Prépas Emc2

MPSI (Mécanique)

Olivier Granier (**_olivier.granier.free.fr_**)

Mécanique : cinématique

1) Un premier exemple de mouvements rectilignes : une voiture attend à un feu rouge. Quand le feu passe au vert, la voiture accélère uniformément pendant 6 s avec une accélération de 2 $m.s^{-2}$, après quoi elle se déplace avec une vitesse uniforme. Au moment où la voiture démarre au feu vert, un camion se déplaçant dans la même direction avec une vitesse uniforme de 10 $m.s^{-1}$, la dépasse. Au bout de combien de temps, et à quelle distance du feu, la voiture et le camion se rattraperont-ils ? (18 s et 180 m)

2) Un deuxième exemple de mouvements rectilignes : lors d'une course de relais, le porteur du témoin arrive avec une vitesse constante de 10 $m.s^{-1}$. Le relayeur démarre avec une accélération de 20 $m.s^{-2}$ quand le porteur du témoin est à une distance x_0 de la ligne de relais prise comme origine. Calculer x_0 pour que le passage du relais se fasse quand le relayeur atteint sa vitesse maximale et constante 10 $m.s^{-1}$ au moment où le rattrape le porteur du témoin.(2,5 m)

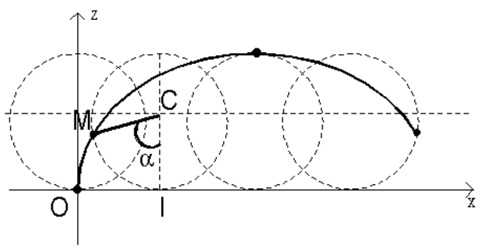
3) Mouvements de bateaux : à l'instant t = 0, deux navires N et N' sont situés sur un même méridien. Le navire N' est à une distance a au nord de N.

a) N se dirige vers le nord à la vitesse constante v, N' vers l'est avec une vitesse constante v'. Quelle sera la distance minimale entre les deux navires ?

b) N' se dirige vers l'est avec une vitesse v' constante. Quelle direction doit prendre N pour atteindre N' en ligne droite ? Calculer la durée correspondante.

4) Un exemple de mouvement circulaire : un point M se déplace sur un arc de cercle de rayon R et de centre O. La position de M est repérée par l'angle polaire $\theta = (\vec{OM}_0, \vec{OM})$ qui varie avec le temps selon la loi $\theta = \pi \sin(2\pi t / T)$. Calculer littéralement les coordonnées radiales et orthoradiales de la vitesse et de l'accélération.

5) Mouvement cycloïdal : une roue de rayon r et de centre C roule sans glisser sur l'axe (Ox) en restant dans le plan (Ozx). Le repère cartésien (O; $\mathbf{e_x}$, $\mathbf{e_z}$) est lié à $\Re$ le référentiel d'étude. Soit M un point lié à la roue, situé sur la circonférence. A l'instant t = 0, M est confondu avec l'origine O. La vitesse de C est constante et est égale à v.



a) Comment exprimer la condition : " la roue ne glisse pas " ?

b) Déterminer en fonction de v, t et r à l'instant t :

* la position de M dans le repère (O; $\mathbf{e_x}$, $\mathbf{e_z}$)

* le vecteur vitesse $\mathbf{v}_M$ de M

* le vecteur accélération $\mathbf{a}_M$ de M, sa norme et sa direction

c) Déterminer $\mathbf{v}_M$ et $\mathbf{a}_M$ lorsque M est en contact avec l'axe (Ox).

6) Equation d'une trajectoire, vitesse et accélération : un point matériel se déplace dans un plan xOy de telle sorte que $\vec{OM} = (2t^2 - 2)\vec{u}_x + t\vec{u}_y$.

a) Donner l'équation et la nature de la trajectoire.

b) Donner les coordonnées et la norme du vecteur vitesse au cours du temps

c) Donner les coordonnées et la norme du vecteur accélération.

7) Hélice circulaire : dans un référentiel $\Re$(Oxyz), un point M décrit une hélice circulaire dont l'équation en coordonnées cylindriques est :

$$x = R\cos\theta \quad ; \quad y = R\sin\theta \quad ; \quad z = h\theta$$

où R et h sont des constantes. On suppose la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ constante. A l'instant $t = 0$ le point M est en A de coordonnées cylindriques (R, 0, 0).

a) Calculer dans $\Re$ les composantes du vecteur vitesse. Donner sa norme. Montrer que la vitesse fait un angle constant α avec l'axe Oz.

b) Calculer les composantes du vecteur accélération.

c) Evaluer la distance parcourue sur l'hélice à l'instant t.

8) Courbes de Lissajous : sur un écran d'oscilloscope, les coordonnées du spot lumineux sont $x = A\cos(\omega t)$ et $y = A\cos(3\omega t+\varphi)$. Le déphasage φ varie en fonction des tensions appliquées aux plaques de déviation des électrons. Déterminer la trajectoire du spot avec son sens de parcours. On étudiera les différents cas lorsque φ varie entre 0 et 2π. On pourra faire une étude graphique en utilisant une calculatrice graphique ou le logiciel Regressi.

9) Astronaute : au cours de leur entraînement, pour habituer leur organisme à supporter les fortes accélérations du décollage et de l'entrée dans l'atmosphère, les astronautes sont placés sur un siège fixé à l'extrémité d'un bras de longueur L, en rotation de vitesse angulaire ω.

Calculer ω en tours par minute si L = 5 m et si l'accélération obtenue a pour valeurs 6g.

10) Pilote de chasse et loopings : un pilote de chasse fait un looping. La trajectoire circulaire est située dans un plan vertical. La vitesse supposée constante est égale à 1 800 km.h^{-1}. Sachant que le corps humain ne peut pas supporter une accélération supérieure à 10g, calculer le rayon minimal que le pilote peut donner à sa trajectoire. (2,5 km)

11) Cardioïde en coordonnées polaires : une particule M se déplace sur la courbe définie par l'équation en coordonnées polaires :

$$r = b\,(1 + \cos\theta)$$

avec b constant et $0 \leq \theta \leq \pi$. On suppose que la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ est constante.

a) Tracer l'allure de la trajectoire sur calculatrice.

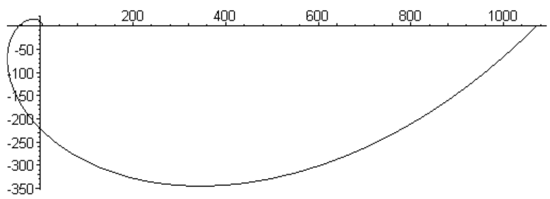
b) Déterminer les composantes du vecteur vitesse v de M, dans la base polaire.

c) Déterminer les composantes du vecteur accélération a de M, dans la base polaire.

12) Spirale exponentielle : dans le plan (*xOy*) d'un repère $R(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$, un point P de coordonnées polaires r et θ décrit la spirale d'équation polaire $r = a\exp(\omega t)$, avec $\omega t = \theta$ (ω est une constante).

a) Définir en fonction de r et ω les composantes polaires du vecteur vitesse $\vec{v}$.

b) Définir en fonction de r et ω les composantes polaires du vecteur accélération $\vec{a}$.



c) Montrer que l'angle α que fait $\vec{u}_x$ avec $\vec{v}$ vaut $\theta + \pi/4$.

d) Pour r = 2exp(θ) et $\omega = 1\ \text{rad.s}^{-1}$, on trace la courbe ci-contre que vous recopierez ; on considère le point P d'abscisse 600 et d'ordonnée – 300. Placer sur la feuille de copie, les coordonnées r et θ, les vecteurs unitaires $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{v}$ *et* $\vec{a}$. Déterminer les coordonnées cartésiennes du point N pour lequel $\theta = 3\pi/2$ et placer le point sur la courbe.

