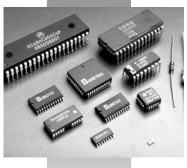
Chapitre 2

Electricité et Electronique



L'OSCILLOSCOPE

Lois fondamentales de l'électrocinétique

Enoncé :

Le tube d'un oscilloscope est une ampoule où la pression résiduelle est très faible et dans laquelle sont installés un canon à électrons, deux systèmes de plaques déflectrices et un écran luminescent sous l'impact des électrons. Ce tube est à symétrie cylindrique d'axe (Oz) horizontal (voir figure (a)).

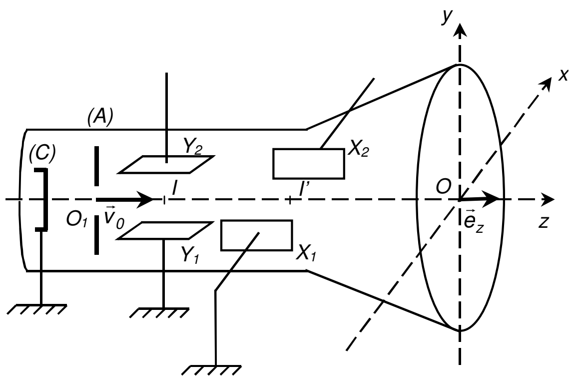


Figure (a)

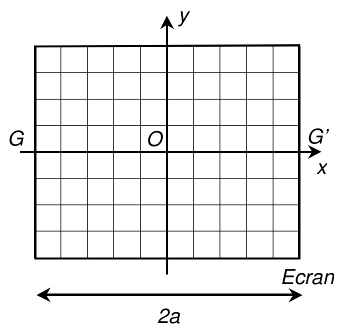


Figure (b)

➢ *1. Le canon à électrons : une cathode (C) émet des électrons sans vitesse ; ceux-ci arrivent sur l'anode (A) et la traversent par une petite ouverture (O_1) située sur l'axe (Oz) avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_z$. Déterminer la tension U_0 à appliquer entre la cathode et l'anode pour que $v_0 = 2{,}5.10^4$ km.s^{-1}. Données : $e = 1{,}6.10^{-19}\,C$ (valeur absolue de la charge d'un électron) et $m = 9{,}1.10^{-31}\,kg$ (masse d'un électron).*

➢ *2. La déviation verticale : les plaques sont des rectangles de longueur ℓ parallèles à (Oz) ; l'écartement des plaques est noté d. Leurs positions sont repérées par les centres géométriques I et I' des condensateurs ainsi constitués. Le centre de l'écran est noté O, origine d'un système d'axe (Oxyz) (voir figure précédente). On pose IO = D et I'O = D'.*

On applique entre les plaques horizontales Y_1 et Y_2 centrées en I une différence de potentiel $u_y = V_{y2} - V_{y1}$ et entre les plaques verticales X_1 et X_2 une différence de potentiel $u_x = V_{x2} - V_{x1}$. Lorsque $u_x = u_y = 0$, on observe un spot lumineux en O.

a) On maintient $u_x = 0$ et on établit une ddp constante u_y non nulle. On admet que le champ électrique résultant dans le parallélépipède défini par Y_1 et Y_2 est uniforme et nul à l'extérieur. Un électron pénètre (à t = 0) dans ce champ au point de coordonnées $(0,0,z_0)$ avec le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ défini à la question (1). On appelle $\vec{v}_1$ son vecteur vitesse quand il quitte le condensateur constitué par les plaques horizontales.

• Déterminer la durée τ de la traversée du condensateur et l'ordonnée y_S du spot lumineux sur l'écran.
• Calculer numériquement τ et y_S avec : $\ell = 5{,}0$ cm ; d = 4,0 cm ; D = 50 cm ; $v_0 = 2{,}5.10^4$ km.s^{-1} et $u_y = 100$ V.

b) On maintient toujours u_x nulle mais on applique entre les plaques horizontales une tension sinusoïdale de fréquence f et de valeur maximale 100 V : $u_y = 100\cos(2\pi ft)$.
L'électron pénètre dans le champ à la date t = 0 et en sort à la date τ.

• Comparer les valeurs de u_y aux dates 0 et τ pour des valeurs de f comprises entre 10 et 10^4 Hz.
• Préciser le mouvement du spot sur l'écran pour f = 100 Hz.

➢ 3. Le balayage horizontal : on impose $u_y = 0$ et on applique entre les plaques X_1 et X_2 la ddp u_x considérée comme constante pendant la traversée par l'électron du champ ainsi créé.

a) Calculer la déviation horizontale x_S du spot sur l'écran en fonction de e, m, v_0, D', ℓ, d et u_x.

b) On désire que l'électron qui est en G au bord de l'écran (voir figure (b)) décrive GG' avec une vitesse constante en un intervalle de temps de durée T', puis qu'il retourne très vite en G pour reprendre le mouvement précédent. On donne : D' = 45 cm ; GG' = 2a = 10 cm et T' = $5{,}0.10^{-2}$ s. Déterminer l'équation horaire du mouvement du spot sur l'écran pour $t \in [0,T']$, puis l'expression de u_x en fonction du temps t. Préciser les valeurs extrêmes de u_x.

➢ 4. Synchronisation de la base de temps : pourquoi faut-il « synchroniser » la base de temps pour pouvoir observer, sur l'écran de l'oscilloscope, une courbe stable lorsque l'on impose aux bornes des plaques horizontales une tension u_y périodique dans le temps ?

Solution :

➢ 1. Le référentiel d'étude est celui du laboratoire supposé galiléen. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'électron entre la cathode et l'anode donne $mv_0^2/2 = eU_0$, d'où $U_0 = mv_0^2/2e = 1\,777$ V.

➢ 2-a) L'électron, à son entrée dans le condensateur constitué par les deux plaques Y_1 et Y_2, est soumis au champ électrique $\vec{E} = -(u_y/d)\vec{e}_y$. La trajectoire est plane et contenue dans le plan (Oyz). Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron s'écrit, en négligeant le poids de celui-ci devant la force électrique : $m\vec{a} = -e\vec{E} = (eu_y/d)\vec{e}_y$, soit, en projection sur les axes (Oy) et (Oz) :

$$\ddot{y} = eu_y / md \qquad \text{et} \qquad \ddot{z} = 0$$

Par intégration et en tenant compte des conditions initiales, on obtient les coordonnées suivantes du vecteur vitesse ($\dot{y} = v_y = (eu_y / md)\,t$; $\dot{z} = v_z = v_0$) puis les équations paramétriques de la trajectoire de l'électron, qui est une parabole :

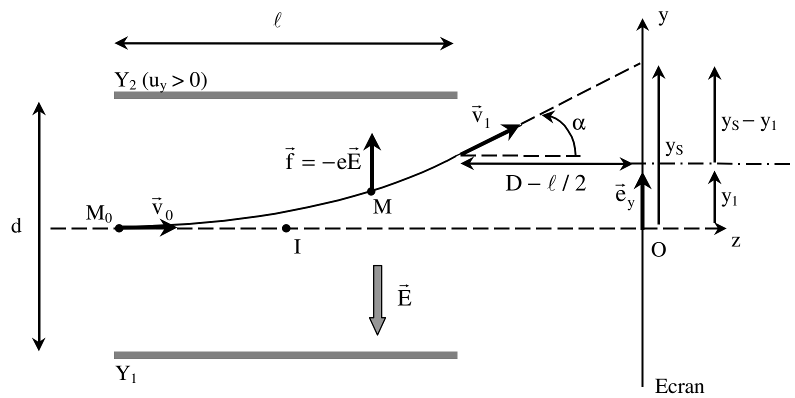
$$y = (eu_y / 2md)t^2 \qquad \text{et} \qquad z = v_0 t + z_0$$

L'électron sort du condensateur pour $z_1 = z_0 + \ell$, soit à l'instant $\tau = \ell / v_0$. Son vecteur vitesse $\vec{v}_1$ a alors pour coordonnées ($v_{1y} = e\ell u_y / mdv_0$; $v_{1z} = v_0$) et son ordonnée y_1 vaut $y_1 = eu_y\ell^2 / 2mdv_0^2$. A la sortie du condensateur, l'électron est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}_1$ (en négligeant toujours l'effet du poids). En écrivant de deux manières $\tan\alpha$ (où α est l'angle entre l'axe (Oz) et $\vec{v}_1$, voir figure) :

$$\tan\alpha = \frac{v_{1y}}{v_{1z}} = \frac{y_S - y_1}{D - \ell / 2}$$

On en déduit la valeur de l'ordonnée y_S du spot sur l'écran :

$$y_S = y_1 + (D - \ell / 2)\frac{v_{1y}}{v_{1z}} \qquad \text{soit} \qquad y_S = \frac{eu_y\ell D}{mdv_0^2}$$



Application numérique : $\tau = 2.10^{-9}$ s et $y_S = 1{,}76$ cm.

b) Entre la date t = 0 (entrée dans le condensateur) et la date t = τ, la tension u_y passe de la valeur de 100 V à la valeur $u_y(\tau) = 100\cos(2\pi f\tau)$. Pour la valeur la plus grande de la fréquence, f = 10 kHz, $u_y(\tau) \approx 100$ V : la ddp reste constante lors de la traversée du condensateur. Par conséquent, le calcul précédent, effectué pour une ddp u_y constante reste valable à condition de remplacer u_y par sa valeur obtenue à l'instant correspondant à la date d'entrée de l'électron entre les deux plaques Y_1 et Y_2.

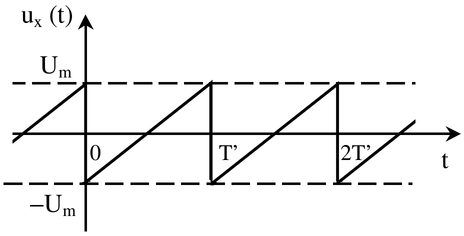
L'ordonnée du spot peut alors s'écrire : $y_S = 100\left(e\ell D / mdv_0^2\right)\cos(200\pi t)$: le spot est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal, de fréquence 100 Hz, d'amplitude 1,76 cm et centré sur le point O.

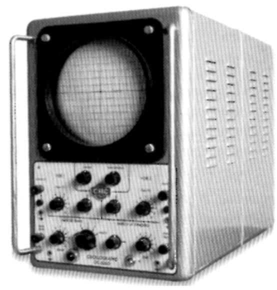
➢ 3-a) Un raisonnement similaire à celui effectué à la question (2) conduit à une déviation horizontale du spot égale à $x_S = eu_x \ell D' / mdv_0^2$.

b) A t = 0, le spot est au point G d'abscisse $x_0 = -a$. A l'instant t = T', le spot est en G' ($x_1 = a$) ; le mouvement du spot étant uniforme, on en déduit l'équation horaire $x_S = (2a / T')t - a$ pour $t \in [0, T']$. L'expression temporelle de la ddp u_x en découle :

$$u_x = \frac{mdv_0^2}{e\ell D'}\left(\frac{2a}{T'}t - a\right)$$

Les valeurs extrêmes de u_x sont $\pm U_m$, avec $U_m = \dfrac{mdv_0^2 a}{e\ell D'} = 316$ V : u_x est une tension en dents de scie de période T', représentée graphiquement ci-dessous :





A droite, un oscilloscope semblable à ceux utilisés par les lycéens dans les années 1960.

➢ 4. Un signal périodique u_y ne peut être visualisé de façon stable que si la période de la tension u_x en dents de scie est asservie à celle du signal u_y. C'est le but de la synchronisation : le spot attend que la tension u_y passe par zéro ou par une valeur fixée par le réglage du seuil de déclenchement (avec une pente déterminée positive ou négative) pour effectuer son trajet de gauche à droite. Le spot décrit alors toujours le même mouvement vertical et la courbe qui apparaît sur l'écran est stable. Par contre, si la synchronisation de la base de temps n'est pas réalisée, la courbe qui apparaît à l'écran est soit inextricable soit en perpétuel mouvement.

REGULATION AUTOMATIQUE DE TEMPERATURE ; UTILISATION D'UNE THERMISTANCE

Courant continu

Enoncé :

Une thermistance est une résistance sensible à la température. On trouve deux types de thermistances : si la résistance augmente avec la température, la thermistance est alors dite à coefficient de température positif (CTP). Si la résistance diminue avec la température, elle est alors dite à coefficient de température négatif (CTN).

Les thermistances sont souvent utilisées dans des montages liés à la mesure et à la régulation en température, comme le montre cet exercice.

➢ *1. Une thermistance est constituée d'un semi-conducteur (silicium) dont la résistance R est fonction de la température selon la loi R = A exp(B / T), où A et B sont des constantes caractéristiques de la thermistance (on donne B = 6 492 K) et T* *la température absolue exprimée en Kelvin. A la température $T_0 = 300,0$ K, la résistance de la thermistance est $R_0 = 115,0\ \Omega$.*

a) Exprimer R en fonction de R_0, B, T et T_0. Représenter dans le domaine de températures [275 K,325 K] l'allure de la courbe R(T).

b) Autour de $T_0 = 300,0$ K, la température de la thermistance peut varier très légèrement de δT (avec $|\delta T| << T_0$). Montrer que R varie alors de $\delta R = R_0 a \delta T$ et exprimer a en fonction de B et T_0. Calculer a avec quatre chiffres significatifs.

➢ 2. La résistance de la thermistance est mesurée avec un ohmmètre numérique. Sur le calibre le plus approprié, à T_0, l'affichage obtenu est 115,0 Ω. On considérera que la variation d'une unité du dernier chiffre affiché (« un digit ») correspond à la plus petite variation de résistance qui peut être détectée avec cet ohmmètre. Quelle est la plus petite variation de température que l'on peut déceler autour de T_0 ? Effectuer l'application numérique.

➢ 3. La thermistance est intégrée au circuit présenté sur la figure (a). E est la fém constante d'un générateur idéal de tension, r est une résistance de 100,0 Ω. La tension u aux bornes de r est mesurée à l'aide d'un voltmètre numérique (V).

