




*TRAVAUX DIRIGES DE MECANIQUE DU SOLIDE PC/PC**

Ce TD comporte deux séries d'exercices :

- 1) Des exercices d'applications directes du cours
- 2) Des exercices d'entraînement à l'écrit des concours (issus des annales X-ENS, Mines-Ponts, Centrale-Supélec et CCP)

Dans la première série vous trouverez, pour chacune des parties « cinématique du solide » et « dynamique du solide » donnant :

-  Conseils
-  Méthodes
-  Erreurs à éviter
- A Indications

afin de vous permettre de vous aiguiller dans la résolution d'un exercice et d'acquérir les bons réflexes pour aborder une situation nouvelle.

CNED – FORMATION CPGE

Sommaire

1^{ère} série :

Remarques générales pour la cinématique du solide	page 3
Exercice 1 : Roulement d'un glaçon sur un igloo.....	page 5
Exercice 2 : Modélisation d'un vélo.....	page 6
Remarques générales pour la dynamique du solide.....	page 8
Exercice 3 : Direction et rôle de la force de frottement de glissement.....	page 10
Exercice 4 : Théorème de la résultante dynamique (TRD).....	page 11
Exercice 5 : Théorème du moment cinétique (TMC).....	page 12
Exercice 6 : Théorème de l'énergie mécanique (TEM).....	page 13

2^{ème} série :

Exercice 7 : Modélisation du patinage au démarrage d'un véhicule.....	page 15
Exercice 8 : Expérience avec une craie.....	page 17
Exercice 9 : Mesure d'un moment d'inertie.....	page 19
Exercice 10 : Antenne.....	page 21
Exercice 11 : Oscillations d'une barre sur des rails.....	page 23
Exercice 12 : Chute d'une échelle.....	page 26
Exercice 13 : Mouvement d'une sphère dans un rail fixe.....	page 28
Exercice 14 : Mouvement d'une sphère dans un rail suspendu.....	page 31
Exercice 15 : Chute d'une tartine beurrée.....	page 37
Exercice 16 : Etude d'un accélérographe mécanique	page 41

1^{ère} série : exercices d'applications directes du cours

◇ Remarques générales pour la cinématique du solide

 Conseils :

- Faire un schéma de la situation.
- Définir un repère adapté au mouvement si l'énoncé ne le donne pas.
- Les schémas sont toujours plans, faire attention à l'orientation du troisième vecteur : il faut que la base soit directe.

 Méthodes :

- Choix du repère :

On choisit la base qui donne les expressions les plus simples des éléments cinématiques du centre d'inertie G du solide : vecteurs position \overrightarrow{OG} , vitesse $\overrightarrow{v_G}$ et accélération $\overrightarrow{a_G}$.

Exprimer aussi le vecteur rotation du solide $\overrightarrow{\Omega}$ dans cette base.

- Calcul des moments cinétiques et énergies cinétiques :

Il faut appliquer les théorèmes de Koenig en distinguant les cas suivants :

- solide en translation : $\overrightarrow{\sigma_O} = \overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{v_G}$ et $E_c = \frac{1}{2}mv_G^2$;

- solide en rotation autour d'un axe fixe Δ passant par le point O :

$$\overrightarrow{\sigma_O} = J_{\Delta}\overrightarrow{\Omega} \text{ et } E_c = \frac{1}{2}J_{\Delta}\Omega^2 ;$$

- solide en rotation autour d'un axe gardant une direction fixe :

$$\overrightarrow{\sigma_O} = \overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{\sigma}^* \text{ et } E_c = \frac{1}{2}mv_G^2 + E_c^*$$

* désigne le fait que les grandeurs sont évaluées dans le référentiel barycentrique :

$$\overrightarrow{\sigma}^* = J_G\overrightarrow{\Omega} \text{ et } E_c^* = \frac{1}{2}J_G\Omega^2, \text{ où } J_G \text{ est le moment d'inertie du solide par rapport à}$$

un axe passant par G

- Utilisation de la condition de roulement sans glissement :

- il faut écrire la nullité de la vitesse de glissement $\overrightarrow{v_g}$ en considérant que le point de contact des deux solides a la même vitesse dans les référentiels liés à chacun des solides ;
- chacune des deux vitesses du point de contact se déduit de l'application de la relation de Varignon ;
- si le support est fixe, la vitesse du point de contact appartenant au support est nulle (cas courant).

Erreurs à éviter :

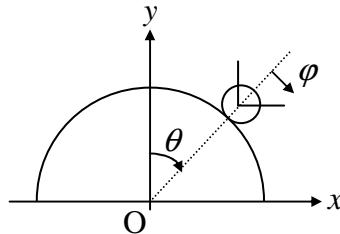
- La relation de Varignon $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \wedge \vec{AB}$ ne s'applique que pour deux points A et B d'un même solide.
- S'il y a deux bases, cartésiennes $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et cylindriques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, il se peut que se soit la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, -\vec{u}_z)$ qui soit directe.

A Indications :

- Le vecteur vitesse d'un point s'obtient :
 - soit en dérivant par rapport au temps son vecteur position ;
 - soit en utilisant la relation de Varignon si on connaît déjà la vitesse d'un point.
- La direction d'un vecteur rotation s'obtient avec la règle des doigts de la main droite (ou la règle du tire-bouchon), attention au signe !
- Le vecteur orthoradial \vec{u}_θ de la base cylindrique est toujours orienté dans le sens des θ croissants !

◇ Exercice 1 : Roulement d'un glaçon sur un igloo

On considère un glaçon sphérique (de centre de masse G), de rayon r , en mouvement dans le référentiel terrestre \mathcal{R} . Il roule sur un igloo sphérique de rayon R . On note θ l'angle entre la verticale Oy et la droite OG et φ l'angle décrivant la rotation du glaçon dans son référentiel barycentrique.



1. L'igloo est fixe dans \mathcal{R} , par quelle égalité vectorielle se traduit la condition de roulement sans glissement ? L'écrire en projection sur une base convenablement choisie que l'on indiquera et en déduire $\dot{\varphi}$ en fonction de $\dot{\theta}$, r et R .
2. L'igloo est mobile dans \mathcal{R} et se déplace à la vitesse $\dot{x}\vec{u}_x$ sur le sol horizontal, comment est modifiée la condition de roulement sans glissement ?

Solution

1. La condition de roulement sans glissement s'écrit en annulant la vitesse de glissement :

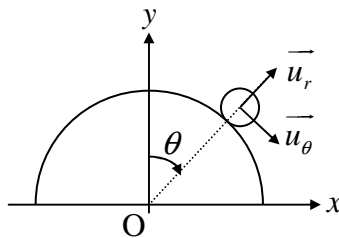
$$\boxed{\vec{v}_g = \vec{0}}$$

La vitesse de glissement du glaçon sur l'igloo s'écrit en considérant le point de contact I entre le glaçon et l'igloo : $\vec{v}_g = \vec{v}_{I \in \text{glaçon}} - \vec{v}_{I \in \text{igloo}}$.

$\vec{v}_{I \in \text{igloo}} = \vec{0}$ car l'igloo est fixe dans \mathcal{R} ,

$\vec{v}_{I \in \text{glaçon}}$ s'obtient par la relation de Varignon : $\vec{v}_{I \in \text{glaçon}} = \vec{v}_G + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI}$

On choisit la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, -\vec{u}_z)$, avec \vec{u}_z vers nous, pour repérer G :



Dans cette base $\vec{v}_G = \frac{d\vec{OG}}{dt} = \frac{d((R+r)\vec{u}_r)}{dt} = (R+r)\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. De plus $\vec{\Omega} = -\dot{\varphi}\vec{u}_z$ et $\vec{GI} = -r\vec{u}_r$.

On en déduit $\vec{v}_g = ((R+r)\dot{\theta} - r\dot{\varphi})\vec{u}_\theta$. La condition de roulement sans glissement s'écrit alors

$$\boxed{(R+r)\dot{\theta} - r\dot{\varphi} = 0}, \text{ d'où } \dot{\varphi} = \left(\frac{R+r}{r}\right)\dot{\theta}.$$

2. Dans ce cas $\vec{v}_{I \in \text{igloo}} = \dot{x}\vec{u}_x = \dot{x}(\sin\theta\vec{u}_r + \cos\theta\vec{u}_\theta)$.

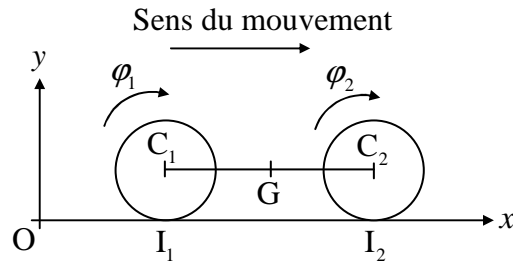
On a alors $\vec{v}_g = ((R+r)\dot{\theta} - r\dot{\varphi} - \dot{x}\cos\theta)\vec{u}_\theta - \dot{x}\sin\theta\vec{u}_r$, d'où $\boxed{(R+r)\dot{\theta} - r\dot{\varphi} - \dot{x}\cos\theta = 0}$.

◇ Exercice 2 : Modélisation d'un vélo

On modélise un vélo de la façon suivante :

Le cadre : une barre C_1C_2 homogène, de masse M et de longueur ℓ , les extrémités C_1 et C_2 sont les centres des roues. Les roues : deux disques identiques, de masse m , de rayon R et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mR^2$ par rapport à leur axe de révolution (passant par C_1 et C_2).

On repère le mouvement du système par trois variables : l'abscisse x du centre d'inertie G de l'ensemble, et les angles φ_1 et φ_2 qui caractérisent la rotation des roues.



- Déterminer les expressions des vitesses des points G , C_1 , C_2 , I_1 et I_2 , ainsi que les vecteurs rotation $\overline{\Omega}_1$ et $\overline{\Omega}_2$ de chacune des roues.
- En déduire les expressions du moment cinétique (par rapport au point O) et de l'énergie cinétique du vélo dans le référentiel du sol.
- Comment sont réduites ces expressions si les deux roues roulent sans glisser ?

Solution

$$1. \overline{OG} = x\overline{u}_x + R\overline{u}_y \Rightarrow \boxed{\overline{v}_G = \dot{x}\overline{u}_x}, \quad \overline{OC}_1 = \left(x - \frac{\ell}{2}\right)\overline{u}_x + R\overline{u}_y \Rightarrow \boxed{\overline{v}_{C_1} = \dot{x}\overline{u}_x}, \quad \text{de même } \boxed{\overline{v}_{C_2} = \dot{x}\overline{u}_x}.$$

→ tous les points de la barre C_1C_2 ont même vitesse car la barre est en translation rectiligne.

Les vitesses des points de contact I_1 et I_2 des roues avec le sol s'expriment à l'aide de la formule de Varignon :

$$\overline{v}_{I_1} = \overline{v}_{C_1} + \overline{\Omega}_1 \wedge \overline{C_1I_1} = \dot{x}\overline{u}_x + (-\dot{\varphi}_1\overline{u}_z) \wedge (-R\overline{u}_y) \Rightarrow \boxed{\overline{v}_{I_1} = (\dot{x} - R\dot{\varphi}_1)\overline{u}_x}.$$

$$\text{De même : } \boxed{\overline{v}_{I_2} = (\dot{x} - R\dot{\varphi}_2)\overline{u}_x}.$$

$$\text{Les vecteurs rotation de chaque roue sont : } \boxed{\overline{\Omega}_1 = -\dot{\varphi}_1\overline{u}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{\Omega}_2 = -\dot{\varphi}_2\overline{u}_z}.$$

2. On utilise les théorèmes de Koenig :

$$\overline{\sigma}_O = \overline{OG} \wedge \underbrace{m_T}_{\text{masse totale}} \overline{v}_G + \underbrace{\overline{\sigma}^*}_{\text{moment cinétique barycentrique}} \quad \text{et} \quad E_c = \frac{1}{2} \underbrace{m_T}_{\text{masse totale}} v_G^2 + \underbrace{E_c^*}_{\text{énergie cinétique barycentrique}}$$

On décompose le système en trois sous-systèmes : le cadre, la roue 1 et la roue 2.

Moment cinétique barycentrique du cadre : $\overline{\sigma}_{\text{cadre}}^* = \vec{0}$ (cadre fixe dans R^*).

Moment cinétique barycentrique de la roue 1 : $\overline{\sigma}_1^* = J\overline{\Omega}_1 = -\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}_1\overline{u}_z$, de la roue 2 :

$$\overline{\sigma}_2^* = J\overline{\Omega}_2 = -\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}_2\overline{u}_z.$$

CNED – FORMATION CPGE

Moment cinétique du vélo : $\vec{\sigma}_0 = \overrightarrow{OG} \wedge (M + 2m)\vec{v}_G + \vec{\sigma}^*$,

$$\text{soit } \boxed{\vec{\sigma}_0 = -\left(R(M + 2m)\dot{x} + \frac{1}{2}mR^2(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)\right)\vec{u}_z}.$$

L'énergie cinétique barycentrique du cadre : $E_{c_{\text{cadre}}}^* = 0$ (cadre fixe dans R^*).

L'énergie cinétique barycentrique de la roue 1 : $E_{c_1}^* = \frac{1}{2}J\Omega_1^2 = \frac{1}{4}mR^2\dot{\phi}_1^2$.

L'énergie cinétique barycentrique de la roue 2 : $E_{c_2}^* = \frac{1}{2}J\Omega_2^2 = \frac{1}{4}mR^2\dot{\phi}_2^2$.

L'énergie cinétique du vélo : $E_c = \frac{1}{2}(M + 2m)v_G^2 + E_c^*$,

$$\text{soit } \boxed{E_c = \frac{1}{2}(M + 2m)\dot{x}^2 + \frac{1}{4}mR^2(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2)}.$$

3. La vitesse de glissement de roue 1 s'écrit $\vec{v}_{g_1} = \vec{v}_{I_1 \in \text{roue 1}} - \underbrace{\vec{v}_{I_1 \in \text{sol}}}_{=\vec{0} \text{ car sol fixe}}$, soit $\vec{v}_{g_1} = (\dot{x} - R\dot{\phi}_1)\vec{u}_x$.

De même $\vec{v}_{g_2} = (\dot{x} - R\dot{\phi}_2)\vec{u}_x$.

Si les deux roues roulent sans glisser $\vec{v}_{g_1} = \vec{v}_{g_2} = \vec{0}$, d'où $\dot{x} = R\dot{\phi}_1 = R\dot{\phi}_2$.

On peut alors écrire $\boxed{\vec{\sigma}_0 = -R(M + 3m)\dot{x}\vec{u}_z}$ et $\boxed{E_c = \frac{1}{2}(M + 3m)\dot{x}^2}$.

◇ Remarques générales pour la dynamique du solide

Conseils :

- Faire un schéma de la situation.
- Définir un repère adapté au mouvement si l'énoncé ne le donne pas.
- Si l'énoncé précise qu'il y a glissement, penser à la loi de Coulomb.

Méthodes :

- Choix du repère :
On choisit la base qui donne les expressions les plus simples des vecteurs position, vitesse et accélération de G. On exprime ensuite les forces dans cette même base.
- Aborder tout problème de mécanique
 - définir le système d'étude, souvent proposé par l'énoncé (faire attention s'il y a plusieurs solides) ;
 - préciser le référentiel et choisir le repère ;
 - écrire les éléments cinématiques du centre de gravité : vecteurs position, vitesse et accélération de G, ainsi que le vecteur rotation du solide.
 - effectuer le bilan des forces en précisant leur point d'application ; attention au sens de la force de frottement de glissement \vec{T} ;
 - le point d'application d'une force est important pour le calcul des moments de forces : le moment en O d'une force \vec{F} s'appliquant au point A est $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \wedge \vec{F}$.
 - choix d'une loi d'évolution (théorème de la résultante dynamique TRD, théorème du moment cinétique TMC, théorème de la puissance cinétique TPC ou de l'énergie cinétique TEC ou de l'énergie mécanique TEM).
- Application du théorème de la résultante dynamique
 - si le mouvement est une translation pure ;
 - si l'énoncé demande l'expression d'une force (la réaction de contact est souvent l'inconnue des forces) ;
 - si l'énoncé demande la position d'une rupture de contact, il faut connaître la composante N de la réaction de contact qui doit s'annuler lorsqu'il n'y a plus contact.
- Application du théorème du moment cinétique
 - si le mouvement est une rotation pure ;
 - si l'énoncé demande une vitesse de rotation ;
 - il s'applique toujours par rapport à un point fixe du solide s'il en possède, sinon par rapport à G (dans le référentiel barycentrique).
 - le moment du poids calculé en G est nul ;
 - le moment de la réaction calculé au point de contact est nul.

