-\omega)^2+\alpha^2\right)}.$$

Puisque $\underline{\varepsilon_r}=\varepsilon'-i\varepsilon''$, on en déduit $\varepsilon'=\frac{e^2(N_1-N_2)f\alpha}{2m\varepsilon_0\omega_0\left((\omega_0-\omega)^2+\alpha^2\right)}$, et comme $N_1-N_2>0$ alors $\varepsilon''>0$. Or $k''=-\frac{\omega\varepsilon''}{2c}$, donc $\boxed{k''<0\text{ : le milieu est absorbant}}$.

10. A l'équilibre thermique $N_1>N_2$, c'est-à-dire qu'il y a plus d'atomes d'énergie basse E_1 que d'atomes d'énergie E_2. Lorsqu'on réalise $N_2>N_1$ dans un Laser, il y a moins d'atomes d'énergie basse E_1 que d'atomes d'énergie E_2, on parle d'inversion de population.

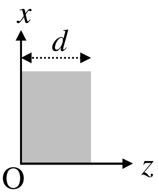
Lors de la propagation d'une onde électromagnétique dans le milieu, d'après la question 9, on a dans ce cas $k''>0$ et le terme $e^{k''z}$ augmente au cours de la propagation, il n'y a plus d'absorption mais une amplification de l'amplitude de l'onde, ce qui justifie le nom donné au LASER.

11. Le LASER se distingue des autres sources de lumière par : une puissance lumineuse émise beaucoup plus importante, une lumière quasi monochromatique, et un faisceau très fin (sans phénomène de diffraction).

Le LASER est utilisé par exemple en découpe de matériau, en chirurgie (guérison de la myopie), en restauration de vieilles pierres (pour les ravalements de façades des monuments historiques), épilation, guidage pour arme à feu, mesure de surface (utilisé dans l'immobilier et dans le bâtiment) …

◊ Exercice 8 : Lame polarisante

Une lame diélectrique à faces planes et parallèles, d'épaisseur d, est placée dans l'air, assimilé au vide. L'une des faces, représentée par le plan $x\mathrm{O}y$, est abordée par une onde électromagnétique transversale dont le champ électrique s'écrit :
$\vec{E} = E_x(x,y,z,t)\overrightarrow{u_x} + E_y(x,y,z,t)\overrightarrow{u_y}$.



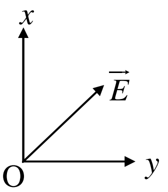
Le diélectrique est homogène, linéaire, transparent, non magnétique, dépourvu de charges et de courants libres, mais il présente une anisotropie. Cette anisotropie se manifeste par une polarisation du diélectrique différente suivant les axes x et y. En régime harmonique, cela se traduit par les relations suivantes entre les composantes du vecteur polarisation $\underline{\vec{P}}$ et du vecteur champ électrique $\underline{\vec{E}}$: $\underline{P_x} = \varepsilon_0\left(\varepsilon_{rx}-1\right)\underline{E_x}$ et $\underline{P_y} = \varepsilon_0\left(\varepsilon_{ry}-1\right)\underline{E_y}$.

On pose $\varepsilon_1 = \varepsilon_0\varepsilon_{rx}$ et $\varepsilon_2 = \varepsilon_0\varepsilon_{ry}$, avec $\varepsilon_{ry} > \varepsilon_{rx}$.

Rappels de cours : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\vec{B}} = \mu_0\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\underline{\vec{E}}+\underline{\vec{P}}\right)$ et $\mathrm{div}\left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right)=0$.

1. Etablir une équation différentielle faisant intervenir les vecteurs $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{P}}$, et eux seulement ; attention, cette équation fait intervenir $\mathrm{div}\underline{\vec{E}}$, qui n'est pas nul.
2. Etablir la relation entre $\dfrac{\partial \underline{E_x}}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial \underline{E_y}}{\partial y}$, qui fait intervenir ε_1 et ε_2. En déduire que l'équation de propagation vérifiée par $\underline{E_x}$ est $\underline{\Delta E_x} - \left(1-\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\dfrac{\partial^2 \underline{E_x}}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_1\dfrac{\partial^2 \underline{E_x}}{\partial t^2}$.
3. Ecrire l'équation de propagation vérifiée par $\underline{E_y}$. Que devient cette équation si le diélectrique est isotrope ?
4. On considère à partir d'ici que les composantes du champ électrique s'écrivent $\underline{E_x}(z,t) = \underline{E_{0x}}e^{i\omega\left(t-\frac{z}{c_1}\right)}$ et $\underline{E_y}(z,t) = \underline{E_{0y}}e^{i\omega\left(t-\frac{z}{c_2}\right)}$. Les amplitudes complexes $\underline{E_{0x}}$ et $\underline{E_{0y}}$ sont constantes. En utilisant les résultats de la question précédente, exprimer les constantes c_1 et c_2 en fonction des paramètres du milieu.

Une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement suivant la bissectrice intérieure des axes $(\mathrm{O}x,\mathrm{O}y)$ aborde le diélectrique sur sa face $z=0$, en incidence normale. On néglige toute réflexion de l'onde ; cette dernière est donc intégralement transmise. La valeur maximale de la norme du champ électrique de l'onde incidente est notée E_0.