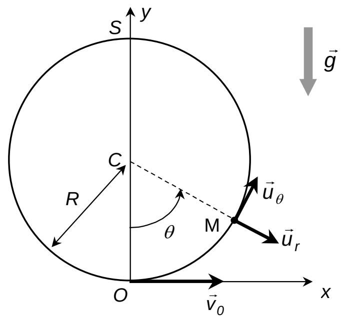
Mécanique : les forces

1) Parabole de sûreté : dans le champ de pesanteur terrestre, supposé uniforme, $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$, on lance vers le haut un point matériel M de masse m à l'origine O du repère (Oxyz) avec un vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ de coordonnées ($v_0\cos\alpha$,$v_0\sin\alpha$). On néglige la résistance de l'air.

a) Rappeler les propriétés du mouvement de M. Calculer l'altitude du point le plus haut de la trajectoire et l'abscisse du point où le projectile touche le sol.

b) v_0 étant maintenu constante, on fait varier l'angle α. Définir la région du plan (Oxy) dont les points peuvent être atteints par le tir et donner l'équation de la courbe qui limite cette région (parabole de sûreté).(Réponse : $z = -\left(g / 2v_0^2\right)x^2 + v_0^2 / 2g$).

2) Point matériel sur un cerceau : un point matériel de masse m, initialement au repos en A, peut se déplacer sans frottement dans la rainure d'un cerceau vertical et immobile, de rayon R. On lui communique une vitesse $\vec{v}_0$ horizontale.



Etudier les différents mouvements possibles du point matériel, en fonction des paramètres du problème (R, $\vec{v}_0$,...).

3) Force de frottement proportionnelle au carré de la vitesse : un point matériel de masse m est lancé sur une droite avec une vitesse initiale $v_0 = 2$ m.s^{-1}. La seule force qui s'exerce sur lui est une force de frottement représentée par l'expression $f = Kmv^2$ et de sens opposé à la vitesse ($K > 0$). Le point met T = 50 s pour parcourir la distance d = 50 m.

a) Calculer numériquement K en précisant son unité.

b) Combien de temps faut-il pour parcourir la distance 2d ?

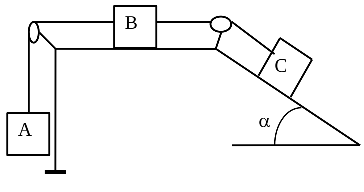
4) Force de frottement solide : un bœuf tire un traîneau sur un sol horizontal en appliquant systématiquement une force de traction $\vec{F}$ inclinée de 60° par rapport à l'horizontale. La force de traction $\vec{F}$ sera variable dans les différentes parties de l'exercice et l'on cherche à comprendre le mouvement du traîneau en fonction de la valeur du module de $\vec{F}$. La masse du traîneau est m = 100 kg.

a) pour mettre en mouvement le traîneau, le bœuf doit tirer avec une force minimale $F_m = 40\,N$. Expliquer l'origine de cette force minimale. En déduire les caractéristiques de la réaction sol-traîneau.

b) A l'instant t = 0, il tire le traîneau avec une force $F_1 = 100\,N$ pendant $t_1 = 10\,s$, puis il applique une force $F_2 = 40\,N$ pendant $t_2 = 20\,s$ pour ne le tirer qu'avec une force $F_3 = 20\,N$ par la suite.

- Ecrire l'équation différentielle du mouvement du traîneau dans les trois cas précédents.
- Résoudre ces équations et déterminer l'expression de la distance parcourue par le traîneau en fonction du temps.
- Le traîneau s'arrête-t-il ? Dans l'affirmative, trouver la position d'arrêt ?

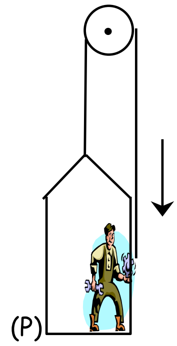
5) Tensions de fils : trois solides identiques A, B et C, assimilés à des points matériel de masse m, sont reliés comme l'indique la figure ci-dessous.



On néglige la masse des fils et on admet que la tension est la même de part et d'autre d'une poulie.

Déterminer la tension de chacun des fils en l'absence de frottement.

6) Points matériels en translation : un peintre (de masse M = 75 kg) s'appuie sur une planche (P) de masse m = 15 kg et tire sur une corde qui glisse sur une poulie (figure ci-contre). La corde, inextensible et de masse négligeable, soutient la planche. En tirant sur la corde (tension de module T), le peintre n'exerce plus sur la planche qu'une force F de 500 N.

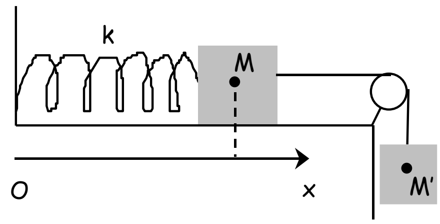


Appliquer le PFD et le principe de l'action et de la réaction au peintre et à la planche (assimilés à des points matériels) et en déduire l'accélération a du peintre en fonction de F, M, m et g. Calculer a.

7) Oscillations d'un pendule dans un champ électrique : déterminer l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple électrostatique, de masse m, de longueur ℓ, portant la charge q > 0, et placé dans un champ électrostatique $\vec{E}$ orthogonal à $\vec{g}$. Le référentiel d'étude est galiléen. Déterminer ensuite la période des petites oscillations du pendule. (Equation différentielle : $\ell\ddot{\theta} = -g\sin\theta + (qE/m)\cos\theta$)

8) Décollement d'une masse : un point matériel A, de masse m, est posé sur un plateau horizontal P, de masse M, relié au sol par des ressorts équivalents à un ressort unique de raideur k : ce plateau ne peut se déplacer que verticalement. On appuie sur le plateau, qui se déplace d'une longueur L, comptée à partir de sa position d'équilibre initiale, et on le lâche sans vitesse initiale. A partir de quelle valeur de L le point matériel A quittera-t-il le plateau lors du mouvement ?

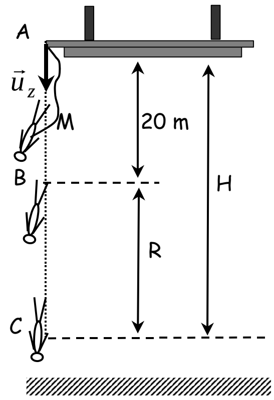
9) Mouvement oscillatoire : un point matériel M (de masse m) est attaché à un ressort horizontal de raideur k et de longueur au repos ℓ_0. En outre, M est relié par un fil inextensible (de masse négligeable) à un point matériel M' (de masse m'). Le fil glisse sans frottement sur une poulie et le solide ponctuel M glisse sans frottement sur un plan horizontal. Le point M' est animé d'un mouvement rectiligne vertical.



a) Quelle est l'abscisse x_e du point M à l'équilibre ?

b) Quelle est la période T des oscillations du point M autour de sa position d'équilibre ? (appliquer le PFD à chaque point matériel).

10) Saut à l'élastique : un sauteur à l'élastique, modélisé par un point matériel M (de masse m = 70 kg), tombe depuis un pont (au point A) avec un élastique accroché aux pieds. Pendant les 20 premiers mètres de chute (jusqu'en B), l'élastique n'est d'aucune utilité et le sauteur est donc en chute libre. A partir du point B, l'action de l'élastique est modélisé par un ressort, de masse négligeable, de longueur à vide $\ell_0 = 20\,m$ et de raideur $k = 120\,N.m^{-1}$. On suppose le référentiel terrestre galiléen et on néglige les frottements.