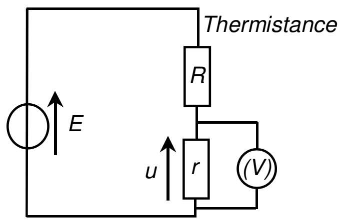


Figure (a)

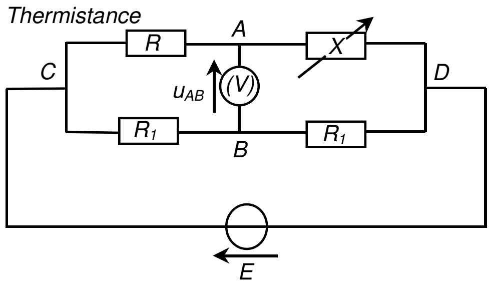


Figure (b)

a) Quel est l'ordre de grandeur de la résistance interne d'un voltmètre numérique ?

b) Exprimer la tension u en fonction de r, R et E. Lorsque la température de la thermistance est $T_0 = 300,0$ K, le voltmètre, sur le calibre le plus approprié, affiche la valeur u_0 suivante : 4,651 V. Quelle est la valeur numérique de E ?

c) La variation du dernier chiffre (« un digit ») correspond à la plus petite variation δu de tension qui peut être mesurée avec ce voltmètre. Quelle est, dans ces conditions, la plus petite variation de température δT de la thermistance que l'on peut déceler autour de T_0 (exprimée en fonction de δu, r, R_0, u_0 et a). Effectuer l'application numérique.

➢ 4. La thermistance est désormais intégrée au circuit de la figure (b) précédente. Le voltmètre numérique (V) a une résistance supposée infinie, X est une résistance ajustable, les deux résistances R_1 valent 100,0 Ω. La fém E du générateur idéal de tension vaut 10,00 V.

a) Exprimer la tension u_{AB} aux bornes du voltmètre, en fonction de R, X et E.

b) Lorsque la température de la thermistance est $T_0 = 300,0$ K, on règle la valeur de la résistance X à X_0 pour que la tension u_{AB} soit nulle. Calculer X_0. Pour les questions qui suivent, on ne modifie plus la valeur de $X = X_0$.

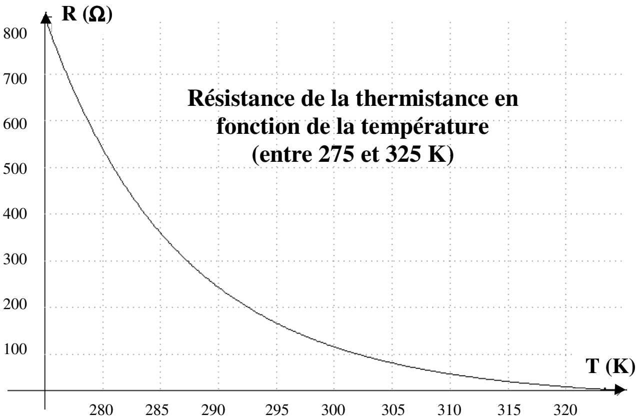
c) Autour de T_0, la température de la thermistance varie de δT. Montrer que la tension u_{AB} peut s'écrire $u_{AB} = K\delta T$. Exprimer K en fonction de E et a.

d) Lorsque la température de la thermistance est $T_0 = 300,0$ K, le voltmètre sur le calibre le plus sensible affiche 00,00 mV. Quelle est la plus petite variation de température δT de la thermistance que l'on peut détecter dans ces conditions autour de 300 K ?

e) Pourquoi, dans ce montage, avec le même voltmètre que dans le montage précédent, a-t-on obtenu ce résultat ?

Solution :

➢ 1-a) En effectuant le rapport membres à membres des deux équations $R = A\exp(B/T)$ et $R_0 = A\exp(B/T_0)$, on obtient $R(T) = R_0\exp\big(B(1/T - 1/T_0)\big)$. L'allure de la courbe R(T) est donnée ci-dessous :



b) Si l'on assimile les faibles variations de température δT et de résistance δR à des différentielles dT et dR, alors, avec $\ln(R) = \ln(A) + B/T$, $dR/R = -BdT/T^2$. Soit, au voisinage de la température T_0 pour laquelle la résistance vaut R_0 :

$$\delta R = -\frac{B}{T_0^2}R_0\delta T = aR_0\delta T \qquad \text{avec} \qquad a = -\frac{B}{T_0^2} = -7{,}213.10^{-2}\,K^{-1}$$

La variation δR de la résistance de la thermistance aurait pu être évaluée différemment. Par exemple, en calculant la différence $\delta R = R(T_0 + \delta T) - R(T_0)$ directement à partir de la relation donnant R(T) obtenue à la question précédente et en effectuant un développement limité au voisinage de la température T_0. Cette méthode, plus longue que la méthode basée sur le calcul différentiel, est certainement bien moins élégante !

➢ 2. La plus petite variation de résistance détectée par l'ohmmètre est $\delta R = \pm 0{,}1\ \Omega$; la plus petite variation correspondante de température δT qui pourra être mesurée est alors $\delta T = \delta R / aR_0 = \pm 0{,}012$ K.

➢ 3-a) La résistance interne d'un voltmètre numérique est de l'ordre de 1 MΩ. On pourra dans la suite la considérer comme infinie.

b) La règle du diviseur de tension permet d'écrire $u = (r/(r + R))\,E$. Connaissant R_0 et u_0, on déduit la fém E :

$$E = ((r + R_0)/r)u_0 = 10\,V$$

c) Le voltmètre peut mesurer une variation de tension minimale $\delta u = \pm 0{,}001\,V$, associée à une variation de la résistance de la thermistance égale à δR. Or :

$$R = rE\frac{1}{u} - r \quad \text{donc} \quad dR = -rE\frac{du}{u^2} \quad \text{soit} \quad \delta R = -rE\frac{\delta u}{u_0^2}$$

Avec $\delta R = aR_0\delta T$, il vient finalement : $\delta T = -\frac{r}{R_0}\frac{1}{a}\frac{E\delta u}{u_0^2} = \pm 0{,}0056\text{ K}$.

➢ 4-a) Le dipôle branché entre les points C et D constitue un pont de Wheastone. Soient $u_R = u_{CA}$ et $u_{R_1} = u_{CB}$ les tensions respectives aux bornes de la thermistance et de la résistance R_1 située dans la branche (CB) : $u_{AB} = -u_R + u_{R_1}$. La règle du diviseur de tension donne :

$$u_R = (R/(R+X))E \qquad \text{et} \qquad u_{R_1} = (R_1/(R_1+R_1))E = E/2$$

Par conséquent : $$u_{AB} = \frac{1}{2}\frac{X-R}{X+R}E$$

b) Lorsque $u_{AB} = 0$ à la température T_0 (le pont de Wheastone est « équilibré »), $X = X_0 = R_0 = 115{,}0\,\Omega$.

c) La tension u_{AB} peut encore s'écrire :

$$u_{AB} = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{2X_0}{X_0 + R}\right)E \qquad \text{d'où} \qquad du_{AB} = -E\frac{X_0}{(R+X_0)^2}dR$$

Au voisinage de T_0, on obtient, avec $R = X_0 = R_0$: $\delta u_{AB} = u_{AB} = -E\frac{1}{4R_0}\delta R$. Avec $\delta R = aR_0\delta T$, on aboutit finalement à $u_{AB} = -\frac{aE}{4}\delta T$ (ainsi $K = -aE/4$).

d) La tension minimale que l'on peut mesurer est ici $u_{AB} = \pm 0{,}01\text{ mV}$, ce qui correspond à une variation de température $\delta T = u_{AB}/K = -4u_{AB}/aE = \pm 5{,}6.10^{-5}\text{ K}$.

e) La méthode de mesure utilisant le pont de Wheastone est incontestablement la plus sensible ; elle repose en effet sur une méthode « de zéro » pour laquelle le voltmètre peut être utilisé sur un calibre extrêmement sensible puisqu'il sert à mesurer des tensions pratiquement nulles.

Par ailleurs, cette tension u_{AB} correspondant au déséquilibre du pont de Wheastone peut servir de signal de contrôle d'une installation de régulation de température ; sa valeur absolue donne l'écart à la température de référence T_0 et son signe donne le sens d'évolution de la température. Ce montage utilisant un pont de Wheastone constitue alors le premier élément d'une chaîne électronique de régulation automatique de température.

THERMOMETRE A AFFICHAGE NUMERIQUE

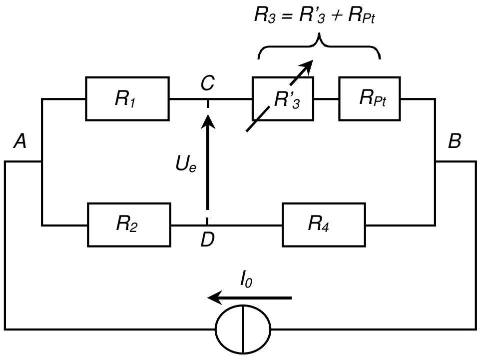
Courant continu

Enoncé :

Le principe d'un thermomètre à affichage numérique est le suivant :

Sonde thermométrique → Conditionneur du signal (Pont de Wheastone) → Amplification → Convertisseur Analogique-Numérique → Affichage numérique

La sonde thermométrique est une résistance de platine, dont la résistance R_{Pt} varie avec la température selon la loi $R_{Pt} = R_{Pt,0}\ (1 + \alpha\ t)$; t est la température exprimée en °C, α le coefficient de température de résistivité ($\alpha = 4{,}00.10^{-3}$ °C^{-1}), R_{Pt} la résistance en Ω à la température t et $R_{Pt,0}$ la résistance en Ω à 0 °C ($R_{Pt,0} = 1{,}00.10^{2}\ \Omega$). Ce capteur est placé dans une des branches d'un pont de mesures (pont de Wheastone) alimenté par un générateur idéal de courant continu (I_0 = 1,00 mA). Les résistances R_1, R_2, R'_3 et R_4 sont supposées être indépendantes de la température.



$R_1 = R_2 = R_4 = 1{,}00$ kΩ
R'_3 ; résistance variable

➢ *1. Déterminer la tension U_e en fonction de I_0, R_1, R_2, $R_3 = R'_3 + R_{Pt}$ et R_4.*

➢ *2. Quelle valeur faut-il donner à R'_3 si le pont est équilibré à t = 0 °C, c'est-à-dire si $U_e = 0$ à cette température ? R'_3 gardera cette valeur dans la suite de l'exercice.*

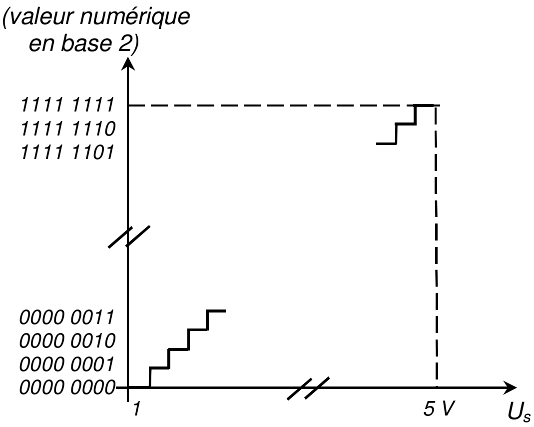
➢ *3. La température pouvant varier entre 0 °C et 50 °C, déterminer U_e en fonction de la température t. Faire l'application numérique pour t = 0 °C, 10 °C, 20 °C, 30 °C, 40 °C et 50 °C. U_e varie-t-elle linéairement en fonction de la température t ?*

➢ *4. Le signal U_e délivré étant faible, il est amplifié. Quel montage amplificateur peut-on utiliser ? Après amplification et mise en forme, on obtient la tension U_s :*

$$U_e \longrightarrow \text{Amplification et mise en forme} \longrightarrow U_s \quad \text{et} \quad \begin{cases} U_s = 1{,}00 \text{ V si } t = 0{,}0\ °C \\ U_s = 5{,}00 \text{ V si } t = 50{,}0\ °C \end{cases}$$

En déduire la loi $t = t(U_s)$ en admettant une fonction affine.

➢ *5. La tension U_s est appliquée à un convertisseur analogique-numérique (CAN) à approximations successives – 8 bits – échelle (0 – 5 V). Le CAN permet de coder la tension analogique U_s en un nombre de 8 chiffres binaires (8 bits). La caractéristique de transfert est donnée sur la figure suivante :*

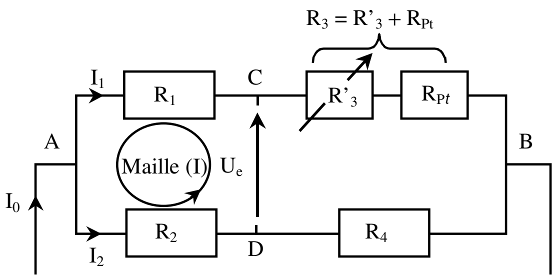


a) Pourquoi utilise-t-on la base 2 et non la base 10 ? Combien de valeurs numériques le CAN peut-il distinguer ?

b) Quelle est la variation minimale ΔU_s de U_s pour que la valeur numérique N en base 2 soit modifiée d'une unité, c'est-à-dire du bit de poids le plus faible ? En déduire la variation minimale de température Δt que l'on peut apprécier avec ce montage.

Solution :

➢ 1. La loi des mailles appliquée à la maille (I) définie sur la figure ci-dessous donne :



$$U_e = -R_1 I_1 + R_2 I_2$$

Or, d'après la règle du diviseur de courant :

$$I_1 = \frac{R_2 + R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} I_0$$

$$\text{et : } I_2 = \frac{R_1 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} I_0$$

En reportant dans l'expression de U_e, on obtient finalement :

$$U_e = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} I_0$$

➢ 2. Pour que le pont soit équilibré à la température de 0°C, il faut que $R_2 R_3 = R_1 R_4$ à cette température, soit :

$$R'_3 = \frac{R_1 R_4}{R_2} - R_{Pt,0} = 900\,\Omega$$

➢ 3. A une température t quelconque (exprimée en °C), la résistance de platine peut s'exprimer sous la forme $R_{Pt} = R_{Pt,0} + \alpha R_{Pt,0}\, t$. La tension U_e peut alors s'écrire

$$U_e = \frac{R_2 (R'_3 + R_{Pt,0} + \alpha R_{Pt,0}\, t) - R_1 R_4}{R_1 + R_2 + R'_3 + R_{Pt,0} + \alpha R_{Pt,0}\, t + R_4} I_0$$

Par conséquent, en utilisant la condition d'équilibre du pont à 0°C :

$$U_e = \frac{\alpha R_{Pt,0}\, t}{R_1 + R_2 + R'_3 + R_{Pt,0} + R_4 + \alpha R_{Pt,0}\, t} R_2 I_0$$

Numériquement, il vient :

$$U_e = \frac{4.10^{-1}\, t}{4000 + 4.10^{-1}\, t} = \frac{t}{t + 10000} \qquad \text{(t en °C et } U_e \text{ en V)}$$

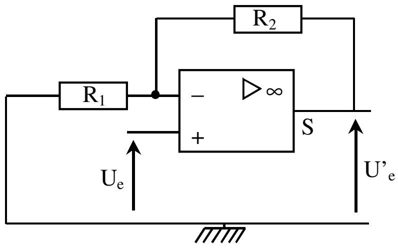
Les valeurs de la tension U_e pour les températures proposées dans l'énoncé sont répertoriées dans le tableau ci-dessous :

Température t (°C)	0	10	20	30	40	50
Tension U_e (V)	0	10^{-3}	$2.\ 10^{-3}$	$3.\ 10^{-3}$	$4.\ 10^{-3}$	$5.\ 10^{-3}$

On constate que, dans l'intervalle de températures considéré, $t << 10000$ et que, par conséquent, $U_e \approx 10^{-4}\, t$: la tension U_e varie de manière linéaire avec la température.