5. Donner les expressions des composantes $\underline{E_x}$ et $\underline{E_y}$ du champ dans le plan $z=0$.
6. Exprimer, pour $z=d$, le déphasage entre les composantes du champ dans le diélectrique. Quelle valeur minimale de d (notée $d_{\min}$) faut-il utiliser si l'on veut obtenir une onde

polarisée circulairement à la sortie du diélectrique ? On pose $c_1 = c_0 + \frac{\delta C}{2} = \frac{C}{n_1}$ et $c_2 = c_0 - \frac{\delta C}{2} = \frac{C}{n_2}$ où $\delta C << c_0$, et $n_1 = n_0 - \frac{\delta n}{2}$. Calculer $\frac{\delta n}{n_0}$ pour $d_{\min} = 5$ mm et $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = 5\cdot 10^{-6}$ m (avec $c = \frac{C}{n_0}$).

7. Citer des applications possibles d'un tel dispositif.

Solution

1. On utilise $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{E}}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\underline{\vec{E}}\right) - \Delta\underline{\vec{E}}$, avec $\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{B}} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \underline{\vec{E}} + \underline{\vec{P}}\right)$.

On en déduit $\boxed{\Delta\underline{\vec{E}} - \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\underline{\vec{E}}\right) = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon_0 \underline{\vec{E}} + \underline{\vec{P}}\right)}$.

2. On pose $\underline{\vec{E}} = \underline{E_x}\overrightarrow{u_x} + \underline{E_y}\overrightarrow{u_y}$ et $\underline{\vec{P}} = \underline{P_x}\overrightarrow{u_x} + \underline{P_y}\overrightarrow{u_y}$.

Avec $\underline{P_x} = \varepsilon_0(\varepsilon_{rx} - 1)\underline{E_x} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\underline{E_x}$ et $\underline{P_y} = \varepsilon_0(\varepsilon_{ry} - 1)\underline{E_y} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\underline{E_y}$, on obtient :

$\varepsilon_0\underline{\vec{E}} + \underline{\vec{P}} = \left(\varepsilon_0\underline{E_x} + \underline{P_x}\right)\overrightarrow{u_x} + \left(\varepsilon_0\underline{E_y} + \underline{P_y}\right)\overrightarrow{u_y}$, soit $\varepsilon_0\underline{\vec{E}} + \underline{\vec{P}} = \varepsilon_1\underline{E_x}\overrightarrow{u_x} + \varepsilon_2\underline{E_y}\overrightarrow{u_y}$.

L'équation $\text{div}\left(\varepsilon_0\underline{\vec{E}} + \underline{\vec{P}}\right) = 0$ s'écrit alors $\boxed{\varepsilon_1 \frac{\partial \underline{E_x}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial \underline{E_y}}{\partial y} = 0}$.

Reprenons l'équation de propagation : $\Delta\underline{\vec{E}} - \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\underline{\vec{E}}\right) = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon_0 \underline{\vec{E}} + \underline{\vec{P}}\right)$ que l'on projette sur $\overrightarrow{u_x}$: $\Delta\underline{E_x} - \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\underline{\vec{E}}\right)\cdot\overrightarrow{u_x} = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon_0\underline{E_x} + \underline{P_x}\right)$.

Or $\text{div}\underline{\vec{E}} = \frac{\partial \underline{E_x}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E_y}}{\partial y}$ et $\frac{\partial \underline{E_y}}{\partial y} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\partial \underline{E_x}}{\partial x}$.

Donc $\text{div}\underline{\vec{E}} = \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\frac{\partial \underline{E_x}}{\partial x}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\underline{\vec{E}}\right)\cdot\overrightarrow{u_x} = \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\frac{\partial^2 \underline{E_x}}{\partial x^2}$.

De plus $\varepsilon_0\underline{E_x} + \underline{P_x} = \varepsilon_1\underline{E_x}$, on a donc finalement $\boxed{\Delta\underline{E_x} - \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\frac{\partial^2 \underline{E_x}}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_1 \frac{\partial^2 \underline{E_x}}{\partial t^2}}$.

3. Reprenons l'équation de propagation : $\Delta\underline{\vec{E}} - \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\underline{\vec{E}}\right) = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon_0 \underline{\vec{E}} + \underline{\vec{P}}\right)$ que l'on projette sur $\overrightarrow{u_y}$: $\Delta\underline{E_y} - \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\underline{\vec{E}}\right)\cdot\overrightarrow{u_y} = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon_0\underline{E_y} + \underline{P_y}\right)$.

Or $\text{div}\underline{\vec{E}} = \frac{\partial \underline{E_x}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E_y}}{\partial y}$ et $\frac{\partial \underline{E_x}}{\partial x} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\partial \underline{E_y}}{\partial y}$.

Donc $\text{div}\underline{\vec{E}} = \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\frac{\partial \underline{E_y}}{\partial y}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\underline{\vec{E}}\right)\cdot\overrightarrow{u_y} = \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\frac{\partial^2 \underline{E_y}}{\partial y^2}$.