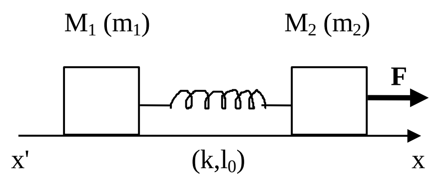


a) Déterminer la vitesse du sauteur en B.

b) Déterminer la hauteur totale de chute.

c) Déterminer l'accélération maximale pendant le saut.

11) Oscillateurs soumis à une force constante : deux masses m_1 et m_2 sont reliées par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 Elles peuvent se déplacer sans frottement sur un axe horizontal (x'x). Pour t < 0, le ressort est non tendu et les masses m_1 et m_2 sont au repos en M_{10} et M_{20}.



A partir de t = 0, on exerce sur m_2 une force horizontale constante $\vec{F} = F\,\vec{u}_x$. On note $x_1(t) = M_{10}M_1$ et $x_2(t) = M_{20}M_2$. Déterminer $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Mécanique : l'énergie

1) Travail d'une force : on considère un point matériel M(m) pouvant se déplacer le long de l'axe (Ox) dans un référentiel galiléen. Il est soumis à la force $\vec{F}$ égale à $-F_0\,\vec{u}_x$ (constante) s'il se déplace dans le sens des x croissants et à la force $F_0\,\vec{u}_x$ s'il se déplace dans le sens des x décroissants.

a) Déterminer le travail de $\vec{F}$ pour aller directement du point A (x = 1) au point B (x = 3) en suivant l'axe (Ox).

b) Déterminer le travail de $\vec{F}$ pour aller du point A (x = 1) au point B (x = 3) en passant par le point C (x = 4) tout en restant sur l'axe (Ox). La force est-elle conservative ?

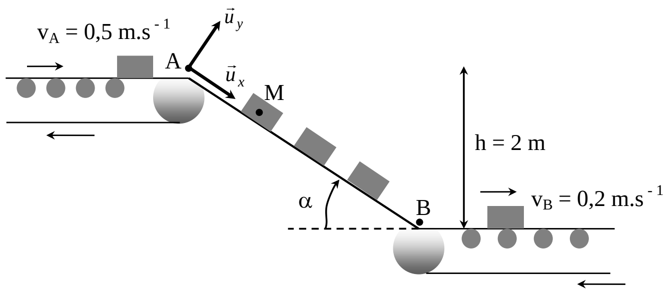
2) Force de puissance constante : un point matériel A (masse m) a un mouvement rectiligne suivant un axe horizontal (Ox). Il est soumis à l'action d'une force de puissance constante *P* et à une force de résistance due à l'air dont la norme a pour expression $\beta m v^2$. Il part du repos en x = 0 pour t = 0, dans le sens x > 0.

a) Trouver l'expression de l'abscisse x en fonction de la vitesse v. Montrer que la vitesse tend vers une limite v_{lim} que l'on déterminera en fonction de *P*, β et m.

b) Etudier la limite de x lorsque β tend vers 0.

c) A.N : m = 900 kg ; P = 60 kW ; v_{lim} = 144 $km.h^{-1}$. Quelle est la valeur de β ? Au bout de quelle distance A aura-t-il atteint la vitesse v_{lim} / 2 ?

3) Au tri postal : on étudie un convoyeur à colis présent dans un centre de tri postal. Les colis sont déchargés par un tapis roulant à la vitesse $v_A = 0{,}5\ m.s^{-1}$. Les colis glissent ensuite sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale. Le coefficient de frottement solide entre les colis et le plan incliné est f = 0,4. Les colis sont ensuite pris en charge au niveau du point B par un nouveau tapis roulant. Ce tapis roulant avance à la vitesse $v_B = 0{,}2\ m.s^{-1}$. Le convoyeur fonctionne correctement si les colis arrivent au point B avec la vitesse du deuxième tapis roulant.



Donner l'expression puis la valeur numérique de l'angle α qui permet un bon fonctionnement du convoyeur. (21,7°)

4) Limites de la trajectoire et énergie : une particule fixe, de charge électrique q, est placée à l'origine O d'un axe (Ox) : tout le problème se déroule sur cet axe. On néglige le poids des particules.

a) On lance à une distance a de O une seconde particule, de charge - q et de masse m, dans une direction tendant à l'éloigner de O. Quelle vitesse initiale v_0 doit-on lui communiquer pour qu'elle échappe à l'attraction de la particule fixe en O ?

b) La particule mobile a maintenant la charge + q et sa vitesse initiale est v_0 et est dirigée vers O. Montrer que cette particule ne peut atteindre O ; calculer la distance minimale d'approche b en fonction de v_0.

5) Vibration de la molécule HCl : la formation d'une molécule à partir de deux atomes est due au fait que l'énergie potentielle d'interaction U(r) des ces deux atomes (r désigne la distance inter-atome) présente un minimum. Dans le cas de la molécule HCl, ce potentiel peut être représenté par : (modèle phénoménologique)

$$U(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$$

a et b étant deux paramètres. L'atome de chlore, beaucoup plus lourd que l'atome d'hydrogène, est considéré immobile. On se ramène ainsi à un problème à un corps : l'étude du mouvement de l'atome d'hydrogène dans le champ de force créé par le chlore.

a) Faire l'étude mathématique de U(r).

b) L'atome d'hydrogène est susceptible de vibrer autour de sa position d'équilibre r_e. En effectuant un développement en série de Taylor de la force d'interaction entre les deux atomes au voisinage de r_e :

$$f(r) = f(r_e) + \left(\frac{df}{dr}\right)_{r=r_e}(r-r_e) = \left(\frac{df}{dr}\right)_{r=r_e}(r-r_e) = -\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_{r=r_e}(r-r_e)$$

Montrer que le mouvement de l'atome d'hydrogène est du type oscillateur harmonique ("ressort"). Exprimer la fréquence de vibration ν de la molécule HCl prédite par ce modèle.

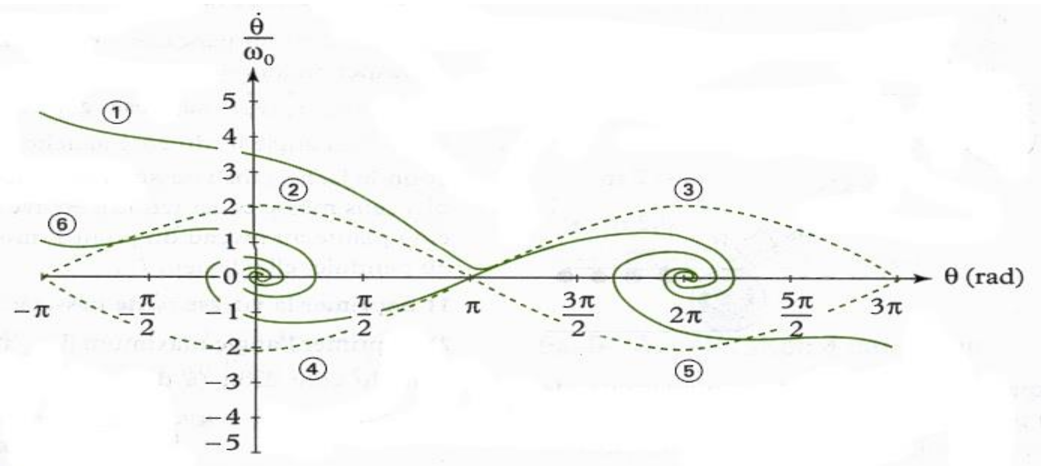
6) Période des oscillations d'un pendule simple et portrait de phase : on considère un pendule simple de longueur ℓ que l'on écarte sans vitesse initiale de l'angle θ_0 par rapport à la verticale descendante.

a) On néglige les frottements dans cette question. Etablir l'équation différentielle du mouvement issue de l'application du principe de conservation de l'énergie mécanique. En déduire la période T_0 des petites oscillations.

b) Le pendule est soumis désormais à des frottements fluides et son équation différentielle devient :

$$\ddot{\theta} + h\,\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

Son portrait de phase est représenté sur la figure ci-dessous, avec $\omega_0 = 1\,rad.s^{-1}$ et $h = 0{,}5\,s^{-1}$.