CNED – FORMATION CPGE

- Application du théorème de l'énergie mécanique
 - si l'énoncé demande « par une méthode énergétique », il est préférable aux théorèmes de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique ;
 - si le système est conservatif il donne rapidement l'équation différentielle du mouvement ($E_m = cte$ ou $\frac{dE_m}{dt} = 0$) ;
 - l'énergie potentielle associée à une force qui ne travaille pas est constante ;
 - l'énergie potentielle de pesanteur se calcule via $E_p(\vec{P}) = -m\vec{g} \cdot \vec{OG} + cte$.

Erreurs à éviter :

- N'oublier pas la réaction de contact avec le support (erreur classique) !
- Ne pas passer de temps à « résoudre » les équations différentielles : on donne la solution et on détermine les constantes à l'aide des conditions initiales.

A Indications :

- Pour trouver la direction de la composante tangentielle \vec{T} de la réaction, utiliser la propriété $\vec{v}_g \cdot \vec{T} < 0$ (Coulomb) s'il y a glissement (\vec{v}_g est la vitesse de glissement).
- S'il y a roulement sans glissement :
 - la condition de roulement sans glissement donne un lien entre deux variables \dot{x} et $\dot{\theta}$, ou $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$, ce qui permet de réduire le système d'équations à résoudre ;
 - la réaction de contact ne travaille pas si le support est fixe, on utilise un théorème énergétique.
- Equation différentielle récurrente de la forme : $\ddot{\theta} = K \sin \theta$. On obtient $\dot{\theta}^2$ en multipliant l'équation différentielle par $\dot{\theta}$ et en intégrant par rapport au temps.

◇ Exercice 3 : Direction et rôle de la force de frottement de glissement

Cet exercice a pour but de penser systématiquement à s'appliquer pour donner le sens de la force de frottement de glissement \vec{T} , qui peut être soit dans le sens du mouvement, soit opposée.

1. La marche à pied : Lorsqu'on essaie d'avancer en marchant, on soulève un pied, expliquer pourquoi c'est la réaction tangentielle des actions de contact sur l'autre pied qui nous permet d'avancer. Que se passe-t-il sur du verglas ?
2. Rebond d'une balle de tennis : lorsqu'on lance une balle de tennis sans vitesse de rotation propre, on constate qu'après le rebond elle possède un mouvement de rotation dirigé dans le sens du mouvement. Expliquer.
3. Solide en translation sur un plan horizontal : on donne une vitesse initiale à un objet que l'on fait glisser sur un plan horizontal, on constate qu'au bout d'une certaine distance il s'immobilise. Expliquer.

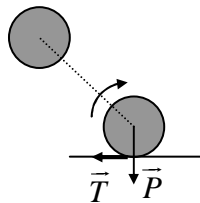
Solution

1. Lorsqu'on essaie d'avancer, on exerce une force dirigée vers l'arrière, c'est-à-dire que l'on essaie d'imposer au pied une vitesse de glissement dirigée vers l'arrière, le frottement sur le sol crée alors une force de frottement \vec{T} dirigée vers l'avant, c'est elle qui met le pied en mouvement.

Remarque : c'est la même chose pour une roue de voiture en rotation.

S'il n'y a pas de frottement, il n'y a pas de mouvement ; sur une plaque de verglas on a seulement du glissement « sur place » aussi bien à pied qu'en voiture !

2. Au moment du choc de la balle sur le sol la vitesse de glissement est dirigée dans le sens du mouvement, donc \vec{T} est dirigée vers l'arrière.



C'est l'ensemble des deux forces (\vec{P}, \vec{T}) qui fait tourner la balle vers l'avant.

3. Lorsque l'objet glisse sur le plan horizontal, la vitesse de glissement est dirigée dans le sens du mouvement, donc \vec{T} est dirigée vers l'arrière, elle agit comme une force de freinage et ralentit l'objet jusqu'à immobilisation.

◇ Exercice 4 : Théorème de la résultante dynamique (TRD)

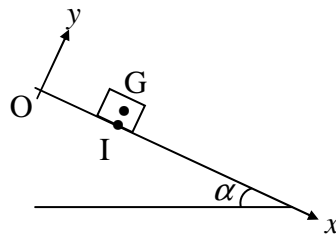
On considère une boîte parallélépipédique, de masse m , de hauteur $2a$, sans vitesse initiale, qui glisse avec frottement sur une table inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale (mouvement de translation pure).

Soit f le coefficient de frottement de glissement.

1. Déterminer l'expression de la position $x(t)$ du centre d'inertie G de la boîte en fonction de f , g et α .
2. A partir de quelle valeur critique α_c de l'angle α le mouvement est-il possible ?
3. Expliquer pourquoi n'y a-t-il pas de mouvement si $\alpha < \alpha_c$?
4. Proposer une méthode de mesure de f .

Solution

Le mouvement est une translation pure, on choisit une base cartésienne, le mouvement de G est parallèle à l'axe Ox.



Système : boîte. Référentiel : du laboratoire, galiléen.

Repérage de G : $\overrightarrow{OG} = x\overrightarrow{u}_x + a\overrightarrow{u}_y$, $\overrightarrow{v}_G = \dot{x}\overrightarrow{u}_x$ et $\overrightarrow{a}_G = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x$.

Bilan des forces : - poids (qui s'applique en G) : $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = mg(\sin\alpha\overrightarrow{u}_x - \cos\alpha\overrightarrow{u}_y)$;

- la réaction du plan (qui s'applique en I) : $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{T} + \overrightarrow{N} = -T\overrightarrow{u}_x + N\overrightarrow{u}_y$.

Ici \overrightarrow{T} freine le mouvement, elle est donc dirigée suivant $-\overrightarrow{u}_x$ et $T > 0$.

1. Le théorème de la résultante dynamique s'écrit : $m\overrightarrow{a}_G = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}$, soit $\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \alpha - T \\ 0 = -mg \cos \alpha + N \end{cases}$.

On en déduit $N = mg \cos \alpha$.

Puisqu'il y a glissement la loi de Coulomb indique $T = fN$, d'où $T = fmg \cos \alpha$.

On a alors $\ddot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$.

En intégrant deux fois avec $\dot{x}(0) = 0$ (énoncé) et $x(0) = 0$ (choix), on obtient :

$$x(t) = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \frac{t^2}{2}.$$

2. Ce mouvement n'est possible que si $\sin \alpha - f \cos \alpha > 0$ (sinon la boîte remonterait le plan incliné, ce qui n'a aucun sens), d'où $\alpha > \tan^{-1} f$, on en déduit $\alpha_c = \tan^{-1} f$.

3. Si $\alpha < \alpha_c$ il n'y a pas de mouvement car les aspérités de surface de la boîte et de la table s'interpénètrent.

4. Pour mesurer f on soulève doucement la table jusqu'à amorcer le mouvement de glissement et on mesure alors α_c , on en déduit $f = \tan \alpha_c$.

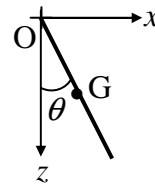
◇ Exercice 5 : Théorème du moment cinétique (TMC)

Cet exercice a pour but de bien distinguer les cas d'application du TMC suivant la donnée du moment d'inertie (par rapport à quel axe), ce qui conditionne le calcul du moment cinétique.

Un pendule pesant est constitué d'une tige en rotation autour d'un axe fixe passant par une de ses extrémités, le point O, dont on étudie les oscillations. La liaison en O est parfaite.

Soit m sa masse, ℓ sa longueur et G son centre de gravité.

On repère la position de G par la variable angulaire θ .



- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en utilisant $J_O = \frac{m\ell^2}{3}$.
- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en utilisant $J_G = \frac{m\ell^2}{12}$.
- Donner la solution $\theta(t)$ dans le cas où la tige est lâchée sans vitesse initiale d'une position θ_0 (faible devant 1 radian). Quelle est la période des oscillations ?

Solution

Le mouvement est une rotation pure : on choisit la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, le mouvement de G est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $\frac{\ell}{2}$.

Système : tige. Référentiel : du laboratoire, galiléen.

Repérage de G : $\vec{OG} = \frac{\ell}{2}\vec{u}_r$, $\vec{v}_G = \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

Le vecteur rotation de la tige est $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}_y$ (perpendiculaire au plan de la figure).

Bilan des forces :- poids (qui s'applique en G) : $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta)$;
 - la réaction en O : \vec{R} .

Le théorème du moment cinétique appliqué en O s'écrit : $\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{P}) + \underbrace{\vec{M}_O(\vec{R})}_0$.

$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{P} = \frac{\ell}{2}\vec{u}_r \wedge mg(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta) = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta\vec{u}_y$.

1. $\vec{\sigma}_O = J_O\vec{\Omega} = \frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}\vec{u}_y$, le TMC fourni $\frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta} = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta$, soit $\ddot{\theta} + \frac{3g}{2\ell}\sin\theta = 0$.

2. $\vec{\sigma}_O = \vec{OG} \wedge m\vec{v}_G + J_G\vec{\Omega} = \frac{\ell}{2}\vec{u}_r \wedge m\frac{\ell}{2}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \frac{m\ell^2}{12}\dot{\theta}\vec{u}_y = \frac{m\ell^2}{4}\dot{\theta}\vec{u}_y + \frac{m\ell^2}{12}\dot{\theta}\vec{u}_y = \frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}\vec{u}_y$, on obtient donc le même résultat.

3. Dans le cas d'oscillations de faible amplitude $\sin\theta \approx \theta$ et on a une équation différentielle de la forme $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$.

La solution générale est de la forme $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

Avec les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ on obtient : $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$.

La période des oscillations est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, soit $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$.

◇ Exercice 6 : Théorème de l'énergie mécanique (TEM)

C'est le théorème énergétique le plus souvent utilisé, il donne plus rapidement l'évolution du système que le TEC ou le TPC.

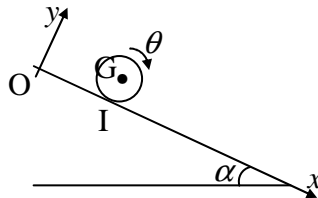
On considère une boule de masse m et de rayon a , initialement immobile, qui roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.

On repère son centre de gravité G par son abscisse x et soit θ l'angle qui caractérise sa rotation propre dans le référentiel barycentrique. Son moment d'inertie par rapport à un axe passant par G est $J = \frac{2}{5}ma^2$.

1. Déterminer une relation entre \dot{x} et $\dot{\theta}$.
2. Déterminer l'énergie cinétique de la boule en fonction de m , a et \dot{x} .
3. Déterminer l'énergie potentielle de la boule.
4. Déterminer l'expression de la position $x(t)$ de G à chaque instant.

Solution

On choisit une base cartésienne, le mouvement de G est parallèle à l'axe Ox .



Système : boule. Référentiel : du laboratoire, galiléen.

Repérage de G : $\overrightarrow{OG} = x\overrightarrow{u}_x + a\overrightarrow{u}_y$, $\overrightarrow{v}_G = \dot{x}\overrightarrow{u}_x$.

Soit $\overrightarrow{\Omega}$ le vecteur rotation de la boule : $\overrightarrow{\Omega} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z$.

1. Deux variables interviennent \dot{x} et $\dot{\theta}$, pour les relier on utilise la condition de roulement sans glissement : la vitesse de glissement est nulle $\overrightarrow{v}_g = \overrightarrow{0}$.

Or $\overrightarrow{v}_g = \overrightarrow{v_{I \in boule}} - \overrightarrow{v_{I \in plan}}$ et $\overrightarrow{v_{I \in plan}} = \overrightarrow{0}$ car le support plan est fixe.

D'après la relation de Varignon : $\overrightarrow{v}_g = \overrightarrow{v}_I = \overrightarrow{v}_G + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{GI} = \dot{x}\overrightarrow{u}_x + (-\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z) \wedge (-a\overrightarrow{u}_y) = (\dot{x} - a\dot{\theta})\overrightarrow{u}_x$.

$\overrightarrow{v}_g = \overrightarrow{0}$ donne $\boxed{\dot{x} = a\dot{\theta}}$.

2. L'énergie cinétique de la boule s'exprime via le théorème de Koenig :

$$E_c = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J_G\Omega^2, \text{ soit } E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2.$$

Avec $J = \frac{2}{5}ma^2$ et $\dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{a}$ on obtient $\boxed{E_c = \frac{7}{10}m\dot{x}^2}$.

3. Bilan des forces : - poids (qui s'applique en G) : $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = mg(\sin\alpha\overrightarrow{u}_x - \cos\alpha\overrightarrow{u}_y)$;

- la réaction du plan (qui s'applique en I) : \overrightarrow{R} .

Puisqu'il y a roulement sans glissement \overrightarrow{R} ne travaille pas et on lui associe une énergie potentielle constante : $E_p(\overrightarrow{R}) = cte$.

L'énergie potentielle de pesanteur se calcule via $E_p(\overrightarrow{P}) = -m\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{OG} + cte$.

$$E_p(\overrightarrow{P}) = -mg(\sin\alpha\overrightarrow{u}_x - \cos\alpha\overrightarrow{u}_y) \cdot (x\overrightarrow{u}_x + a\overrightarrow{u}_y) + cte = -mg \sin\alpha \cdot x + cte$$

CNED – FORMATION CPGE

Finalement $E_p = -mg \sin \alpha \cdot x + cte$.

4. Le poids \vec{P} est une force conservative et \vec{R} ne travaille pas donc la boule est un système conservatif, son énergie mécanique totale se conserve.

L'énergie mécanique de la boule s'écrit : $E_m = E_c + E_p = \frac{7}{10}m\dot{x}^2 - mg \sin \alpha \cdot x + cte$.

La conservation de l'énergie s'écrit $\frac{dE_m}{dt} = 0$, soit $\frac{7}{10}m2\dot{x}\ddot{x} - mg \sin \alpha \cdot \dot{x} = 0$.

On obtient $\ddot{x} = \frac{5}{7}g \sin \alpha$, et en intégrant avec deux fois avec $\dot{x}(0) = 0$ (énoncé) et $x(0) = 0$

(choix), on obtient : $x = \left(\frac{5}{14}g \sin \alpha\right)t^2$.

2^{ème} série : exercices d'entraînement à l'écrit des concours

◇ Exercice 7 : Modélisation du patinage au démarrage d'un véhicule

Un véhicule patine au démarrage, puis roule tout en patinant et enfin commence à rouler sans glisser, on cherche à partir de quel instant la vitesse de glissement s'annule et le véhicule commence à rouler sans glisser.

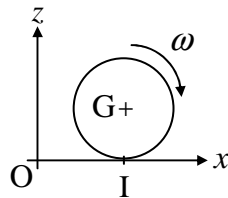
Pour cela on modélise la situation de la façon suivante :

On considère un cylindre plein C homogène (de centre de masse G, de masse m , de rayon r et de moment d'inertie suivant Gy : $J = \frac{1}{2}mr^2$) en mouvement dans le référentiel terrestre R galiléen. Il roule sur un plan fixe horizontal Oxy , Oz est la verticale ascendante.

A l'instant $t = 0$ on le pose sur le plan avec un mouvement initial qui se réduit à une rotation de vitesse angulaire ω_0 positive autour de l'axe Gy , G est fixe.

Les frottements de glissement du cylindre sur le plan sont caractérisés par le coefficient f .

On note ω la projection du vecteur rotation du cylindre sur Oy à instant quelconque et par x l'abscisse de G.



- Déterminer l'expression de la vitesse de glissement à chaque instant en fonction de \dot{x} , r et ω . Commenter sa valeur initiale.
- Déterminer les expressions de $\dot{x}(t)$ et $\omega(t)$.
- En déduire l'expression de l'instant t_1 à partir duquel le cylindre commence à rouler sans glisser en fonction de r , ω_0 , f et l'accélération de pesanteur g . Commenter l'influence de ω_0 et f .

Solution

1. Cinématique : $\overrightarrow{OG} = x\overrightarrow{u}_x + r\overrightarrow{u}_z$ donc $\overrightarrow{v}_G = \dot{x}\overrightarrow{u}_x$ avec $\dot{x}(0) = 0$ et $\overrightarrow{\Omega} = \omega\overrightarrow{u}_y$ avec $\omega(0) = \omega_0$.

A un instant t quelconque la vitesse de glissement du cylindre sur le plan s'écrit, puisque le plan est fixe $\overrightarrow{v}_g = \overrightarrow{v}(I \in C/R)$, que l'on détermine à l'aide de la relation de Varignon :

$$\overrightarrow{v}(I) = \overrightarrow{v}(G) + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{GI} = \dot{x}\overrightarrow{u}_x + \omega\overrightarrow{u}_y \wedge (-r\overrightarrow{u}_z), \text{ soit } \boxed{\overrightarrow{v}_g = (\dot{x} - r\omega)\overrightarrow{u}_x}.$$

A $t = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ et $\omega(0) = \omega_0$ donc $\overrightarrow{v}_{g0} = -r\omega_0\overrightarrow{u}_x$.

