# Spé PC*/PC
# Mécanique du point et du solide

## Mécanique du point matériel

**1) Energie potentielle effective (X) :**

Une particule (q, m) se déplace dans le champ magnétique créé par un fil rectiligne infini parcouru par un courant I constant.

1- Montrer que le mouvement de la particule est tel que $r\, v_\theta$ = constante K.

2- Montrer que cette particule est soumise à une énergie potentielle effective à déterminer.

3- Que peut-on en déduire sur le mouvement de la particule ?

**2) Polarisabilité d'un atome (X) :**

a) On considère un atome A de polarisabilité $\alpha$ en présence d'une particule de masse m et de charge q. Quelle est la force subie par la particule ?

b) A est placé sur l'axe Oy en y = a. A t = 0, on lance de $x = -\infty$ selon l'axe des x la particule avec la vitesse $v_0\vec{e}_x$. Etudier les trajectoires possibles selon la valeur de a.

**3) Oscillations d'un satellite terrestre sur sa trajectoire (Mines)** :

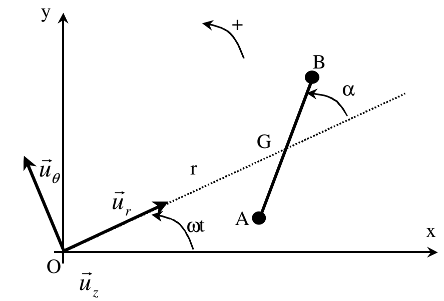
La Terre, de centre O, exerce sur tout point matériel de masse m une force attractive :

$$\vec{F} = -Km\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}, \qquad avec \qquad K = 4.10^{-14}\, m.s^{-2}$$

Dans le référentiel géocentrique (Oxyz) galiléen, on considère un satellite dont le centre d'inertie G décrit une trajectoire circulaire de centre O et de rayon r autour de la Terre, à la vitesse angulaire constante $\omega$, dans le plan (Oxy).

Le satellite est constitué de deux masses ponctuelles identiques A et B reliées entre elles par une tige rigide de masse négligeable (AB = 2b). On s'intéresse à la rotation de AB autour de G dans le plan (Oxy), définie par l'angle $\alpha = (\vec{u}_r, \overrightarrow{GB})$.

a) Pour quelles valeurs de $\alpha$ le moment en G des forces de gravitation exercées sur le satellite est-il nul ?




b) En effectuant un DVL en b / r, montrer que le terme principal du moment vaut :

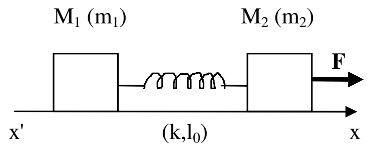
$$\vec{M}_G = -\frac{3Km}{b}\left(\frac{b}{r}\right)^3 \sin 2\alpha\, \vec{u}_z$$

c) Calculer la période des oscillations du satellite autour de sa position d'équilibre stable.

Données : r = 7 000 km ; b = 5 m ; m = 4 kg.

**4) Oscillateurs soumis à une force constante (Centrale) :**

Deux masses $m_1$ et $m_2$ sont reliées par un ressort de raideur k et de longueur à vide $\ell_0$ Elles peuvent se déplacer sans frottement sur un axe horizontal (x'x). Pour t < 0, le ressort est non tendu et les masses $m_1$ et $m_2$ sont au repos en $M_{10}$ et $M_{20}$.




A partir de t = 0, on exerce sur $m_2$ une force horizontale constante $\vec{F} = F\,\vec{u}_x$. On note $x_1(t) = M_{10}M_1$ et $x_2(t) = M_{20}M_2$. Déterminer $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

**5) Période des oscillations d'un pendule simple et portrait de phase (CCP) :**

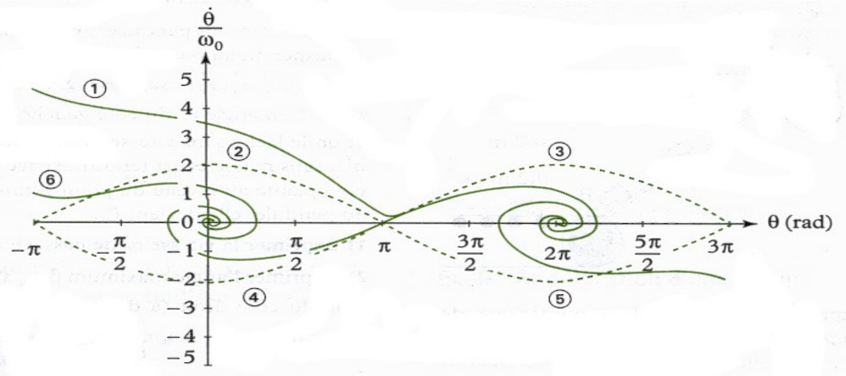
On considère un pendule simple de longueur $\ell$ que l'on écarte sans vitesse initiale de l'angle $\theta_0$ par rapport à la verticale descendante.

a) On néglige les frottements dans cette question. Etablir l'équation différentielle du mouvement issue de l'application du principe de conservation de l'énergie mécanique. En déduire la période $T_0$ des petites oscillations.

b) Le pendule est soumis désormais à des frottements fluides et son équation différentielle devient :

$$\ddot{\theta}+h\,\dot{\theta}+\omega_0^2\,\sin\theta=0$$

Son portrait de phase est représenté sur la figure, avec $\omega_0=1\,rad.s^{-1}$ $et\ h=0{,}5\ s^{-1}$.




* A quoi voit-on qu'il y a des frottements ?

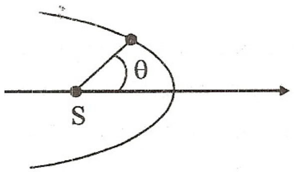
* Indiquer les positions d'équilibre stables et instables.

* Commenter l'allure des différentes courbes.

**6) La comète de Hyakutaké (CCP) :**

La comète de Hyakutaké a atteint son périhélie à une distance du Soleil de 0,23 ua le 1er juin 1996. On suppose que sa trajectoire est parabolique.

La Terre a une orbite circulaire de rayon a = 1 ua = 150 millions de km, parcourue à la vitesse u = 30 km.s$^{-1}$. On suppose que les trajectoires sont coplanaires.



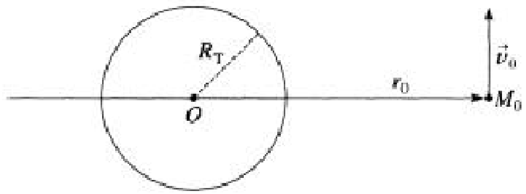

a) Calculer la vitesse de la comète à son périhélie.

b) Calculer les angles $\theta_1$ et $\theta_2$ de rencontre de la comète avec l'orbite terrestre.

c) Calculer les dates d'arrivée et de sortie de la comète dans l'orbite terrestre.

**7) Condition de lancement d'un satellite (Centrale) :**

Un satellite est injecté sur orbite en un point $M_0$ distant de $r_0$ du centre O de la Terre, avec une vitesse $\vec{v}_0$ orthogonale à $\overrightarrow{OM}_0$.



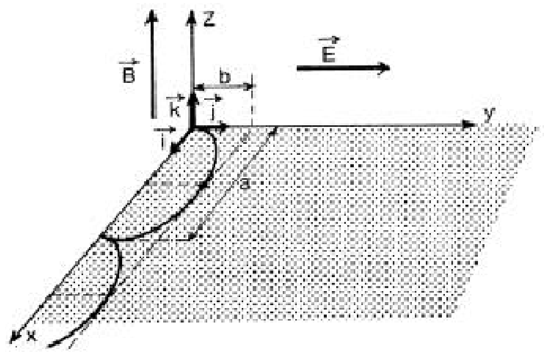

a) Que vaut, en fonction de G, $M_T$ (masse de la Terre) et $r_0$, cette vitesse si la trajectoire obtenue est un cercle de rayon $r_0$ ? Dans la suite, on note $v_c$ cette vitesse particulière de $v_0$.

b) On pose $\lambda=\dfrac{r_0}{R_T}$ où $R_T$ est le rayon terrestre. Démontrer que le satellite n'échappera pas à l'attraction terrestre et ne rencontrera pas la Terre si :

$$\frac{2}{1+\lambda}<\left(\frac{v_0}{v_c}\right)^2<2$$

**8) Mouvement cycloïdal (CCP) :**

Dans le référentiel (R), une particule M de masse m et de charge q, se trouve en t = 0 à l'origine O, animée d'une vitesse nulle, dans une région où règnent les champs uniformes et indépendants du temps : $\vec{E}=E\vec{u}_y$ et $\vec{B}=B\vec{u}_z$.




a) Etudier le mouvement de M.

b) Calculer la vitesse moyenne de la particule selon (Ox), appelée vitesse de dérive $v_D$.

c) Interpréter la trajectoire dans (Oxyz) en écrivant la relation fondamentale de la dynamique du point matériel dans le référentiel (R') en translation rectiligne et uniforme de vitesse $\vec{v}_D$ par rapport à (R).

**9) Point sur une courbe (X-ESPCI) :**

Un point matériel de masse m se déplace dans un plan vertical sans frottements sur une courbe (C) dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ uniforme.

Quelle doit être la forme de cette courbe pour que la composante verticale de sa vitesse soit constante ?

**10) Expérience à la maison, référentiel non galiléen (X – ENS) :**

On lance un palet sur une table avec une vitesse $v_0 = 5 m.s^{-1}$. La latitude du lieu est celle de Paris ($\lambda = 45°$). Le palet glisse sans frottement.

a) Quel doit être l'ordre de grandeur de la dimension de la table pour décider si le référentiel local est galiléen ou non ? On prend comme critère de décision une déviation d = 1 mm en bout de table.

b) Le frottement accentue-t-il ou non la déviation ?

