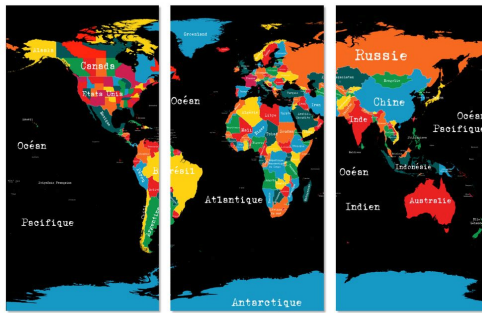


Transferts thermiques



O Granier
(PC*, Lycée J Decour, Paris)
(olivier.granier.free.fr)

Le cours

I) Conduction (diffusion) thermique :

1) Loi de Fourier et vecteur densité de courant de chaleur :

La présence, dans un milieu matériel sans mouvement macroscopique, d'une inhomogénéité de température fait apparaître un transfert thermique par conduction qui possède les propriétés suivantes :

- Le transfert a lieu des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides
- Il est proportionnel à la surface à travers laquelle on évalue la puissance diffusée ainsi qu'à la durée du transfert
- Il augmente de manière linéaire avec le gradient de la température

Joseph Fourier (1768 – 1830) a proposé une loi phénoménologique décrivant ce mode de transfert thermique par conduction :

On considère un corps dont la température dépend de x uniquement et du temps.

La quantité d'énergie δQ , qui traverse par conduction thermique une surface élémentaire dS perpendiculaire à l'axe (Ox) pendant une durée dt dans le sens choisi pour l'axe (Ox) est :

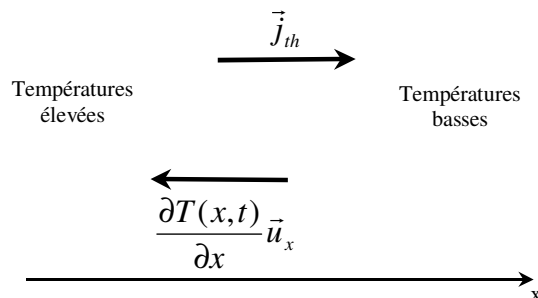
$$\delta Q = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} dS dt$$

où λ (notée parfois K) est une constante positive caractéristique du matériau appelée conductivité thermique (elle s'exprime en $W.m^{-1}.K^{-1}$).

On définit le vecteur densité de courant thermique : (par analogie avec le vecteur densité de courant électrique)

$$j_{th} = \frac{\delta Q}{dS dt} = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \quad ; \quad \vec{j}_{th} = j_{th} \vec{u}_x = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \vec{u}_x = -\lambda \overrightarrow{\text{grad } T(x,t)}$$

Cette dernière expression, faisant intervenir le gradient de la température, constitue la loi de Fourier.



Elle se généralise à des distributions de températures dépendant des trois variables d'espace :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(x, y, z, t) = -\lambda \left(\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \vec{u}_z \right)$$

* Un peu de vocabulaire : (flux thermique)

$$\frac{\delta Q}{dt} = j_{th} \cdot dS = \vec{j}_{th} \cdot dS \vec{u}_x$$

est le flux thermique noté Φ (c'est une puissance) ; il s'interprète comme le flux de $\vec{j}_{th}$ à travers la surface dS orientée (équivalent de l'intensité électrique).

* Quelques conductivités thermiques : (λ en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$)

- Gaz (λ de 0,006 à 0,18) : mauvais conducteurs
- Liquides non métalliques (λ de 0,1 à 1) : conducteurs moyens (eau)
- Solides métalliques (λ de 10 à 400) : excellents conducteurs (cuivre, acier)
- Matériaux non métalliques (λ de 0,004 à 4) : conducteurs moyens (verre, béton, bois) ou mauvais conducteurs (laine de verre, polystyrène expansé)

2) Bilan local d'énergie à une dimension : (sans ou avec sources)

On considère un corps homogène (en fait, le plus souvent liquide ou solide) de masse volumique ρ , de conductivité thermique λ et de capacité thermique c . Ces grandeurs sont supposées constantes.

Dans un 1^{er} temps, on suppose qu'il n'y a pas au sein du milieu de sources susceptibles de fournir de la chaleur localement. On reste enfin à une dimension selon (Ox).