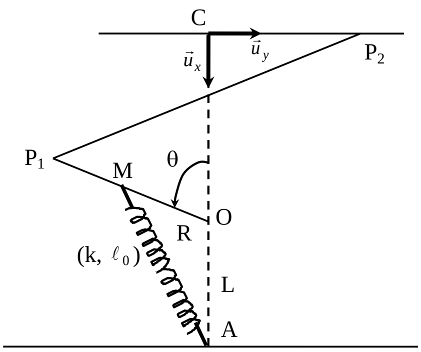


* A quoi voit-on qu'il y a des frottements ?

* Indiquer les positions d'équilibre stables et instables.

* Commenter l'allure des différentes courbes.

7) La porte de garage : une porte de garage P_1P_2 de longueur 2L peut se mettre en mouvement : P_2 se déplace sur l'axe (Cy) sans frottement, P_1 a un mouvement circulaire de rayon L autour de (Oz). On modélise cette porte en s'intéressant uniquement au triangle OAM (une masse m étant placée en M). La tige OM est rigide, de masse négligeable et de rayon R. Un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k, exerce une force de rappel sur le point M (constamment dirigée vers le point A).



a) Exprimer l'énergie potentielle du point matériel M(m) en fonction de l'angle θ.

b) Déterminer les positions d'équilibre du point matériel M(m)et discuter leur stabilité. Conclure.

Données :
$m = 30\,kg$; $R = 10\,cm$; $L = 10R = 1\,m$; $\ell_0 = 12R = 1{,}2\,m$; $k = 50\,000\,N.m^{-1}$

Mécanique : les oscillateurs

1) Oscillateur spatial : une particule M, de masse m, se déplace dans le plan (Oxy) sous l'action d'une force centrale attractive $\vec{f} = -m\omega^2 \overrightarrow{OM}$ (ω est une constante positive). A l'instant initial, la particule est dans la position M_0 de l'axe (Ox) ($OM_0 = r_0$) et est lancée avec le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'axe (Ox).

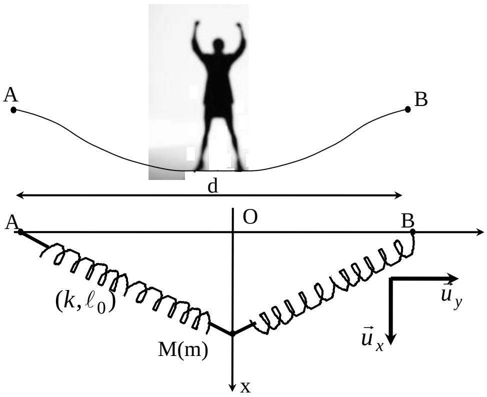
a) Ecrire les équations du mouvement de M en fonction du paramètre α.

b) Quelle est l'énergie totale de la particule en fonction de m, ω, r_0 et v_0 ?

c) Dans le cas particulier où $v_0 = 2r_0\omega$ et $\alpha = 60°$, écrire l'équation cartésienne de la trajectoire.

d) Ecrire les deux conditions pour lesquelles le mouvement de la particule est circulaire uniforme. Dans le cas particulier où $\vec{v}_0$ est parallèle à (Oy), déterminer $\vec{v}_0$ et l'énergie totale de la particule.

2) Trampoline : on considère la modélisation d'un trampoline à l'aide de deux ressorts de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. Un homme, assimilé à un point matériel M de masse m monte sur le trampoline qui s'enfonce ; son mouvement est vertical le long de l'axe (Ox).



Données : $k = 3\,300\ N.m^{-1}$; $\ell_0 = 1\ m$; $m = 80\ kg$; $d = 5\ m$.

Dans les deux premières questions, on suppose que l'homme reste en contact avec le trampoline : il est solidaire du trampoline.

a) Déterminer la distance d'enfoncement $x_{éq}$ à l'équilibre lorsque l'homme monte sur le trampoline. En déduire l'allongement des ressorts.

b) L'oscillateur obtenu est-t-il harmonique ?

c) Déterminer la position à laquelle l'homme peut quitter le trampoline. De quelle distance doit-t-il enfoncer le trampoline pour pouvoir décoller ?

3) Modèle simplifié de la suspension d'une voiture : la suspension d'une automobile est habituellement assurée par quatre systèmes identiques indépendants montés entre le châssis du véhicule et chaque arbre de roue et constitués chacun (figure (a)) :

- d'un ressort métallique hélicoïdal de constante de raideur k et de longueur à vide L_0.
- d'un amortisseur tubulaire à piston à huile fixé parallèlement au ressort, exerçant une force résistante de frottement visqueux de coefficient d'amortissement a, $\vec{f}_v = -a(dL/dt)\vec{u}_z$ où L est la longueur du ressort à l'instant t (et $\vec{u}_z$, vecteur unitaire vertical dirigé vers le haut).

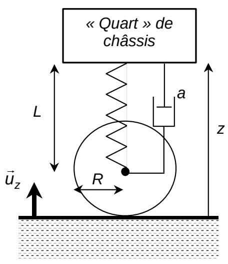


Figure (a)

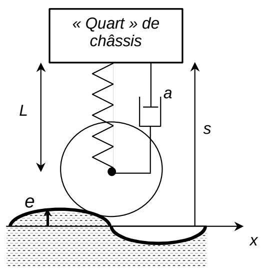


Figure (b)

On suppose que la masse M du châssis est également répartie entre les quatre systèmes. Les pneus de rayon extérieur R sont considérés comme entièrement rigides et n'interviennent pas dans l'étude. Tous les déplacements verticaux seront comptés algébriquement vers le haut.

a) Le véhicule étant immobile sans freins sur un sol horizontal, quelles sont la longueur L_e des ressorts au repos et la garde au sol z_0 du véhicule ?

b) Lors d'un essai dynamique à vide, le châssis est abaissé d'une hauteur h, puis brusquement libéré sans vitesse initiale.

* Etablir l'équation différentielle de la position verticale z(t) du châssis par rapport au sol sous la forme $\ddot{z} + \alpha\dot{z} + \beta z = \delta$, α, β et δ étant des constantes à déterminer.

* On usine l'amortisseur de manière à obtenir un retour à la position d'équilibre finale le plus bref possible et sans oscillations. Quelle doit être la valeur de α en fonction de β ? En déduire celle de a en fonction de M et k.

* Déterminer alors l'expression complète de la solution z(t) en fonction de z_0, h et $\omega_0 = 2\sqrt{k/M}$. Tracer le graphe z(t) (Avec, en unités arbitraires, $z_0 = 1$, $h = z_0/4$ et $\omega_0 = 1$).

c) On effectue de nouveau le même essai en charge nominale, le véhicule contenant quatre masses égales chacune à m également réparties sur les quatre systèmes {ressort-amortisseur}, la garde au sol étant z'_0.