**11) Référentiels non galiléens, tir (X – ENS) :**

Dans le livre « Le carnaval de la physique » de Jearl Walker (Dunod), on peut lire l'anecdote suivante: « Il y a eu pendant la 1ère guerre mondiale une célèbre bataille entre les allemands et les anglais, près des îles Falkland (à proximité du 50ème parallèle, dans l'hémisphère Sud), au cours de laquelle les tirs anglais, quoique correctement ajustés, plongeaient mystérieusement une centaine de mètres à gauche des navires allemands. Les viseurs anglais n'étaient pas en cause puisqu'ils avaient été mis au point avec une très grande précision en Angleterre ».

On suppose qu'un bateau anglais lance un projectile, assimilé à un point matériel, à la latitude $\lambda = -50°$ dans un plan méridien avec une vitesse initiale $v_0 = 1000 ms^{-1}$ dirigée Sud-Nord et faisant un angle $\alpha = 10°$ avec le plan horizontal. On ne tient pas compte de la résistance de l'air.

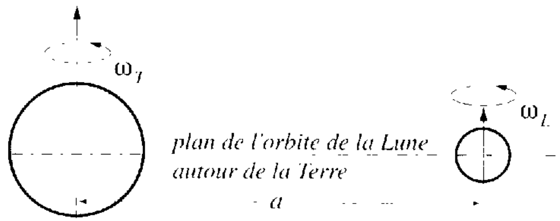
1- On néglige la force de Coriolis. Quelles sont la durée $t_0$ et la portée l du tir ?

2- Quelle est l'influence de la force de Coriolis sur la position du point de chute ?

3- En supposant les tirs anglais bien ajustés lorsqu'ils ont lieu dans l'hémisphère Nord (à la latitude $\lambda = 50°$), déterminer la distance entre la position du bateau allemand visé et le point d'impact de l'obus.

**12) Modification de la distance Terre-Lune (ENS) :**

a) On constate que la période de rotation de la Terre diminue de $2.10^{-3}$ seconde par siècle. Déterminer l'évolution de la distance Terre/Lune au cours du temps.




b) Calculer la puissance dissipée par les marées.

**13) Trou noir (ENS)** :

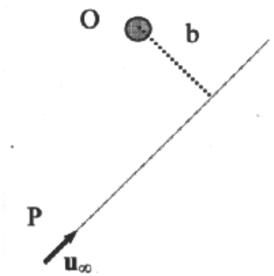
Donner une condition pour que le Soleil ne soit plus visible, c'est-à-dire soit un trou noir (modèle gravitationnel).

**14) Quatre corps au sommet d'un tétraèdre (X-ESPCI) :**

On considère à $t_0$ 4 corps célestes de masses $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ placés au sommet d'un tétraèdre de côté a. Montrer que cette disposition peut rester stable pour $t > t_0$ en étudiant le mouvement des corps célestes.

**15) Effet de fronde gravitationnelle (Mines) :**

Pour voyager à peu de frais dans le système solaire, on utilise la technique de la fronde gravitationnelle. Un vaisseau spatial P de masse m, a une vitesse $\vec{v}_\infty = v_0 \, \vec{u}_\infty$ lorsqu'il se trouve très éloigné d'une planète O de masse M.




En l'absence de la planète, sa trajectoire serait une droite passant à une distance b de O. Montrer que la présence de la planète a pour effet de renvoyer le vaisseau dans une direction différente sans changer le module de sa vitesse.

Déterminer la rotation D du vecteur vitesse du vaisseau. Comment choisir D pratiquement si le vaisseau dispose d'un petit moteur d'appoint ?

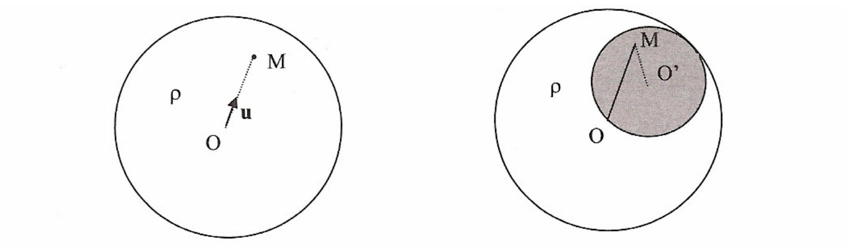
**16) Voiture et changement de référentiel (ENS) :**

Deux voitures A et B roulent côte à côte à la vitesse v. A accélère et atteint 2v (relativement au sol).

Pour l'observateur situé sur la route $\Delta E_c = \frac{3}{2} mv^2$ et pour celui situé dans la voiture B $\Delta E_c = \frac{1}{2} mv^2$. Pourtant la quantité d'essence est la même dans les deux cas. Expliquer.

**17) Gravitation et ressort de longueur nulle (CCP) :**

Montrer qu'une planète homogène de centre O, de rayon R, de masse volumique ρ, agit sur une particule M de masse m placée à une distance $r < R$ comme un ressort de longueur nulle.




Quelle est la trajectoire de M à l'intérieur d'une hypothétique cavité de la Terre, centrée en O' et de rayon R / 2.

**18) A la recherche de la masse manquante (X – ENS) :**

L'observation de l'effet Doppler qui affecte le spectre de la lumière émise par les étoiles d'une galaxie permet de déterminer la « courbe de rotation » v(r), v désignant la vitesse v d'une étoile située à la distance r du centre de la galaxie.

a) Déterminer v(r) à l'extérieur de la galaxie en admettant que la masse de celle-ci est répartie selon la symétrie sphérique.

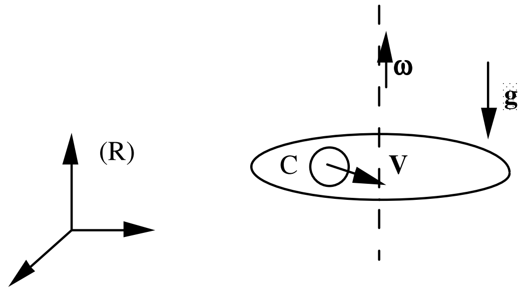
b) On observe en fait, dans les régions extérieures à la galaxie, une vitesse indépendante de r. Montrer que l'on peut rendre compte d'un tel résultat en admettant que l'essentiel de la masse de la galaxie est constituée de matière noire, non détectable par son rayonnement, répartie selon une loi du type $\mu(r) = k / r^2$.

**19) Bille sur un plateau tournant, billard tournant (X - ESPCI) :**

Dans le repère du laboratoire (R), un plateau horizontal tourne autour d'un axe fixe vertical; sa vitesse angulaire ω est constante. Une bille homogène de rayon R roule sans glisser sur le plateau ; **V** est la vitesse dans (R) de son centre C.

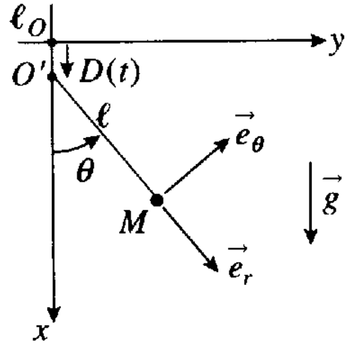
a) Montrer que son accélération peut se mettre sous la forme : **a** = (q / m)**V** ^ **B**.

b) Déterminer le mouvement et la trajectoire du point C.




c) On incline le plateau : analogie du mouvement de C avec celui d'une particule chargée.

**20) Oscillateur paramétrique (X - ESPCI) :**




Un pendule simple constitué d'un fil inextensible de masse négligeable et d'un point matériel M de masse m est accroché au point O', mobile le long de l'axe vertical (Ox).

a) Le point O' est immobile : D(t) = 0. Quelle est l'équation du mouvement du pendule ? Quelle est la pulsation propre $\omega_0$ des petites oscillations ?

b) Le point O' est animé d'un mouvement oscillant $D(t) = D_m \cos(\omega t)$.

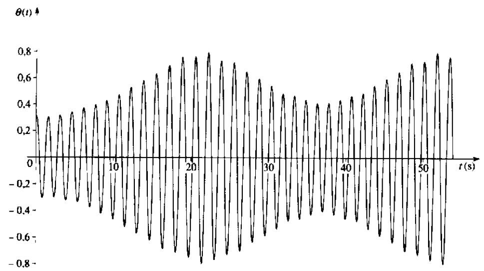
Établir l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 (1 + h(t)) \sin\theta = 0$$

en précisant l'expression de h(t).

c) En supposant l'angle θ petit et l'excitation très faible, montrer que l'oscillateur harmonique risque d'entrer en résonance si on donne à la pulsation ω une valeur particulière.

d) La résolution numérique de l'équation donne, pour $\omega = 2\omega_0$, le résultat suivant :




Commenter. On essaiera en particulier d'interpréter l'amplitude des battements observés.

**21) Etude d'un pendule simple (CCP) :**

Un pendule simple de longueur L et de masse m est accroché au plafond d'un wagon uniformément accéléré (accélération $\vec{\gamma}$).

a) Déterminer l'inclinaison du pendule à l'équilibre.

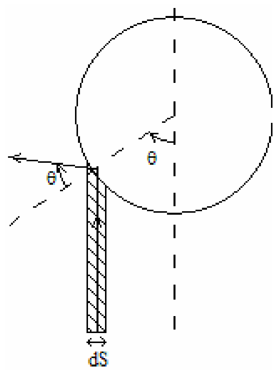
b) Déterminer la tension du fil à l'équilibre.

c) Trouver la période des petites oscillations du pendule.

**22) Lévitation d'une bille au – dessus d'un laser (X – ESPCI) :**

Le faisceau parallèle issu d'un laser transporte un flux énergétique E = dW / dS (égal à $100\,W.mm^{-2}$).

a) Déterminer la quantité de mouvement qui traverse par unité de temps un élément d'aire dS d'une section droite du faisceau.