On applique le 1^{er} principe de la thermodynamique à un petit volume $dSdx$:

$$\begin{aligned} dU &= \delta Q & ; & & U &= \rho dSdx c T(x, t) \\ \rho dSdx c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} dt &= j_{th}(x, t) dSdt - j_{th}(x + dx, t) dSdt \\ \rho dSdx c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} dt &= - \frac{\partial j_{th}(x, t)}{\partial x} dSdt dx \end{aligned}$$

Finalement : (équation de conservation de l'énergie sans sources)

$$\rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial j_{th}(x, t)}{\partial x}$$

On suppose maintenant la présence de sources de chaleur au sein du milieu ; on note $p_s(x, t)$ la puissance volumique dégagée (de manière algébrique) par ces sources.

Exemple (effet Joule) : si le matériau est parcouru par un courant électrique, le volume $dSdx$, de résistance électrique dR , traversé par le courant électrique $di = j dS$, reçoit, par effet Joule, pendant la durée dt , l'énergie :

$$\delta Q = dR (di)^2 dt = \frac{1}{\sigma} \frac{dx}{dS} j^2 (dS)^2 dt = \frac{1}{\sigma} j^2 dx dS dt$$

D'où la puissance volumique due à l'effet Joule :

$$p_s = \frac{j^2}{\sigma}$$

Le bilan énergétique devient :

$$\rho dS dx c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} dt = - \frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} dS dt dx + p_s(x,t) dS dx dt$$

Soit :

$$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} + p_s(x,t)$$

3) Equation de la chaleur ou de la diffusion thermique à une dimension (sans ou avec sources) :

En utilisant la loi de Fourier :

* Sans sources :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

* Avec sources :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda} p_s(x,t) = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

Il n'existe de solutions analytiques de cette équation que dans des cas particuliers que l'on étudiera dans les paragraphes suivants.

La solution de cette équation aux dérivées partielles dépend de constantes d'intégration qui sont déterminées par les conditions aux limites spatiales et temporelles. Si ces conditions traduisent toutes les données significatives du problème physique, la solution obtenue est unique et c'est donc la bonne !

Remarque (âge de la Terre mesuré par Lord Kelvin) :

Au milieu du XIX^{ème} siècle, Lord Kelvin a imaginé que la Terre a été formée à une température élevée uniforme et que le flux thermique qui s'échappe de sa surface correspond à son refroidissement progressif depuis sa formation. Mesurant la valeur de ce flux en surface et estimant, par ailleurs, la température de la matière au début de la formation, il a modélisé ce refroidissement par diffusion thermique pour en déduire l'âge de la Terre. Il a trouvé comme ordre de grandeur 50 millions d'années. Pour quelle raison cette estimation est-elle inexacte ?

L'âge de la Terre est estimé actuellement à 4,5 milliards d'années, soit environ 100 fois plus que l'estimation de Lord Kelvin en 1866. En fait son calcul, par méconnaissance à l'époque, omettait le terme de sources, à savoir la radioactivité naturelle découverte par Becquerel en 1896. Le flux thermique qui s'échappe de la Terre est en réalité dû à l'énergie libérée par la désintégration radioactive de certains éléments et non au refroidissement de la Terre.

4) Equation de la chaleur à trois dimensions :

Elle se généralise à des distributions de températures dépendant des trois variables d'espace :

$$\vec{j}_{th} = j_{th,x}(x, y, z, t) \vec{u}_x + j_{th,y}(x, y, z, t) \vec{u}_y + j_{th,z}(x, y, z, t) \vec{u}_z$$
$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(x, y, z, t) = -\lambda \left(\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \vec{u}_z \right)$$
$$\rho c \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = - \left(\frac{\partial j_{th,x}(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial j_{th,y}(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial j_{th,z}(x, y, z, t)}{\partial z} \right) + p_s(x, y, z, t)$$

Soit, en utilisant la définition de la divergence d'un vecteur :

$$\rho c \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}_{th}) + p_s(x, y, z, t)$$

Puis, en utilisant la loi de Fourier :

$$\rho c \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) + p_s(x, y, z, t)$$

Soit, en définissant le laplacien d'une grandeur scalaire :

$$\rho c \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = \lambda \Delta T(x, y, z, t) + p_s(x, y, z, t)$$

Complément : (Diffusivité thermique)

En l'absence de terme de création locale, l'équation de la chaleur prend la forme d'une équation de diffusion :

$$D \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

où $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ est la diffusivité thermique. Ce coefficient se mesure en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, comme tout

coefficient de diffusion. On peut l'interpréter comme $D \approx L^2 / T$ où L est une évaluation de la dimension caractéristique du système dans le sens de la diffusion et T l'ordre de grandeur de la durée du phénomène de diffusion.