Commentaires :

- $\overrightarrow{v}_{g0} \neq \vec{0}$: le cylindre patine effectivement au démarrage ;
- \overrightarrow{v}_{g0} est dirigée suivant $-\overrightarrow{u}_x$ et, puisqu'il y a glissement, la loi de Coulomb implique $\overrightarrow{v}_g \cdot \overrightarrow{T} < 0$, donc \overrightarrow{T} est dirigée suivant $+\overrightarrow{u}_x$, c'est la force de frottement qui met le cylindre en mouvement.

CNED – FORMATION CPGE

2. Système : cylindre. Référentiel : terrestre, galiléen.

Les forces que subit le cylindre sont : son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ (qui s'applique en G) et la réaction du plan $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = T\vec{u}_x + N\vec{u}_z$ (qui s'applique en I).

Pour trouver $\dot{x}(t)$ la vitesse de translation de G on applique le théorème de la résultante

dynamique, qui s'écrit $m\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{R}$, soit
$$\begin{cases} m\ddot{x} = T \\ 0 = N - mg \end{cases}.$$

Puisqu'il y a glissement la loi de Coulomb s'écrit $T = fN = fmg$ et $\ddot{x} = fg$, d'où $\dot{x}(t) = fgt$.

Pour trouver $\omega(t)$ la vitesse de rotation propre du solide on applique le théorème du moment

cinétique dans le référentiel barycentrique, qui s'écrit $\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \vec{M}_G(\vec{P}) + \vec{M}_G(\vec{R})$.

Or $\vec{M}_G(\vec{P}) = \vec{GG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$ et $\vec{M}_G(\vec{R}) = \vec{GI} \wedge \vec{R} = (-r\vec{u}_z) \wedge (T\vec{u}_x + N\vec{u}_z) = -rT\vec{u}_y$.

De plus $\vec{\sigma}^* = J\vec{\omega} = \frac{1}{2}mr^2\omega\vec{u}_y$, soit $\frac{1}{2}mr^2\dot{\omega} = -rT$

On en déduit $\dot{\omega} = -\frac{2fg}{r}$ et $\omega(t) = -\frac{2fg}{r}t + \omega_0$.

3. On en déduit $\vec{v}_g = (\dot{x} - r\omega)\vec{u}_x = (fgt + 2fgt - r\omega_0)\vec{u}_x = (3fgt - r\omega_0)\vec{u}_x$.

On obtient finalement $t_1 = \frac{r\omega_0}{3fg}$.

Commentaires :

- plus ω_0 est grand (accélération importante donnée par le conducteur) et plus la roue patine longtemps ;

- plus f est grand (plus il y a de frottement) et plus le roulement sans glissement commence tôt. S'il n'y a pas de frottement $f = 0$ et $t_1 = \infty$: le roulement sans glissement ne commencera jamais, comme sur du verglas.

◇ Exercice 8 : Expérience avec une craie

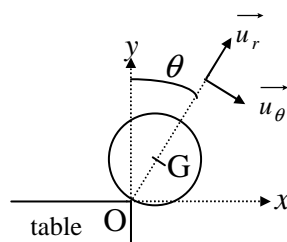
On place une craie au bord d'une table et une légère perturbation la fait rouler sur l'arête de la table ; à un moment donné elle quitte la table et amorce une chute libre.

On cherche à savoir à quelle position elle quitte la table et si elle glisse avant de quitter la table.

Pour cela on modélise la situation de la façon suivante :

On considère un cylindre plein C homogène (de centre de masse G, de masse m , de rayon R et de moment d'inertie suivant son axe de symétrie : $J = \frac{1}{2}mR^2$) en mouvement dans le référentiel du laboratoire R galiléen. Il est lâché sans vitesse initiale ($\dot{\theta}_0 = 0$) à partir de la position caractérisée par l'angle $\theta_0 = 0$, sur l'arête rectiligne horizontale d'une table.

Le contact cylindre-arête de la table est caractérisé par un frottement de glissement de coefficient f et on note T et N les normes des composantes tangentielle et normale de la réaction de l'arête.



1. Appliquer le théorème de la résultante dynamique au cylindre et exprimer N et T en fonction de m , g , R , θ , $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.
2. Appliquer le théorème du moment cinétique et en déduire l'équation différentielle vérifiée par θ .
3. Exprimer $N(\theta)$ et $T(\theta)$ en fonction de m et g . En déduire l'angle θ_d , appelé angle de décrochage, pour lequel le cylindre quitte l'arête.
4. Le cylindre a-t-il glissé avant de quitter l'arête ? (ou pourra effectuer une analyse graphique).

Solution

Système : cylindre. Référentiel : du laboratoire, terrestre, galiléen.

Cinématique : $\overline{OG} = R\overline{u}_r$, $\overline{v}_G = R\dot{\theta}\overline{u}_\theta$, $\overline{a}_G = -R\dot{\theta}^2\overline{u}_r + R\ddot{\theta}\overline{u}_\theta$ et $\overline{\Omega} = -\dot{\theta}\overline{u}_z$.

Attention : les bases directes sont $(\overline{u}_x, \overline{u}_y, \overline{u}_z)$, avec \overline{u}_z vers nous, et $(\overline{u}_r, \overline{u}_\theta, -\overline{u}_z)$.

Les forces que subit le cylindre sont :

- son poids qui s'applique en G : $\overline{P} = m\overline{g} = -mg\overline{u}_y = -mg(\cos\theta\overline{u}_r - \sin\theta\overline{u}_\theta)$;

- la réaction de l'arête qui s'applique en O : $\overline{R} = \overline{T} + \overline{N} = -T\overline{u}_\theta + N\overline{u}_r$.

1. Le théorème de la résultante dynamique s'écrit $m\overline{a}_G = \overline{P} + \overline{R}$, et on obtient

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + N \\ mR\ddot{\theta} = mg \sin \theta - T \end{cases}, \text{ ou bien } \begin{cases} N = mg \cos \theta - mR\dot{\theta}^2 \\ T = mg \sin \theta - mR\ddot{\theta} \end{cases}$$

2. Le théorème du moment cinétique par rapport au point fixe O s'écrit

$$\frac{d\overline{\sigma}_O}{dt} = \overline{M}_O(\overline{P}) + \overline{M}_O(\overline{R}) \text{ avec } \overline{\sigma}_O = \overline{OG} \wedge m\overline{v}_G + \overline{\sigma}^*$$

CNED – FORMATION CPGE

Attention : ici on garde le terme $\overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{v}_G$ car l'axe de rotation ne passe pas par G (pourtant cet axe est fixe).

Avec $\overrightarrow{\sigma}^* = -\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z$ et $\overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{v}_G = -mR^2\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z$ on obtient $\overrightarrow{\sigma}_O = -\frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z$.

$$\overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{g} = R\overrightarrow{u}_r \wedge mg(-\cos\theta\overrightarrow{u}_r + \sin\theta\overrightarrow{u}_\theta) = -mgR \sin\theta\overrightarrow{u}_z,$$

$$\overrightarrow{M}_O(\overrightarrow{R}) = \overrightarrow{OO} \wedge \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}.$$

Le TMC donne finalement $-\frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} = -mgR \sin\theta$, d'où $\ddot{\theta} = \frac{2g}{3R} \sin\theta$.

3. De l'expression précédente on obtient $T(\theta) = \frac{mg}{3} \sin\theta$.

Pour obtenir $N(\theta)$ il nous faut $\dot{\theta}^2$, pour cela on multiplie $\ddot{\theta} = \frac{2g}{3R} \sin\theta$ par $\dot{\theta}$ et on

intègre par rapport au temps, on obtient $\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} = -\frac{2g}{3R}(\cos\theta - \cos\theta_0)$.

Les conditions initiales sont $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, soit $\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{3R}(1 - \cos\theta)$.

Finalement $N(\theta) = \frac{mg}{3}(7 \cos\theta - 4)$.

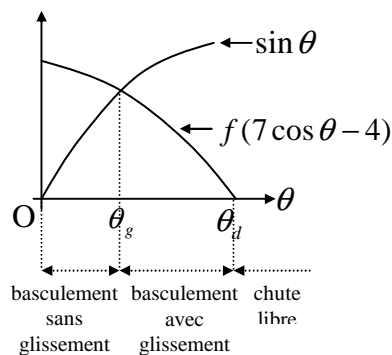
Le cylindre quitte l'arête en θ_d tel que $N(\theta_d) = 0$: équation de rupture du contact.

On en déduit : $\theta_d = \text{Arc cos } \frac{4}{7} = 55,2^\circ = 55^\circ 9'$.

4. Lorsque le cylindre commence à glisser, la loi de Coulomb indique $T = fN$, c'est-à-dire pour l'angle θ_g tel que $\sin\theta_g = f(7 \cos\theta_g - 4)$.

Pour connaître la valeur de θ_g et la comparer à celle θ_d afin de répondre à la question, il faut résoudre l'équation trigonométrique $\sin\theta_g = f(7 \cos\theta_g - 4)$ en connaissant la valeur de f , valeur dont on ne dispose pas.

On peut néanmoins comparer θ_g et θ_d par analyse graphique :



Le cylindre commence à glisser en $\theta_g < \theta_d$ c'est-à-dire avant de quitter la table.

Ce résultat ne dépend pas de la valeur de f .

◇ Exercice 9 : Mesure d'un moment d'inertie

On considère un cylindre homogène de centre de masse G, de masse $m = 2,3 \text{ g}$, de rayon $r = 28 \text{ mm}$ et de moment d'inertie J par rapport à son axe de révolution, en mouvement dans le référentiel terrestre galiléen.

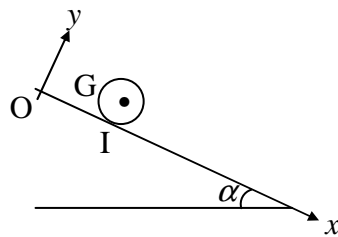
Il roule sans glisser sur un plan incliné (fixe dans le référentiel terrestre) d'un angle α par rapport à l'horizontale. Ce plan incliné est constitué d'une planche de longueur $d = 1,5 \text{ m}$ dont on a soulevé une extrémité d'une hauteur $d' = 2 \text{ cm}$.

Le cylindre est abandonné sans vitesse initiale et on négligera les frottements fluides. On note $\dot{\varphi}$ la vitesse angulaire de rotation du cylindre dans le référentiel barycentrique.

1. L'énergie mécanique du cylindre se conserve-t-elle ? Pourquoi ?
2. Etablir l'équation horaire $x(t)$ du centre de masse G du cylindre à partir d'un bilan énergétique, en faisant intervenir les grandeurs m , r , J , α et g l'accélération de la pesanteur.
3. La durée du parcours est $\tau = 5,1 \text{ s}$, en déduire la valeur de J .

Solution

Système : cylindre de masse m , de rayon r et de moment d'inertie J .
Référentiel : du laboratoire, galiléen.



Bilan des forces :

- poids (qui s'applique en G) : $\vec{P} = m\vec{g} = mg (\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_y)$;

- la réaction du plan (qui s'applique en I) : \vec{R} .

1. Le poids \vec{P} est une force conservative. Puisqu'il y a roulement sans glissement la puissance des actions de contact est nulle, \vec{R} ne travaille pas.

On en déduit que l'énergie mécanique totale se conserve.

2. Le centre d'inertie $G(x, r)$: $\vec{OG} = x\vec{u}_x + r\vec{u}_y$, $\vec{v}_G = \dot{x}\vec{u}_x$.

Soit $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de la boule et φ l'angle qui caractérise la rotation (dans le sens du mouvement) : $\vec{\Omega} = -\dot{\varphi}\vec{u}_z$.

L'énergie mécanique s'écrit : $E_m = E_c + E_p$, avec $E_c = \frac{1}{2}mv_G^2 + E_c^* = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$.

$E_p = -m\vec{g} \cdot \vec{OG} + cte = -mg (\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_y) \cdot (x\vec{u}_x + r\vec{u}_y) + cte = -mg \sin \alpha \cdot x + cte$.

D'où $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 - mg \sin \alpha \cdot x + cte$.

Deux variables interviennent \dot{x} et $\dot{\varphi}$, pour les relier on utilise la condition de roulement sans glissement : la vitesse de glissement est nulle $\vec{v}_g = \vec{0}$.

CNED – FORMATION CPGE

Or $\vec{v}_g = \overrightarrow{v_{I \in \text{boule}}}$ car le support plan est fixe.

La relation de Varignon : $\vec{v}_g = \vec{v}_1 = \vec{v}_G + \vec{\Omega} \wedge \overline{GI} = \dot{x}\vec{u}_x + (-\dot{\phi}\vec{u}_z) \wedge (-r\vec{u}_y) = (\dot{x} - r\dot{\phi})\vec{u}_x$.

$\vec{v}_g = \vec{0}$ donne $\dot{x} = r\dot{\phi}$ et $E_m = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\dot{x}^2 - mg \sin \alpha \cdot x + cte$.

La conservation de l'énergie s'écrit $\frac{dE_m}{dt} = 0$, soit $\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\ddot{x} - mg \sin \alpha = 0$, soit

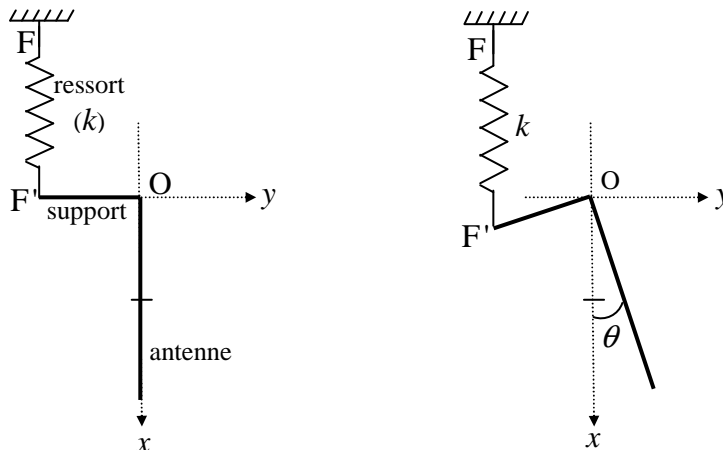
$$\boxed{x(t) = \frac{mg \sin \alpha t^2}{m + \frac{J}{r^2}}}$$

3. De l'expression précédente on déduit : $J = mr^2 \left(\frac{g \sin \alpha t^2}{2x} - 1 \right)$.

Avec $t = \tau = 5,1 \text{ s}$, $x = d = 1,5 \text{ m}$ et $\sin \alpha = \frac{0,02}{1,5}$, on obtient $\boxed{J = 5,4 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$.

◇ Exercice 10 : Antenne

Lors de l'étude d'un guide d'onde réalisé au laboratoire, on place à sa sortie une antenne constituée d'une tige de longueur $2L$ et de masse $2m$. Un système mécanique la maintient dans sa position verticale, afin de détecter un certain type de polarisation. Le champ de pesanteur est orienté dans le sens et la direction de l'axe des x .



L'antenne est soudée à une tige, support de longueur L et de masse m . Le point O est fixe et correspond sur le dessin à la position de l'axe de rotation sans frottement des deux tiges dans le plan de la figure.

La position relative de F et F' est choisie afin d'avoir, à l'équilibre mécanique, le support F'O horizontal.

1. Exprimer l'allongement $\ell - L_0$ du ressort à la position d'équilibre. On note L_0 la longueur à vide de ce ressort.
2. On suppose que la rotation se fait avec un angle faible et que la direction FF' reste verticale. On note J_1 et J_2 les moments d'inertie des deux barres par rapport à l'axe Oz, respectivement du support et de l'antenne. Ecrire l'équation vérifiée par les petites oscillations mécaniques (dues aux vibrations de la machine dans le laboratoire).
3. On pose : $J_1 = \frac{mL^2}{3}$ et $J_2 = \frac{8mL^2}{3}$. En déduire la période des oscillations de faible amplitude.

Solution

On étudie le système {tige + antenne} dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

- Ce système subit :
- le poids \vec{P}_1 de la tige appliqué en G_1 ;
 - le poids \vec{P}_2 de l'antenne appliqué en G_2 ;
 - la force de rappel du ressort \vec{F}_r appliquée en F' ;
 - la réaction en O : \vec{R} .

1. A l'équilibre G_1 , G_2 et F' sont repérés par $\vec{OG}_1 = -\frac{L}{2}\vec{u}_y$, $\vec{OG}_2 = L\vec{u}_x$ et $\vec{OF}' = -L\vec{u}_y$.

De plus le théorème du moment cinétique indique que la somme des moments des forces par rapport au point O est nul, soit $\vec{M}_O(\vec{P}_1) + \vec{M}_O(\vec{P}_2) + \vec{M}_O(\vec{F}_r) + \vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{0}$.