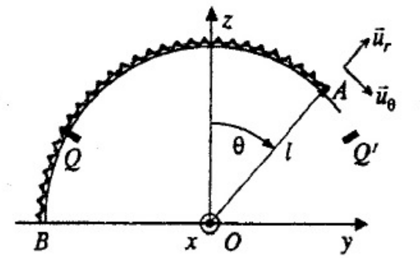

b) On place dans le faisceau précédent une bille sphérique argentée B de rayon a. Calculer la norme F de la force subie par B. On admettra que les photons subissent sur B des chocs élastiques.

c) B ayant une masse volumique $\mu = 2{,}5\ g.cm^{-3}$, pour quelle valeur $a_0$ de a, B est-elle en équilibre indifférent dans le faisceau précédent dirigé verticalement ?

d) Comment pourrait-on rendre stable l'équilibre précédent ?

**23) Oscillations anharmoniques (Mines) :**

Un point matériel A de masse m peut se déplacer sans frottement sur un rail en forme de cercle de centre O et de rayon $\ell$. Il est relié à un ressort épousant le rail, de longueur à vide $\ell_0 = \dfrac{\pi\ell}{2}$ et de raideur k, dont l'autre extrémité B est fixée sur l'axe (Oy). Sous les actions de la pesanteur et du ressort, A oscille sur le rail et son mouvement est repréré par l'angle $\theta = (Oz, \overrightarrow{OA})$, Oz étant la verrticale ascendante. Le référentiel R(Oxyz) est galiléen.




a) Obtenir l'équation suivante :

$$\dot{\theta}^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{g}{\ell}\right)\theta^2 = \dot{\theta}_0^2 - \frac{2g}{\ell} f(\theta) \qquad \text{(Avec f(0) = 0)}$$

Quelle est la signification de la constante $\dot{\theta}_0^2$ ?

b) Représenter graphiquement f(θ) dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Dans quel sous – intervalle reste-t-elle inférieure à 0,01 ?

c) Comment obtenir un mouvement de rotation de la tige le plus uniforme possible, hormis les phases de changement de signe ? Quel problème cela pose-t-il si onveut observer des oscillations ?

d) On introduit deux butées Q et Q' qui ne gênent pas le mouvement du ressort mais contraignent l'angle θ à rester entre - $\theta_{max}$ et + $\theta_{max}$, le choc sur chaque butée produit simplement un changement de signe instantané de $\dot{\theta}$. On veut que la vitesse angulaire de la tige soit uniforme à environ 1% près, égale à $\dot{\theta}_0 = \pi\ rad.s^{-1}$, avec m = 1 kg, $\ell = 1\,m$ et

$g = 9,8\ m.s^{-2}$. Calculer numériquement k. On choisit $\theta_{max} = 0,5$ rad. Calculer la période des oscillations.

**24) L'atome de Bohr (CCP) :**

Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont quantifiés ($E_n = -E_0 / n^2$, avec n nombre quantique principal et $E_0 = 13,6\ eV$). On suppose que l'électron tourne autour du proton sur une trajectoire circulaire de rayon $r_n$. Le proton est immobile dans le référentiel du laboratoire. Montrer que le moment cinétique de l'électron par rapport au centre O du noyau est également quantifié ($\sigma_n = n\sigma_0$).

**25) Utilisation de la formule de binet (CCP) :**

Trouver la loi de force pour une trajectoire d'équation polaire :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

p et e étant des constantes.

**26) Satellite d'observation (Mines) :**

Un satellite d'observation a une orbite circulaire très basse, ce qui permet de discerner les détails d'environ 1 m sur Terre.

a) Calculer la vitesse orbitale et la période d'un tel satellite pour une altitude de h = 180 km.

b) Par suite des collisions avec les molécules d'air des couches supérieures de l'atmosphère, le satellite est soumis à une force de frottement opposée à la vitesse **v** et de norme $\beta m v^2 / h$, h étant l'altitude et $\beta = 10^{-8}\ SI$. Comment varie l'énergie mécanique du satellite ? Montrer que la vitesse du satellite, ainsi freiné, augmente.

c) En déduire, en fonction de h, l'expression approchée de la variation d'altitude $\Delta h$ du satellite après une révolution. Calculer $\Delta h$.

**27) Lancement d'un satellite terrestre (Centrale) :**

On veut qu'un satellite S décrive une orbite circulaire de rayon $r_0$ autour du centre de la Terre T (de masse $M_T$).

a) Calculer la vitesse $v_0$ du satellite ainsi que son énergie mécanique.

b) Une erreur a été commise lors de la satellisation. Le satellite a bien été lancé sur un rayon $r_0$ avec une vitesse $v_0$ mais la direction réelle de lancement fait un angle $\alpha$ avec la direction initialement prévue ($0 < \alpha < \pi / 2$). Déterminer la nature de la trajectoire réelle du satellite et construire son allure. Exprimer $r_P$ et $r_a$ les rayons aux périgée et à l'apogée, ainsi que les vitesses correspondantes $v_p$ et $v_a$.

**28) Les trous noirs (CCP) :**

Un trou noir est un corps situé dans l'Univers d'où ni lumière ni matière ne peuvent s'échapper. Cet exercice présente la description classique que pouvait avoir le physicien Laplace des trous noirs.

1) Etoile de Laplace : en 1798, dans « Exposition du système du Monde », Laplace imagine un astre (à répartition de masse sphérique) de même masse volumique moyenne que la Terre (notée $\rho_T$) et de rayon égal à 250 fois celui du Soleil. Quelle est la vitesse de libération $v_{lib}$ correspondante à la surface de l'astre ?

2) Rayon de Schwarzschild : on admet qu'un corps de masse M agit comme un trou noir si son rayon R est inférieur à un certain rayon critique $R_C$ appelé rayon de Schwarzschild, défini par une vitesse de libération à la surface de ce corps égale à la vitesse de la lumière dans le vide, soit $v_{lib} = c$.

a) Exprimer $R_C$ en fonction de G, M et c. Calculer $R_C$ dans le cas du Soleil puis de la Terre.

b) Exprimer la force gravitationnelle $F_{TN}$ exercée par un trou noir sur un objet P en fonction de la masse m de l'objet, de sa distance r au centre du trou noir, du rayon $R_C$ du trou noir et de c. Calculer $F_{TN}$ pour $R_C = 8,9$ mm, m = 3 kg et r = 6 400 km.

c) Calculer l'accélération de la pesanteur $g_{TN}$ au niveau de la sphère de Schwarzschild en fonction de $R_C$ et c. Application numérique : calculer $g_{TN}$ pour $R_C = 8,9$ mm.

d) On appelle « sphère des événements » la sphère de rayon $R_C$. Justifier qualitativement le choix de ce terme.

**29) Tige tournant à vitesse angulaire constante (CCP) :**

Un point matériel M peut glisser sans frottement sur une tige (Or), de masse négligeable, faisant un angle aigu constant $\alpha$ avec un axe vertical ascendant (Oz). On pose $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

A l'instant initial, M est en $M_0$ tel que $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM}_0$ et sa vitesse par rapport à la tige (Or) est nulle. La tige (Or), entraînée par un moteur, tourne à la vitesse angulaire constante $\omega$ autour de (Oz).

Déterminer le mouvement du point M sur l'axe (Or). Discuter suivant les valeurs de $r_0$, $\omega$ et $\alpha$.

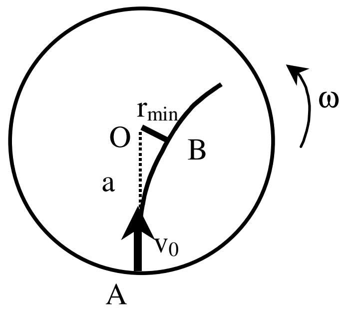
**30) Référentiels non galiléens (X – ENS) :**

On considère un plateau circulaire horizontal de rayon a = 3 m et tournant autour de son axe à la vitesse angulaire constante $\omega = 4\ \text{tr.min}^{-1}$.

Un 1[er] expérimentateur se place au centre O du manège.

Un 2nd expérimentateur, placé au point A (voir figure) situé à la périphérie du manège, lance vers le 1er expérimentateur une balle en mousse (de masse m) avec une vitesse horizontale $v_0 = 20$ m.s$^{-1}$.

On souhaite savoir si cette balle va atteindre l'expérimentateur placé au centre du manège.




1) On se place en coordonnées cylindriques (r,θ,z). La cote initiale de la balle de mousse est notée $z_0 = 1$ m. Définir, sur un schéma clair, les coordonnées (r,θ,z) ainsi que les vecteurs unitaires utilisés conjointement à ces coordonnées.

2) Ecrire le PFD dans le référentiel du manège et en déduire trois équations différentielles.

3) Eliminer dθ / dt et déterminer la relation entre r et dr / dt :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \omega^2 \frac{a^4}{r^2} = v_0^2 + \omega^2 a^2$$

4) En déduire la distance minimale $r_{min}$ de la balle à l'axe du manège. Faire l'AN. La balle atteint-elle l'expérimentateur en O ?

**31) Particule réduite (Centrale) :**

Deux ions $M_1$ et $M_2$, de masses $m_1$ et $m_2$ et de charges $q_1$ et $q_2$, sont lâchés sans vitesse initiale à la distance $r_1$ l'un de l'autre dans le référentiel du laboratoire galiléen.

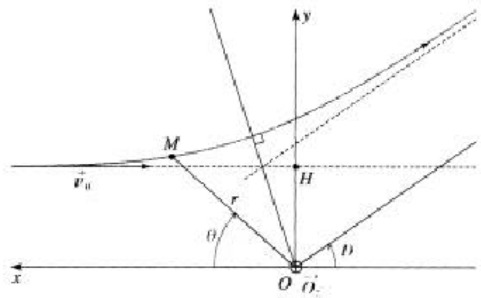
a) Les charges sont opposées. En quel point les particules se rencontrent-elles et à quelle date $t_0$ ? On introduira la particule réduite et on effectuera le changement de variable $\frac{r}{r_0}\cos^2\theta$, avec $r = M_1M_2$.