Le coefficient D est de l'ordre de quelques $\text{mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ pour de nombreux systèmes : avec une épaisseur de l'ordre de quelques cm, la plupart des systèmes thermodynamiques sont caractérisés par des durées caractéristiques des transferts thermiques de l'ordre de plusieurs minutes.

Les transferts thermiques sont en général des phénomènes lents, caractérisés par des durées de l'ordre de $T \approx L^2 / D$. On peut donc souvent considérer une évolution rapide comme adiabatique.

II) Transfert thermique convectif (convection) :

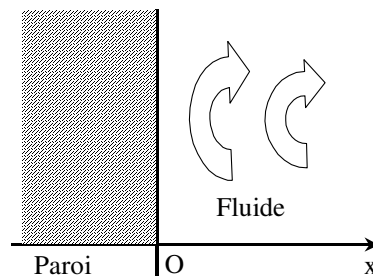
1) Transfert conducto-convectif :

Il est d'observation courante que, pour refroidir un liquide chaud contenu dans un flacon, on agite le flacon. Ainsi font les parents avant de présenter le biberon à leur bébé.

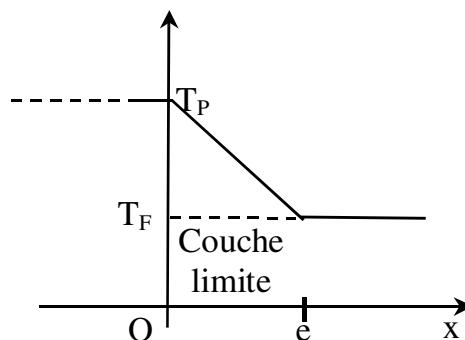
Le transfert thermique à travers les parois du flacon s'effectue par conduction thermique diffusive. L'agitation du liquide provoque en son sein des mouvements convectifs qui favorisent la conduction thermique à travers les parois.

Un autre exemple est donné par l'échange conducto-convectif entre l'air d'une pièce d'habitation et la surface des radiateurs utiles pour chauffer la pièce.

Pour modéliser ces exemples, on considère un modèle unidirectionnel en régime stationnaire, tel que représenté sur la figure suivante :



Le fluide est animé de mouvements de convection qui provoquent une homogénéisation de la température. On considère que ce brassage est suffisamment efficace pour que la température du fluide soit constante spatialement et égale à T_F . Dans la paroi, en revanche, le transfert est conductif et dirigé selon l'axe (Ox). On y observe donc un gradient de température.



La température de la paroi T_P est différente de la température du fluide ; il existe une couche limite de faible épaisseur e (de l'ordre de qq mm) dans laquelle le fluide est pratiquement immobile et où le transfert de chaleur se fait de manière conductive.

2) La loi de Newton :

Les transferts thermiques entre un corps et le milieu extérieur suivent la loi de Newton si la densité de flux thermique sortant algébriquement à travers la surface du matériau est proportionnelle à l'écart de température entre celle de la surface du matériau et celle de l'extérieur.

Avec les notations du paragraphe précédent :

$$j_{\text{conv}} = h(T_P - T_F)$$

h est appelé le coefficient de transfert thermique de surface.

On peut montrer que $h = \frac{\lambda_F}{e}$, où λ_F est la conductivité thermique du fluide et e l'épaisseur de la couche limite.

Dans le cas d'une convection forcée, la couche limite est moins épaisse et donc h augmente : le transfert conducto-convectif est alors favorisé.

Des applications classiques

- **Résistance thermique : (régime permanent dans une tige cylindrique)**

On souhaite déterminer, en régime permanent, la température dans une tige homogène cylindrique de section S , de longueur L et dont les extrémités sont maintenues aux températures T_1 et $T_2 < T_1$. On suppose que la surface latérale est isolée.

