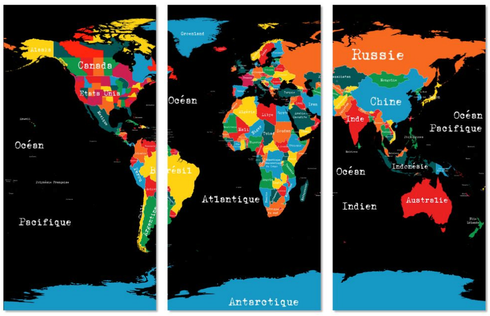
Mécanique du point newtonienne



O Granier

(PC*, Lycée J Decour, Paris)

(olivier.granier.free.fr)

Le cours

I) Les principes de la mécanique newtonienne :

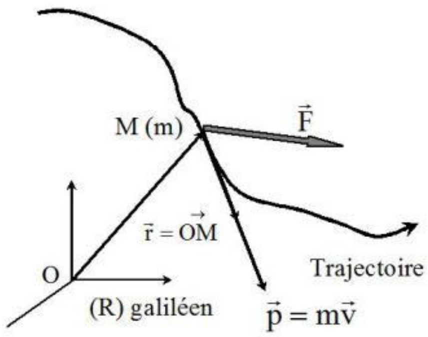
1) Le principe d'inertie :

« Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état ». Ce principe n'est valable que dans les référentiels galiléens. Une autre version du principe d'inertie, couramment admise : Il existe une classe de référentiels, appelés galiléens, par rapport auxquels un objet ponctuel isolé est soit immobile soit en mouvement rectiligne uniforme.

2) Le principe fondamental de la dynamique (PFD) :

Le PFD permet d'évaluer les variations de la quantité de mouvement \vec p dues aux forces (de résultante \vec F) exercées sur un objet ponctuel (de masse m). Dans un référentiel galiléen, le PFD s'écrit :

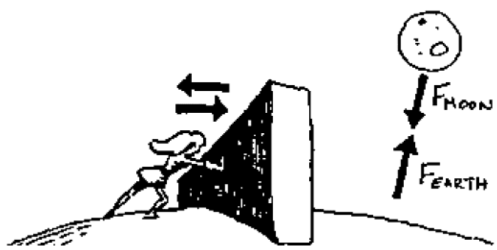
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$$



Le principe des actions réciproques :

Si un corps A exerce une force $\vec{F}_{A/B}$ sur un corps B, alors ce corps B exerce sur A la force opposée :

$$\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$$



3) Théorème du moment cinétique :

Soit O un point fixe d'un référentiel galiléen.

Un point matériel, de vitesse $\vec{v}$ dans ce référentiel, est soumis à une force $\vec{f}$.

Soit $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ le moment cinétique du point M par rapport à O.

Le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = \vec{M}_{\vec{f}/O}$$

où $\vec{M}_{\vec{f}/O}$ représente le moment de la force $\vec{f}$ par rapport à O.

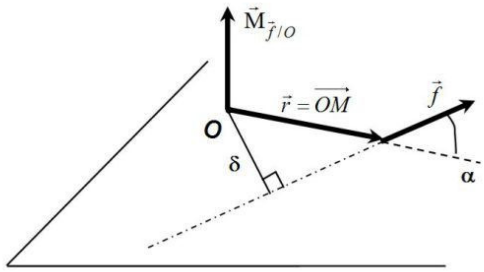
Interprétation du moment des forces par rapport à O :

La norme du moment de la force $\vec{f}$ par rapport à O vaut :

$$\left|\overrightarrow{M}_{\vec{f}/O}\right| = rf \sin\alpha = r\delta$$

δ est appelé « bras de levier » de la force $\vec{f}$.

C'est la distance entre la droite d'action de la force et le point O.