A quelle distance $r_1$ doit-on lâcher les particules sans vitesse initiale pour qu'elles se rencontrent à la date $t_1 = 8t_0$ ?

b) Les charges sont de même signe ; calculer leurs vitesses limites $v_{1,lim}$ et $v_{2,lim}$.

**32) Diffusion Rutherford (Mines) :**

Une particule α, point matériel M de masse m et de charge 2e, venant de l'infini avec la vitesse $\vec{v}_0$, s'approche avec le paramètre d'impact OH = b d'un noyau cible, point matériel O de masse M >> m et de numéro atomique Z. Le point M décrit une branche d'hyperbole de foyer O.




Calculer la distance de plus courte approche $r_{min}$ du noyau. Quel est l'angle de déviation ?

**33) Etoile double (Mines) :**

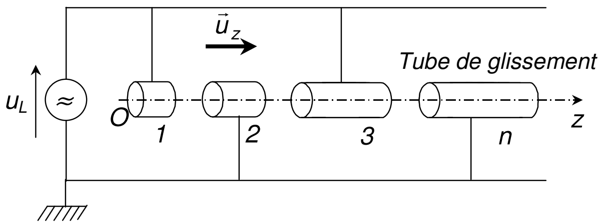
Dans une étoile double, les deux étoiles ont une orbite relative circulaire, la période de révolution étant $T_0$. Dans le référentiel barycentrique, la vitesse de chacune des étoiles a sensiblement le même module $v_0$.

Calculer la distance d des étoiles ainsi que leur masse.

**34) Accélérateurs linéaires de particules (Mines) :**

Tous les accélérateurs de particules ont les mêmes composants de base : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions. Dans les accélérateurs circulaires (cyclotrons et synchrotrons), les particules sont guidées par des champs magnétiques tout au long d'une trajectoire circulaire qui les fait passer de nombreuses fois à travers le même champ électrique accélérateur. Dans les accélérateurs linéaires, tels que celui étudié dans cet exercice, les particules effectuent un trajet en ligne droite passant à travers une succession de tubes où règnent des champs électriques qui augmentent leur énergie au fur et à mesure qu'elles avancent.

Des particules chargées (des protons par exemple, de charge $e = 1{,}6.10^{-19}$ C et de masse $m_p = 1{,}67.10^{-27}$ kg) passent dans une série de tubes métalliques qui présentent la symétrie de révolution et de même axe (appelés « tubes de glissement ») et connectés à une source de tension alternative (voir figure) $u_L = U_L\sin(2\pi\nu\, t)$. Cette tension crée un champ électrique accélérateur axial dans les intervalles entre les tubes. On considère que le champ est nul à l'intérieur de ces tubes métalliques. Les protons sont injectés en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$ parallèle à l'axe de l'accélérateur.




On considère les protons qui pénètrent en O suivant l'axe (Oz) des tubes à l'instant t = 0, c'est-à-dire lorsque $u_L = 0$. On veut que ces protons soient accélérés par la tension maximale $U_L$ toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. On considérera que la distance entre deux tubes est négligeable par rapport à la longueur des tubes.

a) Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins ? Sachant que les protons sont pré-accélérés sous une tension continue $U_0$, exprimer leur énergie cinétique $E_{c,n}$ à la sortie du énième tube en fonction de $U_0$ et $U_L$. Faire l'application numérique avec $U_0 = 140$ kV, $U_L = 100$ kV et n = 20. Les protons sont-ils relativistes ?

b) Quel doit être le temps mis par ces protons pour traverser le 1er tube, le 2ème tube et le énième tube, afin que soient réalisées les conditions d'accélération précédente ? Exprimer les longueurs $L_1$, $L_2$, $L_n$, respectivement des premier, deuxième et énième tubes en fonction de $U_0$, $U_L$, $\nu$, e et $m_p$. Calculer ces trois longueurs pour $\nu = 25$ MHz, n = 20, $U_0 = 140$ kV et $U_L = 100$ kV.

**35) Théorème du viriel (X – ESPCI) :**

Soit une particule de masse m, de vitesse $\vec{v}$, soumise à la force $\vec{F}$ et repérée par son vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, O étant un point fixe d'un référentiel galiléen.

1) En posant $\vec{A} = m\vec{v}.\vec{r}$, exprimer $d\vec{A}/dt$ en fonction de $\vec{F}.\vec{r}$ et de l'énergie cinétique $E_c$ de la particule. En déduire que si la particule reste à distance finie du point O et garde une vitesse finie, on a la relation (en valeur moyenne temporelle) :

$$\langle E_c \rangle = -\frac{1}{2}\langle \vec{F}.\vec{r} \rangle$$

2) On suppose maintenant que la force dérive du potentiel $V(r) = -kr^{-n}$. Quelle est la relation entre $E_c$ et V ? Expliciter ce résultat quand V(r) est un potentiel d'oscillateur harmonique. Commentaire. Même question pour un potentiel newtonien.

**36) Freinage d'un satellite par l'atmosphère (X – ENS) :**

Un satellite terrestre artificiel (S) de vitesse $\vec{V}$ (dans le référentiel géocentrique galiléen) sur une orbite basse (c'est-à-dire dont l'altitude z est très inférieure au rayon terrestre $R_T$) subit des frottements dus à l'atmosphère. Les molécules de l'atmosphère n'étant soumises qu'à l'agitation thermique, on pourra négliger leur vitesse thermique $v_{Th} \approx 500\ m.s^{-1}$ devant V. On note $R_T$ et $M_T$ le rayon et la masse de la Terre, assimilée à une sphère massique homogène.

1) On suppose que, après une collision entre le satellite de masse M et une molécule de masse m, la vitesse relative des deux objets est nulle (« choc mou »). Montrer alors que la variation de la quantité de mouvement de (S) est $\Delta\vec{P} \approx -m\vec{V}$.

2) Montrer que l'effet des collisions équivaut à une force $\vec{F}$ s'exerçant sur le satellite. Ce dernier est sphérique, de rayon a. Déterminer $\vec{F}$ en fonction de a, $\vec{V}$ et la masse volumique $\mu(z)$ de l'atmosphère (en considérant le nombre de chocs se produisant à l'intérieur d'un cylindre élémentaire, on trouve une expression du type $F = k(z)V^2$). Est-il indispensable que le satellite soit sphérique ?

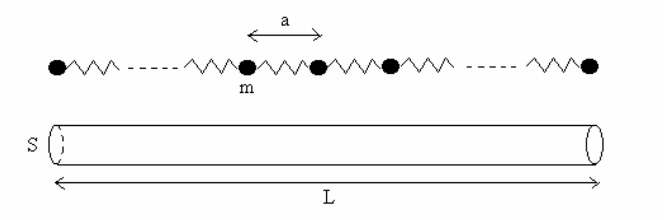
3) On suppose qu'à l'altitude $z << R_T$, $\mu(z) = \mu(0)\exp(-z/H)$, où $\mu(0)$ et H sont des constantes. On considère alors que, du fait de la force $\vec{F}$, (S) décrit une orbite circulaire autour de la Terre dont le rayon varie lentement avec le temps.

a) Donner, sous ces hypothèses, une loi approchée de variation de z(t). Il sera avantageux d'introduire la quantité $\tau = MH / (2\pi a^2 \mu(0) R_T \sqrt{g_0 R_T})$, où $g_0$ désigne le champ de pesanteur terrestre au niveau du sol. On note $z_i$ l'altitude de départ.

b) Applications numériques : calculer la durée de chute $t_{ch}$ du satellite depuis l'altitude $z_i = 180\ km$ jusqu'à $z_f = 0$ ; on donne : $\mu(0) = 1{,}3$ kg.m$^{-3}$, H = 8 500 m, a = 2 m, $g_0 = 9{,}8$ m.s$^{-2}$, $R_T = 6\,370$ km et $M = 10^3\ kg$. Vérifier enfin que la vitesse du satellite est effectivement grande devant la vitesse d'agitation thermique $v_{Th}$ des molécules de l'atmosphère.

**37) Etude thermodynamique d'une chaîne d'atomes monodimensionnelle (X–ENS) :**

Au niveau microscopique, on utilise le modèle simplifié de la chaîne d'atomes monodimensionnelle. On appelle m la masse de l'atome, a la distance entre deux atomes successifs lorsque ceux-ci sont en équilibre ; l'interaction entre deux atomes successifs schématisée par des " ressorts " est traduite par une énergie d'interaction de type potentielle.




Même non excité par une vibration, l'atome d'un solide n'est pas stable à sa position d'équilibre : il oscille de part et d'autre de cette position.

Pour la chaîne monodimensionnelle, on admet que chaque atome, dans son mouvement oscillant, possède :

* Une énergie cinétique :

$$e_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

* Une énergie d'interaction :

$$e_p = \frac{1}{2} K x^2$$

si $x$ représente, dans cette question, le déplacement algébrique de l'atome par rapport à sa position d'équilibre (on remarquera que, dans ce modèle, chaque atome est indépendant)

Soit une énergie :

$$e(\dot{x}, x) = e_c + e_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2$$

La thermodynamique statistique de Boltzmann prévoit la répartition des états des oscillateurs du système, c'est à dire la probabilité pour un oscillateur d'être défini par le couple de variables $\dot{x}$ et $x$ à $d\dot{x}$ et $dx$ près. Cette probabilité est égale à :

$$d^2 P(\dot{x}, x) = A \exp[-\frac{e(\dot{x}, x)}{k_B T}] d\dot{x}\, dx$$

a) Donner le nom de la constante $k_B$ ; calculer cette constante à partir de celle des gaz parfaits et du nombre d'Avogadro.

b) Pourquoi calcule t'on la constante *A* à partir de la relation :

$$1 = A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\frac{e(\dot{x}, x)}{k_B T} d\dot{x}\, dx$$

Montrer que :

$$A = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \sqrt{\frac{K}{2\pi k_B T}}$$

Donnée :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-bu^2] du = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

c) L'énergie moyenne se calcule à partir de :

$$\left\langle e(\dot{x}, x) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e(\dot{x}, x) d^2 P(\dot{x}, x).$$

Montrer que :

$$\left\langle e(\dot{x}, x) \right\rangle = \left\langle e_c(\dot{x}) \right\rangle + \left\langle e_p(x) \right\rangle$$

Montrer que :

$$\left\langle e_c(\dot{x}) \right\rangle = \left\langle e_p(x) \right\rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

Donnée :

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp[-bu^2] du = \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

Ce résultat était-il prévisible ? Pourquoi.