CNED – FORMATION CPGE

$$\overline{M}_O(\overline{P}_1) = \left(-\frac{L}{2} \overline{u}_y \right) \wedge mg \overline{u}_x = \frac{mgL}{2} \overline{u}_z, \quad \overline{M}_O(\overline{P}_2) = L \overline{u}_x \wedge 2mg \overline{u}_x = \vec{0},$$

$$\overline{M}_O(\overline{F}_r) = (-L \overline{u}_y) \wedge (-k(\ell - L_0) \overline{u}_x) = (-Lk(\ell - L_0)) \overline{u}_z, \quad \overline{M}_O(\overline{R}) = \overline{OO} \wedge \overline{R} = \vec{0}.$$

On en déduit en projetant sur \overline{u}_z : $-Lk(\ell - L_0) + \frac{mgL}{2} = 0$, soit $\ell - L_0 = \frac{mg}{2k}$.

2. Lorsque l'équilibre est déplacé le théorème du moment cinétique s'écrit alors :

$$\frac{d\overline{\sigma}_O}{dt} = \overline{M}_O(\overline{P}_1) + \overline{M}_O(\overline{P}_2) + \overline{M}_O(\overline{F}_r) + \overline{M}_O(\overline{R}).$$

D'après le théorème de Koenig : $\overline{\sigma}_O = (J_1 + J_2) \overline{\Omega}$ (système en rotation autour d'un axe fixe) avec $\overline{\Omega} = \dot{\theta} \overline{u}_z$.

De plus $\overline{OG}_1 = -\frac{L}{2} \cos \theta \overline{u}_y + \frac{L}{2} \sin \theta \overline{u}_x \approx -\frac{L}{2} \overline{u}_y + \frac{L}{2} \theta \overline{u}_x$ aux petits angles. De même $\overline{OG}_2 = L \cos \theta \overline{u}_x + L \sin \theta \overline{u}_y \approx L \overline{u}_x + L \theta \overline{u}_y$ et $\overline{OF}' = -L \cos \theta \overline{u}_y + L \sin \theta \overline{u}_x \approx -L \overline{u}_y + L \theta \overline{u}_x$.

On a alors $\overline{M}_O(\overline{P}_1) = \frac{mgL}{2} \overline{u}_z$ et $\overline{M}_O(\overline{P}_2) = -2mgL\theta \overline{u}_z$.

Puisque FF' reste vertical $\overline{F}_r = -k(\ell - L_0 + L \sin \theta) \overline{u}_x \approx -k(\ell - L_0 + L\theta) \overline{u}_x$ et $\overline{M}_O(\overline{F}_r) = -Lk(\ell - L_0 + L\theta) \overline{u}_z$.

Finalement, en projetant sur \overline{u}_z : $(J_1 + J_2) \ddot{\theta} = \frac{mgL}{2} - 2mgL\theta - Lk(\ell - L_0 + L\theta)$.

Avec $\ell - L_0 = \frac{mg}{2k}$ on obtient $(J_1 + J_2) \ddot{\theta} + (2mg + kL)L\theta = 0$.

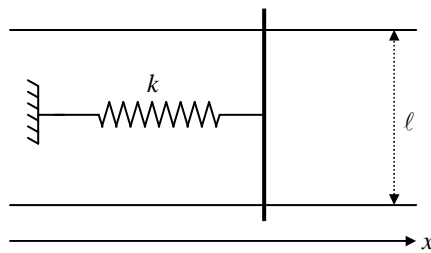
3. Avec $J_1 = \frac{mL^2}{3}$ et $J_2 = \frac{8mL^2}{3}$, on a $J_1 + J_2 = 3mL^2$ et $\ddot{\theta} + \left(\frac{2mg + kL}{3mL} \right) \theta = 0$.

On obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de période propre

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{3mL}{2mg + kL}}.$$

◇ Exercice 11 : Oscillations d'une barre sur des rails

Une barre de masse m peut glisser sans frottement sur deux rails parallèles. Les deux rails et la barre forment un plan horizontal. Les seuls mouvements possibles de la barre sont des translations rectilignes parallèlement à la direction des rails notée Ox (l'axe Oz est vertical vers le haut). La barre est liée à un ressort de raideur k . L'origine des abscisses est choisie lorsque le ressort est au repos. On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. A l'instant initial on lâche la barre sans vitesse initiale à l'abscisse $x(0) = a$ avec $a > 0$.



1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement par l'application de théorème de la résultante dynamique.
2. Déterminer l'expression de l'abscisse x de la barre en fonction du temps t .
3. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique de la barre en fonction du temps.
4. Montrer, qu'en moyenne sur une période, l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle élastique.

On suppose maintenant que la barre subit une force de frottement visqueux $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ où \vec{v} est le vecteur vitesse de la barre et α un coefficient positif. On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$.

5. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
6. On suppose $\lambda \ll \omega_0$. Déterminer l'expression de l'abscisse x de la barre en fonction du temps t .
7. Représenter l'allure du graphe de x en fonction de t .
8. Montrer que l'énergie mécanique de la barre peut se mettre, avec la condition $\lambda \ll \omega_0$, sous la forme approchée : $E_m = \frac{1}{2}ka^2e^{-\frac{t}{\tau}}$. On donnera l'expression de τ .

Solution

1. On étudie le système {barre} dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Elle subit : - son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ vertical ;

- les réactions \vec{R}_1 et \vec{R}_2 des rails (à chaque extrémité de la barre) verticales ;

- la force de rappel \vec{F}_r du ressort, puisque l'origine des abscisses est choisie lorsque le ressort est au repos, son allongement est x et $\vec{F}_r = -kx\vec{u}_x$.

On repère le centre de gravité G de la barre via son abscisse x : $\vec{OG} = x\vec{u}_x$, d'où $\vec{v}_G = \dot{x}\vec{u}_x$ et $\vec{a}_G = \ddot{x}\vec{u}_x$.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la barre s'écrit : $m\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{F}_r$.

CNED – FORMATION CPGE

En projetant sur l'axe Ox on obtient : $m\ddot{x} = -kx$, soit, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$.

2. La solution générale de cette équation différentielle se met sous la forme : $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$.

On en déduit $\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$.

Les conditions initiales $x(0) = a$ et $\dot{x}(0) = 0$ donnent $A = a$ et $B = 0$, d'où $\boxed{x(t) = a \cos(\omega_0 t)}$.

Le mouvement de la barre est oscillatoire sinusoïdal de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

3. L'énergie mécanique de la barre E_m est la somme de son énergie cinétique E_c et de la somme des énergies potentielles E_p dont dérive les forces conservatives, soit $E_m = E_c + E_p$.

L'énergie cinétique E_c de la barre s'écrit, d'après le théorème de Koenig : $E_c = \frac{1}{2} m v_G^2 + E_c^*$.

L'énergie cinétique barycentrique E_c^* est nulle car la barre glisse sur les rails, elle ne roule pas, d'où $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$.

Le mouvement de la barre étant horizontal \vec{P} ne travaille pas, et comme il n'y a pas de frottement \vec{R}_1 et \vec{R}_2 ne travaillent pas non plus, on peut donc associer à ces trois forces une énergie potentielle constante (que l'on choisit nulle).

La force de rappel du ressort travaille et on lui associe l'énergie potentielle élastique

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2. \text{ Finalement : } \boxed{E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2}.$$

Avec $x(t) = a \cos(\omega_0 t)$ et $\dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t)$, on obtient en utilisant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$\boxed{E_m = \frac{1}{2} k a^2}$. On retrouve le fait que le système soit conservatif, ce qui est normal car on ne considère pas les frottements.

4. La valeur moyenne de l'énergie cinétique sur une période s'écrit : $\langle E_c \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} E_c(t) dt$.

Avec $\dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t)$, on déduit $\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 \cdot \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^2(\omega_0 t) dt$.

Or $\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^2(\omega_0 t) dt = \frac{1}{2}$, d'où $\langle E_c \rangle = \frac{1}{4} m \omega_0^2 a^2$.

De même $\langle E_p \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} E_p(t) dt = \frac{1}{2} k a^2 \cdot \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{1}{4} k a^2$.

Puisque $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ alors $k = m\omega_0^2$ et finalement $\boxed{\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle}$.

5. Au bilan des forces précédent il faut rajouter la force de frottement visqueux $\vec{F} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \dot{x} \vec{u}_x$ et la projection du théorème de la résultante dynamique appliqué à la barre sur l'axe Ox s'écrit : $m\ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x}$.

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ on obtient : $\boxed{\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$.

CNED – FORMATION CPGE

6. On cherche une solution exponentielle de la forme $x(t) = Ae^{rt}$, en injectant dans l'équation différentielle on obtient l'équation caractéristique $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ de discriminant $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$.

Avec $\lambda \ll \omega_0$ ce discriminant s'écrit $\Delta = -4\omega_0^2 = (2j\omega_0)^2$ avec $j^2 = -1$.

Les solutions de l'équation caractéristique sont alors $r_1 = -\lambda - j\omega_0$ et $r_2 = -\lambda + j\omega_0$.

On en déduit $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = e^{-\lambda t} (Ae^{-j\omega_0 t} + Be^{j\omega_0 t})$, ou encore :

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A' \cos(\omega_0 t) + B' \sin(\omega_0 t)).$$

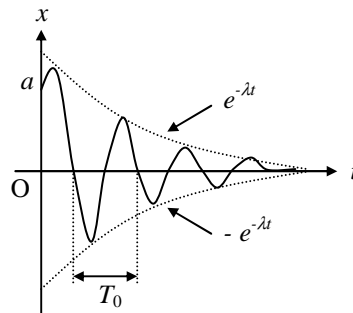
On en déduit $\dot{x}(t) = -\lambda e^{-\lambda t} (A' \cos(\omega_0 t) + B' \sin(\omega_0 t)) + e^{-\lambda t} (-A' \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B' \omega_0 \cos(\omega_0 t))$.

Les conditions initiales $x(0) = a$ et $\dot{x}(0) = 0$ donnent $A' = a$ et $B' = \frac{\lambda a}{\omega_0}$.

Finalement $x(t) = ae^{-\lambda t} \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right)$. Avec la condition $\lambda \ll \omega_0$, on obtient

$$\boxed{x(t) = ae^{-\lambda t} \cos(\omega_0 t)}.$$

7. L'allure du graphe de x en fonction de t est la suivante :



On parle de régime transitoire pseudo-périodique.

8. De x on déduit :

$$\dot{x} = a \left(-\lambda e^{-\lambda t} \cos(\omega_0 t) - e^{-\lambda t} \omega_0 \sin(\omega_0 t) \right) = -a\omega_0 e^{-\lambda t} \left(\frac{\lambda}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t) \right).$$

Avec la condition $\lambda \ll \omega_0$, on obtient : $\dot{x}(t) = -\omega_0 a e^{-\lambda t} \sin(\omega_0 t)$.

La force supplémentaire de frottement est non conservative et ne dérive donc pas d'une énergie potentielle, l'énergie mécanique de la barre garde la forme : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$.

On en déduit $E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 e^{-2\lambda t} \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} k a^2 e^{-2\lambda t} \cos^2(\omega_0 t)$.

Or $k = m\omega_0^2$, donc $E_m = \frac{1}{2} k a^2 e^{-2\lambda t} (\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t))$, soit $\boxed{E_m = \frac{1}{2} k a^2 e^{-2\lambda t}}$.

On obtient une expression de la forme $E_m = \frac{1}{2} k a^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\boxed{\tau = \frac{1}{2\lambda}}$.

A cause des frottements visqueux, l'énergie mécanique de la barre diminue exponentiellement au cours du temps.

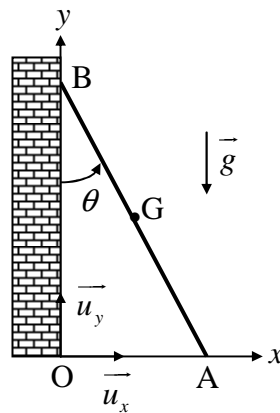
◇ Exercice 12 : Chute d'une échelle

On considère une échelle que l'on modélise par une tige AB homogène, de centre d'inertie G, de longueur $2L$, de masse M et de moment d'inertie par rapport à l'axe Gz : $J = \frac{ML^2}{3}$.

Cette échelle glisse sous l'effet de son poids le long d'un mur depuis une position initiale quasi-verticale et sans vitesse initiale.

Le point A est en contact avec le sol (supposé parfaitement horizontal (axe Ox)) et le point B est en contact avec le mur (supposé parfaitement vertical (axe Oy)). On suppose que les points A et B restent en contact avec le sol et le mur au cours du mouvement de la barre.

On note θ l'angle orienté entre le mur et la barre. Le champ de pesanteur terrestre est supposé uniforme et noté $\vec{g} = -g\vec{u}_y$. On suppose que la barre est soumise uniquement à son poids et aux deux actions de contact \vec{R}_A et \vec{R}_B en A et B et que ces deux actions de contact sont sans frottement.



On cherche les positions de rupture éventuelles des contacts en A et B et laquelle apparaît la première.

1. Montrer par une méthode énergétique que θ vérifie l'équation différentielle : $\ddot{\theta} = \frac{3g}{4L} \sin \theta$.

En déduire l'expression de $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ .

2. Exprimer le vecteur accélération de G en fonction de g et θ uniquement.
3. En déduire \vec{R}_A et \vec{R}_B en fonction de M , g , et θ .
4. Déterminer les angles θ_{dA} et θ_{dB} (différents de 0) pour lesquelles \vec{R}_A et \vec{R}_B s'annulent respectivement.
5. Comparer ces deux angles et commenter.

Solution

On étudie le système {échelle} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Elle subit : - son poids : $\vec{P} = M\vec{g} = -Mg\vec{u}_y$ vertical ;

- la réaction \vec{R}_A verticale car il n'y a pas de frottement, appliquée en A, telle que

$$\vec{R}_A = R_A \vec{u}_y \quad (R_A > 0) ;$$

- la réaction \vec{R}_B horizontale car il n'y a pas de frottement, appliquée en B, telle

$$\text{que } \vec{R}_B = R_B \vec{u}_x \quad (R_B > 0).$$

CNED – FORMATION CPGE

1. On repère le centre de gravité G de la barre via l'angle θ : $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$.

Avec $\overrightarrow{OA} = 2L \sin \theta \overrightarrow{u}_x$, $\overrightarrow{OB} = 2L \cos \theta \overrightarrow{u}_y$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, on obtient :

$$\overrightarrow{OG} = L \sin \theta \overrightarrow{u}_x + L \cos \theta \overrightarrow{u}_y.$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{v}_G = L \dot{\theta} (\cos \theta \overrightarrow{u}_x - \sin \theta \overrightarrow{u}_y) \text{ et } \overrightarrow{a}_G = L (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \overrightarrow{u}_x - L (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \overrightarrow{u}_y.$$

Le vecteur rotation de l'échelle est : $\overrightarrow{\Omega} = \dot{\theta} \overrightarrow{u}_z$.

Le poids est conservatif et les réactions \overrightarrow{R}_A et \overrightarrow{R}_B ne travaillent pas puisqu'il n'y a pas de frottement, l'échelle est donc un système conservatif, son énergie totale $E_m = E_c + E_p$ se

conserve et $\frac{dE_m}{dt} = 0$.

D'après le théorème de Koenig $E_c = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} J \Omega^2$.

Avec $v_G^2 = (L \dot{\theta})^2$, $J = \frac{ML^2}{3}$ et $\Omega^2 = \dot{\theta}^2$ on obtient : $E_c = \frac{2}{3} ML^2 \dot{\theta}^2$.

L'énergie potentielle est celle de pesanteur : $E_p = -M \overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{OG} + cte = MgL \cos \theta + cte$.

Finalement $E_m = \frac{2}{3} ML^2 \dot{\theta}^2 + MgL \cos \theta + cte$, et $\frac{dE_m}{dt} = 0$ donne $\ddot{\theta} = \frac{3g}{4L} \sin \theta$.

On multiplie par $\dot{\theta}$ et on intègre par rapport au temps : $\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} = \frac{3g}{4L} (\cos \theta_0 - \cos \theta)$.

Or, initialement $\theta_0 = 0$ et $\dot{\theta}_0 = 0$, d'où $\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2L} (1 - \cos \theta)$.

2. En remplaçant les expressions précédentes de $\ddot{\theta}$ et $\dot{\theta}^2$ dans l'expression de l'accélération $\overrightarrow{a}_G = L (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \overrightarrow{u}_x - L (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \overrightarrow{u}_y$, on obtient :

$$\overrightarrow{a}_G = \frac{3g}{4} (3 \cos \theta - 2) \sin \theta \overrightarrow{u}_x + \frac{3g}{4} (3 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 1) \overrightarrow{u}_y.$$

3. Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la barre s'écrit : $M \overrightarrow{a}_G = M \overrightarrow{g} + \overrightarrow{R}_A + \overrightarrow{R}_B$.

En projetant sur l'axe Ox on obtient $\overrightarrow{R}_B = \frac{3g}{4} (3 \cos \theta - 2) \sin \theta \overrightarrow{u}_x$.