➢ 4. Un montage amplificateur simple peut, par exemple, être un montage amplificateur non inverseur, réalisé à partir d'un amplificateur opérationnel idéal et dont le schéma est rappelé sur la figure ci-contre :

$$\frac{U'_e}{U_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$



Dans le cadre de cet exercice, la variation affine entre t et U_s est :

$$t = 12{,}5(U_s - 1)\, t \qquad \text{(avec t en °C et } U_s \text{ en V)}$$

➢ 5-a) La base 2 est utilisée ici car c'est elle qui, d'une manière générale, est utilisée en électronique logique. Le nombre N comporte 8 chiffres, qui peuvent être égaux à 0 ou à 1. Par conséquent, N peut prendre $2^8 = 256$ valeurs.

b) La variation minimale de la tension U_s que l'on pourra déceler sera alors donnée par $\Delta U_s = 4/256 = 1{,}56.10^{-2}\,\text{V} = 15{,}6\,\text{mV}$, ce qui correspond à une variation minimale de température égale à $\Delta t = 12{,}5 \Delta U_s \approx 0{,}20°\text{C}$.

ETINCELLE DE RUPTURE

Régime transitoire

Enoncé :

Cet exercice étudie le comportement d'un appareil industriel (M) alimenté par une source de tension continue. Le comportement électrique vis-à-vis des circuits extérieurs du moteur est équivalent à celui d'une inductance pure (L = 45 mH) en série avec une résistance R = 9,6 Ω.

➢ *1. On considère le circuit représenté figure (a), où E est la fém d'un générateur de tension continue.*

a) L'interrupteur (K) étant ouvert depuis longtemps, on le ferme à l'instant t = 0. Etablir l'expression de l'intensité i(t) du courant dans le circuit en fonction du temps. Quelle est l'expression de l'intensité I en régime permanent ?

b) Le régime permanent précédent étant établi, on ouvre (K). On observe à l'ouverture du circuit une étincelle aux bornes de (K). Expliquer ce phénomène.

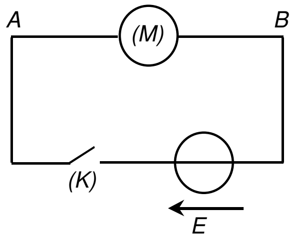


Figure (a)

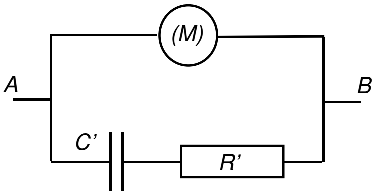


Figure (b)

➢ *2. Pour éviter cette étincelle, on monte en parallèle avec l'appareil (M), entre ses bornes A et B, un condensateur de capacité C' en série avec une résistance R'. Cette mise en parallèle constitue un nouveau dipôle AB (figure (b)).*

a) Déterminer les expressions littérales et les valeurs numériques de R' et de C' pour que l'impédance complexe $\underline{z}_{AB}$ du dipôle (AB) en régime permanent sinusoïdal de pulsation ω ne dépende pas de $j\omega$ (où j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$) et soit ainsi réelle. Que vaut alors cette impédance complexe ?

b) Le dipôle AB étant alimenté depuis longtemps par la fém continue E, expliquer pourquoi, à l'ouverture du circuit, on n'observe plus d'étincelle aux bornes de l'interrupteur (K). Que deviennent les intensités i fournie par le générateur, i_M dans le moteur et $i_{C'}$ dans la branche C'R' à cet instant ? Quelles sont la nature et la durée du régime transitoire observé ?

Solution :

➢ 1-a) Soit i(t) l'intensité du courant (dirigé de A vers B). La loi des mailles permet d'écrire $E = Ri + L di / dt$, d'où :

$$di / dt + (1/\tau) i = E / L \qquad \text{(avec } \tau = L / R\text{)}$$

La puissance reçue par l'enroulement inductif du moteur, de la forme :

$$P = i.L(di / dt) = d(Li^2 / 2) / dt$$

est nécessairement finie ; par conséquent, l'intensité du courant qui traverse le moteur doit rester continue. Comme le courant i est nul à l'instant $t = 0$, la solution de l'équation différentielle vérifiée par i est alors :

$$i = (E / R)(1 - \exp(-t / \tau))$$

Lorsque $t >> \tau$, $\exp(-t / \tau) << 1$: le régime permanent continu est atteint et l'intensité du courant vaut alors $I = E / R$, la bobine jouant le rôle d'un simple fil de résistance nulle.

b) L'intensité du courant dans le moteur doit rester continue. Ainsi, lorsque l'on ouvre l'interrupteur, une étincelle due à l'ionisation locale de l'air apparaît permettant au courant de circuler malgré tout dans le circuit et à l'intensité d'être ainsi continue et de décroître vers zéro.

➢ 2-a) L'admittance complexe $\underline{y}$ du dipôle AB, plus simple à calculer que son impédance $\underline{z}$ puisque le dipôle est constitué de deux branches placées en parallèle, s'écrit :

$$\underline{y} = \frac{1}{R + jL\omega} + \frac{1}{R' + 1/jC'\omega} = \frac{1}{R + jL\omega} + \frac{jC'\omega}{1 + jR'C'\omega}$$

Soit :
$$\underline{y} = \frac{(1 - LC'\omega^2) + j\omega(R + R')C'}{(R - R'LC'\omega^2) + j\omega(L + RR'C')}$$

On montre facilement qu'un nombre complexe de la forme $(a + jb)/(c + jd)$ est réel si et seulement si $a/c = b/d$. Cette propriété permet d'affirmer que $\underline{y}$ sera réelle si :

$$\frac{1 - LC'\omega^2}{R - R'LC'\omega^2} = \frac{\omega(R + R')C'}{\omega(L + RR'C')} \quad \text{soit} \quad 1 - LC'\omega^2 = \frac{(R + R')C'}{L + RR'C'}(R - R'LC'\omega^2)$$

Ou encore, en ordonnant selon les puissances de ω :

$$\left(1 - \frac{(R + R')C'}{L + RR'C'}R\right) + \left(\frac{(R + R')C'}{L + RR'C'}R'LC' - LC'\right)\omega^2 = 0$$

Ce polynôme en ω est identiquement nul, quelle que soit la pulsation ω, si :

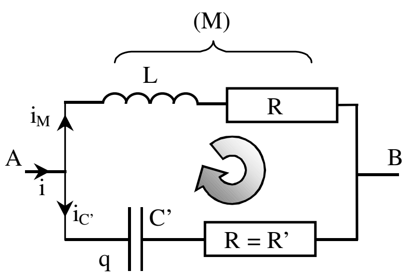
$$\frac{(R + R')C'}{L + RR'C'}R = 1 \quad \text{et} \quad \frac{(R + R')C'}{L + RR'C'}R'LC' = LC'$$

Par conséquent, $R' = R = 9{,}6\,\Omega$ nécessairement. On en déduit ensuite :

$$\frac{2RC'}{L + R^2C'}R = 1 \quad \text{d'où} \quad C' = \frac{L}{R^2} = 490\,\mu F$$

L'admittance complexe est alors $\underline{y} = 1/R$ et l'impédance égale à R.

b) Soient i l'intensité fournie par le générateur, i_M celle circulant dans le moteur et $i_{C'}$ celle dans la branche C'R' ($i = i_M + i_{C'}$). Avant l'ouverture de l'interrupteur (à l'instant $t = 0^-$), $i^- = i_M^- = E/R$ et $i_{C'}^- = 0$. Juste après l'ouverture de l'interrupteur (à l'instant $t = 0^+$), la continuité de l'intensité dans le moteur est assurée par la branche C'R' : $i_M^+ = -i_{C'}^+ = E/R$ alors que l'intensité débitée par le générateur devient nulle. On peut remarquer que l'intensité dans la branche contenant le condensateur C' n'est pas continue, puisqu'elle passe de la valeur 0 à la valeur $-E/R$; par contre, la charge q portée par l'une des armatures (celle de gauche, par exemple) du condensateur est nécessairement continue puisque la puissance reçue par le condensateur, $P = i_{C'}.(q/C') = d(q^2/2C')/dt$, doit rester finie.



L'équation différentielle vérifiée par la charge du condensateur s'obtient en écrivant la loi des mailles (voir figure précédente) :

$$-L\frac{di_M}{dt} - Ri_M + R'i_{C'} + \frac{q}{C'} = 0$$

Avec $i_M = -i_{C'}$, $i_{C'} = dq/dt$ et $R = R'$, on obtient finalement :

$$L\ddot{q} + 2R\dot{q} + q/C' = 0$$

Si l'on pose $\omega_0^2 = 1/LC'$ et $2\sigma\omega_0 = 2R/L$, soit $\sigma = R/L\omega_0 = R\sqrt{C'/L}$ (coefficient d'amortissement du circuit), avec ici $\sigma = 1$ car $C' = L/R^2$, l'équation devient $\ddot{q} + 2\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$. La solution de cette équation différentielle est de la forme $q = (\lambda + \mu t)e^{r\,t}$ où λ et μ sont des constantes dépendant des conditions initiales et r la racine double de l'équation caractéristique associée $r^2 + 2\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$, soit $r = -\omega_0$. Le régime observé est donc le régime apériodique critique dont la durée sera (en considérant que $e^{-5} \approx 0$) de l'ordre de $5/\omega_0$, soit, numériquement, de ≈ 23 ms.

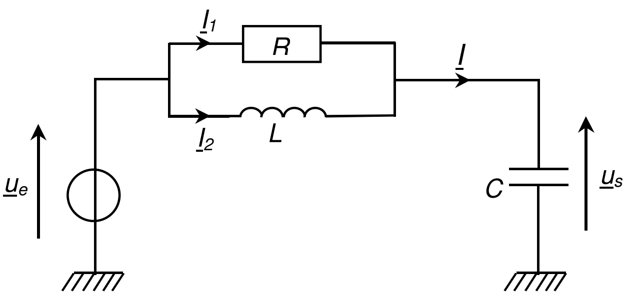
ANALOGIE ELECTROMECANIQUE

Régime permanent sinusoïdal

Enoncé :

Cet exercice se propose de déterminer un circuit électrique qui représente la réponse harmonique d'une voiture sur route dégradée, dont l'étude a été faite dans l'exercice de mécanique intitulé « Comportement routier d'une automobile » en page 30. Son étude doit donc être entreprise après celle de l'exercice de mécanique.

➢ *1. Le circuit suivant est alimenté par un générateur de tension idéal délivrant une tension sinusoïdale (notée, en complexe, $\underline{u}_e$) de pulsation ω et de valeur maximale U_e.*



a) Déterminer l'impédance équivalente $\underline{z}$ de ce circuit.

b) Quelles grandeurs d'entrée $\underline{G}_e$ et de sortie $\underline{G}_s$ doivent être choisies pour obtenir une fonction de transfert harmonique équivalente à celle trouvée pour l'automobile sur route dégradée, c'est-à-dire telle que :

$$\frac{\underline{G}_s}{\underline{G}_e} = \frac{1 + j(\Omega/Q)}{1 - \Omega^2 + j(\Omega/Q)}$$

où $\Omega = \omega / \omega_0$ est la pulsation réduite, ω_0 une pulsation propre et Q un rapport caractéristique dont on trouvera les expressions en fonction de R, L et C.

➢ 2. Pour préciser l'analogie électromécanique, il faut établir l'équivalence des paramètres mécaniques ($m + M / 4$), k, a et électriques R, L et C.

a) Quelle est la puissance moyenne dissipée dans la résistance R en fonction de l'amplitude U_e, de R, L, C et ω ?

b) Si V_e est l'amplitude de la vitesse $\dot{e}$ verticale de la roue dans l'exercice sur le « Comportement routier d'une automobile » due à la déformation sinusoïdale de la route, quelle est l'expression de la puissance moyenne dissipée par frottement dans l'amortisseur ?

c) En comparant les expressions des deux puissances moyennes, ainsi que celles des deux fonctions de transfert électrique et mécanique, trouver les équivalents électriques de a, k, ($m + M / 4$) et V_e.