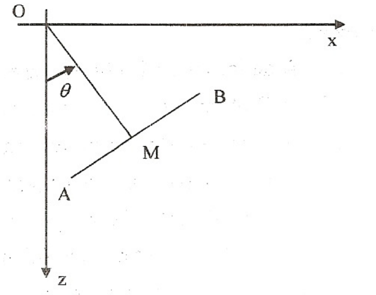
d) En déduire l'énergie interne *U* d'un cristal monoatomique constitué de *n* moles, chaque atome du cristal vibrant dans trois directions d'espace indépendantes. Exprimer la capacité calorifique molaire à volume constant $C_{VM}$ de ce cristal ; quel nom donne t'on à ce résultat ?

Expérimentalement, $C_{VM}$ évolue d'une valeur nulle à $T = 0\,K$ à la valeur trouvée lorsque la température est suffisante. Tracer la courbe d'évolution de $C_{VM}$. Quelles insuffisances voyez-vous dans le modèle proposé ?

# Mécanique du solide

**1) Oscillations d'une tige (CCP) :**

On étudie le mouvement du système (S) formé de deux barres OM et AB de même masse m et de longueur L. La barre OM est fixée en O par une liaison parfaite et l'extrémité M est fixée à la barre AB en son milieu, perpendiculairement. Le moment d'inertie d'une barre par rapport à son axe médiateur est $I = \frac{1}{2} mL^2$.



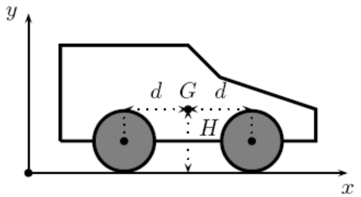

a) Exprimer l'énergie potentielle du système (S). Déterminer la position d'équilibre.

b) Déterminer l'énergie mécanique du système.

c) Donner l'expression de la période des petites oscillations au voisinage de l'équilibre.

**2) Eléments cinétiques d'une voiture (CCP) :**

Une voiture a une masse totale M. Les quatre roues sont identiques, assimilables à des cylindres homogènes de rayon r et de masse m. On désigne par G le centre d'inertie du véhicule. Les roues roulent sans glisser sur le sol et le véhicule avance à la vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$. On se place dans le référentiel lié au sol.



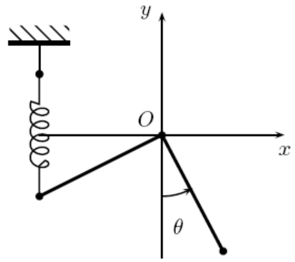

a) Calculer la vitesse angulaire ω des roues en fonction de r et de v.

b) Calculer l'énergie cinétique du véhicule en fonction de M, m et v.

c) Calculer la quantité de mouvement et le moment cinétique en G du véhicule.

**3) Oscillations d'un angle droit (CCP) :**

On considère le système de deux barres identiques suivant. L'extrémité d'une barre est accrochée à un ressort de constante de raideur k La liaison pivot en O est parfaite. La position d'équilibre stable du système correspond au cas où la seconde barre est verticale.



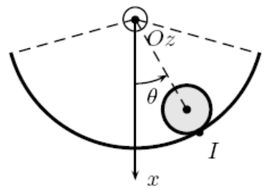

a) Déterminer l'allongement du ressort à l'équilibre.

b) Etudier les petites oscillations autour de la position d'équilibre.

c) Dessiner le portrait de phase de cet oscillateur et commenter.

**4) Cylindre à l'intérieur d'un profil cylindrique (CCP) :**

La figure présente un disque homogène de masse m, de centre G et de rayon r qui roule à l'intérieur d'un profil cylindrique fixe de rayon $a + r$. Le coefficient de frottement du cylindre est noté f. Le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe Gz est $J = \frac{1}{2} mr^2$.

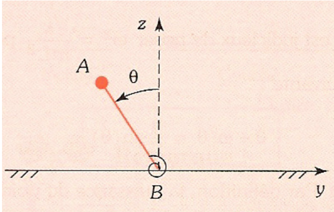



a) Etudier le mouvement de roulement sans glissement sachant que la position initiale du cylindre est $\theta_0$ avec une vitesse initiale nulle.

b) Déterminer la valeur limite de $\theta_0$ pour laquelle le mouvement n'est plus un mouvement de roulement sans glissement.

**5) Pendule inversé (CCP) :**

Un pendule est constitué d'un point matériel de masse m placé à l'extrémité A d'une tige de masse négligeable, dont l'autre extrémité B est fixée sur un support. L'ensemble, rigide, est mobile en rotation autour de l'axe $\Delta = (Bx)$, perpendiculaire à la tige. On note θ l'angle entre la tige et l'axe verticale (Bz). On admet que l'action subie par la tige en V présente un moment des forces $\vec{M}_B = -k\theta\vec{u}_x$. On note L = AB.




a) Déterminer l'énergie potentielle totale du pendule.

b) En déduire les positions d'équilibre et discuter leur stabilité.

**6) Mouvement à plusieurs phases (CCP) :**

Une boule de bowling est lancée par un joueur sur une piste horizontale dans les conditions suivantes :

*La vitesse angulaire de rotation initiale est nulle

* La vitesse horizontale du centre de masse est $\vec{v}_0$

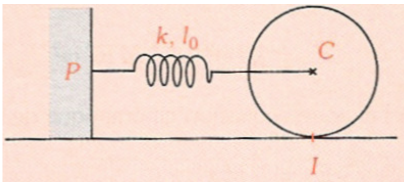
a) Y a-t-il glissement ou non sur la piste juste après le lancement ?

b) Dans la 1ère phase du mouvement, déterminer l'évolution de la vitesse de translation et de la vitesse angulaire de la boule.

c) Quand prend fin cette 1ère phase ? Etudier la phase qui suit.

**7) Roulement oscillant (Mines) :**

Un cylindre est posé sur un plan horizontal, le contact ponctuel en I étant caractérisé par le coefficient de frottement f. Une ressort horizontal est attaché à une de ses extrémités sur un point fixe P, l'autre extrémité est liée au cylindre par un pivot idéal de même axe que le cylindre.




a) Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre.

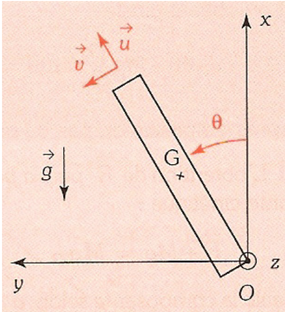
b) Etudier les oscillations de roulement pur du cylindre autour de l'équilibre, dans l'hypothèse du non glissement en I.

c) Quelle est l'amplitude maximale autorisée pour rester dans les conditions précédentes.

d) Qualitativement, comment évolue la nature du mouvement au cours du temps si l'amplitude initiale est supérieure à celle permettant le non glissement ?

**8) Chute d'une cheminée (Mines) :**

Une cheminée est modélisée par un cylindre homogène de masse M, de longueur D et de rayon très petit devant D. L'équilibre de la cheminée est rompu, elle amorce une rotation autour de sa base dans le plan vertical (Oxy). On appelle θ l'angle de la cheminée avec la verticale. Le moment d'inertie en G autour de (Gz) vaut $J_G = \frac{1}{12}MD^2$. La liaison pivot en O est parfaite.

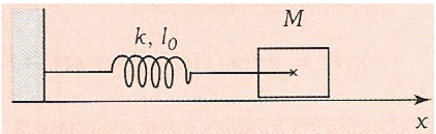



a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ.

b) Exprimer,en fonction de θ, les coordonnées $R_u$ et $R_v$ de la réaction du sol en O. Pour quelle valeur de θ la cheminée décolle-t-elle du sol ?

**9) Oscillations amorties par frottement fluide (CCP) :**

Un cube de masse M peut glisser sur un plan horizontal avec un coefficient de frottement f. Il est lié à un ressort de longueur à vide $\ell_0$ et de constante de raideur k, dont une extrémité est fixe. A l'instant initial, le ressort a une longueur $\ell_0 + A$ (A > 0) et la masse n'a pas de vitesse.




a) A quelle condition la masse de met-elle en mouvement ?

b) Dans le cas où un mouvement a lieu, le décrire en donnant la loi horaire x(t) jusqu'au prochain arrêt du cube.

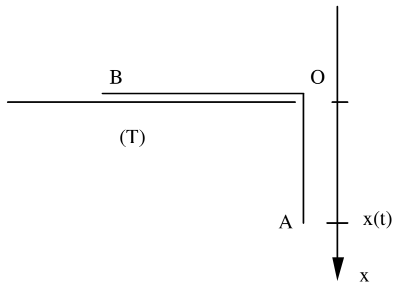
c) A quelle condition le cube se met-il à nouveau en mouvement, dans le sens contraire,après ce 1er arrêt ?

d) Lorsque l'amplitude initiale A est suffisamment élevée pour qu'un grand nombre d'oscillations aient lieu, quelle est l'allure de l'enveloppe du graphe de x(t) ? Que peut-on dire de la variation au cours du temps de l'amplitude des oscillations ?

e) Comparer au résultat obtenu pour un frottement fluide.