4) Théorème de l'énergie cinétique :

Le PFD appliqué au point matériel dans le référentiel (R) supposé galiléen donne :

$$\vec{f} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

On multiplie scalairement cette équation par le vecteur vitesse :

$$\vec{f}.\vec{v} = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right).\vec{v}$$

Or :

$$m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right).\vec{v} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right) = \frac{dE_c}{dt}$$

Par conséquent :

$$P = \vec{f}.\vec{v} = \frac{dE_c}{dt} \qquad ou \qquad \vec{f}.\vec{v}\,dt = \delta W = dE_c$$

Deux énoncés :

- La variation d'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des travaux des forces qui lui sont appliquées (théorème de l'énergie cinétique).

- La puissance des forces est égale à la dérivée de l'énergie cinétique (théorème de la puissance cinétique).

5) Énergie mécanique et intégrale première du mouvement :

Force	Intégrale première du mouvement
Tension d'un ressort	$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_{m0}$
Champ de pesanteur	$\frac{1}{2}mv^2 \pm mgz = E_{m0}$
Champ gravitationnel (newtonien)	$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = E_{m0}$
Champ électrostatique (coulombien)	$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r} = E_{m0}$

Exemple : vitesse de libération (interaction gravitationnelle)

Quelle vitesse initiale minimale v_0 faut-il communiquer à un point matériel situé à la surface de la Terre pour qu'il échappe à l'attraction gravitationnelle terrestre ?

On veut que le point matériel arrive à l'infini (où l'énergie potentielle est nulle) avec une vitesse nulle (c'est la condition pour avoir v_0 minimale). Par conséquent :

$$E_{m0} = E_c + E_P = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_T}{R_T} = 0$$

Soit :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

Avec $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9{,}8\,m.s^{-2}$, on obtient :

$$v_0 = \sqrt{2R_T g_0} = 11{,}2\,km.s^{-1} \qquad (\,R_T = 6\,370\,km\,)$$

II) Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide :

1) Régime libre :

Un oscillateur harmonique amorti par frottement fluide obéit à l'équation différentielle suivante (cas à une dimension) :

$$m\ddot{x} = -kx - hm\dot{x} \quad soit \quad \ddot{x} + h\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

On pose :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad h = 2\lambda = 2\sigma\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q}$$

σ est le facteur d'amortissement de l'oscillateur et Q le facteur de qualité. Alors :

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2 x=\ddot{x}+2\sigma\omega_0\dot{x}+\omega_0^2 x=\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2 x=0$$

On recherche des solutions de la forme exp(rt), avec r appartenant a priori au corps des complexes. On aboutit au polynôme caractéristique :

$$r^2+2\sigma\omega_0 r+\omega_0^2=0$$

dont le discriminant est :

$$\Delta=4\omega_0^2(\sigma^2-1)$$

Différents régimes sont observés, selon les valeurs prises par σ (ou Q).

- **Régime pseudo-périodique ($\sigma<1$) :**

Dans le cas où $x(0)=x_0$ et la vitesse initiale nulle :

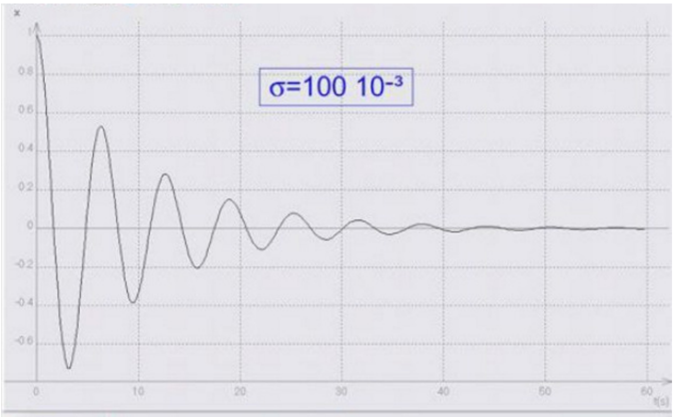
$$x(t)=x_0e^{-\sigma\omega_0 t}\left(\cos(\omega t)+\frac{\sigma\omega_0}{\omega}\sin(\omega t)\right)$$

$$x(t)=Ce^{-\sigma\omega_0 t}\cos(\omega t-\phi)$$

$$C=x_0\sqrt{1+\left(\frac{\sigma\omega_0}{\omega}\right)^2}\quad ;\quad \tan\phi=\frac{\sigma\omega_0}{\omega}$$