* Etablir la nouvelle équation différentielle vérifiée par z(t) et l'écrire sous la forme $\ddot{z} + \alpha'\dot{z} + \beta' z = \delta'$ en exprimant les nouvelles constantes α', β' et δ' en fonction de a, k, M, m et z'_0.

* Montrer que dans ces conditions, le véhicule a un mouvement pseudo-oscillatoire. Déterminer l'expression de la pseudo-période T autour de la position d'équilibre finale en fonction de k, m et M.

* On souhaite obtenir $T = \pi/3\,\text{s}$ pour $M = 1000\,kg$ et $m = 100\,kg$. En déduire la valeur de k puis de a.

4) Oscillations d'une masse dans un liquide : on considère un ressort de masse négligeable à l'extrémité inférieure duquel est attaché, par l'intermédiaire d'une tige rigide et mince de masse nulle, un cylindre à génératrices verticales et de masse m. L'extrémité supérieure A du ressort est fixe. Le cylindre est immergé dans un liquide de masse volumique μ. On admet que les forces de frottement dans le liquide sont équivalentes à une force du type visqueux, qui peut s'écrire $\vec{f} = -h\vec{v}$, où h est un coefficient constant et $\vec{v}$ la vitesse du cylindre dans le référentiel du laboratoire. A l'équilibre, le cylindre est enfoncé dans le liquide à mi-hauteur.

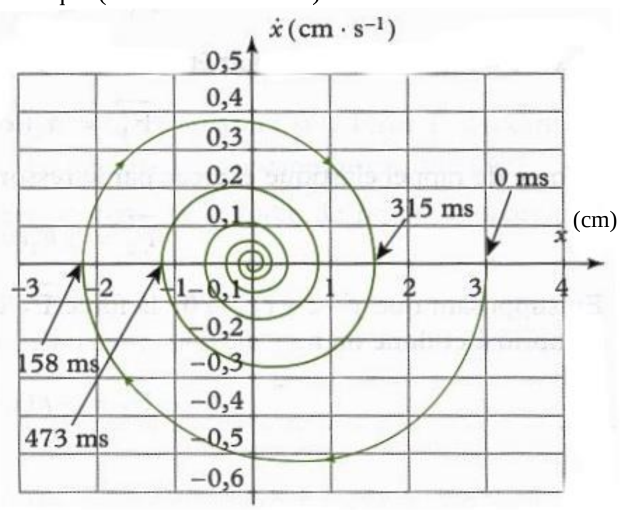
a) Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement du cylindre.

b) A l'instant initial, on écarte le cylindre de 5 cm vers le bas et on le lâche sans vitesse initiale. Déterminer la nature du mouvement du cylindre. Données : longueur à vide du ressort ($\ell_0 = 1\,m$), masse du cylindre ($m = 500\,g$), $g = 9{,}8\,m.s^{-2}$, $k = 15\,N.m^{-1}$, densité du liquide par rapport à l'eau (d = 1,2), surface du cylindre ($s = 2{,}5\,cm^2$), hauteur du cylindre (h = 20 cm) et $f = 1\,N.s.m^{-1}$. (Régime pseudo-périodique, de pseudo-pulsation $\omega = \sqrt{35} \approx 5{,}9\,rad.s^{-1}$).

c) Quelle est la longueur du ressort à la date t = 1 s ? (1,33 m)

d) Quelle valeur faudrait-il donner à f pour que le cylindre se stabilise le plus rapidement possible ? ($f = 6\,N.s.m^{-1}$).

5) Lecture de portrait de phase : on considère le portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti composé d'une masse m = 500 g soumise à une force de rappel élastique (ressort de raideur k) et à une force de frottement fluide ($-\lambda\vec{v}$, $\vec{v}$ étant la vitesse de la masse m et on note x l'écart à la position d'équilibre). L'étude est réalisée dans le référentiel galiléen du laboratoire.



a) Déterminer la nature du régime de l'oscillateur.

b) Déterminer, par lecture graphique :

* La valeur initiale de la position x_0.
* La valeur finale de la position x_f.
* La pseudo période T_a.
* Le décrément logarithmique δ.

c) En déduire la pulsation propre ω_0, le facteur de qualité Q de l'oscillateur, la raideur k du ressort et le coefficient de frottement fluide λ.

($\omega_0 = 20{,}05\,rad.s^{-1}$, $k = 201\,N.m^{-1}$, $Q = 5$, $\lambda = 2\,N.m^{-1}.s$

Mécanique : moment cinétique

1) Météorite : une météorite de masse m possède, très loin de la Terre, une vitesse $\vec{v}_0$ portée par un axe (Δ) situé à une distance b du centre d'inertie T de la Terre. La trajectoire de cette météorite est déviée par le champ gravitationnel terrestre. Elle passe, en un point noté H, à une distance minimale de la Terre (notée d = HT). On supposera que la Terre reste immobile dans un référentiel galiléen. On veut déterminer à partir de quelle valeur de b la météorite s'écrasera sur la Terre (ou se volatilisera dans l'atmosphère terrestre).

a) Faire une figure claire. Citer les quantités conservées.

b) Déterminer le moment cinétique de la météorite par rapport à T, puis exprimer sa norme en fonction de m, b et v_0.

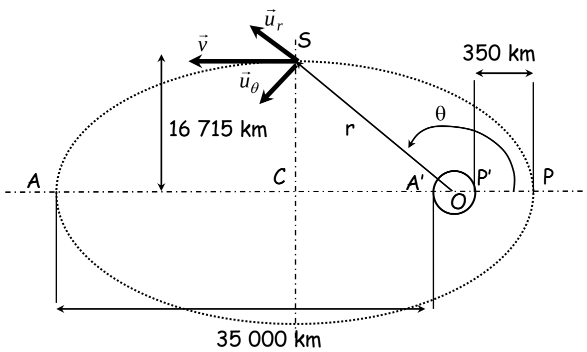
c) Montrer que la vitesse de la météorite en H (v_H) est perpendiculaire à TH.

d) Exprimer la norme du moment cinétique en fonction de m, d et v_H.

e) En explicitant les lois de conservation citées en (a), établir l'expression de b en fonction de d et des données de l'exercice, à savoir v_0, m, M (masse de la Terre) et G (constante de la gravitation universelle).

f) Les météorites les plus souvent observées ont une vitesse v_0 comprises entre 10 et 50 $km.s^{-1}$. Pour $v_0 = 30\ km.s^{-1}$, calculer la valeur de b en dessous de laquelle la météorite rentrera en contact avec l'atmosphère. On donne $G = 7.10^{-11}$ SI et $M = 6.10^{24}$ kg (on néglige l'épaisseur de l'atmosphère terrestre).

2) Un satellite : une satellite, assimilé à son centre d'inertie, de masse m = 1 tonne, décrit une trajectoire elliptique autour de la Terre. Ce satellite n'est soumis qu'à la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}$ dirigée vers le centre O de la Terre. Le référentiel géocentrique (R_g) est supposé galiléen. A l'instant représenté (au point S), la vitesse du satellite dans ce référentiel est $v = 14\,650\ km.h^{-1}$. Le rayon terrestre est $R_T = 6\,400\ km$.



a) Calculer la valeur du moment cinétique du satellite en O dans le référentiel (R_g) à l'instant considéré.