**10) Corde tombant sur le bord d'une table horizontale (X-ESPCI) :**

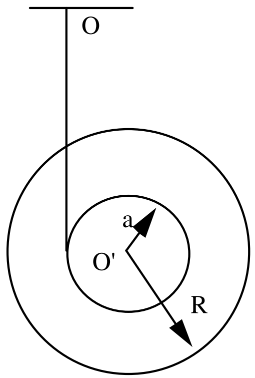
Une corde sans raideur, de longueur L repose sans frottement sur le bord d'une table horizontale, la partie OB étant sur la table et la partie OA pendant verticalement. A l'instant t = 0, on abandonne la corde sans vitesse initiale, OA ayant la valeur $x_O$.




Que se passe-t-il ? Etudier la variation en fonction du temps de la longueur OA, notée x(t). A quel instant $t_1$, la corde est-elle en chute libre ? Proposer différentes méthodes.

**11) Chute d'un yoyo (CCP) :**

Un yoyo est schématisé par deux disques homogènes de rayon R, de masse M reliés entre eux par un tambour cylindrique de rayon a < R et de masse négligeable autour duquel est enroulé un fil. Les deux disques et le tambour sont solidaires et ont même axe.



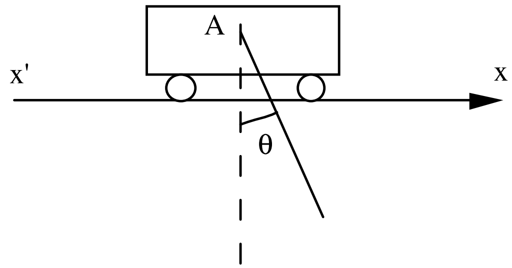

Une extrémité du fil est attachée au tambour et l'autre à un point fixe O. Le fil étant enroulé, on lâche le système sans vitesse initiale, l'axe étant horizontal. En admettant que l'axe demeure horizontal, déterminer:

a) L'accélération linéaire du yoyo.

b) La tension T du fil.

**12) Mouvement d'une tige et d'un chariot (CCP) :**

Un chariot de masse M est en mouvement de translation sur le rail x'x. On suppose qu'il n'y a pas de frottement entre les rails et le chariot.




Au point A du chariot est accroché un pendule simple de longueur L et de masse m. A t = 0, on lâche le pendule de $\theta = \theta_0$, le chariot étant à l'arrêt.

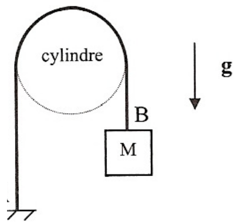
a) La quantité de mouvement se conserve selon une direction, laquelle ? En tirer une équation.

b) Quelle autre grandeur se conserve ? Donner l'équation.

c) En déduire la période des petites oscillations.

**13) Le fouet d'Indiana Jones (Centrale) :**

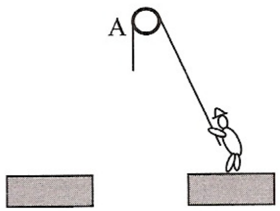
a) Une corde de masse négligeable passe sur un cylindre horizontal de rayon R. Une extrémité de la corde est reliée au sol au point A, l'autre à une masse M au point B. Le cylindre est bloqué et le coefficient de frottement corde - cylindre est égal à f = 0,2. L'ensemble est à l'équilibre. On appelle $T_A$ et $T_B$ les tensions de la corde en A et en B.




Quelle est la bonne réponse ?

$$T_A = T_B \quad ; \quad T_A > T_B \quad ; \quad T_A < T_B$$

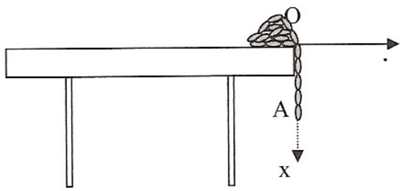
b) Indiana Jones (de masse $M = 80$ kg) enroule son fouet autour d'une branche d'arbre pour franchir une crevasse en « pendulant ». La branche a un rayon R et le coefficient de frottement du fouet sur la branche est $f = 0,3$.




Quelle est la tension du dernier élément de fouet A en contact avec la branche si le fouet est enroulé de $n = 4,5$ tours ? Indiana franchira-t-il l'obstacle ?

**14) Chaîne en boule (X) :**

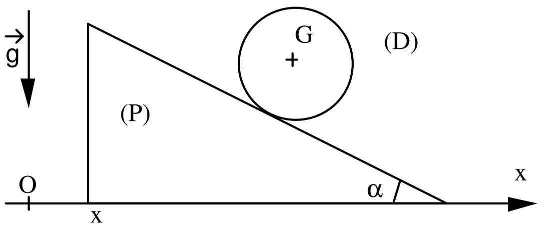
La chaîne est lovée en boule au bord de la table. Elle est lâchée sans vitesse initiale, la longueur pendant valant a. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de A.




Montrer que le mouvement est uniformément accéléré.

**15) Disque roulant sur un prisme mobile (CCP) :**

Un prisme P de masse M, de section verticale ABC repose sans frottement sur un plan horizontal xOz fixe dans le référentiel terrestre R supposé galiléen.




Un disque homogène D, de centre G, de rayon a, d'axe Gz et de masse m est en contact en un point I avec la face BC de P, le coefficient de frottement étant f.

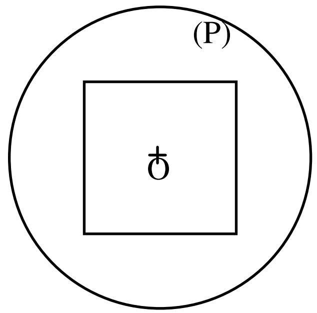
Etudier le mouvement du système.

**16) Mouvement d'un homme sur un plateau horizontal mobile (CCP) :**

Un plateau horizontal P est mobile autour d'un axe vertical Oz et il n'y a pas de frottement. Son moment d'inertie relativement Oz est J. Il supporte un homme H de masse m que l'on assimilera à un segment de droite vertical.

A l'instant initial, le plateau et l'homme sont immobiles. L'homme se met en mouvement sur le plateau et décrit le carré dessiné de côté 2a (dans le référentiel lié au plateau).

De quel angle $\theta$ a tourné le plateau quand l'homme a fait un tour ?




**17) Porte qui bat (CCP) :**

Une porte est assimilable à une plaque rectangulaire homogène de hauteur $AB = h = 2$ m. et de largeur $a = 1$ m, mobile sans frottement autour de AB. Par suite d'une malfaçon, le gond B se trouve à la distance $d = 1$ cm de la verticale du gond A.

Calculer la période T des petites oscillations de la porte.

**18) Effet « rétro » au billard (CCP) :**

Une boule homogène de centre G, de masse m et de rayon R, se déplace avec un coefficient de frottements f sur un tapis de billard modélisé par un plan horizontal, fixe dans un référentiel galiléen dont $\vec{u_y}$ est la verticale ascendante. Le moment d'inertie de la boule par rapport à un diamètre quelconque vaut $J = 2mR^2/5$. Par une action ad hoc, on lance la boule avec une vitesse angulaire initiale $\vec{\Omega}(t=0) = \Omega_0\,\vec{u_z}$ et une vitesse initiale $\vec{v}(G, t=0) = v_0\vec{u_x}$ avec $\Omega_0 > O$ et $v_0 > 0$.

a) Montrer que la boule glisse à l'instant $t = 0$ et préciser le sens de la vitesse de glissement.

b) On suppose qu'il y a glissement pour $0 \leq t \leq t_1$. Déterminer $\vec{v}\,(G, t) = v(t)\,\vec{u_x}$, $\vec{\Omega}(t) = \Omega(t)\,\vec{u_z}$, la vitesse de glissement $\vec{v_g}\,(t)$ et la date $t_1$.

c) Étudier le mouvement pour $t > t_1$. En déduire une condition sur $v_0$, R et $\Omega_0$ pour que la boule finisse par se déplacer avec $\vec{v}$ selon $-\vec{u_x}$.

**19) Détermination d'un coefficient de frottement (Mines) :**

On considère le dispositif suivant : le fil reliant les deux masses est inextensible. Il n'y a pas de pertes dues à la poulie. A $t = 0$, le fil entre les deux masses est tendu. On lâche la masse $m_2$ d'une hauteur h. La masse $m_1$ s'arrête à une distance h + d relativement à la situation à $t = 0$.


Déterminer le coefficient de frottement f entre la table et $m_1$ en fonction de $m_1$, $m_2$, h et d.

**20) Cylindre placé sur un camion (Oral CCP) :**

Un camion démarre sur une route horizontale avec une accélération constante $\gamma$. Sur la plate-forme de longueur L est placé un cylindre de rayon R. Calculer la distance parcourue avant que le cylindre tombe à l'arrière du camion, dans l'hypothèse où le coefficient de frottement de glissement entre le cylindre et la plate-forme est f.

**21) Caisse sur un camion accéléré (Oral CCP) :**

Une caisse de masse m est posée sur la plate-forme horizontale d'un camion et on donne le coefficient de frottement f à l'interface pavé - camion. À l'instant t = 0, le camion démarre avec une accélération $a_0\,\vec{u}_x$ dans le référentiel galiléen (Oxyz) lié à la route et maintient ensuite cette accélération constante. On note $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$ le champ pesanteur, supposé uniforme.

a) Quelle doit être la valeur minimale $f_m$ de f pour que la caisse reste solidaire du camion ?

b) Si $f < f_m$, quel est le mouvement de la caisse dans le référentiel (Oxyz) lié à la route ?

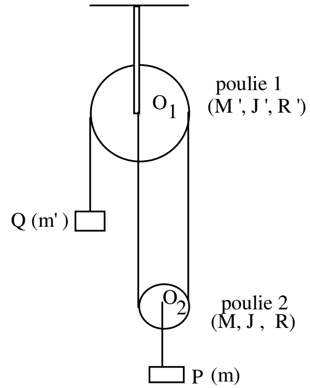
**22) L'âne et la charrette (CCP) :**

a) Un âne tire une charrette sur une route horizontale ; la charrette avance grâce à l'action $\vec{F}$ exercée par l'âne. Mais comment se fait-il que l'âne ne recule pas sous l'effet de l'action $-\vec{F}$ exercée par la charrette ?

b) Comparer la valeur de $\vec{F}$, supposée horizontale, nécessaire pour tirer à vitesse constante une caisse de masse M directement posée sur le sol et pour tirer à vitesse constante la même caisse posée sur une charrette.