Avec la pseudo-pulsation :

$$\omega=\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}$$



On peut noter que le facteur de qualité Q donne l'ordre de grandeur du nombre de pseudo-oscillations visibles expérimentalement.

- **Régime apériodique : ($\sigma>1$)**

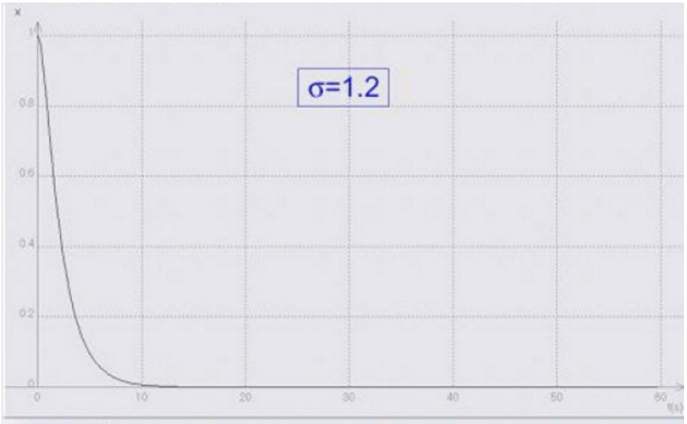
Dans le cas où $x(0)=x_0$ et la vitesse initiale nulle :

$$r_1=-\sigma\omega_0+\omega_0\sqrt{\sigma^2-1}\,;\,r_2=-\sigma\omega_0-\omega_0\sqrt{\sigma^2-1}$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\sigma^2 - 1}$$

$$x(t) = x_0 e^{-\sigma\omega_0 t}\left(ch(\omega t) + \frac{\sigma\omega_0}{\omega} sh(\omega t) \right)$$

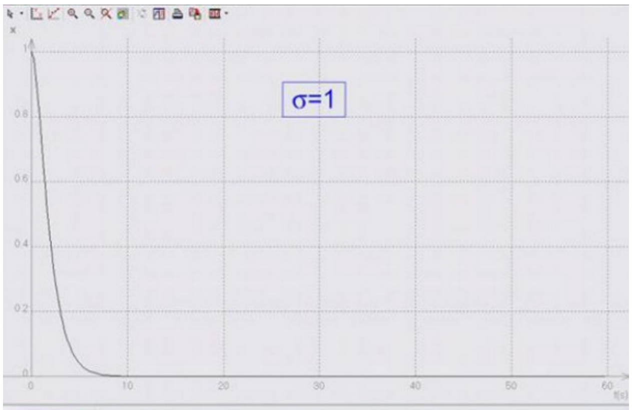
$$x(t) = \frac{x_0}{2} e^{-\sigma\omega_0 t}\left(\left(1 - \frac{\sigma\omega_0}{\omega} \right) e^{-\omega t} + \left(1 + \frac{\sigma\omega_0}{\omega} \right) e^{\omega t} \right)$$



- **Régime apériodique critique : ($\sigma = 1$)**

Dans le cas où $x(0) = x_0$ et la vitesse initiale nulle :

$$x(t) = x_0(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$$



Un autre exemple, le pendule simple amorti :

En présence d'une force de frottement fluide de la forme :