En projetant sur l'axe Oy on obtient $\overrightarrow{R}_A = \frac{3g}{4} (3 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 1) \overrightarrow{u}_y + mg \overrightarrow{u}_y$, d'où

$$\overrightarrow{R}_A = \frac{3g}{4} \left(3 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + \frac{1}{3} \right) \overrightarrow{u}_y, \text{ ou bien } \overrightarrow{R}_A = \frac{9g}{4} \left(\cos \theta - \frac{1}{3} \right)^2 \overrightarrow{u}_y.$$

4. θ_{dB} s'obtient rapidement, il est tel que $3 \cos \theta_{dB} - 2 = 0$, soit $\theta_{dB} = \arccos \left(\frac{2}{3} \right) = 48,2^\circ$.

θ_{dA} vérifie $\cos \theta_{dA} - \frac{1}{3} = 0$, d'où $\theta_{dA} = \arccos \left(\frac{1}{3} \right) = 70,5^\circ$.

6. Puisque $\theta_{dA} > \theta_{dB}$ on déduit que le contact cesse en d'abord en B, c'est-à-dire que l'échelle se décolle du mur tout en continuant à glisser sur le sol, puis elle se décolle du sol avant la chute finale.

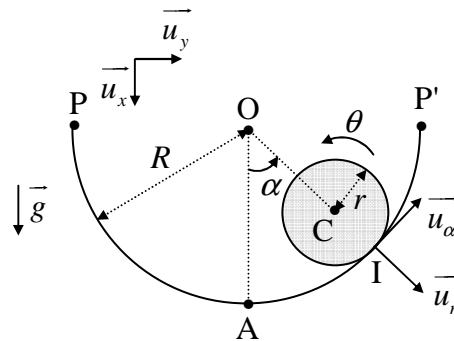
◇ Exercice 13 : Mouvement d'une sphère dans un rail fixe

Une sphère homogène, de centre C , de rayon r et de masse m , est mobile dans un plan vertical en restant en contact avec un rail PP' , de masse M , que l'on modélise par une portion de cercle de centre O et de rayon R , dont l'axe de symétrie est vertical.

Le moment d'inertie de la sphère par rapport à un axe passant par C est $J = \frac{2}{5}mr^2$. Le référentiel fixe orthonormé direct $R_g = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ où \vec{u}_x est vertical dirigé vers le bas est supposé galiléen.

Le mouvement de la sphère est repéré par deux paramètres : l'angle α que fait \vec{OC} avec \vec{u}_x et l'angle de rotation θ autour de l'axe horizontal qui porte \vec{u}_z .

A chaque instant t , on appelle I le point de contact de la sphère avec le rail. On note A le point du rail situé sur son axe de symétrie. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = g\vec{u}_x$.



La sphère roule sans glisser sur le rail fixe. Initialement, elle est au repos et \vec{OC} fait un angle α_0 avec \vec{u}_x . Le système comprend deux degrés de liberté cinématiques, α et θ .

1. Ecrire la condition de roulement sans glissement de la sphère sur le rail sous la forme d'une relation linéaire liant r , R , $\dot{\theta}$ et $\dot{\alpha}$. Contrôler la pertinence de la relation obtenue, d'une part en comparant les signes respectifs de $\dot{\theta}$ et de $\dot{\alpha}$, et d'autre part en analysant la situation lorsque $r = R$.
2. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique totale E_t du système. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\alpha(t)$.
3. Déterminer la période T_{po} des petites oscillations.

On considère deux rails circulaires de même rayon R . Sur chaque rail, on place à l'instant initial une sphère de rayon r , de masse m en des points repérés par le même angle α_0 . Les sphères sont lâchées au même instant, avec une vitesse initiale nulle. Les deux rails sont de nature différente, de sorte que la première sphère roule sans glisser et que la seconde glisse sans rouler.

4. En utilisant des arguments énergétiques qualitatifs, déterminer quelle est la sphère qui arrive la première au point le plus bas A . Le résultat est-il modifié si les masses des sphères sont différentes ?
5. Etablir une expression intégrale du temps τ mis par la sphère la plus rapide pour atteindre le point A . Comment peut-on, sans calcul supplémentaire, obtenir le temps τ' mis par la sphère la plus lente pour atteindre ce point ? Déterminer le rapport $\frac{\tau'}{\tau}$.

CNED – FORMATION CPGE

Solution

On étudie le mouvement de la sphère dans le référentiel R_g galiléen. Elle subit :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_x$;
- la réaction \vec{R} du rail.

1. La vitesse de glissement de la sphère sur le rail s'écrit $\vec{v}_g = \vec{v}_{I \in \text{sphère}} - \vec{v}_{I \in \text{rail}} = \vec{0}$ car il y a non glissement.

Or $\vec{v}_{I \in \text{rail}} = \vec{0}$ car le rail est fixe. La relation de Varignon donne $\vec{v}_{I \in \text{sphère}} = \vec{v}_C + \vec{\Omega} \wedge \vec{CI}$ avec $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}_z$ le vecteur rotation de la sphère et $\vec{CI} = r\vec{u}_r$.

De plus $\vec{v}_C = \frac{d\vec{OC}}{dt} = \frac{d}{dt}((R-r)\vec{u}_r) = (R-r)\dot{\alpha}\vec{u}_\alpha$.

Finalement la condition de roulement sans glissement de la sphère sur le rail s'écrit $(R-r)\dot{\alpha} = -r\dot{\theta}$.

Puisque $R-r > 0$ alors $\dot{\theta}$ et $\dot{\alpha}$ sont de signe opposé, ce qui est cohérent puisque si la sphère roule vers la gauche en descendant alors $\dot{\theta} > 0$ et $\dot{\alpha} < 0$.

Si $r = R$ la sphère est de même taille que le rail et elle ne peut pas rouler sans glisser et $\dot{\theta} = 0$.

2. L'énergie mécanique totale de la sphère est $E_t = E_c + E_p$.

L'énergie cinétique s'écrit via le théorème de Koenig :

$$E_c = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J\Omega^2 = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5}mr^2\dot{\theta}^2.$$

La condition de roulement sans glissement $r^2\dot{\theta}^2 = (R-r)^2\dot{\alpha}^2$ donne finalement

$$E_c = \frac{7}{10}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2.$$

La réaction \vec{R} ne travaille pas puisqu'il y a roulement sans glissement, on peut lui affecter une énergie potentielle constante.

L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit $E_p = -mgx_C + cte$ puisque \vec{u}_x est descendant.

Finalement $E_p = -mg(R-r)\cos\alpha + cte$ et $E_t = \frac{7}{10}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2 - mg(R-r)\cos\alpha + cte$.

\vec{R} ne travaillant pas et \vec{P} étant conservatif, l'énergie mécanique totale de la sphère est stationnaire et $\frac{dE_t}{dt} = 0$.

Or $\frac{dE_t}{dt} = \frac{7}{10}m(R-r)^2 2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + mg(R-r)\dot{\alpha}\sin\alpha$ et on déduit l'équation différentielle vérifiée

par la fonction $\alpha(t)$: $\ddot{\alpha} + \frac{5g}{7(R-r)}\sin\alpha = 0$.

3. Pour les oscillations de faible amplitude $\alpha \ll 1 \text{ rad}$ et $\sin\alpha \approx \alpha$ on obtient l'équation

différentielle d'un oscillateur harmonique $\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$ dont la solution

générale est de la forme $\alpha(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$, ce mouvement est sinusoïdal de période

$$T_{po} = \frac{2\pi}{\omega_0}, \text{ soit } T_{po} = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}.$$

CNED – FORMATION CPGE

4. Pour la sphère qui roule sans glisser : $\Delta E_t = 0 = \frac{7}{10} m(R-r)^2 \dot{\alpha}^2 - mg(R-r)(\cos \alpha - 1)$,
d'où $\dot{\alpha}^2 = \frac{10g}{7(R-r)}(1 - \cos \alpha)$.

Pour la sphère qui glisse sans rouler : $\Delta E_t' = 0 = \frac{1}{2} m(R-r)^2 \dot{\alpha}^2 - mg(R-r)(\cos \alpha - 1)$, d'où
 $\dot{\alpha}^2 = \frac{2g}{(R-r)}(1 - \cos \alpha)$.

Or $2 > \frac{10}{7}$ donc la sphère qui glisse va le plus vite et arrive la première au point le plus bas A.

On peut expliquer cela de la manière suivante : pour les deux sphères la variation d'énergie potentielle de pesanteur est la même.

Pour la sphère qui roule sans glisser la réaction ne travaille pas, l'énergie potentielle de pesanteur est convertie en énergie cinétique de translation et en énergie cinétique de rotation.

Pour la sphère qui glisse sans rouler la réaction ne travaille pas non plus sinon sa composante tangentielle la ferait rouler, l'énergie potentielle de pesanteur est convertie uniquement en énergie cinétique de translation, c'est donc elle qui va le plus vite et qui arrive la première au point le plus bas A.

Dans les deux cas $\dot{\alpha}^2(\alpha)$ ne dépend pas de la masse donc le résultat n'est pas modifié si les masses des sphères sont différentes.

5. Pour la sphère qui glisse sans rouler : $\dot{\alpha}^2 = \frac{2g}{(R-r)}(1 - \cos \alpha)$.

D'où $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{(R-r)}(1 - \cos \alpha)}$ (car $\dot{\alpha} < 0$).

On en déduit $dt = -\sqrt{\frac{(R-r)}{2g(1 - \cos \alpha)}} d\alpha$ et en intégrant $\tau = -\int_{\alpha_0}^0 \sqrt{\frac{(R-r)}{2g(1 - \cos \alpha)}} d\alpha$ ou bien

$$\tau = \int_0^{\alpha_0} \sqrt{\frac{(R-r)}{2g(1 - \cos \alpha)}} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} f(\alpha_0).$$

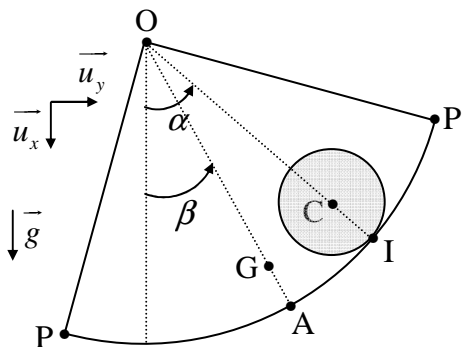
De même pour la sphère qui roule sans glisser : $\tau' = \int_0^{\alpha_0} \sqrt{\frac{7(R-r)}{10g(1 - \cos \alpha)}} d\alpha = \sqrt{\frac{7}{10}} f(\alpha_0)$.

On en déduit : $\frac{\tau'}{\tau} = \sqrt{\frac{7}{5}}$.

◇ Exercice 14 : Mouvement d'une sphère dans un rail suspendu

On reprend l'exercice précédent mais cette fois la bille roule sur une piste de forme circulaire suspendue en un point, le couplage entre la bille et la piste engendre un mouvement spectaculaire, objet de cet exercice.

Les points P et P' sont attachés en O par des fils inextensibles de masse négligeable, ce qui permet au rail d'osciller autour de l'axe horizontal passant par O. La position du milieu A du rail est repérée par l'angle β . Le centre de masse G du rail se trouve à chaque instant sur la droite OA à une distance ℓ de O. On note $J' = MR^2$ le moment d'inertie du rail par rapport à son axe de rotation. On appelle respectivement N et T les composantes de la force de réaction du rail sur la sphère au point I selon \vec{u}_r et \vec{u}_α . La sphère roule sans glisser sur le rail, qui est maintenant en forme de quart de cercle, les grandeurs α et θ sont les mêmes que celles utilisées dans l'exercice précédent.



1. Ecrire la condition de roulement sans glissement reliant de $\dot{\theta}$, $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$.
2. Exprimer dans R_g le moment cinétique $\overline{\sigma}_{IC}$ de la sphère en C et en déduire l'expression du moment cinétique $\overline{\sigma}_{IO}$ de la sphère en O.
3. Exprimer dans R_g le moment cinétique $\overline{\sigma}_{2O}$ du rail en O.
4. Exprimer dans R_g , l'énergie cinétique E_{cs} de la sphère, l'énergie cinétique E_{cr} du rail et enfin l'énergie cinétique E_{ct} de l'ensemble rail-sphère.
5. Appliquer le théorème du moment cinétique en O à l'ensemble rail-sphère et en déduire une équation différentielle liant les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.
6. Appliquer le théorème du moment cinétique en C à la sphère seule et en déduire l'expression de T en fonction de $\dot{\theta}$, puis, en utilisant le résultat de la question 1, en fonction de $\ddot{\alpha}$ et $\ddot{\beta}$.
7. Appliquer le théorème du moment cinétique en O au rail seul et en déduire la relation différentielle : $A\ddot{\beta} - B\ddot{\alpha} = -Mg\ell \sin \beta$ (1). On exprimera la constante A en fonction de M , m et R et la constante B en fonction de m , r et R .
8. Déduire des résultats précédents la relation : $A'\ddot{\alpha} - B'\ddot{\beta} = -mg(R-r) \sin \alpha$ (2). On exprimera la constante A' en fonction de m , r et R . Vérifier que l'équation (2) est en accord avec le résultat de la question 2 de l'exercice précédent.
9. Retrouvez les équations (1) et (2) à partir de considérations énergétiques. Démontrer que $AA' > B^2$.
10. Que traduit l'absence de termes en $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ dans les équations (1) et (2) ?

On considère maintenant que les angles α et β sont l'un et l'autre voisins de zéro, ce qui permet de linéariser les équations (1) et (2). On pose $D = Mg\ell$ et $D' = mg(R - r)$.

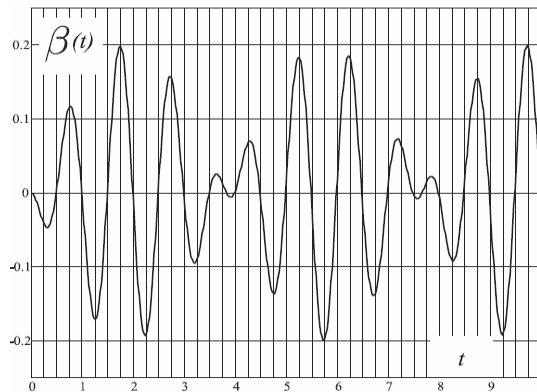
On cherche les solutions du système linéarisé sous la forme : $\alpha(t) = \text{Re}(\underline{\alpha}_0 e^{j\omega t})$ et $\beta(t) = \text{Re}(\underline{\beta}_0 e^{j\omega t})$ (3), où $\underline{\alpha}_0$ et $\underline{\beta}_0$ sont deux nombres complexes, $j^2 = -1$.

On appelle pulsation propre du système tout réel positif ω qui permet d'obtenir des solutions *non nulles* du système linéarisé sous la forme (3).

11. Déterminer les pulsations propres ω_1 et ω_2 du système ($\omega_1 > \omega_2$) en fonction de A , A' , B , D et D' .

12. Montrer que si $\alpha_0 \neq 0$, la solution β du système linéarisé est une fonction de la forme : $\beta(t) = \eta [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)]$. On ne cherchera pas forcément à déterminer la constante η en fonction des paramètres du système.

On réalise le montage expérimental avec les paramètres physiques suivants : $r = 1,27 \cdot 10^{-2}$ m, $R = 19 \cdot 10^{-2}$ m, $M = 90 \cdot 10^{-3}$ kg, $m = 67 \cdot 10^{-3}$ kg, $\ell = 17,7 \cdot 10^{-2}$ m et $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On dispose d'un système de mesure qui permet d'enregistrer la valeur de l'angle β en fonction du temps. Pour une condition initiale $\beta(t=0) = 0$, avec α_0 suffisamment faible, on obtient l'enregistrement représenté sur la figure suivante :



13. Déterminer à partir de cette figure, une valeur approximative des pulsations propres du système expérimental. Cette estimation est-elle compatible avec les valeurs théoriques ?

Solution

1. La vitesse de glissement de la sphère sur le rail s'écrit $\vec{v}_g = \vec{v}_{I \in \text{sphère}} - \vec{v}_{I \in \text{rail}} = \vec{0}$ car il y a non glissement.

La relation de Varignon donne $\vec{v}_{I \in \text{sphère}} = \vec{v}_C + \vec{\Omega} \wedge \vec{CI}$ avec $\vec{v}_C = (R - r)\dot{\alpha} \vec{u}_\alpha$, $\vec{\Omega}_{\text{sphère}} = \dot{\theta} \vec{u}_z$ le vecteur rotation de la sphère et $\vec{CI} = r \vec{u}_r$, soit $\vec{v}_{I \in \text{sphère}} = [(R - r)\dot{\alpha} + r\dot{\theta}] \vec{u}_\alpha$.

Attention ici $\vec{v}_{I \in \text{rail}} \neq \vec{0}$ car le rail est mobile.

La relation de Varignon donne $\vec{v}_{I \in \text{rail}} = \vec{v}_O + \vec{\Omega}_{\text{rail}} \wedge \vec{OI}$ avec $\vec{v}_O = \vec{0}$ (O est fixe), $\vec{\Omega}_{\text{rail}} = \dot{\beta} \vec{u}_z$ le vecteur rotation du rail et $\vec{OI} = R \vec{u}_r$, $\vec{v}_{I \in \text{rail}} = R\dot{\beta} \vec{u}_\alpha$.