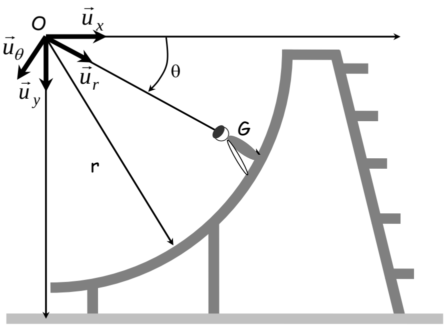
b) En utilisant le théorème du moment cinétique, donner la valeur de la vitesse du satellite :

* à son apogée A (point de la trajectoire le plus éloigné de la Terre)

* à son périgée P (point de la trajectoire le plus proche de la Terre)

3) L'atome de Bohr : les niveaux d'énergie mécanique de l'atome d'hydrogène sont quantifiés ($E_n = -E_0 / n^2$, avec n nombre quantique principal et $E_0 = 13{,}6\ eV$). On suppose que l'électron tourne autour du proton sur une trajectoire circulaire de rayon r_n. Le proton est immobile dans le référentiel du laboratoire. Montrer que le moment cinétique de l'électron par rapport au centre O du noyau est également quantifié ($\sigma_n = n\sigma_0$).

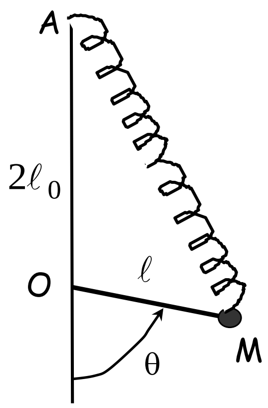
4) Le toboggan : un enfant assimilé à un point matériel G de masse m = 40 kg glisse sur un toboggan décrivant une trajectoire circulaire de rayon r = 2,5 m depuis la position $\theta = \theta_0 = 15°$ où il possède une vitesse nulle jusqu'à la position $\theta = 90°$ où il quitte le toboggan. On néglige tous les frottements.



a) Etablir l'équation différentielle du mouvement de l'enfant en utilisant le théorème du moment cinétique.

b) En déduire l'expression de la vitesse v de l'enfant en fonction de θ. Calculer la vitesse maximale atteinte par l'enfant. Commenter cette valeur.

5) Détermination de la constante de raideur d'un ressort : une masse m = 1 kg est suspendue à un ressort de raideur k fixé en A. La tige OM rigide de masse négligeable est articulée en O et M et agit sans frottements de sorte que l'action de la tige sur la masse m est dirigée dans l'axe OM de la tige. Le ressort a une longueur $2\ell_0$ lorsqu'il n'est soumis à aucune force. D'autre part, $AO = 2\ell_0$ *et* $OM = \ell_0 = 1\,m$. On suppose que le système est en équilibre pour un angle θ = 60° et on cherche à déterminer la constante de raideur k du ressort.



a) Trouver une solution graphique à ce problème (faire un schéma à l'échelle 1 cm = 2 N et 2,5 cm = 1 m.

b) On rappelle les relations valables dans un triangle ABC :

$$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \;\; ; \;\; \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} \wedge CB$$

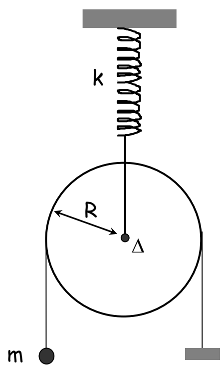
Déterminer la longueur du ressort AM ainsi que $\sin(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MA})$ en fonction de ℓ_0 *et* θ.

c) Calculer la valeur de la constante de raideur k du ressort qui assure l'équilibre.

* en faisant le bilan des forces.

* en utilisant le théorème des moments.

6) Poulie pendue à un ressort : la liaison de la poulie sur son axe est parfaite. Le fil est sans masse, inextensible et ne dérape pas sur la poulie. Le ressort a une longueur à vide ℓ_0 et une raideur k. La petite masse m a un mouvement vertical. La poulie a une masse nulle.



Trouver la période des oscillations effectuées par la masse m.

Mécanique : gravitation

Unité astronomique : l'unité astronomique est la longueur du demi-grand axe de l'ellipse trajectoire de la Terre par rapport au Soleil : 1 ua = $1{,}496.10^{11}$ m

1) Satellite géostationnaire : calculer l'altitude d'un satellite géostationnaire. Ce satellite ayant pour masse m =1 t, on se propose d'augmenter son altitude de 50 km. Quelle énergie faut-il dépenser ($5{,}6.10^{6}$ J).

2) Satellite d'observation : un satellite d'observation a une orbite circulaire très basse, ce qui permet de discerner les détails d'environ 1 m sur Terre.

a) Calculer la vitesse orbitale et la période d'un tel satellite pour une altitude de h=180 km.

b) Par suite des collisions avec les molécules d'air des couches supérieures de l'atmosphère, le satellite est soumis à une force de frottement opposée à la vitesse **v** et de norme $\beta m v^2 / h$, h étant l'altitude et $\beta = 10^{-8} SI$. Comment varie l'énergie mécanique du satellite ? Montrer que la vitesse du satellite, ainsi freiné, augmente.

c) En déduire, en fonction de h, l'expression approchée de la variation d'altitude Δh du satellite après une révolution. Calculer Δh.

3) Les trous noirs : un trou noir est un corps situé dans l'Univers d'où ni lumière ni matière ne peuvent s'échapper. Cet exercice présente la description classique que pouvait avoir le physicien Laplace des trous noirs.

1) Etoile de Laplace : en 1798, dans « Exposition du système du Monde », Laplace imagine un astre (à répartition de masse sphérique) de même masse volumique moyenne que la Terre (notée ρ_T) et de rayon égal à 250 fois celui du Soleil. Quelle est la vitesse de libération v_{lib} correspondante à la surface de l'astre ?

2) Rayon de Schwarzschild : on admet qu'un corps de masse M agit comme un trou noir si son rayon R est inférieur à un certain rayon critique R_C appelé rayon de Schwarzschild, défini par une vitesse de libération à la surface de ce corps égale à la vitesse de la lumière dans le vide, soit v_{lib} = c.

a) Exprimer R_C en fonction de G, M et c. Calculer R_C dans le cas du Soleil puis de la Terre.

b) Exprimer la force gravitationnelle F_{TN} exercée par un trou noir sur un objet P en fonction de la masse m de l'objet, de sa distance r au centre du trou noir, du rayon R_C du trou noir et de c. Calculer F_{TN} pour R_C = 8,9 mm, m = 3 kg et r = 6 400 km.

c) Calculer l'accélération de la pesanteur g_{TN} au niveau de la sphère de Schwarzschild en fonction de R_C et c. Application numérique : calculer g_{TN} pour R_C = 8,9 mm.

d) On appelle « sphère des événements » la sphère de rayon R_C. Justifier qualitativement le choix de ce terme.

3) Application au cœur de notre galaxie : des astronomes ont observé un petit objet massif au centre de notre galaxie, autour duquel un anneau de matière est en orbite circulaire. L'anneau a un diamètre de 15 al (al = année de lumière, distance parcourue par la lumière dans le vide en une année) et sa vitesse orbitale est voisine de v = 200 $km.s^{-1}$.

a) En supposant la masse de l'objet massif très supérieure à celle de l'anneau, déterminer la masse M_{OM} de cet objet massif, en kg puis en unité de masse solaire.

b) La plupart des astronomes pensent actuellement que cet objet massif est un trou noir. Calculer son rayon de Schwarzschild et comparer la valeur numérique obtenue à la distance moyenne d entre la Terre et le Soleil.