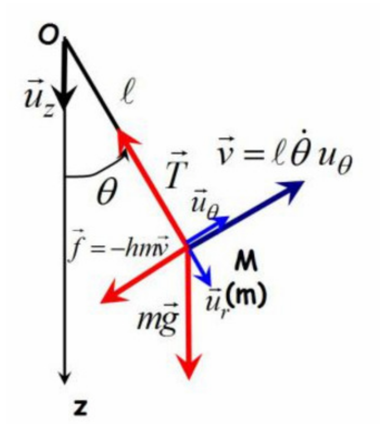
$$\vec{f}_v = -hm\vec{v}$$

Le PFD projeté sur le vecteur $\vec{u}_\theta$ donne : (on peut aussi utiliser le théorème du moment cinétique)

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin\theta - hm(\ell\dot{\theta})$$

Soit :

$$\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = \ddot{\theta} + 2\sigma\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$



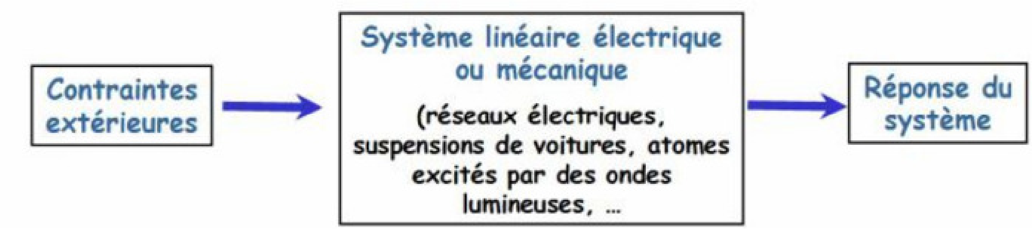
Si l'angle θ reste « petit », alors on retrouve l'équation habituelle :

$$\ddot{\theta}+h\dot{\theta}+\frac{g}{\ell}\theta=\ddot{\theta}+2\sigma\omega_0\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$$

2) Régime sinusoïdal forcé :

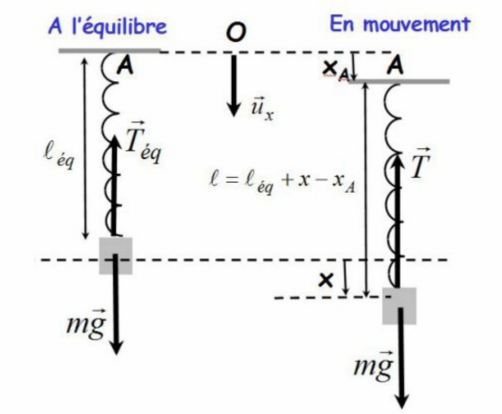
Intérêt de l'étude :

L'analyse harmonique (ou fréquentielle) d'un système est son étude au moyen de sa réponse harmonique s(t), c'est-à-dire de sa réponse en régime permanent sinusoïdal lorsqu'il est soumis à une entrée sinusoïdale e(t) dont on fait varier la pulsation ω.



Modèle choisi : oscillateur mécanique vertical à point d'attache mobile

Le point d'attache du ressort est mobile en A.



Dans le référentiel galiléen du sol :

$$m\ddot{x} = mg - hm\dot{x} - k(\ell_{eq} + x - x_A - \ell_0)$$

En utilisant la condition d'équilibre :

$$\ddot{x} + h\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_A$$

Soit, avec les notations habituelles :

$$\ddot{x} + 2\sigma\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_A$$

Dans la suite, on choisit :

$$x_A = X_{A,m}\cos(\omega t)$$

Cette équation est formellement identique à celle vérifiée par la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit série (RLC) alimenté par un GBF (voir cours d'électricité) :

Si on note u_C $(u_C = q/C)$ la tension aux bornes du condensateur :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t)$$

Soit : $$\ddot{u}_C + \frac{R}{L}u_C + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}e(t)$$

Méthode de résolution par les nombres complexes (comme en électricité) :

On pose :

$$\underline{x}_A = X_{A,m}e^{i\omega t} \quad ; \quad \underline{x} = X_m e^{i(\omega t+\phi)} \quad (x = X_m\cos(\omega t+\phi))$$