Solution :

➢ 1-a) L'impédance équivalente est $\underline{z} = \dfrac{1}{jC\omega} + \dfrac{jRL\omega}{R + jL\omega}$.

b) Si l'on choisit $\underline{u}_e$ et $\underline{u}_s$ comme grandeurs d'entrée et de sortie, alors, en utilisant la règle du diviseur de tension :

$$\frac{\underline{G}_s}{\underline{G}_e} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1/jC\omega}{\underline{z}} = \frac{1}{1 - RLC\omega^2/(R + jL\omega)} = \frac{R + jL\omega}{R - RLC\omega^2 + jL\omega}$$

Soit :

$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1 + j(L/R)\omega}{1 - LC\omega^2 + j(L/R)\omega}$$

Si l'on pose $\omega_0^2 = 1/LC$, $\Omega = \omega/\omega_0$ et $(L/R)\omega = \Omega/Q = \omega/(\omega_0 Q)$, soit finalement $Q = R/(L\omega_0) = R\sqrt{C/L}$, on retrouve alors une fonction de transfert identique à celle obtenue lors de l'étude du comportement d'une automobile sur route dégradée :

$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1 + j(\Omega/Q)}{1 - \Omega^2 + j(\Omega/Q)}$$

➢ 2-a) La puissance moyenne dissipée dans la résistance R est $P_R = RI_{eff,1}^2$ où $I_{eff,1}$ est l'intensité efficace dans la branche contenant R. La règle du diviseur de courant donne $\underline{I}_1 = [jL\omega/(R + jL\omega)]\underline{I}$. Comme $\underline{I} = jC\omega\underline{u}_s$, il vient :

$$\underline{I}_1 = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} jC\omega \frac{1 + j(L/R)\omega}{1 - LC\omega^2 + j(L/R)\omega}\underline{u}_e = -\frac{1}{R}\frac{LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + j(L/R)\omega}\underline{u}_e$$

D'où l'expression de la puissance moyenne dissipée dans la résistance R :

$$P = RI_{eff,1}^2 = \frac{(LC\omega^2)^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + (L/R)^2\omega^2}\frac{U_e^2}{2R}$$

b) La puissance instantanée p(t) dissipée dans l'amortisseur (comptée positivement) est $p(t) = \left|\vec{f}_v.(dL/dt)\vec{u}_z\right| = a(dL/dt)^2$. Si on note $L = L_m \cos(\omega t + \psi)$ l'expression harmonique de la longueur du ressort, alors la puissance moyenne dissipée sur une période est donnée par :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{2}a\omega^2 L_m^2$$

Si $\underline{L} = L_m e^{j\psi}$ désigne l'amplitude complexe de la longueur du ressort, alors :

$$\underline{L} = \underline{S} - e_m = \frac{1 + j\omega\alpha'/\beta'}{1 - \omega^2/\beta' + j\omega(\alpha'/\beta')}e_m - e_m = \frac{\omega^2/\beta'}{1 - \omega^2/\beta' + j\omega(\alpha'/\beta')}e_m$$

D'où $L_m = \dfrac{\omega^2/\beta'}{\sqrt{(1-\omega^2/\beta')^2 + \omega^2(\alpha'/\beta')^2}}e_m$ et par conséquent :

$$P = \frac{1}{2}a\frac{(\omega^2/\beta')^2}{(1-\omega^2/\beta')^2 + \omega^2(\alpha'/\beta')^2}\omega^2 e_m^2 = \frac{(\omega^2/\beta')^2}{(1-\omega^2/\beta')^2 + \omega^2(\alpha'/\beta')^2}\frac{aV_e^2}{2}$$

où $V_e = \omega e_m$ est l'amplitude de la vitesse $\dot{e}$ verticale de la roue.

c) Si l'on compare l'expression précédente et celle déterminée à la question (2-a), on peut alors effectuer les analogies électromécaniques suivantes :

$$\beta' \leftrightarrow 1/LC \quad ; \quad \alpha'/\beta' \leftrightarrow L/R \quad ; \quad a \leftrightarrow 1/R \quad \text{et} \quad V_e \leftrightarrow U_e$$

Soit, avec $\alpha' = a/(M/4 + m)$ et $\beta' = k/(M/4 + m)$:

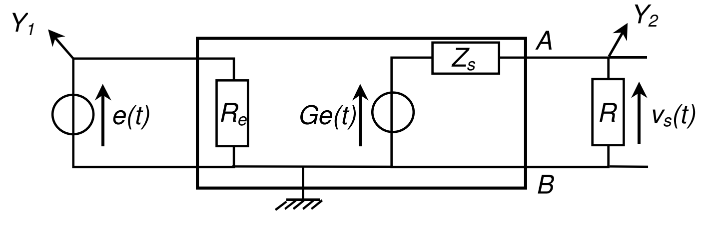
$$a \leftrightarrow 1/R \quad ; \quad k \leftrightarrow 1/L \quad ; \quad C \leftrightarrow M/4 + m \quad \text{et} \quad V_e \leftrightarrow U_e$$

AMPLIFICATEUR DE CHAINE HI-FI

Régime permanent sinusoïdal

Enoncé :

Un amplificateur de chaîne hi-fi peut être modélisé par le schéma électrique suivant, dans lequel la résistance d'entrée R_e sera considérée comme infinie :



On réalise pour cela les deux essais suivants :

- *Essai n°1 : $e(t) = E\cos(2\pi ft)$, $R = 16\ \Omega$, valeur efficace de e(t), 1 mV. On mesure avec un oscilloscope numérique une valeur efficace en sortie égale à 0,67 V.*

• Essai n°2 : e(t) = E cos (2πft), R = 8 Ω, valeur efficace de e(t), 1 mV. On mesure alors une valeur efficace en sortie égale à 0,5 V.

De plus, on constate que, lors de chaque essai, les deux signaux de sortie gardent, quelle que soit la fréquence, la même valeur efficace et sont en phase avec e(t).

➢ 1. Déterminer le gain à vide G et l'impédance de sortie complexe $\underline{Z}_s$.

➢ 2. L'amplificateur étant alimenté par une tension e(t) = E cos (2πft), quelle doit être la résistance de charge R pour qu'il fournisse le maximum de puissance moyenne à tension d'entrée d'amplitude E constante ?

Solution :

➢ 1. On pose, en notation complexe et en notant E_e et $V_{s,e}$ les valeurs efficaces des tensions d'entrée et de sortie et φ le déphasage de v_s par rapport à e :

$$\underline{e}(t) = E_e\sqrt{2}\exp(j2\pi ft) \quad \text{et} \quad \underline{v}_s(t) = V_{s,e}\sqrt{2}\exp(j(2\pi ft + \varphi))$$

La règle du diviseur de tension donne :

$$\underline{v}_s = \frac{R}{R + \underline{Z}_s} G\underline{e}$$

En posant $\underline{Z}_s = R_s + jB_s$, où les parties réelle et imaginaire R_s et B_s dépendent *a priori* de la fréquence, la valeur efficace de la tension de sortie peut s'écrire :

$$V_{s,e} = \frac{R}{\sqrt{(R + R_s)^2 + B_s^2}} GE_e \qquad (\text{avec de plus : } \tan\varphi = -\frac{B_s}{R + R_s})$$

Le déphasage entre v_s et e étant nul quelle que soit la fréquence, on déduit $B_s = 0$ et :

$$V_{s,e} = \frac{R}{R + R_s} GE_e$$

Comme la valeur efficace $V_{s,e}$ ne dépend pas de la fréquence, l'impédance de sortie de la chaîne hi-fi est donc finalement réelle et équivalente à une seule résistance R_s de valeur constante, indépendante de la fréquence.

Les essais effectués avec deux valeurs de la résistance R conduisent alors au système de deux équations suivant :

$$(16 + R_s)0{,}67 = 16.10^{-3}G \quad \text{et} \quad (8 + R_s)0{,}5 = 8.10^{-3}G \qquad (\text{avec } R_s \text{ en } \Omega)$$

dont la résolution donne : $R_s = 8\,\Omega$ et $G = 10^3$.

➢ 2. La puissance électrique moyenne reçue par la résistance de charge vaut :

$$P = \frac{1}{R} V_{s,e}^2 = \frac{R}{(R + R_s)^2} G^2 E_e^2$$

Elle sera extrémale, à E_e, G et R_s donnés (caractéristiques de l'amplificateur) lorsque $dP / dR = 0$. Or :

$$\frac{dP}{dR} = G^2E_e^2 \frac{(R + R_s)^2 - 2R(R + R_s)}{(R + R_s)^4} = G^2E_e^2 \frac{R_s - R}{(R + R_s)^3}$$

Par conséquent, $dP/dR = 0$ pour $R = R_s$. La puissance est alors effectivement maximale et vaut $P_{max} = P(R_s) = G^2E_e^2 / 4R_s$. La résistance de charge est dite adaptée à la résistance de sortie de la chaîne hi-fi et l'on parle d'adaptation des résistances.

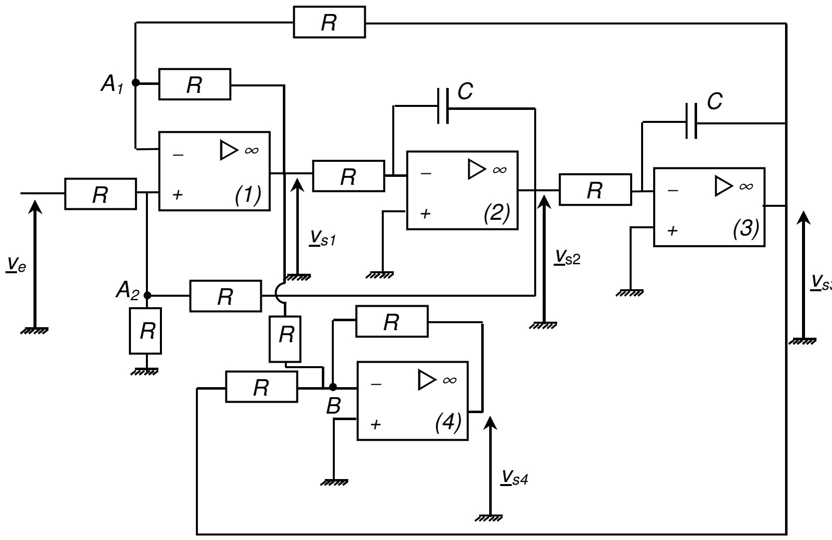
Remarque : si l'amplificateur avait eu une impédance complexe de sortie $\underline{Z}_s$, l'impédance adaptée $\underline{Z}$ de la charge placée en sortie aurait alors été telle que $\overline{\underline{Z}} = \underline{Z}_s$ (c'est-à-dire, mêmes parties réelles mais parties imaginaires opposées).

FILTRE UNIVERSEL

AOP en régime linéaire

Enoncé :

Dans certains circuits intégrés, il peut être intéressant d'utiliser des filtres de nature différente (passe-bande, passe-bas, passe-haut ou encore réjecteur de bande) mais possédant la même pulsation caractéristique ω_0. Ces filtres sont dits universels.



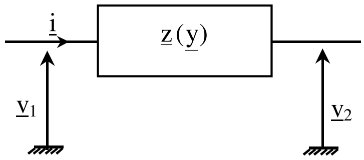
En exprimant les quatre tensions de sortie $\underline{v}_{s1}$, $\underline{v}_{s2}$, $\underline{v}_{s3}$ et $\underline{v}_{s4}$ (écrites en notation complexe) en fonction de $\underline{v}_e$, montrer que le circuit proposé dans cet exercice, utilisé en régime permanent sinusoïdal, constitue un exemple de filtre universel. Les amplificateurs opérationnels sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

Solution :

Les amplificateurs opérationnels numérotés (2) et (3) sont utilisés dans des montages intégrateurs, pour lesquels :

$$\underline{v}_{s_2} = -\frac{1}{jRC\omega}\underline{v}_{s_1} \quad \text{et} \quad \underline{v}_{s_3} = -\frac{1}{jRC\omega}\underline{v}_{s_2} \quad \left(\text{d'où : } \underline{v}_{s_3} = -\frac{1}{(RC\omega)^2}\underline{v}_{s_1}\right)$$

Dans le cas illustré sur la figure ci-contre, l'intensité $\underline{i}$ du courant qui traverse l'impédance complexe $\underline{z}$ (ou l'admittance $\underline{y}$) peut s'écrire en fonction des tensions (par rapport à la masse) qui « l'encadrent » $\underline{v}_1$ et $\underline{v}_2$, sous la forme :



$$\underline{i} = (\underline{v}_1 - \underline{v}_2)/\underline{z} = (\underline{v}_1 - \underline{v}_2)\underline{y}$$

L'utilisation de ce résultat permet alors d'écrire la loi des nœuds en termes de potentiels au nœud B (dont le potentiel par rapport à la masse est nul), situé à l'entrée inverseuse de l'amplificateur (4), sous la forme :

$$\frac{1}{R}(\underline{v}_{s_3} - 0) = \frac{1}{R}(0 - \underline{v}_{s_1}) + \frac{1}{R}(0 - \underline{v}_{s_4}) \qquad \text{soit} \qquad \underline{v}_{s_4} = -(\underline{v}_{s_1} + \underline{v}_{s_3})$$

L'amplificateur (4) est ici utilisé dans un montage sommateur inverseur.

Remarque : ce résultat pouvait être obtenu en appliquant directement le théorème de Millman qui, au nœud B, permet d'écrire :

$$0 = \left(\frac{\underline{v}_{s_1}}{R} + \frac{\underline{v}_{s_3}}{R} + \frac{\underline{v}_{s_4}}{R}\right) \bigg/ \frac{3}{R}$$

Soit e^+ la tension (par rapport à la masse) de la borne non inverseuse de l'amplificateur (1), égale à la tension de la borne inverseuse du même amplificateur en régime linéaire. L'écriture de la loi des nœuds en termes de potentiels aux nœuds A_1 et A_2 donne :

$$0 = \frac{1}{R}(\underline{e}^+ - \underline{v}_{s_1}) + \frac{1}{R}(\underline{e}^+ - \underline{v}_{s_3}) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{R}(\underline{v}_e - \underline{e}^+) = \frac{1}{R}(\underline{e}^+ - 0) + \frac{1}{R}(\underline{e}^+ - \underline{v}_{s_2})$$

Soit $2\underline{e}^+ = \underline{v}_{s_1} + \underline{v}_{s_3}$ et $\underline{v}_e + \underline{v}_{s_2} = 3\underline{e}^+$, d'où :

$$3(\underline{v}_{s_1} + \underline{v}_{s_3}) = 2(\underline{v}_e + \underline{v}_{s_2})$$

Là encore, les deux relations précédentes pouvaient s'obtenir en écrivant directement le théorème de Millman aux nœuds A_1 et A_2 :

$$e^+ = \left(\frac{\underline{v}_{s_1}}{R} + \frac{\underline{v}_{s_3}}{R}\right) \bigg/ \frac{2}{R} \qquad \text{et} \qquad e^+ = \left(\frac{\underline{v}_e}{R} + \frac{\underline{v}_{s_2}}{R}\right) \bigg/ \frac{3}{R}$$

On peut alors en déduire une relation entre les tensions $\underline{v}_{s_1}$ et $\underline{v}_e$:

$$2\left(\underline{v}_e - \frac{1}{jRC\omega}\underline{v}_{s_1}\right) = 3\left(\underline{v}_{s_1} - \frac{1}{(RC\omega)^2}\underline{v}_{s_1}\right)$$

d'où, finalement :

$$\frac{\underline{v}_{s_1}}{\underline{v}_e} = -\frac{2}{3}\,\frac{R^2C^2\omega^2}{1 + (2/3)jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

On reconnaît la forme normalisée de la fonction de transfert d'un filtre passe-haut du 2^{nd} ordre :

$$\frac{\underline{v}_{s_1}}{\underline{v}_e} = A_0 \frac{-\omega^2/\omega_0^2}{1+2j\sigma\omega/\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2} \qquad \left(\text{avec } A_0 = \frac{2}{3},\ \omega_0 = \frac{1}{RC} \text{ et } \sigma = \frac{1}{3}\right)$$

La tension de sortie du 2ème amplificateur est alors telle que :

$$\underline{v}_{s_2} = -\frac{1}{jRC\omega}\underline{v}_{s_1} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\underline{v}_{s_2}}{\underline{v}_e} = -\frac{(2/3)jRC\omega}{1+(2/3)jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

On reconnaît ici la forme normalisée de la fonction de transfert d'un filtre passe-bande du 2nd ordre, dont la pulsation de résonance est ω_0.