Finalement la condition de roulement sans glissement de la sphère sur le rail s'écrit $(R - r)\dot{\alpha} + r\dot{\theta} = R\dot{\beta}$.

CNED – FORMATION CPGE

2. Le moment cinétique de la sphère en C est son moment cinétique barycentrique

$$\overline{\sigma}_{1C} = J \overline{\Omega}_{\text{sphère}}, \text{ soit } \boxed{\overline{\sigma}_{1C} = \frac{2}{5} m r^2 \dot{\theta} \overline{u}_z}.$$

$\overline{\sigma}_{1O}$ s'écrit via le théorème de Koenig $\overline{\sigma}_{1O} = \overline{OC} \wedge m \overline{v}_C + \overline{\sigma}_{1C}$.

Or $\overline{OC} = (R-r) \overline{u}_r$ et $\overline{v}_C = (R-r) \dot{\alpha} \overline{u}_\alpha$, d'où :

$$\boxed{\overline{\sigma}_{1O} = \left[m(R-r)^2 \dot{\alpha} + \frac{2}{5} m r^2 \dot{\theta} \right] \overline{u}_z}.$$

3. Le moment cinétique du rail en O est son moment cinétique barycentrique $\overline{\sigma}_{2O} = J' \overline{\Omega}_{\text{rail}}$,

$$\text{soit } \boxed{\overline{\sigma}_{2O} = M R^2 \dot{\beta} \overline{u}_z}.$$

4. L'énergie cinétique de la sphère s'écrit via le théorème de Koenig $E_{cS} = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J \Omega_{\text{sphère}}^2$,

$$\text{soit } \boxed{E_{cS} = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{5} m r^2 \dot{\theta}^2}.$$

L'énergie cinétique du rail est son énergie cinétique barycentrique $E_{cR} = \frac{1}{2} J' \Omega_{\text{rail}}^2$,

$$\text{soit } \boxed{E_{cR} = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\beta}^2}.$$

Finalement l'énergie cinétique de l'ensemble rail-sphère est :

$$\boxed{E_{cT} = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{5} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\beta}^2}.$$

5. L'ensemble rail-sphère subit son poids $\overline{P} = m g \overline{u}_x + M g \overline{u}_x$, les tensions des deux fils (dont le moment en O est nul) et les deux réactions en I qui s'annulent (forces intérieures).

Le moment en O du poids s'écrit (attention au point d'application de chaque poids) :

$$\begin{aligned} \overline{M}_O(\overline{P}) &= \overline{OC} \wedge m \overline{g} + \overline{OG} \wedge M \overline{g} \\ &= (R-r) \left(\cos \alpha \overline{u}_x + \sin \alpha \overline{u}_y \right) \wedge m g \overline{u}_x + \ell \left(\cos \beta \overline{u}_x + \sin \beta \overline{u}_y \right) \wedge M g \overline{u}_x \\ &= - \left(m g (R-r) \sin \alpha + M g \ell \sin \beta \right) \overline{u}_z \end{aligned}$$

Le théorème du moment cinétique s'écrit $\frac{d\overline{\sigma}_{1O}}{dt} + \frac{d\overline{\sigma}_{2O}}{dt} = \overline{M}_O(\overline{P})$, on obtient alors :

$$m(R-r)^2 \ddot{\alpha} + \frac{2}{5} m r^2 \ddot{\theta} + M R^2 \ddot{\beta} = -m g (R-r) \sin \alpha - M g \ell \sin \beta$$

Or $(R-r) \dot{\alpha} + r \dot{\theta} = R \dot{\beta}$, donc $\ddot{\theta} = \frac{R}{r} \ddot{\beta} - \left(\frac{R-r}{r} \right) \ddot{\alpha}$, et on obtient :

$$\boxed{m(R-r) \left(R - \frac{7}{5} r \right) \ddot{\alpha} + \left(M R^2 + \frac{2}{5} m r R \right) \ddot{\beta} = -m g (R-r) \sin \alpha - M g \ell \sin \beta}$$

6. Appliquons le théorème du moment cinétique en C à la sphère seule :

$$\frac{d\overline{\sigma}_{1C}}{dt} = \overline{M}_C(\overline{P}) + \overline{M}_C(\overline{R}).$$

CNED – FORMATION CPGE

$$\text{Or } \overline{\sigma}_{1C} = \frac{2}{5}mr^2\overline{\theta u_z}, \quad \overline{M}_C(\overline{P}) = \overline{CC} \wedge m\overline{g} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overline{M}_C(\overline{R}) = \overline{CI} \wedge \overline{R} = r\overline{u_r} \wedge (N\overline{u_r} + T\overline{u_\alpha}) = rT\overline{u_z},$$

$$\text{d'où } \boxed{T = \frac{2}{5}mr\ddot{\theta}}.$$

$$\text{Or } (R-r)\dot{\alpha} + r\dot{\theta} = R\dot{\beta}, \text{ d'où } \ddot{\theta} = \frac{R}{r}\ddot{\beta} - \left(\frac{R-r}{r}\right)\ddot{\alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{T = \frac{2}{5}m[R\ddot{\beta} - (R-r)\ddot{\alpha}]}.$$

7. Le rail subit son poids $\overline{P} = M\overline{g}$, la réaction de la sphère $-\overline{R}$ et les tensions des deux fils. Appliquons le théorème du moment cinétique en O au rail seul :

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\sigma}_{2O}}{dt} &= \overline{M}_O(\overline{P}) + \overline{M}_O(-\overline{R}) \\ &= \overline{OG} \wedge M\overline{g} + \overline{OI} \wedge (-\overline{R}) \\ &= \ell(\cos\beta\overline{u_x} + \sin\beta\overline{u_y}) \wedge Mg\overline{u_x} + R\overline{u_r} \wedge (-N\overline{u_r} - T\overline{u_\alpha}) \\ &= -Mg\ell \sin\beta\overline{u_z} - RT\overline{u_z} \end{aligned}$$

Avec $\overline{\sigma}_{2O} = MR^2\dot{\beta}\overline{u_z}$ on obtient $MR^2\ddot{\beta} = -Mg\ell \sin\beta - RT$.

$$\text{Or } T = \frac{2}{5}mr \left[\frac{R}{r}\ddot{\beta} - \left(\frac{R}{r}-1\right)\ddot{\alpha} \right], \text{ donc } MR^2\ddot{\beta} = -Mg\ell \sin\beta - R\frac{2}{5}mr \left[\frac{R}{r}\ddot{\beta} - \left(\frac{R}{r}-1\right)\ddot{\alpha} \right];$$

$$\text{On obtient } \boxed{\left(M + \frac{2}{5}m\right)R^2\ddot{\beta} - \frac{2}{5}mR(R-r)\ddot{\alpha} = -Mg\ell \sin\beta}.$$

$$\text{Par identification : } \boxed{A = \left(M + \frac{2}{5}m\right)R^2} \quad \text{et} \quad \boxed{B = \frac{2}{5}mR(R-r)}.$$

8. On élimine $Mg\ell \sin\beta$ dans le résultat de la question 5 :

$$m(R-r) \left(R - \frac{7}{5}r \right) \ddot{\alpha} + \left(MR^2 + \frac{2}{5}mrR \right) \ddot{\beta} = -mg(R-r) \sin\alpha - Mg\ell \sin\beta$$

et celui de la question précédente $\left(M + \frac{2}{5}m\right)R^2\ddot{\beta} - \frac{2}{5}mR(R-r)\ddot{\alpha} = -Mg\ell \sin\beta$, on déduit:

$$m(R-r) \left(R - \frac{7}{5}r \right) \ddot{\alpha} + \left(MR^2 + \frac{2}{5}mrR \right) \ddot{\beta} = -mg(R-r) \sin\alpha + \left(M + \frac{2}{5}m \right) R^2 \ddot{\beta} - \frac{2}{5}mR(R-r)\ddot{\alpha}$$

$$\text{soit } \boxed{\frac{7}{5}m(R-r)^2\ddot{\alpha} - \frac{2}{5}mR(R-r)\ddot{\beta} = -mg(R-r) \sin\alpha}.$$

$$\text{Par identification : } \boxed{A' = \frac{7}{5}m(R-r)^2} \quad \text{et} \quad \boxed{B' = \frac{2}{5}mR(R-r)}.$$

Si le rail est fixe $\dot{\beta} = 0$ et on retrouve le résultat de la question 2 de l'exercice précédent.

9. Appliquons le théorème de l'énergie mécanique qui dit que la dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique est égale à la puissance des forces non conservatives.

$$\text{Au rail : } \frac{dE_{\text{rR}}}{dt} = P(-\overline{T}). \quad \text{Or } E_{\text{rR}} = E_{\text{cR}} + E_{\text{pR}} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\beta}^2 - Mg\ell \cos\beta + cte \quad \text{et}$$

$$P(-\overline{T}) = -\overline{T} \cdot \overline{v_{I \in \text{rail}}} = -T\overline{u_\alpha} \cdot R\dot{\beta}\overline{u_\alpha} = -TR\dot{\beta}.$$

$$\text{Or } T = \frac{2}{5}m[R\ddot{\beta} - (R-r)\ddot{\alpha}] \quad \text{et} \quad P(-\overline{T}) = -\frac{2}{5}mR[R\dot{\beta}\ddot{\beta} - (R-r)\dot{\beta}\ddot{\alpha}].$$

CNED – FORMATION CPGE

On a alors $\frac{dE_{tR}}{dt} = MR^2 \dot{\beta}\ddot{\beta} + Mg\ell \dot{\beta} \sin \beta$.

On obtient bien, en simplifiant par $\dot{\beta}$, le résultat de la question 7.

De même pour la sphère : $\frac{dE_{tS}}{dt} = P(\vec{T}) = -\frac{2}{5}mR[R\dot{\beta}\ddot{\beta} - (R-r)\dot{\beta}\ddot{\alpha}]$.

Or $E_{tS} = \frac{1}{2}m(R-r)^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{5}mr^2 \dot{\theta}^2 - mg(R-r) \cos \alpha + cte$ et

$$\frac{dE_{tS}}{dt} = m(R-r)^2 \dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \frac{2}{5}mr^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} + mg(R-r)\dot{\alpha} \sin \alpha.$$

Avec $\dot{\theta} = \frac{R}{r}\dot{\beta} - \left(\frac{R-r}{r}\right)\dot{\alpha}$ et $\ddot{\theta} = \frac{R}{r}\ddot{\beta} - \left(\frac{R-r}{r}\right)\ddot{\alpha}$ et en simplifiant par $\dot{\alpha}$, on obtient bien le résultat de la question 8.

En reportant les expressions de A , A' et B :

$$AA' - B^2 = \left(M + \frac{2}{5}m\right)R^2 \cdot \frac{7}{5}m(R-r)^2 - \left(\frac{2}{5}mR(R-r)\right)^2 \text{ on obtient :}$$

$$AA' - B^2 = \frac{7}{5}MmR^2(R-r)^2 + \frac{2}{5}(mR(R-r))^2 = \frac{1}{5}mR^2(R-r)^2(7M+2m) \text{ et donc } \boxed{AA' > B^2}.$$

10. Les équations (1) et (2) ne contiennent pas de termes en $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ car on ne considère pas les frottements fluide.

11. Puisque les angles α et β sont l'un et l'autre voisins de zéro on peut écrire $\sin \alpha = \alpha$ et $\sin \beta = \beta$.

En posant $D = Mg\ell$ et $D' = mg(R-r)$ on obtient le système :
$$\begin{cases} A\ddot{\beta} - B\ddot{\alpha} = -D\beta \\ A'\ddot{\alpha} - B'\ddot{\beta} = -D'\alpha \end{cases}$$

En utilisant les grandeurs complexes $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{\beta} = \underline{\beta}_0 e^{j\omega t}$ on obtient le système :

$$\begin{cases} (D - A\omega^2)\underline{\beta}_0 + B\omega^2 \underline{\alpha}_0 = 0 \\ B\omega^2 \underline{\beta}_0 + (D' - A'\omega^2)\underline{\alpha}_0 = 0 \end{cases}$$

On cherche des solutions non nulles pour ω , il faut que le déterminant du système soit nul, soit :

$$(D - A\omega^2)(D' - A'\omega^2) - B^2\omega^4 = 0, \text{ ou bien : } (AA' - B^2)\omega^4 - (A'D + AD')\omega^2 + DD' = 0.$$

Le discriminant de cette équation du 2nd degré en ω^2 est :

$$\Delta = (A'D + D'A)^2 - 4(AA' - B^2)DD'.$$

En développant et en refactorisant on peut écrire $\Delta = (A'D - D'A)^2 + 4B^2DD'$, d'où $\Delta > 0$.

On en déduit les deux solutions positives :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{A'D + DA' + \sqrt{\Delta}}{2(AA' - B^2)}} \text{ et } \omega_2 = \sqrt{\frac{A'D + DA' - \sqrt{\Delta}}{2(AA' - B^2)}} \text{ telles que } \omega_1 > \omega_2.$$

12. Les solutions α et β sont des combinaisons linéaires des modes propres et on a donc : $\alpha = a \cos(\omega_1 t) + b \cos(\omega_2 t)$ et $\beta = a' \cos(\omega_1 t) + b' \cos(\omega_2 t)$.

Puisque $\beta(t=0) = 0$ alors $a' = -b' = \eta$ et $\boxed{\beta(t) = \eta [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)]}$.

CNED – FORMATION CPGE

13. On peut aussi écrire $\beta(t) = 2\eta \sin\left(\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right) \sin\left(\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right)$ et on observe bien sur le graphe de la figure un sinus modulant un autre sinus.

La plus petite période T_p correspond à la plus grande pulsation $T_p = 2\pi \frac{2}{\omega_1 + \omega_2}$ et on en

compte 11 en 10 s, d'où $T_p = 0,91$ s et $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 6,9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

La plus grande période T_g correspond à la plus petite pulsation $T_g = 2\pi \frac{2}{\omega_1 - \omega_2}$ et on en

compte 1 en 7,6 s, d'où $T_g = 7,6$ s et $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = 0,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On obtient $\boxed{\omega_1^{\text{exp}} = 7,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$ et $\boxed{\omega_2^{\text{exp}} = 6,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$.

Avec les valeurs numériques données on obtient $\omega_1^{\text{th}} = 7,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_2^{\text{th}} = 5,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

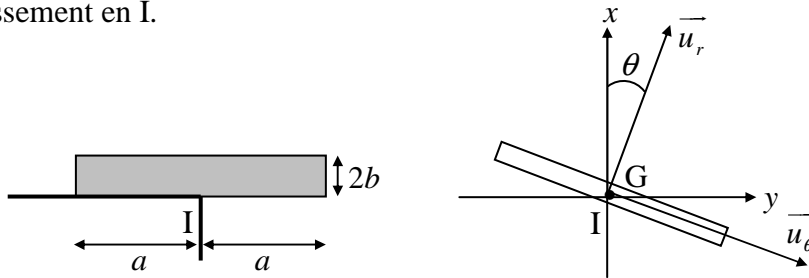
Les estimations expérimentales sont compatibles avec les valeurs théoriques, l'écart doit sans doute provenir, d'une part de la linéarisation (il faut que $\theta < 11^\circ$ pour que $\sin \theta \approx \theta$) et des frottements visqueux qui ont été négligés.

◇ Exercice 15 : Chute d'une tartine beurrée

Ce problème propose une étude simplifiée de la chute d'une tartine beurrée posée sur le bord d'une table afin de déterminer la face qui rencontre le sol. Pourquoi est-ce toujours la face beurrée ?

Une tartine modélisée par un parallélépipède rectangle droit, homogène, de dimensions $2a$, $2b$ et $2c$, de centre d'inertie G , de masse m , est posée sur le bord d'une table dans la position du schéma (G à la verticale de I).

Dans cette position instable, elle subit une action très faible qui provoque son basculement autour de I , sans lui donner de vitesse initiale. On admettra qu'au début du mouvement il n'y a pas de glissement en I .



L'action de la table sera représentée par une force $\vec{R} = T\vec{u}_\theta + N\vec{u}_r$, orthogonale à l'arête du coin, dans le plan contenant G .

Soit (Δ) l'axe parallèle au coin de la table passant par I , le moment d'inertie de la tartine par

rapport à cet axe est $I_{(\Delta)} = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}$.

1. La tartine est-elle un système conservatif ?
2. Déterminer $\dot{\theta}$ en fonction de θ . En déduire $\ddot{\theta}$ en fonction de θ .
3. Ecrire le théorème de la résultante dynamique. En déduire T et N en fonction de θ .

Application numérique : $a = 4$ cm et $b = 0,4$ cm. Représenter $-\frac{T}{mg}$ et $\frac{N}{mg}$ en fonction de θ .

4. La tartine peut-elle quitter le coin de la table sans glisser ?
5. La tartine commence à glisser pour $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$. Evaluer le coefficient de frottement f .