Alors :

$$\underline{\dot{x}} = i\omega\underline{x} \qquad et \qquad \underline{\ddot{x}} = i\omega\underline{\dot{x}} = (i\omega)^2\underline{x} = -\omega^2\underline{x}$$

Réponse en amplitude x(t) :

$$\ddot{x} + 2\sigma\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_A$$
$$-\omega^2\underline{x} + 2\sigma\omega_0(i\omega\underline{x}) + \omega_0^2\underline{x} = \omega_0^2\underline{x}_A$$
$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\sigma\omega_0\omega\right]\underline{x} = \omega_0^2\underline{x}_A$$

Soit :

$$\underline{x} = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\sigma\omega_0\omega}\underline{x}_A$$

Ou encore :

$$X_m e^{i\phi} = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\sigma\omega_0\omega}X_{A,m}$$

L'amplitude maximale s'obtient en prenant le module de l'expression précédente :

$$X_m = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\sigma^2\omega_0^2\omega^2}}X_{A,m}$$

X_m est maximale pour une pulsation qui vaut (et qui existe si $\sigma < 1/\sqrt{2}$) :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2\sigma^2}$$

Et l'amplitude maximale à la « résonance d'amplitude » est :

$$X_m(\omega_r) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{1-\sigma^2}} X_{A,m}$$

Les formules précédentes deviennent, en utilisant le facteur de qualité Q à la place du coefficient d'amortissement σ : ($Q = 1/2\sigma$) :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \qquad avec \qquad Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Et :

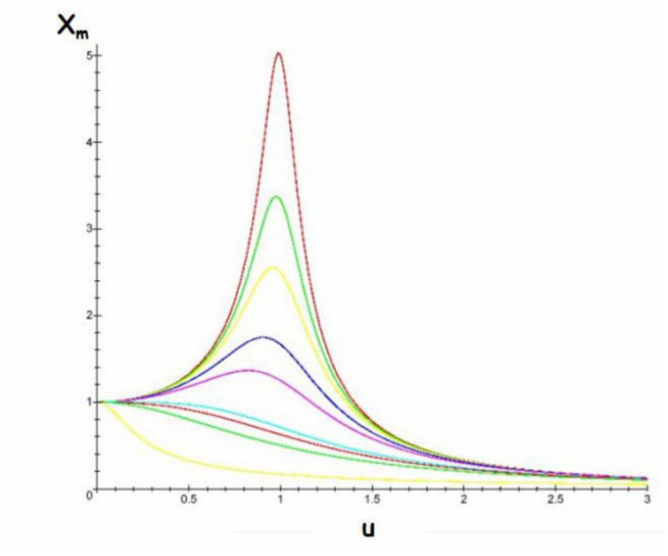
$$X_m(\omega_r) = \frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} X_{A,m}$$

Remarque :

Pour de faibles amortissements (sigma "faible" et Q "grand"), alors :

$$\omega_r \approx \omega_0 \quad et \quad X_m(\omega_r) \approx QX_{A,m}$$

Ainsi, si Q = 10, l'amplitude lors de la résonance vaut 10 fois celle de l'excitation : la résonance est dite «aiguë» et peut causer la destruction du système oscillant.