La tension de sortie du 3ème amplificateur est donnée par :

$$\underline{v}_{s_3} = -\frac{1}{(RC\omega)^2}\underline{v}_{s_1} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\underline{v}_{s_3}}{\underline{v}_e} = \frac{2}{3}\frac{1}{1+(2/3)jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

On aboutit à la fonction de transfert normalisée d'un filtre passe-bas du 2nd ordre.

Enfin, la tension de sortie du 4ème amplificateur sera :

$$\underline{v}_{s_4} = -(\underline{v}_{s_1} + \underline{v}_{s_3}) \qquad \text{soit} \qquad \frac{\underline{v}_{s_4}}{\underline{v}_e} = -\frac{\underline{v}_{s_1}}{\underline{v}_e} - \frac{\underline{v}_{s_3}}{\underline{v}_e}$$

On obtient ainsi la forme normalisée de la fonction de transfert d'un filtre réjecteur de bande qui élimine les tensions dont la pulsation est proche de ω_0 :

$$\frac{\underline{v}_{s_4}}{\underline{v}_e} = -\frac{2}{3}\frac{1-R^2C^2\omega^2}{1+(2/3)jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

Les amplificateurs opérationnels (2), (3) et (4) réalisent des opérations mathématiques simples (l'intégration pour les amplificateurs (2) et (3) et la sommation pour l'amplificateur (4)) qui permettent, à partir du montage réalisé autour du 1er amplificateur, d'obtenir quatre filtres de base du 2nd ordre. Une telle structure est appelée « structure à variable d'état ».

FILTRE A STRUCTURE DE RAUCH

AOP en régime linéaire

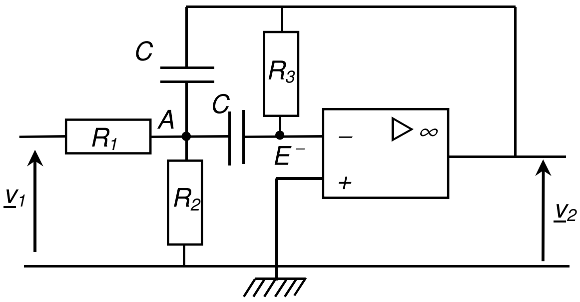
Enoncé :

On étudie dans cet exercice un filtre du second ordre basé sur la structure de Rauch. L'amplificateur opérationnel utilisé est idéal et fonctionne en régime linéaire. On se place en régime permanent sinusoïdal de pulsation ω, en utilisant la notation complexe.

➢ *1. Déterminer de manière qualitative la nature du filtre étudié.*

➢ *2. Etablir l'expression de la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega) = \underline{v}_2/\underline{v}_1$ du filtre. Mettre $\underline{H}(j\omega)$ sous une forme normalisée, dans laquelle interviennent la pulsation ω, la pulsation de résonance ω_0, le facteur de qualité Q et un gain statique H_0. Donner les expressions de ω_0, Q et H_0 en fonction de R_1, R_2, R_3 et C.*

➢ *3. Déterminer les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 (avec $\omega_1 < \omega_2$) du filtre. Calculer la bande passante $\Delta\omega$.*



➢ *4. Les résistances R_1, R_2 et R_3 sont des potentiomètres dont on peut faire varier continûment la valeur entre 0 et 100 kΩ. Montrer alors que les caractéristiques du filtre peuvent être choisies indépendamment les unes des autres. On veut obtenir une bande passante comprise entre les fréquences 300 Hz et 3 400 Hz. Déterminer les valeurs numériques de ω_0, $\Delta\omega$ et Q_0. Calculer le coefficient H_0, sachant que $R_1 = 4R_3$. Calculer R_1, R_2 et R_3 pour $C = 100\,nF$.*

➢ *5. Quelles sont les raisons qui conduisent à choisir un tel circuit pour filtrer plutôt qu'un circuit passif (R,L,C) ?*

➢ *6. Exprimer l'impédance d'entrée du montage à partir de $\underline{H}(j\omega)$, R_1, R_3, C et ω. Quelle est l'impédance de sortie du filtre (voir à ce propos l'exercice « Amplificateur de chaîne Hi-fi », page 93) ? Dessiner le schéma équivalent du filtre.*

➢ *7. Proposer un montage qui, placé en entrée, permettrait de rendre l'impédance d'entrée du filtre infinie.*

Solution :

➢ 1. A basse pulsation, les condensateurs sont équivalents à des fils coupés ; par conséquent, l'intensité dans la résistance R_3 est nécessairement nulle et ainsi $\underline{v}_2 = 0$. A haute pulsation, les condensateurs sont équivalents à des fils de résistance pratiquement nulle. Par suite, $\underline{v}_2 = \underline{v}_A = e^- = e^+ = 0$ (e^- et e^+ désignent les tensions aux bornes des entrées inverseuse et non inverseuse de l'amplificateur et $\underline{v}_A$ le potentiel de A par rapport à la masse). Ce filtre se comporte, de manière qualitative, comme un filtre passe-bande.

➢ 2. L'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire, par conséquent, $e^- = e^+ = 0$. Par ailleurs, la loi des nœuds écrite en termes de potentiels (se référer à la solution de l'exercice précédent, page 96) permet d'écrire, respectivement aux nœuds A et E^- :

$$\frac{1}{R_1}(\underline{v}_1 - \underline{v}_A) = \frac{1}{R_2}\underline{v}_A + jC\omega(\underline{v}_A - \underline{v}_2) + jC\omega\underline{v}_A \qquad \text{et} \qquad jC\omega\underline{v}_A = \frac{1}{R_3}(-\underline{v}_2)$$

Par conséquent :

$$\underline{v}_1 + \frac{1}{jCR_3\omega}\underline{v}_2 = -\frac{R_1}{R_2}\frac{1}{jCR_3\omega}\underline{v}_2 - jR_1C\omega\underline{v}_2 - 2\frac{R_1}{R_3}\underline{v}_2$$

Soit :

$$\underline{H}(j\omega)=\frac{\underline{v}_2}{\underline{v}_1}=-\frac{jCR_3\omega}{\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)+2jR_1C\omega-R_1R_3C^2\omega^2}$$

Ou encore :

$$\underline{H}(j\omega)=-\frac{1}{2}\frac{R_3}{R_1}\frac{2j\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C\omega}{1+2j\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C\omega-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}R_3C^2\omega^2}$$

On reconnaît une forme normalisée d'un filtre passe-bande du second ordre :

$$\underline{H}(j\omega)=-H_0\frac{j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Avec : $H_0=\frac{1}{2}\frac{R_3}{R_1}$, $\frac{1}{\omega_0^2}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}R_3C^2$ et $\frac{1}{Q}=2\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C\omega_0$.

En divisant le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert par $j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}$, on obtient une autre expression normalisée de la fonction de transfert, plus commode à manipuler mathématiquement :

$$\underline{H}(j\omega)=-H_0\frac{1}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Le gain du filtre, module de la fonction de transfert est :

$$G(\omega)=\left|\underline{H}(j\omega)\right|=H_0\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

Il est maximal à la résonance, obtenue pour $\omega=\omega_0$, le gain valant alors H_0.

➢ 3. Les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 sont telles que le gain du filtre est égal à sa valeur maximale (soit H_0) divisée par $\sqrt{2}$. Par conséquent, elles vérifient l'équation :

$$G(\omega)=H_0\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}=\frac{H_0}{\sqrt{2}}\qquad\text{soit}\qquad Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2=1$$

Les pulsations ω_1 et ω_2 sont ainsi solution de :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)=-1/Q \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)=1/Q$$

La 1ère équation peut s'écrire $\omega^2+\omega_0\omega/Q-\omega_0^2=0$. Elle admet, comme seule solution positive, $\omega_1=\dfrac{-\omega_0/Q+\sqrt{\omega_0^2/Q^2+4\omega_0^2}}{2}$. De même, la 2nde équation admet comme seule racine positive, $\omega_2=\dfrac{\omega_0/Q+\sqrt{\omega_0^2/Q^2+4\omega_0^2}}{2}$. La bande passante du filtre est alors $\Delta\omega=\omega_2-\omega_1=\omega_0/Q$; elle est d'autant plus faible que le facteur de qualité est grand (la résonance est alors qualifiée d'aiguë) et peut s'écrire en fonction de R_3 et de C, compte tenu des expressions de ω_0 et de Q obtenues à la question (2) :

$$\Delta\omega=\frac{\omega_0}{Q}=\frac{2}{R_3C}$$

➢ 4. On fixe une valeur pour la capacité du condensateur (ici, $C=100\,\text{nF}$). Alors, la valeur choisie pour R_3 détermine la valeur de la bande passante $\Delta\omega$. Le gain H_0 est ensuite fixé par la valeur de R_1 et enfin, la pulsation de résonance ω_0 est ajustée par la donnée de R_2 : les caractéristiques du filtre (H_0, ω_0 et $\Delta\omega$) peuvent bien être choisies indépendamment les unes des autres.

Connaissant $\omega_1=1885\,\text{rad.s}^{-1}$ et $\omega_2=21362\,\text{rad.s}^{-1}$, on déduit $\Delta\omega=19\,477\,\text{rad.s}^{-1}$. Par ailleurs, $\omega_1\omega_2=\omega_0^2$, d'où $\omega_0=\sqrt{\omega_1\omega_2}=6345\,\text{rad.s}^{-1}$. Le facteur de qualité est ensuite $Q=\omega_0/\Delta\omega=0{,}33$ (la résonance est relativement floue !) et le gain statique, sachant que $R_1=4R_3$, vaut $H_0=1/8$.

Valeurs des résistances : comme $C=100\,\text{nF}$, on détermine $R_3=2/C\Delta\omega=1030\,\Omega$ puis $R_1=4R_3=4120\,\Omega$. L'expression de ω_0 permet ensuite de calculer R_2 :

$$R_2=\frac{R_1}{R_1R_3C^2\omega_0^2-1}=5815\,\Omega$$

➢ 5. Un circuit série (RLC), lorsque la tension de sortie est celle aux bornes de la résistance, constitue un filtre passe-bande passif, dont le gain vaut 1, la pulsation de résonance $\omega_0=1/\sqrt{LC}$, le facteur de qualité $Q=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}=\dfrac{L\omega_0}{R}=\dfrac{1}{RC\omega_0}$ et la bande passante $\Delta\omega=R/L$. Dans le cas d'une structure de Rauch, le gain est réglable, les caractéristiques du filtre peuvent être choisies séparément par utilisation de simples potentiomètres et enfin cette structure n'utilise pas de selfs qui sont des composants encombrants et peu reproductibles.

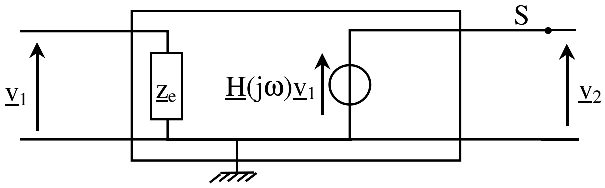
➢ 6. Si $\underline{i}_1$ désigne l'intensité du courant qui arrive, à travers la résistance R_1, au nœud A ; l'impédance d'entrée $\underline{z}_e$ du montage est alors définie par $\underline{z}_e=\underline{v}_1/\underline{i}_1$. Or :

$$\underline{i}_1=\frac{1}{R_1}(\underline{v}_1-\underline{v}_A) \qquad \text{et} \qquad jC\omega\underline{v}_A=\frac{1}{R_3}(-\underline{v}_2)=-\frac{1}{R_3}\underline{H}(j\omega)\underline{v}_1$$

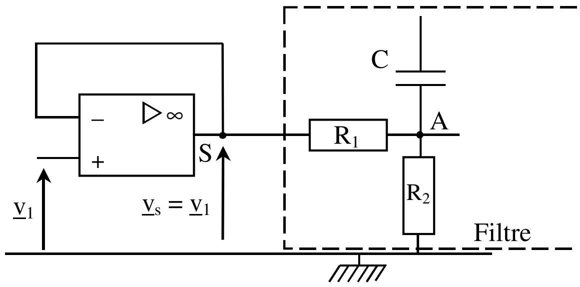
Par conséquent :

$$\underline{i}_1 = \frac{1}{R_1}\left(1 + \frac{\underline{H}(j\omega)}{jR_3C\omega}\right)\underline{v}_1 \quad \text{et donc} \quad \underline{z}_e = \frac{\underline{v}_1}{\underline{i}_1} = \frac{R_1}{1 + \dfrac{\underline{H}(j\omega)}{jR_3C\omega}}$$

La tension de sortie vaut $\underline{v}_2 = \underline{H}(j\omega)\underline{v}_1$, quelle que soit l'intensité du courant de sortie ; la sortie se comporte ainsi comme un générateur de tension idéal, pour lequel l'impédance de sortie est nulle. Le schéma équivalent de ce filtre sera alors (voir, à ce propos, l'exercice intitulé « Amplificateur de chaîne Hi-fi », page 93) :



➢ 7. On peut insérer, à l'entrée du filtre, un montage de type suiveur :



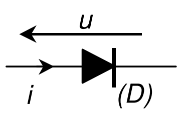
La tension d'entrée $\underline{v}_1$ est alors délivrée à courant nul (en effet, si l'amplificateur opérationnel est supposé idéal, le courant qui rentre dans la borne E^+ est nul) et l'impédance d'entrée du montage sera alors infinie !