Données : d = $1{,}5.10^{11}$ m (distance Terre-Soleil), $M_T = 6.10^{24} kg$ et $R_T = 6\,400 km$ (masse et rayon terrestres), $M_S = 2.10^{30} kg$ et $R_S = 7.10^{8} m$ (masse et rayon du Soleil), $c = 3.10^{8} m.s^{-1}$ (vitesse de la lumière dans le vide) et $G = 6{,}67.10^{-11} SI$ (constante de la gravitation universelle).

4) Orbite de transfert : 1) on désire placer un satellite de masse m sur une orbite circulaire de rayon r et de centre O.

a) Le satellite ayant atteint, au cours de la phase de lancement, un point M distant de r du centre O de la Terre, quelles caractéristiques doit-on donner à son vecteur vitesse pour le placer en ce point en orbite circulaire ?

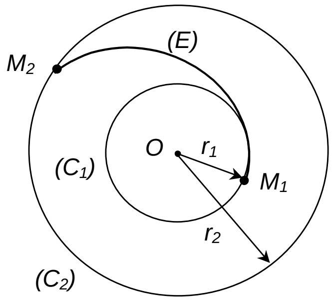
b) Etablir l'expression de la période T du satellite en fonction du rayon de l'orbite r.

c) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique E_m du satellite en fonction de r.

d) Soit λ la latitude de la base de lancement et Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles. Quelle énergie faut-il communiquer au satellite pour le placer, depuis le sol, sur son orbite circulaire ? Quel est l'intérêt d'une base équatoriale ?

e) Application numérique : calculer la vitesse du satellite ainsi que la période de son mouvement pour r = 6 600 km.

2) Etude d'une orbite de transfert : on désire faire passer le satellite précédent de l'orbite circulaire (C_1) de rayon r_1 à l'orbite circulaire (C_2) de rayon $r_2 > r_1$. Pour y parvenir, on lui fait emprunter une orbite de transfert elliptique (E), tangente en son périgée M_1 à l'orbite (C_1) et en son apogée à l'orbite (C_2). Les passages en M_1 de l'orbite (C_1) à l'orbite (E) et en M_2 de l'orbite (E) à l'orbite (C_2) sont effectués en fournissant au satellite, à l'aide de propulseurs, deux impulsions permettant d'augmenter respectivement son énergie de ΔE_1 et ΔE_2.



a) Démontrer que la relation donnant E_m, établie avec r pour des trajectoires circulaires, reste formellement valable pour des trajectoires elliptiques à condition de remplacer r par le demi-grand axe a de l'ellipse trajectoire.

b) Quelles sont les énergies mécaniques respectives du satellite sur les orbites (C_1), (C_2) et (E) en fonction de G, M_T, m, r_1 et r_2 ?

c) Exprimer ΔE_1 et ΔE_2 en fonction des mêmes paramètres. Calculer ΔE_1 et ΔE_2 avec m = 100 kg, r_1 = 6 600 km et r_2 = 42 200 km.

d) En admettant que la relation entre la période T et le demi-grand axe a est formellement identique à celle trouvée à la question (1-b) à condition de remplacer r par a, calculer la durée τ du transfert de l'orbite (C_1) à l'orbite (C_2).

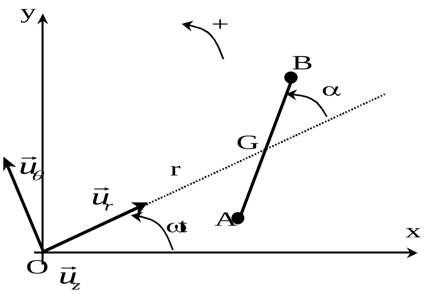
Mécanique du solide

1) Oscillations d'un satellite terrestre sur sa trajectoire : la Terre, de centre O, exerce sur tout point matériel de masse m une force attractive :

$$\vec{F} = -Km\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3} \qquad (avec : K = 4.10^{-14}\ m.s^{-2})$$

Dans le référentiel géocentrique (Oxyz) galiléen, on considère un satellite dont le centre d'inertie G décrit une trajectoire circulaire de centre O et de rayon r autour de la Terre, à la vitesse angulaire constante ω, dans le plan (Oxy).

Le satellite est constitué de deux masses ponctuelles identiques A et B reliées entre elles par une tige rigide de masse négligeable (AB = 2b). On s'intéresse à la rotation de AB autour de G dans le plan (Oxy), définie par l'angle $\alpha = (\vec{u}_r, \overrightarrow{GB})$.



a) Pour quelles valeurs de α le moment en G des forces de gravitation exercées sur le satellite est-il nul ?

b) En effectuant un DVL en b / r, montrer que le terme principal du moment vaut :

$$\vec{M}_G = -\frac{3Km}{b}\left(\frac{b}{r}\right)^3 \sin(2\alpha)\,\vec{u}_z$$

c) Calculer la période des oscillations du satellite autour de sa position d'équilibre stable.

Données : r = 7 000 km ; b = 5 m ; m = 4 kg.

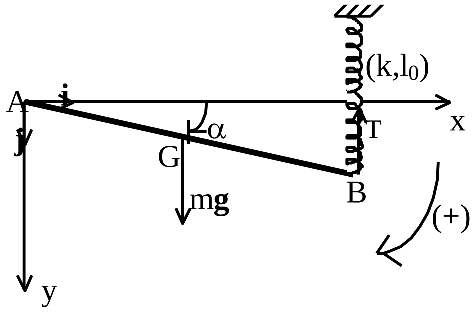
2) Mouvement d'une chaîne : une chaîne de longueur ℓ et de masse linéique constante λ peut glisser sans frottement sur le rebord d'une table. Initialement, une extrémité de la chaîne, de longueur y_0, est verticale. L'autre extrémité est retenue par un expérimentateur. Celui-ci lâche la chaîne sans vitesse initiale. Déterminer le temps τ mis par la chaîne pour quitter la table. A.N : g=10 m.s^{-2} ; l=20 cm ; y_0=1 cm (Réponses : $ch\omega\tau = \frac{l}{y_0} ; \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$)

3) Barre tournant autour d'un axe fixe : une barre AB, de longueur 2l et de masse m, est mobile autour d'un axe horizontal passant par A. On abandonne, sans vitesse initiale, la barre de sa position d'équilibre verticale, instable. On note α l'angle entre la tige et la verticale. La liaison axe-barre est sans frottement. La barre est astreinte à se déplacer dans un plan.

a) En utilisant le théorème du moment cinétique, déterminer les expressions de $\dot{\alpha}$ et de $\ddot{\alpha}$ en fonction de α.

b) Calculer, en fonction de α, les coordonnées de la réaction exercée par l'axe sur la barre.

4) Mouvement d'une barre autour d'un axe fixe : une barre AB, de longueur 2l et de masse m, est mobile autour d'un axe Az horizontal. Le point B est fixé à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. L'autre extrémité du ressort est fixe. Dans sa position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical.



La barre est écartée légèrement de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale.

Déterminer la période des petites oscillations de la barre. On considère que le point B se déplace verticalement.

5) Oscillations de deux barres :

4. Oscillations d'un angle droit

On considère le système de deux barres identiques représenté sur la figure 3. L'extrémité d'une barre est accrochée à un ressort de raideur k. La liaison pivot en O est parfaite. La position d'équilibre stable du système correspond au cas où la seconde barre est verticale.