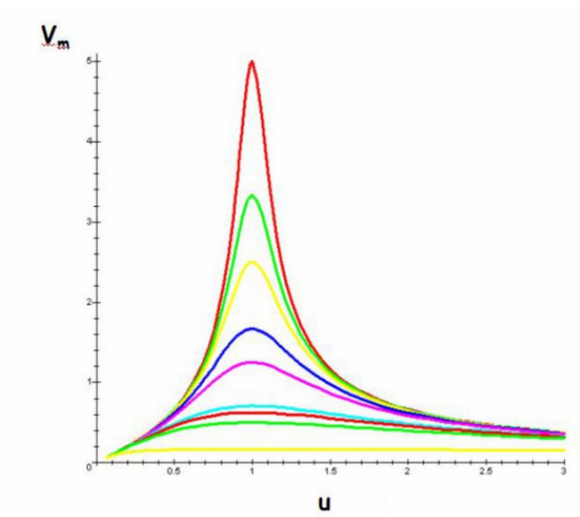


La figure précédente donne l'allure de $X_m(\omega)$ pour différentes valeurs du facteur de qualité Q. On a choisi $X_{A,m} = 1$ et posé $u = \omega/\omega_0$. Plus Q est grand et plus la résonance est aigüe. L'oscillateur constitue un filtre passe-bas, avec ou sans résonance.

Réponse en vitesse :

La figure suivante donne l'allure de $V_m(\omega)$ pour différentes valeurs du facteur de qualité Q.

On a choisi $X_{A,m} = 1$ et on a posé $u = \omega/\omega_0$.



Plus Q est grand et plus la résonance est aigüe. L'oscillateur constitue un filtre passe-bande.

Bande passante du filtre passe-bande :

C'est l'ensemble des pulsations ω pour lesquelles le gain en vitesse reste, par convention, supérieur au gain maximal (obtenu pour ω_0) divisé par $\sqrt{2}$. La largeur de la bande passante vaut :

$$\Delta\omega = \omega_{c_2} - \omega_{c_1} = 2\sigma\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q}$$

Elle est d'autant plus faible (résonance aiguë) que l'amortissement est faible (et le facteur de qualité grand).

III) Mouvements de particules chargées dans des champs électriques et magnétiques :

1) Champ électrique seul :

On considère une particule chargée ponctuelle M (+ q) de masse m en mouvement dans un champ électrostatique $\vec{E}_0$ uniforme et indépendant du temps. Le référentiel d'étude est celui du laboratoire supposé galiléen. Le PFD appliqué à la particule donne :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}_0 \quad soit \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{E}_0$$

Il y a analogie avec un point matériel dans le champ de pesanteur supposé uniforme :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} \quad soit \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$$

Par conséquent, le mouvement d'une particule dans le champ $\vec{E}_0$ sera soit une droite soit une parabole.

2) Champ magnétique seul :

Puissance de la force magnétique :

On considère une particule chargée ponctuelle M (+ q) de masse m en mouvement dans un champ magnétostatique $\vec{B}_0$ uniforme et indépendant du temps. Le référentiel d'étude est celui du laboratoire. Le PFD appliqué à la particule donne :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_0$$

La puissance de la force magnétique est nulle ($P = (q\vec{v} \wedge \vec{B}_0)\vec{v} = 0$). Par conséquent, d'après le théorème de la puissance cinétique :

$$P = \frac{dE_c}{dt} = 0 \quad soit \quad E_c = cste \quad et \quad v = cste$$

Un champ magnétique ne modifie pas la norme de la vitesse mais seulement sa direction.

Mouvement circulaire :

On considère une particule chargée ponctuelle M (+ q) de masse m en mouvement dans un champ magnétostatique $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$ uniforme et indépendant du temps.

La vitesse initiale de la particule est perpendiculaire au champ et portée, par exemple, selon l'axe (Ox) :

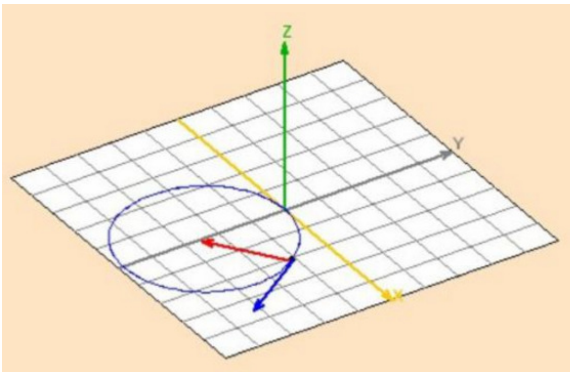
$$\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$$