AMPLIFICATEURS LOGARITHMIQUE ET ANTILOGARITHMIQUE ; REALISATION D'UN MULTIPLIEUR

AOP en régime linéaire

Enoncé :

➢ 1. On considère une diode pour laquelle la relation entre l'intensité i qui la traverse et la tension u à ses bornes est, pour de faibles valeurs de u et lorsque la diode est passante, de la forme :



$$i = i_0\left[\exp\left(\frac{qu}{kT}\right) - 1\right]$$

Avec $q = 1{,}6.10^{-19}\,C$, $k = 1{,}38.10^{-23}\,J.K^{-1}$ (constante de Boltzmann), T température absolue (en K) et i_0 courant de fuite ($i_0 = 10^{-9}\,A$). Pour les applications numériques, on supposera que la température est de 25°C (soit 298 K). On suppose que u varie *dans une plage pour laquelle $\exp(qu/kT) >> 1$. Le courant i est alors égal à $i_{app} = i_0 \exp(qu/kT)$. L'intensité maximale supportée par la diode est i_{max} = 500 mA.*

➢ *1. Si on admet une imprécision de 0,1% sur i, à partir de quelle valeur de u peut-on assimiler i à i_{app} ? Quelle est la tension u_{max} à ne pas dépasser ? Tracer la caractéristique de la diode dans le sens passant.*

➢ *2-a) On considère les montages représentés sur les figures (a) et (b) utilisant un amplificateur opérationnel idéal fonctionnant en mode linéaire et la diode précédente travaillant sur un domaine tel que $i \approx i_{app}$. Exprimer les tensions de sortie u_{s1} et u_{s2} en fonction de u_e pour ces deux montages.*

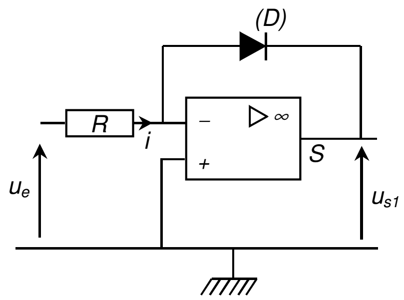


Figure (a)

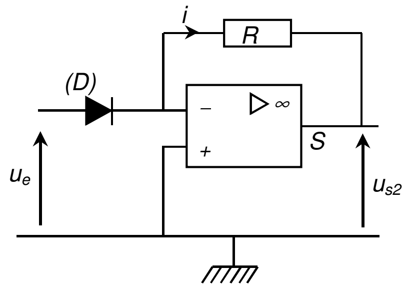


Figure (b)

b) Les expressions obtenues pour u_{s1} et u_{s2} sont-elles correctes pour toute valeur de u_e ? Quels sont les phénomènes physiques qui modifient les expressions précédentes ?

Ces montages sont des schémas de principe d'amplificateurs logarithmique et antilogarithmique. La construction de tels amplificateurs s'avère dans la pratique plus compliquée car il faut tenir compte des phénomènes évoqués à la question (2-b).

➢ *3. Application ; réalisation d'un multiplieur :*

a) On considère le montage représenté sur la figure (c), dans lequel l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire. Exprimer v_s en fonction de v_{e1} et v_{e2}.

b) Donner le schéma d'un multiplieur réalisé avec les trois montages précédents. Par la suite, le multiplieur sera représenté par le schéma de la figure (d).

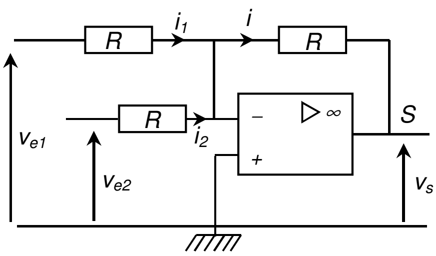


Figure (c)

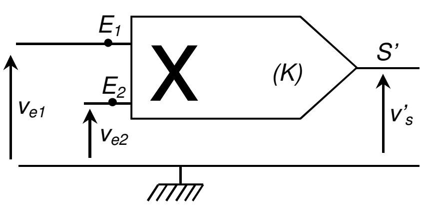
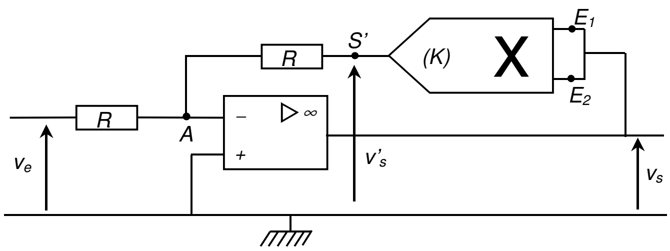


Figure (d) : v_{e1} et v_{e2} > 0

c) On supposera, dans cette dernière question, que le multiplieur se comporte comme un générateur idéal de tension vis-à-vis des éléments branchés à sa sortie et que $v'_s = Kv_{e1}v_{e2}$ (avec K < 0). Exprimer v_s en fonction de v_e pour le montage représenté page suivante dans le cas où v_e > 0. Pour obtenir une relation analogue entre v_s et v_e, comment doit-on modifier le montage lorsque v_e < 0 ?



Solution :

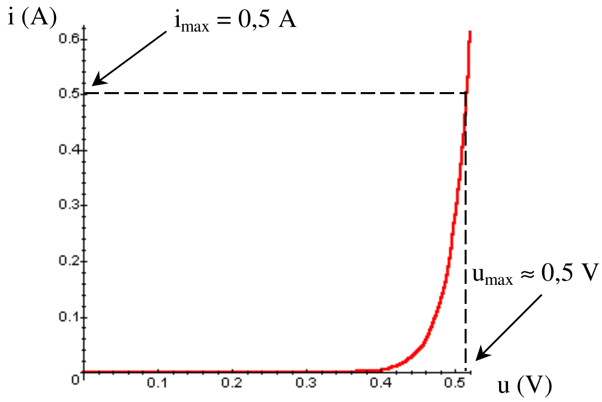
➢ 1. Si l'on admet une imprécision de 0,1% sur i, alors :

$$\frac{i_{app}-i}{i} \approx \frac{i_{app}-i}{i_{app}} = \exp\left(-\frac{qu}{kT}\right) \leq 10^{-3} \qquad \text{soit} \qquad u \geq u_0 = 3\frac{kT}{q}\ln(10) = 0{,}18\,\text{V}$$

La tension maximale à appliquer est donnée par :

$$u_{max} = \frac{kT}{q}\ln\left(\frac{i_{max}}{i_0}\right) \approx 0{,}5\,\text{V}$$

La caractéristique de la diode est tracée ci-contre.



➢ 2-a) En régime linéaire et pour le montage de la figure (a), on peut écrire, en remarquant qu'en convention récepteur pour la diode, $u = -u_{s_1}$ et en supposant que $-u_{s_1} \geq u_0$:

$$u_e = Ri \qquad \text{et} \qquad i = i_0 \exp\left(-\frac{qu_{s_1}}{kT}\right)$$

Soit, $u_e = Ri_0 \exp\left(-\frac{qu_{s_1}}{kT}\right)$ et finalement : $u_{s_1} = -\frac{kT}{q}\ln\left(\frac{u_e}{Ri_0}\right)$.

De même, pour le montage (b), et en supposant ici que $u_e \geq u_0$:

$$i = i_0 \exp\left(\frac{qu_e}{kT}\right) \qquad \text{et} \qquad u_{s_2} = -Ri$$

Soit directement : $u_{s_2} = -Ri_0 \exp\left(\frac{qu_e}{kT}\right)$.

Si l'on pose $u_1 = kT/q$ et $u_2 = Ri_0$, alors :

• Pour le montage (a) : $u_{s_1} = -u_1 \ln\left(\frac{u_e}{u_2}\right)$ (amplificateur logarithmique).

• Pour le montage (b) : $u_{s_2} = -u_2 \exp\left(\frac{u_e}{u_1}\right)$ (amplificateur antilogarithmique).

b) Les expressions obtenues pour u_{s_1} et u_{s_2} sont valables si :

• $-u_{s_1} \geq u_0$ et $u_e \geq u_0$ pour que l'on puisse assimiler le courant dans la diode à i_{app}.

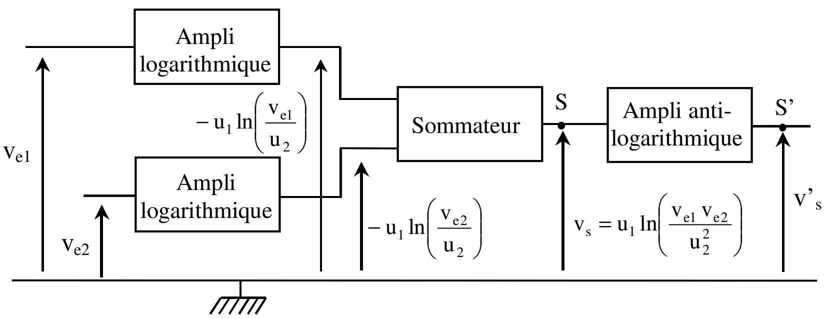
• Les amplificateurs opérationnels doivent fonctionner en régime linéaire, par conséquent, si l'on note V_{sat} la tension de saturation en tension des amplificateurs :

$$|u_{s_1}| \leq V_{sat} \quad \text{et} \quad |u_{s2}| \leq V_{sat}$$

• A haute fréquence, le gain en boucle ouverte des amplificateurs ne pourra plus être considéré comme étant infini (il décroît en effet avec la fréquence). La limitation due à la vitesse de balayage des amplificateurs limitera également les propriétés de ces montages. De plus, la caractéristique de la diode n'est plus valide à haute fréquence.

➢ 3-a) L'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire (rétroaction sur la borne inverseuse). La loi des mailles permet d'écrire $v_{e_1} = Ri_1$, $v_{e2} = Ri_2$, $v_s = -Ri$. Comme $i = i_1 + i_2$, il vient finalement $v_s = -(v_{e_1} + v_{e_2})$: le montage proposé joue le rôle d'un montage sommateur inverseur.

b) Un multiplieur, réalisé à partir des trois montages précédents, aura la structure suivante :



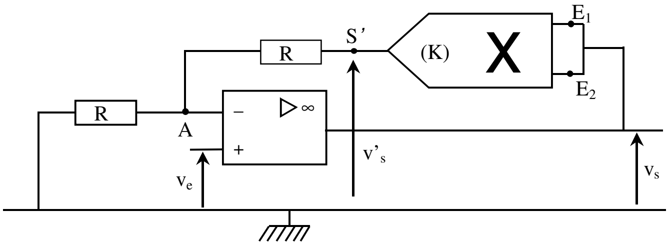
La tension de sortie est alors égale à :

$$v'_s = -u_2 \exp\left(\frac{v_s}{u_1}\right) = -\frac{1}{u_2} v_{e_1} v_{e_2}$$

Et le gain K du multiplieur vaut $K = -1/u_2$.

c) Dans le montage proposé, où l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire, $v_{s'} = -v_e$ et (propriété du multiplieur) $v_{s'} = Kv_s^2$. Par conséquent, en supposant $v_e > 0$ et en remarquant que $K < 0$, $v_s = \sqrt{-v_e / K}$. Ce type de montage permet ainsi de réaliser une nouvelle opération mathématique élémentaire, la racine carrée.

Lorsque $v_e < 0$, on peut par exemple remplacer le montage amplificateur inverseur par un montage non inverseur :



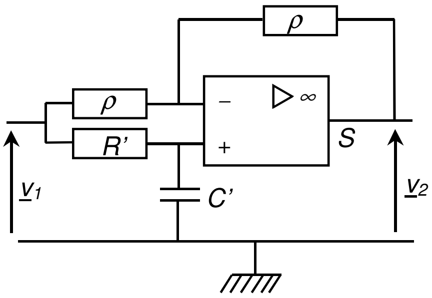
Alors, $v'_s = 2v_e = Kv_s^2$, d'où, avec $v_e < 0$ et $K < 0$, $v_s = \sqrt{2v_e / K}$.

DEUX CIRCUITS DE TRAITEMENT DU SIGNAL

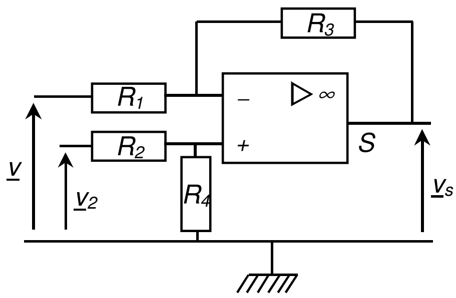
AOP en régime linéaire

Enoncé :

Les amplificateurs opérationnels sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire.