On s'intéresse maintenant à la chute de la tartine. A partir du moment où elle commence à glisser, la tartine quitte très rapidement la table et se trouve en chute libre à partir de $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$.

6. Déterminer $\frac{d\theta}{dt}(\theta_0)$.

On néglige les frottements de l'air.

7. Montrer que la vitesse de rotation reste constante.
8. Déterminer l'équation du mouvement de G en fonction du temps. En déduire le temps de chute si la hauteur de la table est h .
9. Quel est l'angle dont a tourné la tartine lorsqu'elle heurte le sol ? Application numérique : $h = 70$ cm. Conclusion,
10. Pour quelle hauteur de la table la tartine ne tombe-t-elle plus sur le côté beurré ? Quelle serait la taille du géant qui utiliserait cette table ?

CNED – FORMATION CPGE

Solution

On étudie le mouvement d'une tartine beurrée dans le référentiel terrestre galiléen. Elle subit son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_x$ uniforme et vertical (qui s'applique en G) et la réaction $\vec{R} = T\vec{u}_\theta + N\vec{u}_r$ de l'arête de la table (qui s'applique en I, point de contact entre la tartine et le coin de la table).

1. Le poids \vec{P} est une force conservative. Puisqu'il y a non glissement la puissance des actions de contact est nulle, \vec{R} ne travaille pas. On en déduit que l'énergie mécanique totale de la tartine se conserve.

2. L'énergie mécanique de la tartine s'écrit : $E_m = E_c + E_p$.

Le mouvement de la tartine est une rotation autour d'un axe fixe passant par G donc

$E_c = E_c^* = \frac{1}{2}I\Omega^2$ où $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation de la tartine : $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}_z$ (\vec{u}_z le vecteur de base perpendiculaire au plan de la figure), soit $E_c = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$.

L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit $E_p = -m\vec{g} \cdot \vec{IG} + cte$, soit :

$$E_p = -m(-g\vec{u}_x) \cdot (b \cos \theta \vec{u}_x + b \sin \theta \vec{u}_y) + cte = mgb \cos \theta + cte.$$

Finalement $E_m = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgb \cos \theta + cte$.

Puisque E_m se conserve : $E_m(\theta) = E_m(\theta=0)$, soit $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgb \cos \theta + cte = mgb + cte$.

On en déduit $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2mgb(1 - \cos \theta)}{I}}$.

Dérivons la relation $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgb \cos \theta = mgb$ par rapport au temps :

$$\frac{1}{2}I \cdot 2\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgb\dot{\theta} \sin \theta = 0. \text{ On obtient alors } \ddot{\theta} = \frac{mgb \sin \theta}{I}.$$

3. Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la tartine dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit $m\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{R}$.

Dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$: $\vec{a}_G = \frac{d^2\vec{IG}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(b\vec{u}_r) = b(-\dot{\theta}^2\vec{u}_r + \ddot{\theta}\vec{u}_\theta)$,

$\vec{P} = -mg\vec{u}_x = mg(-\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$ et $\vec{R} = T\vec{u}_\theta + N\vec{u}_r$.

En projetant sur $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ on obtient $\begin{cases} -mb\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + N \\ mb\ddot{\theta} = mg \sin \theta + T \end{cases}$.

Avec $\dot{\theta}^2 = \frac{2mgb(1 - \cos \theta)}{I}$, $\ddot{\theta} = \frac{mgb \sin \theta}{I}$ et $I = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}$, on obtient :

$$T = mg \left(\frac{2b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \right) \sin \theta \text{ et } N = mg \left[\left(\frac{a^2 + 7b^2}{a^2 + b^2} \right) \cos \theta - \frac{6b^2}{a^2 + b^2} \right].$$

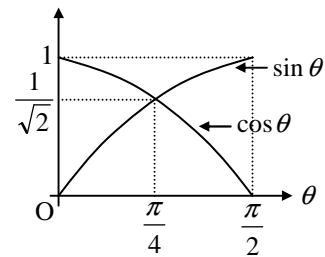
Application numérique : $a = 4 \text{ cm}$ et $b = 0,4 \text{ cm}$. On a alors $a^2 = 100b^2$.

CNED – FORMATION CPGE

On a alors $\frac{T}{mg} = -\frac{98}{101} \sin \theta \approx -\sin \theta$ et $\frac{N}{mg} = \frac{107 \cos \theta - 6}{101} \approx \cos \theta$.

On représente les normes des composantes en fonction de θ :

4. La tartine quitte la table en θ_d appelé angle de décrochage, tel que $N(\theta_d) = 0$, soit $\theta_d = \text{Arc cos} \frac{6}{107} = 86,8^\circ$.



La tartine commence à glisser en θ_g quand $\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$, ou bien

$$-T = fN \text{ c'est-à-dire } \frac{98}{101} \sin \theta_g = f \left(\frac{107}{101} \cos \theta_g - \frac{6}{101} \right).$$

Graphiquement on observe $\theta_g < \theta_d$, le glissement apparaît avant le décrochage, donc la tartine ne peut pas quitter le coin de la table sans glisser.

5. On remarque que $\frac{98}{101} \sin \theta_g \approx f \left(\frac{107}{101} \cos \theta_g - \frac{6}{101} \right)$ s'écrit $\sin \theta_g \approx f \cos \theta_g$, ou bien $f \approx \tan \theta_g$.

Puisque $\theta_g = \frac{\pi}{4}$, on en déduit $f \approx 1$.

6. Avec $\dot{\theta}^2 = \frac{2mgb(1-\cos \theta)}{I}$ et $I = \frac{m(a^2+b^2)}{3}$, on obtient : $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{6bg}{a^2+b^2}(1-\cos \theta)}$.

$$\text{En } \theta = \theta_0 : \dot{\theta}(\theta_0) = \sqrt{\frac{6bg}{a^2+b^2}(1-\cos \theta_0)}.$$

$$\text{Avec } \theta_0 = \frac{\pi}{4} \text{ et } a^2 = 100b^2, \dot{\theta}(\theta_0) = \sqrt{\frac{6g}{101b} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = 6,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

7. Lors de sa chute la tartine n'est soumise qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_x$ (qui s'applique en G).

Le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique s'écrit

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{M}_G(\vec{P}) = \vec{GG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}.$$

On en déduit $\vec{\sigma}_G = \vec{cte}$. Or $\vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}^* = I\vec{\omega}$, d'où $\omega = \dot{\theta} = cte = \dot{\theta}(\theta_0)$, la vitesse de rotation de la tartine reste constante.

8. On considère la chute libre de la tartine et on repère son centre de gravité G.

L'altitude initiale de G est $x_0 = b - b \sin \theta_0 = 0,12 \text{ cm}$. Son vecteur vitesse initial : $\vec{v}_0 = b\dot{\theta}_0\vec{u}_\theta$, soit $v_0 = b\dot{\theta}_0 = 0,026 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. z_0 est négligeable devant la hauteur de chute $h = 70 \text{ cm}$ et v_0 est négligeable devant la vitesse en fin de chute de l'ordre de $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On en déduit que l'on peut considérer la chute libre verticale avec, pour G, position initiale nulle et vitesse initiale nulle.

La tartine n'est soumise qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_x$.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la tartine dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit $m\vec{a}_G = \vec{P}$.

$$\text{Avec } \vec{a}_G = \ddot{x}\vec{u}_x \text{ on obtient } \ddot{x} = -g. \text{ En intégrant } \dot{x} = -gt \text{ et } x = -\frac{gt^2}{2}.$$

CNED – FORMATION CPGE

Le temps de chute τ de la tartine est tel que $x(\tau) = -h$, soit $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, $\tau = 0,37 \text{ s}$.

9. Puisque $\omega = \dot{\theta} = cte = \dot{\theta}_0$, on en déduit en intégrant : $\theta = \dot{\theta}_0 t + \theta_0$.

A la fin du mouvement $\theta_f = \dot{\theta}_0 \tau + \theta_0$.

Lorsque la tartine heurte le sol elle a tourné d'un angle $\theta_f = 3,25 \text{ rad} = 186^\circ 23' 33''$.

Cet angle est légèrement supérieur à π , la tartine fait plus d'un demi-tour mais moins d'un tour.

On en déduit qu'elle tombe sur le côté beurré.

10. Pour que la tartine arrive côté non-beurré il faut qu'elle tourne de $\theta'_f = 2\pi - \theta_0$, ce qui

correspond à un temps de chute τ' tel que $\dot{\theta}_0 \tau' + \theta_0 = 2\pi - \theta_0$, soit $\tau' = \frac{2(\pi - \theta_0)}{\dot{\theta}_0} = 0,71 \text{ s}$.

Ce temps de chute correspond à une hauteur de chute $h' = \frac{g}{2} \tau'^2 = 2,55 \text{ m}$.

Si une personne de 1,80 m utilise une table de 0,7 m, une règle de 3 nous permet de déduire qu'une table de 2,55 m est utilisée par une personne de $\frac{1,8 \times 2,55}{0,7} = 6,56 \text{ m}$.

Le géant qui utiliserait la table suffisamment haute pour que la tartine tombe sur le côté non-beurré mesure plus de $\boxed{6 \text{ m } 50}$!!

◇ Exercice 16 : Etude d'un accélérographe mécanique

Le but de l'exercice est d'étudier un accélérographe construit à l'aide d'un oscillateur mécanique. Les trois parties sont largement indépendantes. On prendra pour l'intensité du champ de pesanteur terrestre $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

I/ Etude sommaire

Dans un référentiel R galiléen muni du repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on considère un corps solide (S) de masse $m = 0,1 \text{ kg}$ et de centre d'inertie G pouvant se déplacer sans frottement solide le long de l'axe horizontal Ox (figure 1) ; G est relié au point E par un ressort de raideur k ; (S) est en outre soumis à une force de frottement visqueux de la forme $-\beta \vec{v}_G$ où \vec{v}_G est la vitesse de G par rapport à E.

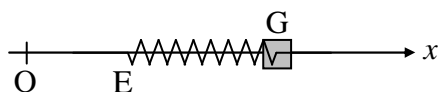


Figure 1

On repère la position de G par l'écart à la position d'équilibre ℓ_0 par la relation $x = EG - \ell_0$. Dans un premier temps, E est fixe en O.

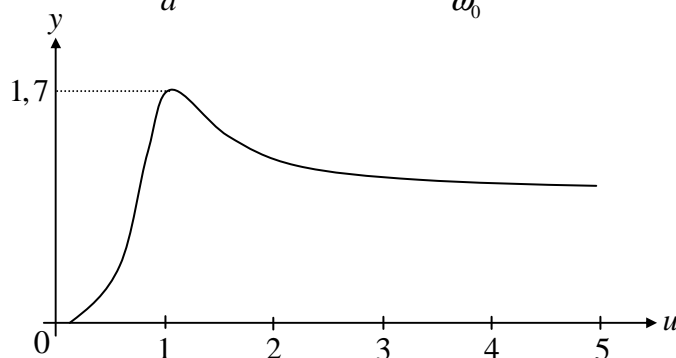
On écarte G de sa position d'équilibre vers la droite, d'une distance $x_0 = 10 \text{ cm}$ et on le lâche sans vitesse initiale.

1. Déterminer l'équation du mouvement ; on posera $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $2\lambda = \frac{\beta}{m}$.
2. Déterminer $x(t)$ dans le cas d'un régime pseudo-périodique.
3. La durée séparant 10 passages de G par la position d'équilibre, de droite à gauche, est $\Delta t = 12 \text{ s}$. Par ailleurs, l'amplitude de la dixième oscillation est $x_1 = 7,5 \text{ cm}$. En déduire les valeurs de la pseudo-pulsation, de β et de k .

Le point E est maintenant solidaire d'un solide en vibration dans R. Sa position est donnée par $\vec{OE} = a \cos(\omega t) \vec{u}_x$.

4. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
5. Déterminer $x(t)$ en régime forcé (ou permanent).
6. Le tracé de l'amplitude X_0 des oscillations en fonction de la pulsation à l'allure suivante

en coordonnées réduites $y = \frac{X_0}{a}$ en fonction de $u = \frac{\omega}{\omega_0}$:



Que représente le maximum de cette courbe ?

Cette situation se présente-t-elle pour toute valeur du coefficient d'amortissement ?

Déduire graphiquement l'amplitude a , pour $\omega = 7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, on mesure $X_0 = 0,2 \text{ cm}$.

7. Exprimer puis calculer la puissance moyenne dissipée par les frottements.

II/ Amélioration du dispositif

Afin de se prémunir des inévitables frottements de glissement, le solide précédent est remplacé par une roue de rayon $a = 20$ cm qui peut rouler sur le plan horizontal (cf. figure 2).

Le coefficient de frottement entre le plan et la roue est $f = 0,2$ supposé identique en régime statique et dynamique. On néglige le frottement visqueux. Le ressort de raideur $k = 22,2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et de longueur à vide ℓ_0 est relié au centre G de la roue, l'autre extrémité E étant fixe de sorte que EG est horizontal. La roue est libre de tourner autour de son axe Gy.

Le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe est $J = \frac{1}{2}ma^2$. On note x l'abscisse de G, l'origine étant prise à la position d'équilibre: $x = EG - \ell_0$; la rotation de la roue dans R est repérée par un angle θ . On posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

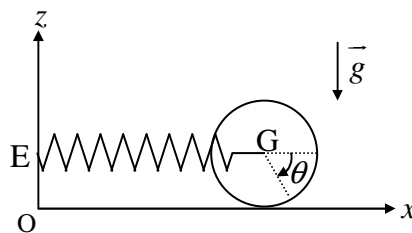


Figure 2

Initialement $x(0) = x_0$. L'ensemble est lâché sans vitesse initiale.

On suppose que le mouvement a lieu sans glissement.

1. Etablir une relation entre les dérivées de x et de θ .
2. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de la roue dans R en fonction de $\frac{dx}{dt}$.
3. Etablir l'équation du mouvement vérifiée par $x(t)$ et la résoudre. On notera ω la pulsation des oscillations.
4. Montrer que le mouvement s'effectue sans glissement si $x_0 < x_1$, x_1 étant à déterminer en fonction de f , g et ω_0 . Calculer la valeur de x_1 .

On se place dans le cas où $x_0 > x_1$ et on étudie la première phase de glissement.

5. Rappeler les lois de Coulomb pour le frottement solide, dans le cas du glissement.
6. Déterminer l'équation du mouvement vérifiée par $x(t)$ et la résoudre. On exprimera $x(t)$ en fonction de x_1 , x_0 et ω_0 .
7. Déterminer la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$.
8. Déterminer la vitesse de glissement v_g en fonction de x_1 , x_0 et ω_0 .
9. Pour des temps proches de zéro, donner une expression très simple de v_g . Commenter le signe de v_g .
10. Donner l'équation que vérifie l'instant t_1 pour lequel le glissement se termine.

III/ Accélération radiale d'un satellite

Un satellite, de masse m_s , de centre d'inertie S, est en orbite circulaire autour de la terre de centre O, sa période est $T_0 = 12$ h. Dans ce satellite un point matériel M de masse $m = 100$ g peut se déplacer sans frottements sur un axe Sx , fixe dans le satellite (cf. figure 3).

En outre M est soumis à une force élastique qui dérive d'une énergie potentielle $E_p(x) = \frac{1}{2}m\omega_1^2 x^2$ avec $\omega_1 = 0,03 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\overline{SM} = x\overline{u}_x$. Rayon de la terre $R = 6400 \text{ km}$.

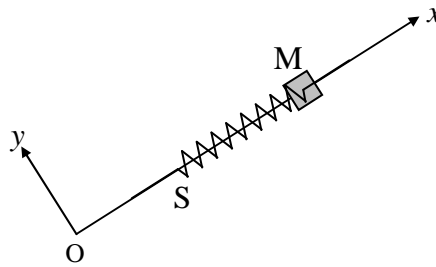


Figure 3

On pose $r_0 = OS$ et on désigne par R_s le référentiel lié au satellite muni du repère cartésien $(S, \overline{u}_x, \overline{u}_y, \overline{u}_z)$. Le référentiel R_g géocentrique est supposé galiléen.

1. Déterminer la vitesse v_0 du satellite en fonction de r_0 , g et R .
2. En déduire l'expression de T_0 en fonction de r_0 , g et R . Calculer numériquement r_0 , v_0 et la vitesse angulaire ω_0 du satellite dans R_g .

On étudie le mouvement de M dans le référentiel R_s .

3. Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
4. Donner une équation du mouvement approchée en considérant que $x \ll r_0$ en ne faisant intervenir que ω_0 , ω_1 , x et ses dérivées temporelles.
5. Montrer que M oscille et que sa période d'oscillation n'est quasiment pas affectée par la révolution du satellite.
6. Pourquoi ce dispositif est-il pertinent pour mesurer, s'il y a lieu, l'accélération radiale du satellite ?