De plus $\varepsilon_0 \underline{E_y} + \underline{P_y} = \varepsilon_2 \underline{E_y}$, on a donc finalement $\boxed{\Delta\underline{E_y} - \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\frac{\partial^2 \underline{E_y}}{\partial y^2} = \mu_0 \varepsilon_2 \frac{\partial^2 \underline{E_y}}{\partial t^2}}$.

Si le milieu diélectrique est isotrope alors $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ et les équations de propagation deviennent identiques : $\Delta\underline{E_x} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \underline{E_x}}{\partial t^2}$ et $\Delta\underline{E_y} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \underline{E_y}}{\partial t^2}$, se sont des équations de d'Alembert.

4. Ici $\underline{E_x}(z,t) = \underline{E_{0x}} e^{i\omega\left(t - \frac{z}{c_1}\right)}$ et $\underline{E_y}(z,t) = \underline{E_{0y}} e^{i\omega\left(t - \frac{z}{c_2}\right)}$ ne dépendent que de z de sorte que les équations de propagation s'écrivent $\Delta\underline{E_x} = \mu_0 \varepsilon_1 \frac{\partial^2 \underline{E_x}}{\partial t^2}$ et $\Delta\underline{E_y} = \mu_0 \varepsilon_2 \frac{\partial^2 \underline{E_y}}{\partial t^2}$;

Or $\Delta\underline{E_x} = -\left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 \underline{E_x}$ et $\frac{\partial^2 \underline{E_x}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{E_x}$, d'où $-\left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 \underline{E_x} = \mu_0 \varepsilon_1 \left(-\omega^2\right) \underline{E_x}$ et $\boxed{c_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1}}}$.

De même : $\Delta\underline{E_y} = -\left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2 \underline{E_y}$ et $\frac{\partial^2 \underline{E_y}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{E_y}$, d'où $-\left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2 \underline{E_y} = \mu_0 \varepsilon_2 \left(-\omega^2\right) \underline{E_y}$ et $\boxed{c_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_2}}}$.

5. Puisque l'onde est polarisée rectilignement suivant la bissectrice des axes $(\mathrm{O}x, \mathrm{O}y)$, on peut écrire $\underline{E_{0x}} = \underline{E_{0y}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$ (car $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$), on en déduit, dans le plan $z = 0$, $\boxed{\underline{E_x}(0,t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\omega t}}$ et $\boxed{\underline{E_y}(0,t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\omega t}}$.

6. En $z = d$: $\underline{E_x}(d,t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\omega\left(t - \frac{d}{c_1}\right)}$ et $\underline{E_y}(d,t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\omega\left(t - \frac{d}{c_2}\right)}$. Le déphasage entre ces deux composantes s'écrit alors (avec $\underline{E_x}$ comme origine des phases) : $\varphi = \omega\left(t - \frac{d}{c_2}\right) - \omega\left(t - \frac{d}{c_1}\right)$, soit $\boxed{\varphi = \omega d\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)}$.

La polarisation circulaire est possible car E_x et E_y ont même amplitude.

L'onde est polarisée circulairement si $\varphi = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ (polarisation circulaire droite) ou $\varphi = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ (polarisation circulaire gauche).

Avec $c_1 = \frac{C}{n_1}$ et $c_2 = \frac{C}{n_2}$, on a $\varphi = \frac{\omega d}{C}(n_1 - n_2)$, avec $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{rx}}$ et $n_2 = \sqrt{\varepsilon_{ry}}$.

Comme $\varepsilon_{ry} > \varepsilon_{rx}$, on a $n_2 > n_1$ et $\varphi < 0$.

La valeur minimale de d sera donc obtenu pour $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, soit $-\frac{\pi}{2} = \frac{\omega d_{\min}}{C}(n_1 - n_2)$.

Or $n_1 - n_2 = -\delta n$, d'où $d_{\min} = \frac{\pi C}{2\omega\delta n}$.

D'autre part $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega} = \dfrac{2\pi C}{\omega n_0}$, soit $\dfrac{\pi C}{\omega} = n_0 \dfrac{\lambda}{2}$ et $\boxed{d_{\min} = \dfrac{n_0}{\delta n} \dfrac{\lambda}{4}}$.

Remarque : la lame est qualifiée de « quart d'onde » à cause du terme $\dfrac{\lambda}{4}$.

On en déduit $\boxed{\dfrac{\delta n}{n_0} = \dfrac{\lambda}{4 d_{\min}}}$, soit $\boxed{\dfrac{\delta n}{n_0} = 0,25 \cdot 10^{-3} = 0,025\ \%}$ $\Rightarrow$ n_1 et n_2 sont très proches.

Exemple : le mica : $n_1 = 1,5936$ et $n_2 = 1,5977 \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{n_2 - n_1}{\dfrac{n_1 + n_2}{2}} \times 100 = 0,26\ \%$.

7. Ces lames sont utilisées pour transformer une onde polarisée rectilignement en onde polarisée circulairement.