Réseau (D)



Réseau (S)

➢ *1. Dans le réseau (D) utilisé en régime sinusoïdal permanent, R' et ρ désignent des résistances et C' une capacité ($R' = 10\,k\Omega$ et $C' = 0{,}1\,\mu F$). Déterminer la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega) = \underline{v}_2 / \underline{v}_1$ du circuit. Tracer l'allure de son diagramme de Bode. Quelle est la fonction de ce réseau ?*

➢ *2. Dans le réseau (S), R_1, R_2, R_3 et R_4 désignent des résistances. A quelle condition le réseau (S) fonctionne-t-il en soustracteur ? Quelle est alors l'expression de $\underline{v}_s$ en fonction de $\underline{v}$ et de $\underline{v}_2$?*

Solution :

➢ 1. L'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire, par conséquent, tant que la tension de sortie reste en valeur maximale inférieure à la tension de saturation V_{sat} de l'amplificateur : $\underline{e}^- = \underline{e}^+$, où $\underline{e}^-$ et $\underline{e}^+$ désignent les potentiels respectifs des bornes inverseuse et non inverseuse par rapport à la masse. Or, d'après la règle du diviseur de tension :

$$\underline{e}^+ = \frac{1/jC'\omega}{R'+1/jC'\omega}\underline{v}_1 = \frac{1}{1+jR'C'\omega}\underline{v}_1$$

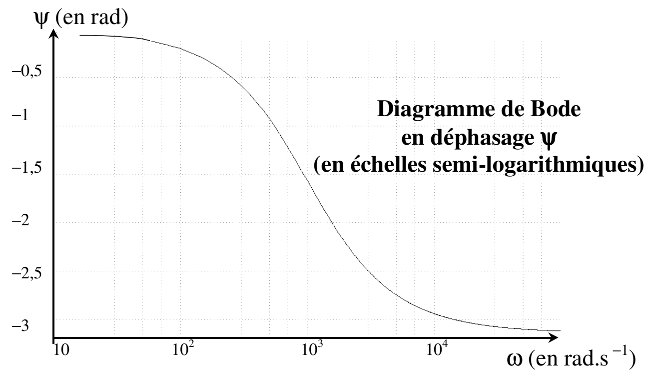
L'écriture de la loi des nœuds en termes de potentiels à la borne inverseuse (théorème de Millman) donne :

$$\frac{\underline{v}_1 - \underline{e}^-}{\rho} = \frac{\underline{e}^- - \underline{v}_2}{\rho} \qquad \text{soit} \qquad \underline{e}^- = \frac{\underline{v}_1 + \underline{v}_2}{2}$$

Comme $\underline{e}^- = \underline{e}^+$, il vient :

$$\frac{1}{1 + jR'C'\omega}\underline{v}_1 = \frac{\underline{v}_1 + \underline{v}_2}{2} \qquad \text{soit} \qquad \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_2}{\underline{v}_1} = \frac{1 - jR'C'\omega}{1 + jR'C'\omega}$$

Le gain de ce montage est égal à 1 ; si l'on note φ l'argument du nombre complexe $(1 - jR'C'\omega)$, alors l'argument ψ de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ est $\psi = 2\varphi$. Or, $\tan\varphi = -R'C'\omega$ (et $\cos\varphi > 0$, soit $\varphi \in [-\pi/2, 0]$), d'où $\tan(\psi/2) = -R'C'\omega$ et $\psi \in [-\pi, 0]$. Le diagramme de Bode (uniquement pour la phase ψ) du circuit (D), qui joue le rôle de déphaseur, est tracé sur la figure suivante (avec $R'C' = 10^{-3}\,\text{s}$) :



➢ 2. En régime linéaire, $\underline{e}^- = \underline{e}^+$. Or, la règle du diviseur de tension donne :

$$\underline{e}^+ = \frac{R_4}{R_2 + R_4}\underline{v}_2$$

L'écriture de la loi des nœuds en termes de potentiels à la borne inverseuse (théorème de Millman) donne :

$$\frac{\underline{v} - \underline{e}^-}{R_1} = \frac{\underline{e}^- - \underline{v}_s}{R_3} \qquad \text{soit} \qquad \underline{e}^- = \frac{\underline{v}/R_1 + \underline{v}_s/R_3}{1/R_1 + 1/R_3}$$

Par conséquent :

$$\frac{R_4}{R_2 + R_4}\underline{v}_2 = \frac{\underline{v}/R_1 + \underline{v}_s/R_3}{1/R_1 + 1/R_3}$$

d'où l'expression de la tension $\underline{v}_s$:

$$\underline{v}_s = \frac{R_1 + R_3}{R_1}\left[\frac{R_4}{R_2 + R_4}\underline{v}_2 - \frac{R_3}{R_1 + R_3}\underline{v}\right] = \frac{(R_1 + R_3)R_4\underline{v}_2 - (R_2 + R_4)R_3\underline{v}}{R_1(R_2 + R_4)}$$

Le réseau (S) fonctionne en soustracteur si $\underline{v}_s$ est proportionnelle à la différence des deux tensions ($\underline{v}_2 - \underline{v}$). Il en sera ainsi si :

$$(R_1+R_3)R_4=(R_2+R_4)R_3 \qquad \text{soit} \qquad R_1R_4=R_2R_3$$

et la tension de sortie $\underline{v}_s$ est alors :

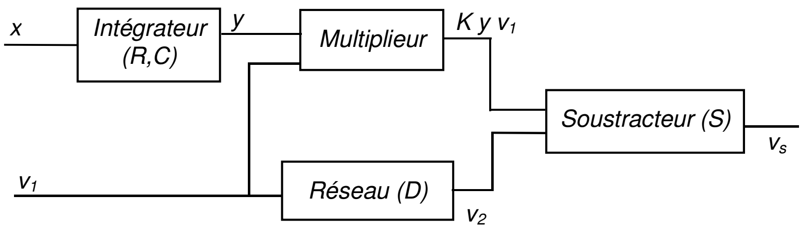
$$\underline{v}_s=\frac{R_3}{R_1}\left(\underline{v}_2-\underline{v}\right)$$

MODULATION DE FREQUENCE

AOP en régime linéaire

Enoncé :

On associe les deux réseaux de l'exercice précédent « Deux circuits de traitement du signal », page 105, dans le « modulateur d'Armstrong » selon le schéma ci-dessous, dans lequel le réseau (S) est utilisé en soustracteur et où un multiplieur fournit en sortie une tension $K\,y\,v_1$ proportionnelle aux tensions y et v_1 imposées à l'entrée.



On impose à l'entrée de l'ensemble les tensions $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ et $v_1(t) = V_1 \cos(\omega_1 t)$. De plus, on s'assure que $y(t = 0) = 0$ et que le réseau (D) est réglé pour un retard de phase de v_2 par rapport à v_1 égal à $\pi / 2$.

➢ *1. L'intégrateur (R,C) est réalisé à partir d'un montage à amplificateur opérationnel. Dessiner ce montage et donner la relation entre les tensions d'entrée et de sortie x et y. Déterminer la tension y(t).*

➢ *2. Montrer que la tension à la sortie du modulateur est de la forme :*

$$v_s(t)=U_0\sqrt{1+\alpha^2\sin^2\omega t}\;\left[\sin(\omega_1 t+\varphi)\right]$$

où l'on exprimera α en fonction de K, x_0, R, C et ω ; $\tan\varphi$ en fonction de K, x_0, R, C et du temps t et U_0 en fonction de R_1, R_3 et V_1.

➢ *3. On suppose que le coefficient α est petit devant 1. Donner une expression approchée de la tension de sortie de l'ensemble. Montrer que l'on peut la mettre sous la forme d'une tension modulée en fréquence :*

$$v_s(t)=U_0\sin(\omega_1 t+m\sin\omega t)=U_0\sin\left[\Psi(t)\right]$$

de pulsation porteuse (élevée) ω_1, de taux de modulation m, de pulsation modulante ω et de phase instantanée $\Psi(t)$. Identifier la valeur de m et vérifier l'homogénéité de l'expression de m.

➢ *4. On convient d'appeler pulsation instantanée du signal $v_s(t)$ la grandeur $\Omega(t) = d\Psi(t) / dt$. Etablir la relation liant $\Omega(t)$, ω_1, K, R, C et $x(t)$. Justifier alors le nom de modulation de fréquence effectivement donné à ce type de modulation.*

➢ 5. La modulation de fréquence est utilisée par exemple :

• Avec une porteuse de moyenne fréquence (environ 100 MHz) pour le transport de signaux de basse fréquence (acoustique, jusqu'à 20 KHz) pour la transmission radio.

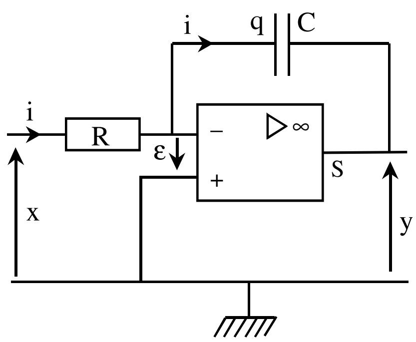
• Avec une porteuse de haute fréquence (environ 10 GHz) pour le transport de signaux de moyenne fréquence (quelques 10 MHz) pour la transmission d'images de télévision par satellite.

Connaissez-vous un avantage de ce mode de transport de l'information par rapport à une émission directe du signal ? Par rapport à la modulation d'amplitude ?

Solution :

➢ 1. Le montage intégrateur réalisé à partir d'un montage à amplificateur opérationnel est rappelé sur la figure suivante. L'amplificateur fonctionne en régime linéaire, par conséquent la tension différentielle d'entrée ε est nulle. La loi des mailles permet alors d'écrire :

$$x = Ri \qquad \text{et} \qquad y = -q/C$$



Comme $i = dq/dt$, il vient :

$$x = -RC\,dy/dt$$

Soit, en supposant la tension nulle à l'instant $t = 0$:

$$y = -\frac{1}{RC}\int_0^t x(t')dt' = -\frac{1}{RC}\frac{x_0}{\omega}\sin\omega t$$

➢ 2. Les tensions à la sortie du multiplieur et du réseau déphaseur (D) sont respectivement :

$$Kyv_1 = -\frac{K}{RC\omega}x_0V_1\sin\omega t\cos\omega_1 t \qquad \text{et} \qquad v_2 = V_1\cos(\omega_1 t - \pi/2) = V_1\sin\omega_1 t$$

A la sortie du soustracteur (S), la tension v_s sera par conséquent :

$$v_s = \frac{R_3}{R_1}\left[\sin\omega_1 t + \frac{K}{RC\omega}x_0\sin\omega t\cos\omega_1 t\right]V_1$$

Si l'on utilise la transformation trigonométrique suivante :

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right] = A\sin(\theta+\varphi)$$

Avec : $A = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$, la tension de sortie peut alors se mettre sous la forme :

$$v_s(t) = U_0\sqrt{1+\alpha^2\sin^2\omega t}\;[\sin(\omega_1 t + \varphi)]$$

Avec : $U_0 = \dfrac{R_3}{R_1}V_1$, $\alpha = \dfrac{Kx_0}{RC\omega}$ et $\tan\varphi = \dfrac{Kx_0}{RC\omega}\sin\omega t = \alpha\sin\omega t$.

➢ 3. Si l'on suppose $\alpha << 1$, alors $\tan\varphi << 1$ et ainsi $\varphi \approx \alpha\sin(\omega t)$. Au 1er ordre en α, $\sqrt{1+\alpha^2\sin^2\omega t} \approx 1$ et par conséquent, $v_s(t) = U_0\left[\sin(\omega_1 t + \alpha\sin(\omega t))\right]$, soit $m = \alpha$. On vérifie bien que α est sans dimension puisque K est homogène à l'inverse d'une tension, x_0 à une tension, RC à un temps et la pulsation à l'inverse d'un temps.

➢ 4. La pulsation instantanée du signal de sortie est définie par :

$$\Omega(t) = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\omega_1 t + m\sin(\omega t)\right] = \omega_1 + m\omega\cos(\omega t) = \omega_1 + \frac{K}{RC}x(t)$$

La pulsation instantanée du signal de sortie varie autour de la valeur moyenne ω_1, avec une amplitude de variation égale à $m\omega = Kx_0 / RC$.

➢ 5. Un signal de basse fréquence (acoustique, de 50 Hz à 20 KHz) ne peut être transmis directement par voie hertzienne : il serait d'une part impossible à la réception de le distinguer de tout autre signal environnant appartenant à la même plage de fréquence et les dimensions des antennes réceptrices (de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde du signal émis) seraient gigantesques (de l'ordre de 300 km pour une fréquence de 1 Khz !).

Le signal à transmettre est alors utilisé pour modifier une des caractéristiques d'un signal sinusoïdal (constituant le signal porteur) dont la fréquence est beaucoup plus élevée que celle du signal à transmettre. La modulation de fréquence s'est imposée pour la transmission des ondes diffusant la radio et la télévision car, étant la moins affectée par le bruit et les distorsions, elle peut véhiculer fidèlement l'information. Les fréquences porteuses étant élevées, la propagation de telles ondes s'effectue de manière pratiquement rectiligne dans l'atmosphère terrestre, à la manière d'un phare optique guidant les navigateurs ! Il faut ainsi de nombreux émetteurs pour couvrir un territoire comme la France alors que quelques uns suffisent pour couvrir l'ensemble du territoire en modulation d'amplitude. Voilà pourquoi de nombreuses stations de radio émettent encore en modulation d'amplitude, sur des gammes de fréquence moins élevées.

UN SYSTEME SIMPLE DE REGULATION DE TEMPERATURE

AOP en régime saturé

Enoncé :

On dispose d'une sonde thermique (constituée d'un capteur de température et d'une amplification interne) qui se comporte comme une source idéale de tension délivrant entre ses bornes une tension $E(\theta)$ proportionnelle à la valeur θ de la température exprimée en °C du milieu dans lequel elle se trouve : $E(\theta) = \lambda\theta$, avec $\lambda = 100$ mV. °C^{-1}.

On désire utiliser cette sonde pour mesurer directement l'écart entre la température du milieu dans lequel elle se trouve et une température de référence $\theta_0 = 20,0$ °C. Pour cela, on réalise le montage de la figure (a) utilisant un amplificateur opérationnel idéal (fonctionnant en régime linéaire), auquel sont connectées à la fois la sonde thermique et une tension U_0 réglable.

➢ 1. Déterminer l'expression de la tension de sortie U_s en fonction de $E(\theta)$, U_0 et des résistances R_1 et R_2.

➢ 2. On souhaite obtenir une tension de sortie de valeur $U_s = K(\theta_0 - \theta)$, avec $K = 10\lambda$, lorsque la sonde se trouve placée dans un milieu dont la température est θ. La résistance $R_1 = 10$ kΩ et R_2 est variable, de 0 à 150 kΩ. Déterminer la valeur de R_2 et celle de U_0 permettant d'obtenir ce résultat.

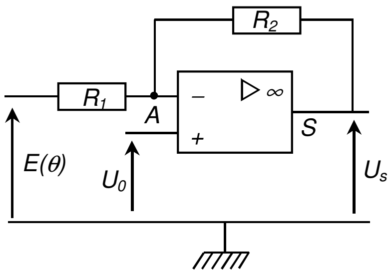


Figure (a)

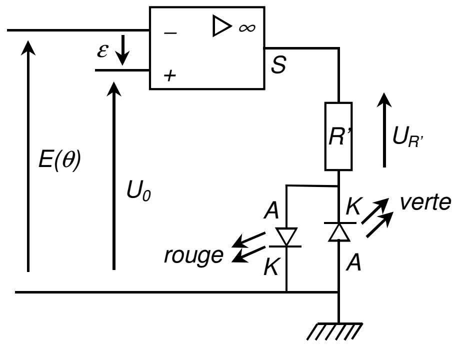


Figure (b)

➢ 3. Le montage de la figure (b) est réalisé avec deux diodes électroluminescentes (l'une rouge, l'autre verte) qui s'allument dès qu'elles sont soumises à une tension $U_{AK} > 2$ V (on considérera qu'une fois les diodes allumées, la tension à leurs bornes reste égale à 2 V). A ce montage sont connectées, d'une part la sonde et d'autre part la tension U_0 ajustée maintenant à la valeur 2,00 V. L'amplificateur opérationnel idéal fonctionne désormais en régime saturé et sa tension de saturation vaut ± 12 V. Expliquer le fonctionnement de ce montage.