Solution

I/ Etude sommaire

1. On étudie le système {S} dans le référentiel R supposé galiléen.

Il subit :

- son poids : $\overline{P} = m\overline{g} = -mg\overline{u}_z$ vertical ;

- la réaction \overline{R} de l'axe perpendiculaire à l'axe puisque'il n'y a pas de frottement solide ;

- la force de rappel \overline{F}_r du ressort dont l'allongement est x et $\overline{F}_r = -kx\overline{u}_x$;

- la force de frottement visqueux $\overline{F}_f = -\beta\overline{v}_G$.

On repère le centre de gravité G du système via son abscisse x : $\overline{OG} = (OE + x + \ell_0)\overline{u}_x$, d'où $\overline{v}_G = \dot{x}\overline{u}_x$ et $\overline{a}_G = \ddot{x}\overline{u}_x$.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au système s'écrit : $m\overline{a}_G = \overline{P} + \overline{R} + \overline{F}_f + \overline{F}_r$.

En projetant sur l'axe Ox on obtient : $m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - kx$.

En posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $2\lambda = \frac{\beta}{m}$, il vient : $\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$.

CNED – FORMATION CPGE

2. On cherche une solution exponentielle de la forme $x(t) = Ae^{rt}$, en injectant dans l'équation différentielle on obtient l'équation caractéristique $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ de discriminant $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$.

Dans le cas d'un régime pseudo-périodique $\Delta < 0$ et on note $\Delta = -4\omega^2$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$.

Les solutions de l'équation caractéristique sont alors $r_1 = -\lambda - j\omega$ et $r_2 = -\lambda + j\omega$.

On en déduit $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = e^{-\lambda t} (Ae^{-j\omega t} + Be^{j\omega t})$, ou bien :

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t)).$$

On en déduit $\dot{x}(t) = -\lambda e^{-\lambda t} (A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t)) + e^{-\lambda t} (-A' \omega \sin(\omega t) + B' \omega \cos(\omega t))$.

Les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ donnent $A' = x_0$ et $B' = \frac{\lambda x_0}{\omega}$.

$$\text{Finalement } x(t) = x_0 e^{-\lambda t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega t) \right).$$

3. Dix passages de G par la position d'équilibre, de droite à gauche, correspondent à 9 pseudo-périodes, soit $T = \frac{\Delta t}{9} = 1,33$ s. Puisque $\omega = \frac{2\pi}{T}$ on déduit $\omega = 4,71$ rad · s⁻¹.

De plus $x_1 = x(9T) = x_0 e^{-9\lambda T}$, soit $\lambda = \frac{1}{9T} \ln\left(\frac{x_0}{x_1}\right)$, d'où $\lambda = 0,024$ s⁻¹. Or $\beta = 2\lambda m$ d'où

$$\beta = 4,79 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}. \text{ De plus } k = m\omega_0^2 = m\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}, \text{ soit } k = 2,22 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

4. Dans cette question le point E est mobile et $\overline{OG} = (\overline{OE} + x + \ell_0) \overline{u_x} = (a \cos(\omega t) + x + \ell_0) \overline{u_x}$, d'où $\overline{v_G} = (-a\omega \sin(\omega t) + \dot{x}) \overline{u_x}$ et $\overline{a_G} = (-a\omega^2 \cos(\omega t) + \ddot{x}) \overline{u_x}$.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au système en projection sur l'axe Ox s'écrit alors : $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = a\omega^2 \cos(\omega t)$.

5. Pour déterminer $x(t)$ en régime forcé on utilise la méthode des amplitudes complexes et on cherche une solution de la forme $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$ à laquelle on associe la quantité complexe $\underline{x}(t) = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ qui vérifie $\ddot{\underline{x}} + 2\lambda\dot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = a\omega^2 e^{j\omega t}$. En remplaçant on obtient :

$$-a\omega^2 \underline{x} + 2\lambda j\omega \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = a\omega^2 e^{j\omega t}, \text{ ou bien } X_0 e^{j\varphi} = \frac{a\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\lambda\omega}.$$

$$\text{On en déduit } X_0 = \frac{a\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}} \text{ et } \varphi = \arctan\left(\frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

$$\text{Finalement : } x(t) = \frac{a\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}} \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right).$$

6. La fonction tracée est $y(u) = \frac{u}{\sqrt{(1-u^2)^2 + Q^2 u^2}}$ avec $Q = \frac{2\lambda}{\omega_0}$.

Le maximum de cette courbe représente le phénomène de résonance en élongation de l'oscillateur.

Un calcul un peu long donne : $\frac{dy}{du} = \frac{2u \left(1 + u^2 \left(\frac{Q^2}{2} - 1 \right) \right)}{\left[(1 - u^2)^2 + Q^2 u^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$, cette dérivée s'annule en changeant

de signe, c'est-à-dire passe par un maximum si $Q < \sqrt{2}$.

Or $Q = \frac{2\lambda}{\omega_0}$, le phénomène de résonance n'a lieu que si $\lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$.

$\omega = 7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $X_0 = 0,2 \text{ cm}$ correspondent sur la courbe à $u = 1,485$ et $y = 1,45$, on en déduit $a = 0,14 \text{ cm}$.

7. La puissance de la force de frottement est :

$$P_f = \vec{F}_f \cdot \vec{v}_G = -\beta v_G^2 = -\beta (-a\omega \sin(\omega t) + \dot{x})^2 = -\beta (-a\omega \sin(\omega t) - X_0 \omega \sin(\omega t + \varphi))^2$$

La puissance moyenne dissipée par les frottements s'écrit donc en développant :

$$P_{\text{moy}} = -\beta \omega^2 (a^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle + 2aX_0 \langle \sin(\omega t) \sin(\omega t + \varphi) \rangle + X_0^2 \langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle).$$

$$\text{Or } \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2} \text{ et } \langle \sin(\omega t) \sin(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{\cos \varphi}{2}.$$

$$\text{Finalement } P_{\text{moy}} = -\frac{1}{2} \beta \omega^2 (a^2 + 2aX_0 \cos(\varphi) + X_0^2) \text{ et } P_{\text{moy}} = 5,3 \text{ mW}.$$

II/ Amélioration du dispositif

1. On étudie le système {roue} dans le référentiel R supposé galiléen.

Il subit : - son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ vertical ;

- la réaction \vec{R} du plan ;

- la force de rappel \vec{F}_r du ressort dont l'allongement est x et $\vec{F}_r = -kx\vec{u}_x$;

Puisque le mouvement a lieu sans glissement la vitesse de glissement est nulle.

La vitesse de glissement s'écrit $\vec{v}_g = \vec{v}(I \in \text{roue}) - \vec{v}(I \in \text{plan})$ où I est le point de contact entre la roue et le plan.

Or $\vec{v}(I \in \text{plan}) = \vec{0}$ car le plan est fixe. D'après la relation de Varignon : $\vec{v}_1 = \vec{v}_G + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI}$, avec $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}_y$ et $\vec{GI} = -a\vec{u}_z$. De plus $\vec{OG} = (x + \ell_0)\vec{u}_x + a\vec{u}_y$ et $\vec{v}_G = \dot{x}\vec{u}_x$.

D'où $\vec{v}_1 = \dot{x}\vec{u}_x + (\dot{\theta}\vec{u}_y) \wedge (-a\vec{u}_z) = (\dot{x} - a\dot{\theta})\vec{u}_x$. On obtient alors $\dot{x} = a\dot{\theta}$.

2. L'énergie cinétique de la roue s'écrit, d'après le théorème de Koenig, $E_c = \frac{1}{2}mv_G^2 + E_c^*$ avec

$$E_c^* = \frac{1}{2}J\Omega^2. \text{ D'où } E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2.$$

Avec $J = \frac{1}{2}ma^2$ et $\dot{x} = a\dot{\theta}$ on obtient : $E_c = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$.

3. La réaction du plan \vec{R} ne travaille pas car il y a roulement sans glissement. Le poids et la force de rappel du ressort sont des forces conservatives donc le système est conservatif, son énergie mécanique se conserve au cours du temps. L'énergie potentielle de pesanteur est constante puisque G évolue à altitude constante, l'énergie potentielle élastique emmagasinée

par le ressort s'écrit $E_{p_e} = \frac{1}{2}kx^2$.

CNED – FORMATION CPGE

Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit donc $E_c + E_p = cte$, soit $\frac{3}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = cte$.

En dérivant par rapport au temps on obtient $\frac{3}{2}m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$ et l'équation différentielle du

mouvement est de la forme $\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$ avec $\omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$ ou bien $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2}{3}}\omega_0}$.

La solution de cette équation différentielle est de la forme $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$.

$x(0) = x_0 \Rightarrow A = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$, d'où $\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega t)}$.

4. Soit $\vec{R} = T\vec{u}_x + N\vec{u}_z$ la réaction du plan.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au système s'écrit : $m\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_r$.

En projetant sur les axes Ox et Oz on obtient :
$$\begin{cases} m\ddot{x} = T - kx \\ 0 = N - mg \end{cases}$$

On déduit alors, puisque $\ddot{x} = -\omega^2 x$, $T = (k - m\omega^2)x = \frac{1}{3}kx$ et $N = mg$.

Tant qu'il y a non glissement la loi de Coulomb indique $|T| < fN$, soit $\frac{1}{3}kx < fmg$, soit

$x < \frac{3fmg}{k} = \frac{3fg}{\omega_0^2}$. On en déduit que le mouvement s'effectue sans glissement si $x_0 < x_1$, avec

$\boxed{x_1 = \frac{3fg}{\omega_0^2}}$, soit $\boxed{x_1 = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}}$.

5. Les lois de Coulomb pour le frottement solide, dans le cas du glissement, s'écrivent :

On décompose la réaction \vec{R} en deux composantes, tangentielle \vec{T} et normale \vec{N} , telles que

$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$. On a alors : $\boxed{\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|}$, $\boxed{\vec{T} \cdot \vec{v}_g \leq 0}$ et $\boxed{\vec{T} \wedge \vec{v}_g = \vec{0}}$.

6. D'après la question 4. on a toujours :
$$\begin{cases} m\ddot{x} = T - kx \\ 0 = N - mg \end{cases}$$

Puisqu'il y a glissement $|T| = fN = fmg$.

Or $\vec{v}_g = (\dot{x} - a\dot{\theta})\vec{u}_x$ et $\dot{x}(0) = 0$, donc initialement \vec{v}_g est suivant $-\vec{u}_x$ et par conséquent \vec{T} est suivant $+\vec{u}_x$, on peut alors écrire $T = fmg > 0$.

L'équation différentielle du mouvement est donc $m\ddot{x} + kx = fmg$.

Avec $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ et $fg = \frac{\omega_0^2}{3}x_1$, on obtient $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\omega_0^2}{3}x_1}$.

La solution de cette équation différentielle est de la forme $x(t) = \frac{x_1}{3} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$.

$x(0) = x_0 \Rightarrow A = x_0 - \frac{x_1}{3}$ et $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$, d'où $\boxed{x(t) = \frac{x_1}{3} + \left(x_0 - \frac{x_1}{3}\right) \cos(\omega_0 t)}$.

7. Appliquons le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique :

$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \sum \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{ext}})$ dans le référentiel barycentrique.

Puisque \vec{P} et \vec{F}_r s'appliquent en G alors $\vec{M}_G(\vec{P}) = \vec{M}_G(\vec{F}_r) = \vec{0}$.

Puisque \vec{R} s'applique en I : $\vec{M}_G(\vec{R}) = \vec{GI} \wedge \vec{R} = -a\vec{u}_z \wedge (T\vec{u}_x + N\vec{u}_z) = -aT\vec{u}_y$.

CNED – FORMATION CPGE

Le moment cinétique barycentrique du solide s'écrit $\vec{\sigma}^* = J\vec{\Omega} = J\dot{\theta}\vec{u}_y$.

On en déduit $J\ddot{\theta} = -aT$. Or $J = \frac{1}{2}ma^2$ et $T = fmg = m\frac{\omega_0^2}{3}x_1$, soit $\ddot{\theta} = -\frac{2\omega_0^2 x_1}{3a}$.

En intégrant par rapport au temps on obtient $\dot{\theta} = -\frac{2\omega_0^2 x_1}{3a}t$ (pas de constante puisque l'ensemble est lâché sans vitesse initiale).

8. La vitesse de glissement est $\vec{v}_g = v_g \vec{u}_x = (\dot{x} - a\dot{\theta})\vec{u}_x$.

Or $\dot{x} = -\omega_0 \left(x_0 - \frac{x_1}{3}\right) \sin(\omega_0 t)$ et $\dot{\theta} = -\frac{2\omega_0^2 x_1}{3a}t$, d'où $v_g = -\omega_0 \left(x_0 - \frac{x_1}{3}\right) \sin(\omega_0 t) + \frac{2\omega_0^2 x_1}{3}t$.

9. Pour des temps proches de zéro $\sin(\omega_0 t) \approx \omega_0 t$ et $v_g \approx (x_1 - x_0)\omega_0^2 t$.

On a alors $v_g < 0$, et donc $T > 0$, la roue tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et se déplace vers la gauche.

10. Le glissement se termine à l'instant t_1 tel que $v_g(t_1) = 0$ et t_1 vérifie l'équation :

$$\left(x_0 - \frac{x_1}{3}\right) \sin(\omega_0 t_1) = \frac{2\omega_0 x_1}{3} t_1.$$

III/ Accélération radiale d'un satellite

1. On étudie le satellite dans référentiel R_g géocentrique galiléen, il subit seulement la force gravitationnelle de la Terre : $\vec{F}_g = -\frac{mM_T G}{r_0^2} \vec{u}_r$ avec M_T la masse de la Terre et G la constante de gravitation universelle.

Son mouvement étant circulaire son accélération s'écrit $\vec{a} = -m\frac{v_0^2}{r_0} \vec{u}_r$.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au satellite s'écrit, en projection sur \vec{u}_r ,

$-m\frac{v_0^2}{r_0} = -\frac{mM_T G}{r_0^2}$, d'où $v_0 = \sqrt{\frac{M_T G}{r_0}}$. La force gravitationnelle de la Terre s'écrit au niveau

de la surface terrestre $\vec{F}_g = -\frac{mM_T G}{R^2} \vec{u}_r = -mg \vec{u}_r$, d'où $M_T G = gR^2$.

Enfinement : $v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}}$.

2. La période de révolution du satellite est $T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0}$, soit $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{gR^2}}$.

On en déduit $r_0 = \left(\frac{gR^2 T_0^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$, soit $r_0 = 26672 \text{ km}$, on en déduit $v_0 = 3879 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

La vitesse angulaire ω_0 du satellite dans R_g est $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, soit $\omega_0 = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

3. Le référentiel R_s est non galiléen et le point M est soumis à :

- la force gravitationnelle de la Terre $\vec{P} = -\frac{mgR^2}{(r_0 + x)^2} \vec{u}_x$;

CNED – FORMATION CPGE

- la force élastique $\vec{F}_e = -m\omega_1^2 x \vec{u}_x$ (car elle dérive de $E_p(x) = \frac{1}{2} m\omega_1^2 x^2$);
- la réaction \vec{R} de l'axe Ox ;
- la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = m\omega_0^2 \overline{OM} = m\omega_0^2 (r_0 + x) \vec{u}_x$;
- la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega}_0 \wedge \vec{v} = -2m\omega_0 \vec{u}_z \wedge \dot{x} \vec{u}_x = -2m\omega_0 \dot{x} \vec{u}_y$.

Le vecteur accélération de M est $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au point M donne, en projection sur \vec{u}_x et en simplifiant par m , l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{x} = -\frac{gR^2}{(r_0 + x)^2} - \omega_1^2 x + \omega_0^2 (r_0 + x).$$

4. Avec $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0^3}}$, le terme gravitationnel s'écrit :

$$\frac{gR^2}{(r_0 + x)^2} = \frac{\omega_0^2 r_0}{\left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^2} \approx \omega_0^2 r_0 \left(1 - 2\frac{x}{r_0}\right) = \omega_0^2 r_0 - 2\omega_0^2 x, \text{ et l'équation différentielle se simplifie :}$$

$$\ddot{x} + (\omega_1^2 - 3\omega_0^2)x = 0.$$

5. $\omega_1 = 0,03 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_0 = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, de sorte que :

$$\omega_1^2 - 3\omega_0^2 = 8,94 \cdot 10^{-4} \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2} \approx \omega_1^2.$$

$$\omega_1^2 - 3\omega_0^2 > 0 \Rightarrow \text{M oscille.}$$

$\omega_1^2 - 3\omega_0^2 \approx \omega_1^2 \Rightarrow$ sa période d'oscillation n'est quasiment pas affectée par la révolution du satellite.

6. Si le satellite possède une accélération radiale a_r , l'équation différentielle précédente devient $\ddot{x} + (\omega_1^2 - 3\omega_0^2)x = -a_r$. Dans les cas où a_r est constant ou sinusoidal la solution particulière de l'équation différentielle permet d'accéder à la mesure de a_r .