L'équation de la chaleur devient simplement :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{soit} \quad T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

Le flux thermique qui traverse la tige est :

$$\Phi = j_{th} S = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} S = cste$$

Par analogie avec la résistance électrique, on définit la résistance thermique de la tige :

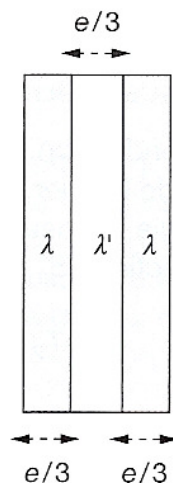
$$T_1 - T_2 = R_{th} \Phi \quad \text{soit} \quad R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{S}$$

On définit également la conductance thermique $G_{th} = 1/R_{th}$.

Exemple : (isolation des murs d'une maison)

* parpaings, polystyrène, placoplâtre et papier-peints : résistances thermiques en série

* idem mais avec une fenêtre en plus : résistances thermiques en parallèle



Prenons le cas d'un double vitrage associant une vitre de surface S , d'épaisseur $e/3$ et de conductivité λ , une épaisseur de gaz peu dense de conductivité λ' et une deuxième vitre identique à la première.

Il s'agit de l'association en série de trois résistances thermiques. La résistance thermique équivalente est :

$$R_{th} = \frac{e/3}{\lambda S} + \frac{e/3}{\lambda' S} + \frac{e/3}{\lambda S} = \frac{e}{\lambda S} \left(\frac{2}{3} + \frac{\lambda}{3\lambda'} \right)$$

où le premier terme $e/\lambda S$ est la résistance thermique d'une vitre simple de même encombrement. Avec $\lambda' \approx \lambda/100$, on voit que le double vitrage permet de multiplier la résistance thermique par $102/3 = 34$ et donc de diviser par 34 les pertes à travers la vitre.

• Méthode de séparation des variables :

On considère la diffusion thermique dans un solide suivant la direction (Ox) ; on suppose qu'il n'y a ni production, ni absorption de chaleur dans le milieu. On appelle $T(x,t)$ la température au sein du solide et K le coefficient thermique.

Pour certaines conditions initiales (que l'on suppose réalisées ici), il est possible de chercher une solution de l'équation de la chaleur de la forme (méthode de séparation des variables) :

$$T(x,t) = T_0 + f(x)g(t)$$

où T_0 désigne une constante, $f(x)$ une fonction de x uniquement et $g(t)$ une fonction du temps seulement.

a) Déterminer l'expression générale des fonctions $f(x)$ et $g(t)$.

b) On suppose qu'à $t = 0$, $T(x,0) = T_1 + T_2 \sin(px)$ (T_1 , T_2 et p désignant des constantes). Montrer que la solution trouvée ci-dessus convient et déterminer complètement cette solution.

• Onde thermique (température d'une cave) :

Le sous-sol est considéré comme un milieu semi-infini, homogène, de conductivité thermique K , de masse volumique ρ , de capacité thermique massique c , situé dans le demi-espace $x > 0$. On suppose que la température de la surface du sol (plan $x = 0$) est soumise à des variations sinusoïdales :

$$T_s(t) = T_0 + \theta_0 \cos \omega t$$

a) Déterminer la température $T(x,t)$ à la profondeur x (se placer en notation complexe) en régime permanent.

b) Exprimer la vitesse v de l'onde thermique ainsi obtenue.

c) On considère des variations journalières de la température, la température au niveau du sol variant entre 0°C la nuit et 16°C le jour. A partir de quelle profondeur les variations de température sont-elles inférieures à 1°C ? Calculer la vitesse v . On donne :

$$a = \frac{K}{\rho c} = 6.10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

On considère des variations annuelles de température, la température variant de -10°C à 26°C . Répondre aux mêmes questions.

a) On trouve : $T(x,t) = T_0 + \theta_0 e^{-\frac{x}{x_0}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{x_0}\right)$, avec $x_0 = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$.