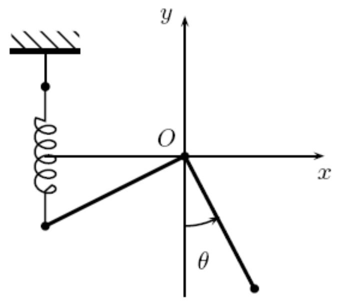


FIG. 3 – Petites oscillations d'un angle droit

1. Déterminer l'allongement du ressort lorsque le système est à l'équilibre.
2. Étudier les oscillations de petit angle θ autour de la position d'équilibre.
3. Dessiner le portrait de phase de cet oscillateur. Discuter.

Réponses : $\Delta l_{\text{éq}} = \frac{mg}{2k}$; $\ddot{\theta} + \frac{1}{3}[\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}]\theta = 0$; ellipse.

6) La tartine beurrée :

Un toast de longueur 2a est posé sur une table horizontalement, son centre d'inertie décalé de la table d'une distance δ. Coefficient de frottement f; $J_{Gz} = ma^2/3$, $\eta = \delta/a$

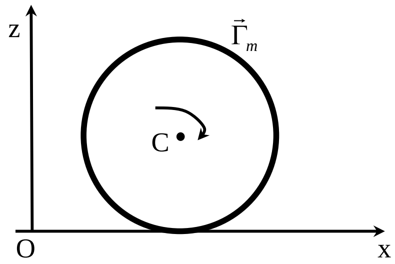
a) Au début de la chute il n'y a pas glissement (le justifier), montrer qu'alors :

$$(d\theta/dt)^2 = (6g/a)(\eta/(1+3\eta^2))\sin\theta$$

b)En supposant que le toast quitte la table sans avoir glissé pour $\theta = \pi/2$ avec $\delta \ll a$ déterminer le mouvement ultérieur du toast. Quel est l'angle limite pour lequel en moins d'un tour, il atterrisse coté pain? Calculer alors le temps de chute du toast.

On donne : h=75cm, 2a = 10cm, $g = 9{,}8 m/s^2$

7) Démarrage d'une automobile : le coefficient de frottement de la roue sur le sol est f. La roue a une masse m, un rayon R et un moment d'inertie J par rapport à son axe. On lui applique un couple moteur $\vec{\Gamma}_m = \Gamma_m \vec{u}_y$.



Quelle est la condition sur $\vec{\Gamma}_m$ pour qu'il y ait roulement sans glissement ?

8) Oscillations amorties par frottement fluide (CCP) :

Un cube de masse M peut glisser sur un plan horizontal avec un coefficient de frottement μ. Il est lié à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et constante de raideur k, dont une extrémité est fixe (Fig. 25). À l'instant initial, le ressort a une longueur égale à $\ell_0 + A$ (avec A positif) et la masse n'a pas de vitesse.

On confondra les coefficients de frottement statique et dynamique et on n'envisagera pas d'autre mouvement pour le cube que la translation.

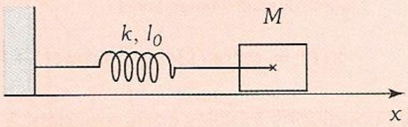


Figure 25

a) À quelle condition la masse se met-elle en mouvement ?

b) Dans le cas où un mouvement a lieu, le décrire en donnant sa loi horaire $x(t)$ jusqu'au prochain arrêt du cube.

c) À quelle condition le cube se met-il à nouveau en mouvement, dans le sens contraire, après ce premier arrêt ?

d) Lorsque l'amplitude initiale A est suffisamment élevée pour qu'un grand nombre d'oscillations aient lieu, quelle est l'allure de l'enveloppe du graphe de $x(t)$? Que peut-on dire de la variation au cours du temps de l'amplitude des oscillations ?

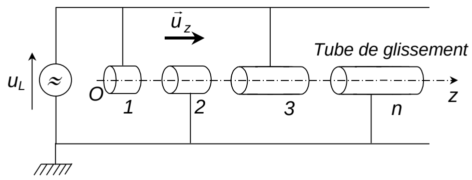
e) Comparer au résultat obtenu pour un frottement fluide.

Mouvements dans des champs électriques et magnétiques

1) Accélérateurs linéaires de particules :

Tous les accélérateurs de particules ont les mêmes composants de base : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions. Dans les accélérateurs circulaires (cyclotrons et synchrotrons), les particules sont guidées par des champs magnétiques tout au long d'une trajectoire circulaire qui les fait passer de nombreuses fois à travers le même champ électrique accélérateur. Dans les accélérateurs linéaires, tels que celui étudié dans cet exercice, les particules effectuent un trajet en ligne droite passant à travers une succession de tubes où règnent des champs électriques qui augmentent leur énergie au fur et à mesure qu'elles avancent.

Des particules chargées (des protons par exemple, de charge $e = 1{,}6.10^{-19}$ C et de masse $m_p = 1{,}67.10^{-27}$ kg) passent dans une série de tubes métalliques qui présentent la symétrie de révolution et de même axe (appelés « tubes de glissement ») et connectés à une source de tension alternative (voir figure) $u_L = U_L\sin(2\pi\nu\, t)$. Cette tension crée un champ électrique accélérateur axial dans les intervalles entre les tubes. On considère que le champ est nul à l'intérieur de ces tubes métalliques. Les protons sont injectés en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_z$ parallèle à l'axe de l'accélérateur.



On considère les protons qui pénètrent en O suivant l'axe (Oz) des tubes à l'instant t = 0, c'est-à-dire lorsque $u_L = 0$. On veut que ces protons soient accélérés par la tension maximale U_L toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. On considérera que la distance entre deux tubes est négligeable par rapport à la longueur des tubes.

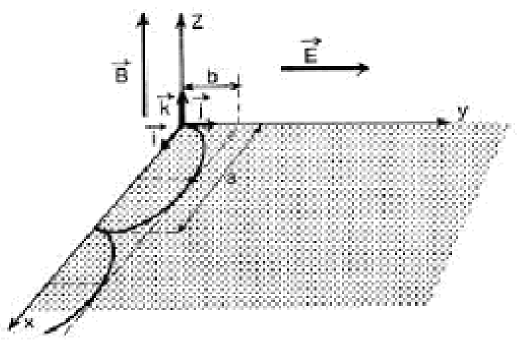
➢ a. Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins ? Sachant que les protons sont pré-accélérés sous une tension continue U_0, exprimer leur énergie cinétique $E_{c,n}$ à la sortie du énième tube en fonction de U_0 et U_L. Faire l'application numérique avec U_0 = 140 kV, U_L = 100 kV et n = 20. Les protons sont-ils relativistes ?

➢ b. Quel doit être le temps mis par ces protons pour traverser le 1er tube, le 2ème tube et le énième tube, afin que soient réalisées les conditions d'accélération précédente ? Exprimer les longueurs L_1, L_2, L_n, respectivement des premier, deuxième et énième tubes en fonction de U_0, U_L, ν, e et m_p. Calculer ces trois longueurs pour ν = 25 MHz, n = 20, U_0 = 140 kV et U_L = 100 kV.

2) Particule dans un champ EM :

Dans le référentiel (R) de base ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), une particule M, de masse m et de charge q, se trouve à la date t = 0 en O, animée d'une vitesse nulle, dans une région où règnent les champs uniformes et indépendants du temps :

$\vec{E} = E\,\vec{j}$ et $\vec{B} = B\,\vec{k}$.



1. Etudier le mouvement de M.
2. Calculer la vitesse moyenne de la particule suivant Ox, appelée vitesse de dérive $\overrightarrow{v_D}$.
3. Interpréter la trajectoire dans Oxyz en écrivant la relation fondamentale de la dynamique du point matériel dans le référentiel (R') en translation rectiligne et uniforme de vitesse $\overrightarrow{v_D}$ par rapport à (R).