Solution :

➢ 1. L'amplificateur opérationnel fonctionnant en régime linéaire, les potentiels respectifs e^+ et e^- des bornes non inverseuse et inverseuse de l'amplificateur sont égaux. Or, $e^+ = U_0$. Par ailleurs, la loi des nœuds écrite en termes de potentiels au nœud A s'écrit :

$$\frac{E(\theta) - e^-}{R_1} = \frac{e^- - U_s}{R_2} \qquad \text{soit} \qquad e^- = \frac{E(\theta)/R_1 + U_s/R_2}{1/R_1 + 1/R_2}$$

La condition $e^+ = e^-$ donne alors :

$$U_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)U_0 - \frac{R_2}{R_1}E(\theta)$$

➢ 2. On obtient une tension de sortie de la forme $U_s = K(\theta_0 - \theta) = 10\lambda(\theta_0 - \theta)$ si :

$$10\lambda\theta = \frac{R_2}{R_1}E(\theta) = \frac{R_2}{R_1}\lambda\theta \qquad \text{et} \qquad 10\lambda\theta_0 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)U_0$$

D'où :

$$R_2 = 10R_1 = 100\,\text{k}\Omega \qquad \text{et} \qquad U_0 = 10\lambda\theta_0/11 = 1{,}82\,\text{V}$$

➢ 3. La tension différentielle d'entrée $\varepsilon = e^+ - e^-$ de l'AOP vaut $\varepsilon = U_0 - E(\theta)$. Elle est nulle lorsque $E(\theta) = U_0$, soit pour une température $\theta = \theta_0 = 20°C$.

• Pour $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire $E(\theta) < U_0$ (soit $\theta < \theta_0$), le potentiel de la sortie par rapport à la masse vaut $U_s = +12\,V$. La diode rouge est alors passante ($U_{AK,rouge} = 2\,V$) et la tension $U_{R'}$ aux bornes de la résistance R' vaut 10 V.

• Pour $\varepsilon < 0$, c'est-à-dire $E(\theta) > U_0$ (soit $\theta > \theta_0$), le potentiel de la sortie par rapport à la masse vaut $U_s = -12\,V$. La diode verte est alors passante ($U_{AK,verte} = 2\,V$) et la tension $U_{R'}$ aux bornes de la résistance R' vaut $-10\,V$.

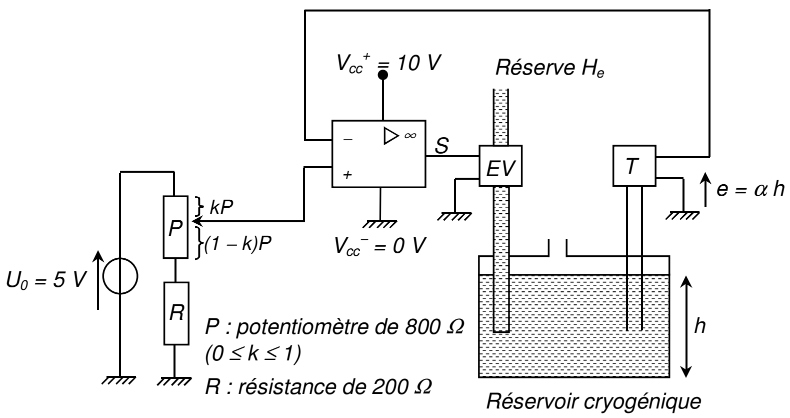
Par conséquent, l'apparition d'une lumière rouge annonce une baisse de la température qui devient inférieure à une certaine limite, choisie ici égale à 20°C. Un tel système très simple permet, par exemple, de surveiller la température d'une pièce qui ne doit jamais devenir inférieure à un certain seuil défini préalablement par l'utilisateur.

ASSERVISSEMENT D'UNE ELECTROVANNE

AOP en régime saturé

Enoncé :

Cet exercice aborde l'étude d'un système simple de remplissage automatique d'un réservoir cryogénique. Un tel réservoir (contenant de l'hélium liquide dans l'état $T = 4{,}2$ K et $P = 10^5$ Pa) ne peut pas rester plein, même si l'utilisateur ne soutire pas de liquide. En effet, l'apport de chaleur par le milieu extérieur est inévitable et, par évaporation, le niveau de liquide baisse. Pour des expériences de physique de longue durée, l'utilisateur ne souhaite pas avoir à surveiller le niveau du liquide cryogénique et charge le système suivant de cette tâche :



➢ *1. Première version :*

La figure ci-dessus présente le circuit proposé pour cette $1^{ère}$ méthode :

• *(EV) est une électrovanne (ouverte quand la tension à ses bornes dépasse 5 V).*

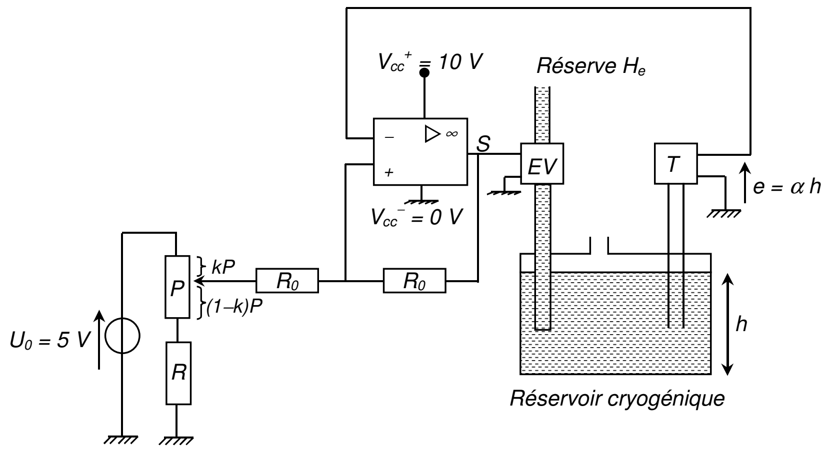
• L'amplificateur opérationnel est idéal et sa sortie est reliée à l'électrovanne. La tension de sortie de l'amplificateur opérationnel peut varier entre $V_{sat,+}$ = 10 V et $V_{sat,-}$ = 0 V.

• (T) est un transducteur[1] qui fournit une tension e proportionnelle à la hauteur h de liquide restant, e = α h (α = 5 V.m^{-1}).

Expliquer le fonctionnement de cette 1ère version. Quel est son défaut principal ? Donner les hauteurs de régulation minimale et maximale (qui sont réglables par le potentiomètre P).

L'utilisateur n'est pas satisfait de cette 1ère version qui fonctionne à cadence beaucoup trop rapide et fluctuante. Il souhaite, pour la qualité de ses mesures, une durée la plus grande possible entre deux remplissages sachant qu'il peut se permettre de laisser le niveau de liquide cryogénique descendre jusqu'à une valeur h_{min}.

➢ *2. Deuxième version :*



(T) et les résistances R et P restent les mêmes que précédemment, ainsi que e(h). On donne R_0 = 100 kΩ. Analyser le fonctionnement de ce nouveau montage. Donner les hauteurs caractéristiques du liquide pour les deux positions extrêmes du potentiomètre P.

Solution :

➢ 1. L'amplificateur opérationnel est ici utilisé dans un montage comparateur simple. Soient e^- et e^+ les tensions (repérées par rapport à la masse) des entrées inverseuse et non inverseuse et $\varepsilon = e^+ - e^-$ la tension différentielle d'entrée de l'amplificateur :

$$e^- = e \quad ; \quad e^+ = \frac{(1-k)P + R}{P + R} U_0 \quad ; \quad \varepsilon = \frac{(1-k)P + R}{P + R} U_0 - e$$

Soit numériquement, $\varepsilon = 5(1-h) - 4k$, avec h en m et ε en V. Ainsi, la tension V_s aux bornes de l'électrovanne sera :

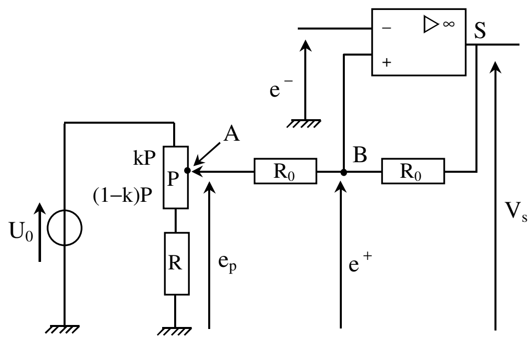
[1] Transducteur : appareil permettant de modifier la nature physique d'un signal. Un microphone, qui transforme des oscillations acoustiques en signal électrique, est un transducteur électro-acoustique. Une cellule photoélectrique, qui transforme un signal lumineux en un signal électrique, est un transducteur électro-optique.

• $V_s = V_{sat,+} = 10\,V$ si $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire si $h < h_m = 1 - 4k/5$: l'électrovanne est alors ouverte et le niveau de liquide va donc augmenter jusqu'à la valeur h_m pour laquelle l'amplificateur opérationnel va passer en régime de saturation basse, la tension de sortie devenant $V_s = V_{sat,-} = 0\,V$.

• $V_s = V_{sat,-} = 0\,V$ si $\varepsilon < 0$, c'est-à-dire si $h > h_m = 1 - 4k/5$: l'électrovanne est fermée. Une partie du liquide va s'évaporer et, lorsque la hauteur de liquide sera de nouveau plus faible que h_m, l'électrovanne sera de nouveau ouverte, l'amplificateur passant en régime de saturation haute, et ainsi de suite… Cette 1ère version va fonctionner à cadence beaucoup trop rapide et fluctuante, dépendant notamment des conditions d'évaporation du liquide et de l'apport de chaleur du milieu extérieur.

La hauteur limite de remplissage h_m (hauteur de régulation) est réglable par l'intermédiaire du potentiomètre (P). Elle varie entre les deux valeurs extrêmes suivantes, obtenues pour k = 0 (h_{max} = 1 m) et pour k = 1 (h_{min} = 20 cm).

➢ 2. L'amplificateur opérationnel est désormais utilisé dans un montage du type « comparateur à hystérésis ». La tension e^- vaut toujours $e = \alpha h = 5h$ (où h est en m et e en V).



L'écriture de la loi des nœuds en termes de potentiels en A et en B permet de déterminer la tension e^+ (en supposant $k \neq 0$) :

$$\frac{1}{kP}\left(U_0 - e_p\right) = \frac{1}{(1-k)P + R} e_p + \frac{1}{R_0}\left(e_p - e^+\right) \quad \text{(au nœud A)}$$

$$\frac{1}{R_0}\left(e_p - e^+\right) = \frac{1}{R_0}(e^+ - V_s) \quad \text{soit} \quad e^+ = \frac{e_p + V_s}{2} \quad \text{(au nœud B)}$$

En remarquant que $R_0 = 100\,k\Omega >> R$, kP et $(1-k)P$, on peut négliger le terme $(e_p - e^+)/R_0$ dans l'écriture de la loi des nœuds au point A (ce qui revient à dire que l'intensité du courant dans les deux résistances R_0 est négligeable vis-à-vis de celle du courant qui traverse le potentiomètre et la résistance R). On retrouve, par conséquent, pour e_p une expression similaire à celle de la 1ère question, soit :

$$e_p = \frac{(1-k)P + R}{P + R} U_0$$

Dans le cas où $k = 0$, on a directement (voir figure précédente) $e_P = U_0$; l'expression précédente est donc également valable pour $k = 0$.

La tension différentielle d'entrée ε de l'amplificateur s'exprime ainsi sous la forme :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{(1-k)P+R}{P+R}U_0 + V_s\right) - \alpha h = 2(1-k) + 0{,}5 + \frac{V_s}{2} - 5h = 2{,}5 - 2k - 5h + \frac{V_s}{2}$$

Deux cas sont alors à considérer :

• $V_s = V_{sat,+} = 10\,V$ si $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire si $\varepsilon = 7{,}5 - 2k - 5h > 0$, soit pour une hauteur $h < h_M = 1{,}5 - 2k/5$. Ainsi, tant que $h < h_M$, l'électrovanne est ouverte et le réservoir se remplit de liquide. Lorsque $h = h_M$, l'amplificateur opérationnel va passer en régime de saturation basse, pour lequel $V_s = V_{sat,-} = 0\,V$.

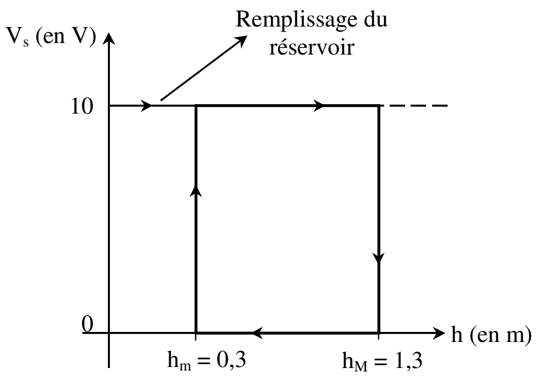
Pour les deux valeurs extrêmes du potentiomètre, on calcule :

$$h_M(k=0) = 1{,}5\,m \qquad \text{et} \qquad h_M(k=1) = 1{,}1\,m$$

• $V_s = V_{sat,-} = 0\,V$ si $\varepsilon < 0$, c'est-à-dire si $\varepsilon = 2{,}5 - 2k - 5h < 0$, soit pour une hauteur $h > h_m = 0{,}5 - 2k/5$. Ainsi, l'électrovanne sera fermée tant que la hauteur de liquide n'aura pas atteint cette valeur minimale h_m. La valeur de k devra être choisie pour que $h_m \geq h_{min}$.

Pour les deux valeurs extrêmes du potentiomètre, on calcule :

$$h_m(k=0) = 0{,}5\,m \qquad \text{et} \qquad h_m(k=1) = 0{,}1\,m$$



Pour conclure, on peut représenter, sur la figure ci-dessus, les variations de la tension de sortie en fonction de la hauteur de liquide, en choisissant, par exemple, $k = 0{,}5$ (alors, $h_m = 0{,}3\,m$ et $h_M = 1{,}3\,m$) : l'électrovanne fonctionnera beaucoup moins souvent que dans le cas du 1er montage.