**23) Système de poulies (CCP) :**

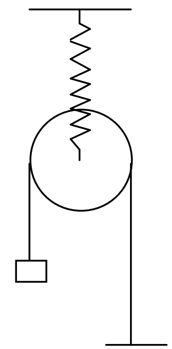
Ici, on négligera les frottements. Le fil est supposé inextensible et sans masse. On se servira des indications portées sur le schéma.




Déterminer l'accélération de P et la tension du fil supportant Q.

**24) Poulie et ressort (CCP) :**

Une poulie a J pour moment d'inertie et un rayon R. Sa masse est M. Le ressort a pour longueur à vide $l_0$ et pour raideur k.



Trouver la période des petites oscillations du système.

**25) La tartine beurrée (Mines) :**

Un toast de longueur 2a est posé sur une table horizontalement, son centre d'inertie décalé de la table d'une distance $\delta$. Coefficient de frottement f; on donne $J_{Gz} = ma^2 / 3$ et $\eta = \delta / a$

a) Au début de la chute il n'y a pas glissement (le justifier), montrer qu'alors :

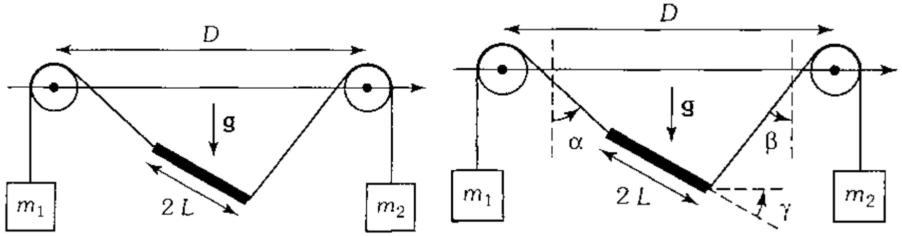
$$(d\theta / dt)^2 = (6g / a)(\eta / (1 + 3\eta^2)) \sin\theta$$

b) En supposant que le toast quitte la table sans avoir glissé pour $\theta = \pi / 2$ avec $\delta << a$, déterminer le mouvement ultérieur du toast. Quel est l'angle limite pour lequel en moins d'un tour, il atterrisse coté pain ? Calculer alors le temps de chute du toast.

On donne : h = 75 cm, 2a = 10 cm, g = 9,8m.s$^{-1}$.

**26) Barres, masses et poulies (X – ESPCI) :**

Les extrémités d'une barre rectiligne de masse M et de longueur 2L sont reliées à des masses $m_1$ et $m_2$ (différente de $m_1$) par des fils inextensibles reposant sur des poulies parfaites dont les axes sont situés dans le même plan horizontal et distants de D.

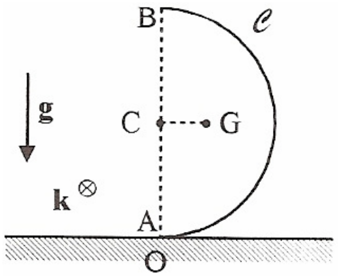



a) Combien le système possède-t-il de degrés de liberté indépendants ?

b) On définit sur la figure les angles α, β et γ. Exprimer Z = cosβ en fonction de $m_1$, $m_2$ et M à l'équilibre. A quelle condition un tel équilibre est-il possible ? Que se passe-t-il intuitivement si cette condition n'est pas vérifiée ?

**27) Demi – cerceau lâché sur un plan rugueux (Mines) :**

On considère un demi – cerceau homogène de centre C, de masse m, de rayon R, posé sur un plan horizontal. Le coefficient de frottement plan/demi – cerceau est f. Le solide est lâché sans vitesse initiale.




Déterminer, au début du mouvement, la condition de roulement sans glissement.

On donne CG = a = 2R / π et $J = m(R^2 - a^2)$, moment d'inertie par rapport à l'axe Gz.

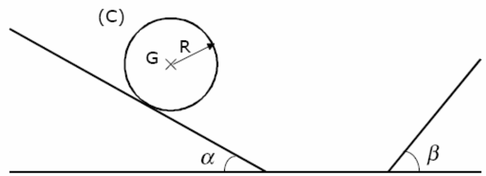
**28) Sphère qui roule dans une rigole (Centrale) :**

Une sphère de masse m, de rayon r, de moment d'inertie J par rapport à un de ses diamètres, roule sans glisser dans une rigole de largeur W < 2r, sur un plan incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale.

a) Calculer le coefficient de frottement minimal $f_{min}$ pour qu'il y ait roulement sans glissement (on supposera que la force de frottement se fait uniquement suivant la direction de la glissière).

b) Décrire le mouvement pour un coefficient de frottement $f < f_{min}$ puis pour $f > f_{min}$.

**29) Roulement d'un solide sur un plan incliné :**

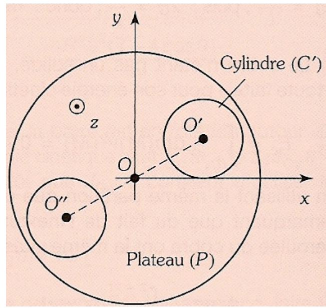



Un cylindre homogène de masse M, de rayon R, de centre d'inertie G, roule sans glissement sur un plan incliné.
Son moment d'inertie par rapport à G est noté:
$J = \frac{1}{2} MR^2$
Le cylindre n'a pas de vitesse initiale, et G se trouve à une hauteur h+R à t=0 (par rapport au plan horizontal).

1) Déterminer la vitesse de G lorsque le cylindre (C) arrive sur le plan horizontal.
2) Le roulement sans glissement continue sur le plan horizontal, puis sur un plan incliné d'un angle $\beta$, à priori différent de $\alpha$ ; lorsque le cylindre arrête de monter sur le plan incliné, le point G est-il plus haut, aussi haut ou moins haut qu'à son point de départ ?
3) On supprime maintenant tout frottement sur le plan incliné d'un angle $\beta$ : même question qu'en 2).

**30) Synchronisation d'un système articulé (Centrale) :**

On envisage le système représenté sur la figure :



* Le plateau (P) est libre de tourner sans frottements autour de l'axe (Oz) avec un moment d'inertie $J_P$ et on note $\omega(t)$ sa vitesse angulaire.

* Le cylindre (C') de masse m tourne autour de l'axe (O'z) où O' est un point lié au plateau tel que OO' = a ; on note $J_C$ le moment d'inertie de (C') par rapport à (O'z) et $\Omega$ sa vitesse angulaire de rotation dans son référentiel barycentrique.

* Le cylindre (C''), identique à (C') et centré sur le point O'' symétrique de O' par rapport à O, lié au plateau (P).

A l'instant $t = 0$, on a $\omega(t=0) = \omega_0$ et $\Omega(t=0) = \Omega_0$ $(avec\ \Omega_0 \neq \omega_0)$. On constate qu'au bout d'une durée $\tau$, les rotations se synchronisent, atteignant la même valeur :

$$\omega(t \geq \tau) = \Omega(t \geq \tau) = \omega_\infty$$

a) Montrer que la composante verticale du moment cinétique global est de la forme :

$$L_\Delta = J\omega + I\Omega$$

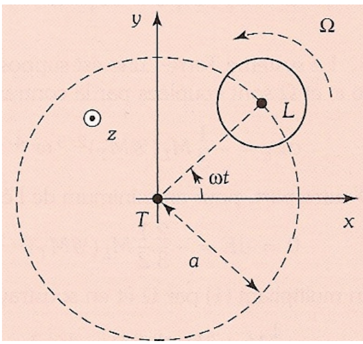
et expliciter I et J.

b) En admettant que $L_\Delta$ est une constante du mouvement, déterminer $\omega_\infty$.

c) Exprimer la variation d'énergie cinétique du système $E_c(t=\tau) - E_c(t=0)$ et commenter.

**31) Système Terre – Lune (ENS) :**

Le référentiel géocentrique (Txyz) est supposé galiléen et la Terre est supposée ponctuelle en T. La Lune est assimilée à une boule homogène de centre L, de masse $M_L$ et de rayon R, en rotation à vitesse angulaire $\Omega$ dans son référentiel barycentrique autour d'un axe parallèle à (Oz). Son centre d'inertie L est en mouvement circulaire de rayon a à la vitesse angulaire $\omega$ dans le plan (Txy).



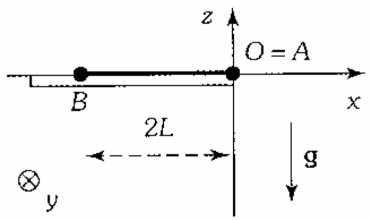

a) Exprimer a en fonction de $\omega$, G (constante de gravitation universelle) et la masse de la Terre $M_T$.

b) Exprimer la composante $L_z$ du moment cinétique en T de la Lune et son énergie mécanique E dans le référentiel géocentrique en fonction de $\omega$, $\Omega$, G, $M_T$ et $M_L$.

c) Montrer que $E(\omega,\Omega)$ passe par un maximum à $L_z$ fixé. Commenter sachant que la Lune présente toujours la même face à la Terre.

**32) Règle plate sur une table (Centrale) :**

Une règle plate, assimilée à une barre homogène $AB$ de masse $m$ et de longueur $2L$, est posée sur une table fixe de telle sorte que $A$ soit initialement confondu avec un bord $O$ de la table (Fig. 27). On lance la règle avec une vitesse initiale $v_0\,\mathbf{u}_x$. On adopte un modèle simplifié des actions de contact, réduites à une force $\overline{N}_O\,\mathbf{u}_z$ appliquée en $O$ et à une force $\overline{T}_B\,\mathbf{u}_x + \overline{N}_B\,\mathbf{u}_z$ appliquée en $B$ et satisfaisant aux lois de Coulomb avec un coefficient de frottement $f$.