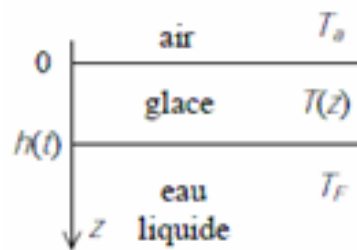
b) $v = x_0 \omega = \sqrt{2a\omega}$.

c) 1^{er} cas : $x = 26,7$ cm et $v = 80,7$ cm.j⁻¹.

2^{ème} cas : $x = 7,1$ m et $v = 4,2$ cm.j⁻¹ : ainsi, la température d'une cave enterrée paraît fraîche l'été et douce l'hiver. En effet, à une profondeur de 4,2 m, l'évolution de la température reflète celle de l'extérieur avec un retard de 100 jours.

• Exemple d'ARQS : étude de la croissance d'une couche de glace

La température de l'air est $T_a = 263$ K et celle de l'eau liquide $T_F = 273$ K. On donne la chaleur latente de fusion de la glace L_F , sa masse volumique ρ et sa conductivité thermique λ . La capacité thermique massique de la glace est supposée négligeable.



a) Etablir des équations différentielles vérifiées par $T(z)$ et $h(t)$.

b) Les résoudre et déterminer $h(t)$.

L'équation de la chaleur dans la glace, $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$, donne si on suppose que $c \approx 0$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \approx 0 \quad \text{soit} \quad T(z,t) = T_a + \frac{T_F - T_a}{h(t)} z$$

On se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi – stationnaires.

Le flux thermique dans la glace est dû à la solidification de la glace, soit, entre t et $t + dt$:

$$j(z,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\lambda(T_F - T_a)}{h(t)} \quad d'où \quad -\frac{\lambda(T_F - T_a)}{h(t)} S dt = -L_F dm = -\rho S dh L_F$$

$$\text{Soit : } \frac{\lambda(T_F - T_a)}{h(t)} S dt = \rho S dh L_F \quad h dh = \frac{\lambda(T_F - T_a)}{\rho L_F} dt .$$

$$\text{Par intégration : } h = \sqrt{\frac{2\lambda(T_F - T_a)}{\rho L_F} t} .$$

- **L'ailette de refroidissement :**

On considère un corps solide (B) (par exemple, le boîtier d'un transistor de puissance) qui est à la température T_0 supérieure à la température T_e de l'air ambiant.

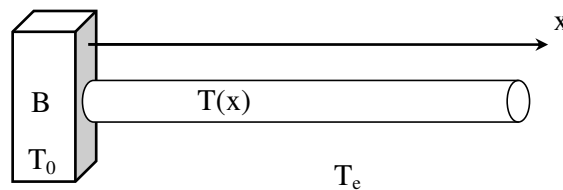
On place, pour refroidir le corps (B), une ailette de refroidissement constituée d'un cylindre de longueur L et de section $S = \pi a^2$. On supposera que la température du barreau ne dépend que de la variable x comptée dans le sens de sa longueur.

On se place en régime stationnaire. L'ailette n'est pas calorifugée et elle subit des pertes sur sa surface latérale donnée par la loi de Newton :

$$\delta Q = h(T(x) - T_e)dt$$

δQ représente la perte d'énergie par unité de surface latérale d'ailette située à l'abscisse x .

On note λ la conductivité thermique de l'ailette.



- 1) Déterminer la température $T(x)$ au sein de l'ailette.
- 2) Calculer le rapport R des puissances évacuées par le corps (B) à travers la surface $S = \pi a^2$, en présence du barreau et sans le barreau. Dans quel cas l'ailette joue-t-elle pleinement son rôle ?
- 3) On suppose dans cette question que la longueur de l'ailette est infinie. Quelle est alors la nouvelle expression de $T(x)$? Calculer de deux manières différentes la puissance P_F fournie par le boîtier au barreau.

Cet exemple mêle les aspects conductif et conducto-convectif. On se propose de déterminer le profil de température $T(x)$ atteint en régime permanent dans une tige cylindrique (de rayon R et d'axe (Ox)) dont une extrémité est maintenue à la température T_0 .

La tige n'est pas isolée latéralement : on suppose que le transfert thermique sur la surface latérale avec l'atmosphère (de température constante $T_a < T_0$) est du type conducto-convectif (il vérifie la loi de Newton).

On supposera l'ailette de longueur infinie.