On repère le mouvement par l'abscisse $x$ de $A$.

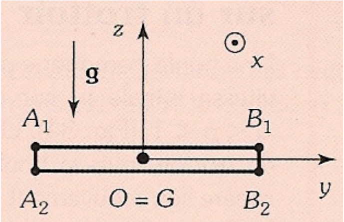
**1.** Déterminer $\overline{N}_O$, $\overline{N}_B$, $\overline{T}_B$ et établir l'équation $\ddot{x} = f(x)$ du mouvement.

**2.** Pour quelle valeur $x_M$ de $x$ la règle bascule-t-elle ? Combien doit valoir $v_0$ pour que la règle s'arrête pour $x = x_M$ ?

On pourra remarquer que : $\dfrac{L-x}{2L-x} = 1 - \dfrac{L}{2L-x}$.

**33) Numéro de clown (Mines) :**

Un clown joue avec une règle plate en bois, assimilée à une plaque homogène de masse m, de largeur a et de longueur L. On néglige les frottements de l'air. Le vecteur rotation de la règle est $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_x$.




A l'instant t = 0, la règle est horizontale, G est confondu avec O, $\vec{v}(G) = -v_0\vec{u}_z$ et la vitesse angulaire est $\vec{\Omega} = -\Omega_0\vec{u}_x$. Le clown frappe la règle avec sa main droite en $B_2$ pendant une durée suffisamment courte pour qu'elle ne bouge pas significativement et avec une force convenablement réglée pour qu'après le choc on ait $\vec{v}(G) = v_0\vec{u}_z$ et $\vec{\Omega} = \Omega_0\vec{u}_x$.

a) Etudier le mouvement de la règle jusqu'au choc suivant, pour lequel $B_1$ vient frapper la main gauche du clown.

b) En déduire les conditions pour que le mouvement soit périodique.

**34) Billard tournant (X) :**

Une boule homogène de masse $m$, de centre $G$ et de rayon $R$ se déplace sans glisser sur un plateau confondu avec le plan $z = 0$ et tournant à vitesse angulaire constante $\omega$ autour de l'axe $Oz$ dans un référentiel galiléen $(R) = (Oxyz)$. Le champ de pesanteur $\mathbf{g} = -g\mathbf{u}_z$ est uniforme. Le moment d'inertie de la boule par rapport à un diamètre quelconque vaut $J = 2mR^2/5$.

**1.** Soit $\mathbf{\Omega}$ le vecteur rotation instantané de la boule. Montrer que :

$$\mathbf{\Omega} + \frac{5}{2R}\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{v}(G) = \mathbf{C} \text{ est un vecteur constant.}$$

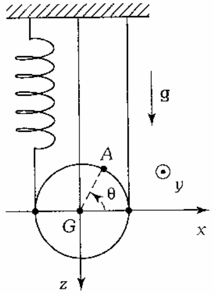
**2.** Déterminer le mouvement de $G$ dans le référentiel $(Oxyz)$.

**3.** À quelle condition le mouvement est il possible ?

**35) Disque et ressort (CCP) :**

Dans le dispositif représenté sur la figure 18, le disque homogène de masse $m$, de rayon $R$ et de moment d'inertie $J_{Gy} = mR^2/2$, ne glisse pas sur le fil.

Le fil est inextensible et sans masse. Le ressort est sans masse, de raideur $k$ et de longueur à vide $\ell_0$.

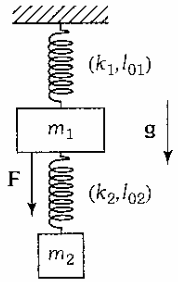



On repère le mouvement par la cote $z$ du centre d'inertie G du disque, par l'angle $\theta$ et par la longueur $\ell$ du ressort ; on fixe l'origine $z = 0$ lorsque $\ell = \ell_0$ (ressort non tendu). Le champ de pesanteur $\mathbf{g} = -g\,\mathbf{u}_z$ est uniforme.

Déterminer la période des oscillations.

**36) Immobilité d'une masse (X – ESPCI) :**

Dans le montage de la figure 81 où les ressorts ont pour raideurs $k_1$ et $k_2$ et pour longueur à vide $l_{01}$ et $l_{02}$, montrer qu'il existe une pulsation $\omega$ de la force $\mathbf{F} = F_0 \cos\omega t\,\mathbf{u}_z$ appliquée à la masse $m_1$ telle qu'elle reste immobile. Quel est alors le mouvement de $m_2$ ?

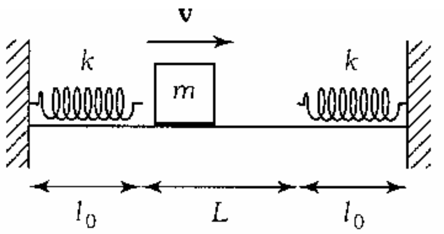



**37) Masse entre deux ressorts (ENS) :**

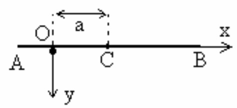
Un pavé de masse $m$ se déplace sans frottements avec une vitesse $v$ sur un plan horizontal entre deux ressorts identiques de raideur $k$ et de longueur à vide $l_0$, dont les extrémités libres sont distantes au repos de $L$ (Fig. 99).

**a)** Exprimer la force moyenne exercée sur chaque ressort.

**b)** Proposer une analogie thermodynamique du résultat.




### 38) Mouvement d'une barre sur un axe horizontal :

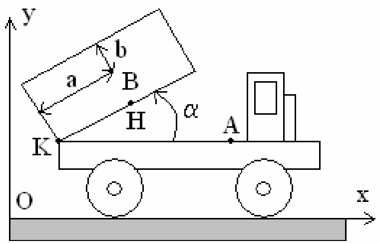



$(Oxyz)$ est un référentiel galiléen. Une barre homogène $AB$, de masse $m$, de longueur $2b$, de centre $C$, de moment d'inertie $J = \frac{1}{3} m b^2$ par rapport à un axe passant par $C$ et perpendiculaire à la barre, est posée sur une tige de rayon négligeable, coïncidant avec l'axe $Oz$. Le contact entre la barre et la tige est caractérisé par un coefficient de frottement $f$. A l'instant initial, on lâche la barre sans vitesse initiale dans la position horizontale $(0 < OC = a > b)$

Pour quelle inclinaison $\theta_1$ la barre commence t'elle à glisser sur la tige ?

### 39) Déplacement d'un camion sur un sol horizontal :

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le chauffeur d'un camion (tracteur+benne) immobile sur une route horizontale a coupé le moteur, mais oublié de serrer ses freins. Il fait alors basculer la benne d'un angle $\alpha$ à un angle $\alpha_0$. La masse du tracteur est notée $M$, celle de la benne est notée $m$. On note $A$ le centre de masse du tracteur, $B$ celui de la benne et $G$ celui du camion.
Le camion est posée sur ses 4 roues, chacune de centre $C_k$ et de masse négligeable, tournant autour sans frottements autour de leur axe respectif.




On note $\vec{R}_k = N_k \vec{e}_y + T_k \vec{e}_x$ les réactions du sol sur la roue au niveau de chacun des points de contact camion-sol.

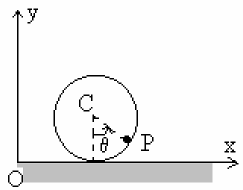
**1)** Appliquer le théorème du moment dynamique à une roue et en déduire la direction des forces de contact entre le camion et le sol.

**2)** Appliquer le théorème de la résultante dynamique au camion entier. Qu'en déduisez vous pour le centre de masse $G$ du camion.

**3)** En déduire le déplacement horizontal $d$ du centre de masse $A$ du tracteur

### 40) Mouvement d'un point matériel dans un tuyau qui roule sans glisser :

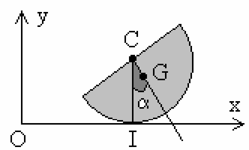
Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, un tuyau cylindrique de rayon $R$, de masse $M$, de moment d'inertie $J = MR^2$ par rapport à son axe, roule sans glisser sur le sol horizontal.
**a)** A l'intérieur de ce tuyau glisse sans frottement, dans le plan vertical, un point matériel $P$ de masse $m$.
L'ensemble est repéré par l'abscisse $x$ du centre $C$ du tuyau et par l'angle $\theta = (\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CP})$ définissant la position du point matériel $P$.




A l'instant initial, l'ensemble est immobile et $\theta = \theta_0$.
Ecrire deux équations vérifiées par $x, \theta$ et leurs dérivées.
En supposant $\theta_0$ petit, calculer la période des petites oscillations du système.
**b)** Le point matériel $P$ de masse $m$ est maintenant solidaire du tuyau.
Calculer la période dans le cas de petites oscillations.

### 41) Oscillations d'un demi - disque sur un plan horizontal :

On considère un demi-disque (D) homogène, de " centre " $C$, de centre de masse $G$, de rayon $R$ et de masse $m$.
Le référentiel terrestre $(Oxyz)$ est supposé galiléen.
Tout en restant dans le plan vertical $(Oxy)$, le demi-disque roule sans glisser sur le plan horizontal.




On désigne par $I$ le point de contact entre le sol et (D).et on repère la position de (D) par l'abscisse $x$ de $C$ et par l'angle $\alpha = (\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CG})$. A l'instant initial, on lâche (D) sans vitesse initiale dans la position $\alpha = \alpha_0$.

On démontrera que $CG = b = \dfrac{4R}{3\pi}$.

Le moment d'inertie de (D) par rapport à un axe passant par $C$ perpendiculaire à (D) vaut $J = \dfrac{1}{2} m R^2$.

**a)** Ecrire une intégrale première du mouvement.

**b)** En déduire la période des petites oscillations.