Un bilan énergétique donne désormais, en régime permanent :

$$-\frac{dj_{th}(x)}{dx}(\pi R^2)dxdt - h(T(x) - T_a)2\pi Rdxdt = 0$$

Soit, en utilisant la loi de Fourier : $\frac{d^2 T(x)}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda R} T(x) = \frac{2h}{\lambda R} T_a$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$T(x) = Ae^{\frac{x}{D}} + Be^{-\frac{x}{D}} + T_a \quad (\text{Avec : } D = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}})$$

L'ailette étant de longueur infinie, $A = 0$: $T(x) = Be^{-\frac{x}{D}} + T_a$. La condition au limite en $x = 0$ permet de calculer B. Finalement : $T(x) = (T_0 - T_a)e^{-\frac{x}{D}} + T_a$

On constate que la température de l'ailette tend vers celle du milieu environnant lorsque la distance x à l'origine est $\gg$ que la distance caractéristique D .

Intérêt de l'ailette de refroidissement : finalement, on peut s'interroger sur la valeur du flux thermique évacué par l'ailette de refroidissement vers l'atmosphère.

On détermine ce flux à l'aide de la loi de Fourier en $x = 0$. En effet, en régime permanent, ces deux flux thermiques sont identiques puisque l'ailette cède à l'air ambiant tout ce qu'elle reçoit.

Ainsi, ce flux Φ_c vaut : $\Phi_c = -\pi R^2 \lambda \left(\frac{dT(x)}{dx} \right)_{x=0} = \frac{\lambda}{D} \pi R^2 (T_0 - T_a)$

On aurait obtenu le même résultat en intégrant sur toute la surface latérale de la barre le flux conducto-convectif :

$$\Phi_c = \int_0^\infty h(T(x) - T_a) 2\pi R dx = 2\pi R h \int_0^\infty (T_0 - T_a) e^{-\frac{x}{D}} dx$$

$$\Phi_c = 2\pi R h D (T_0 - T_a) = \frac{\lambda R}{D^2} \pi R D (T_0 - T_a) = \frac{\lambda}{D} \pi R^2 (T_0 - T_a)$$

En l'absence d'ailette, le flux aurait été : $\Phi_{c,0} = h \pi R^2 (T_0 - T_a)$

Le rapport de ces deux flux vaut : $\frac{\Phi_c}{\Phi_{c,0}} = \frac{\lambda}{hD}$

Avec des valeurs numériques courantes, ce rapport est de l'ordre de 71 ; on voit bien ici l'intérêt de cette ailette de refroidissement.

Des résolutions de problèmes ...

- **Peut-on lécher une barre d'acier chauffée au rouge ?**

Certains fakirs plongent leur main brièvement dans du métal en fusion ou lèchent des barres de métal chauffées au rouge sans subir la moindre blessure.

Pouvez-vous expliquer ces faits ? Pourquoi ne doivent-ils utiliser que du métal très chaud ?

Y a-t-il une vitesse optimale pour marcher sur des charbons ardents ? En particulier, se peut-il qu'un fakir marche trop vite ?

- **Survie dans un igloo :**

Evaluer l'épaisseur e de glace nécessaire pour que dans un igloo cubique de côté $a = 1$ m, un être humain puisse maintenir par la puissance $P = 50$ W qu'il dégage une température intérieure $T_i = + 10^\circ\text{C}$ alors que la température extérieure vaut $T_e = - 10^\circ\text{C}$.

On donne λ pour la glace : $\lambda \approx 0,05 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$.

- **Etude du modèle prédateur/proie et portrait de phase :**

1- Interpréter l'équation de l'évolution de la population des proies en l'absence de prédateurs,

$\frac{dn}{dt} = \alpha \left(1 - \frac{n}{M}\right) n$, $\alpha > 0$, et celle des prédateurs, en l'absence de proies :

$$\frac{dp}{dt} = -\beta p, \beta > 0$$

2- En présence les uns des autres, ces équations deviennent :

$$\frac{dn}{dt} = \alpha \left(1 - \frac{n}{M} - \delta p\right) n$$

$$\frac{dp}{dt} = (-\beta + \gamma n) p$$

Quelle valeur a-t-on à l'équilibre ? En étudiant les variations autour de l'équilibre, tracer le portrait de phase.