Le PFD permet d'obtenir le rayon de la trajectoire (on suppose ici q>0) :

$$m\frac{v_0^2}{R} = qv_0B_0$$

Soit :

$$R = \frac{mv_0}{qB_0}$$



Ce cercle est parcouru à la vitesse angulaire constante :

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R} = \frac{qB_0}{m}$$

Mouvement hélicoïdal :

On considère une particule chargée ponctuelle M (+ q) de masse m en mouvement dans un champ magnétostatique $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$ uniforme et indépendant du temps. La vitesse initiale de la particule est quelconque et peut s'écrire, par un choix convenable des axes :

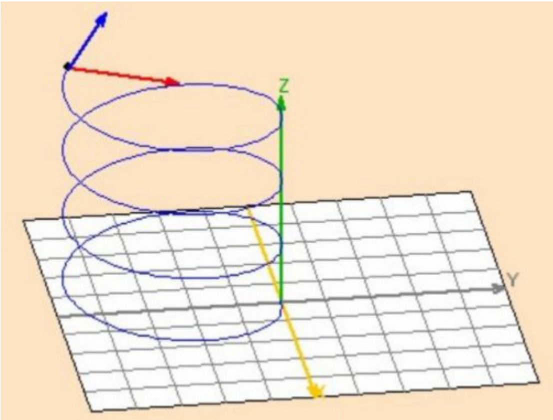
$$\vec{v}_0 = v_0 \sin\alpha\, \vec{u}_x + v_0 \cos\alpha\, \vec{u}_z$$

La trajectoire dans le plan perpendiculaire à l'axe (Oz) est un cercle de rayon :

$$R = \frac{mv_0 sin\alpha}{qB_0}$$

parcouru à la vitesse angulaire ω_0. Le mouvement est rectiligne uniforme selon l'axe (Oz), à la vitesse $v_0 cos\alpha \vec{u}_z$. La trajectoire est une hélice dont le pas est constant. Ce pas h vaut (c'est la distance parcourue pendant une période du mouvement circulaire dans le plan (Oxy)) :

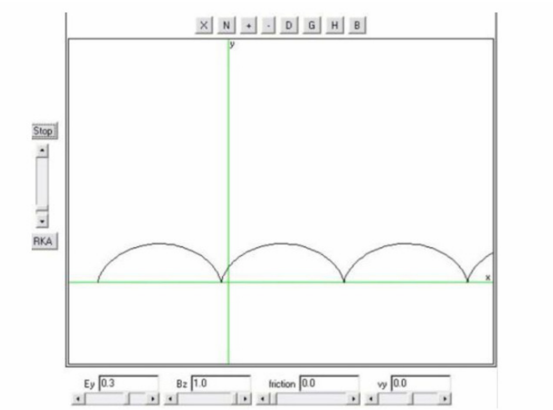
$$h = \frac{2\pi}{\omega_0} v_0 cos\alpha$$



3) Champs électrique et magnétique : cycloïde

On considère une particule chargée ponctuelle M (+ q > 0) de masse m en mouvement dans un champ magnétostatique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ uniforme et indépendant du temps et dans un champ électrique $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_y$. La particule est initialement à l'origine O du repère et sa vitesse initiale est nulle. On posera :

$$\omega_c = qB_0 / m$$



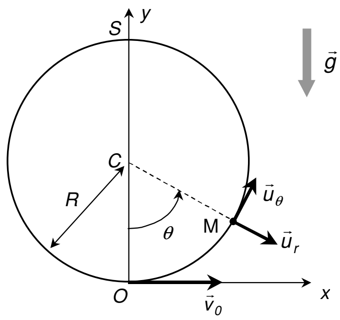
Montrer que les équations paramétriques de la trajectoire sont :

$$x = \frac{E_0}{B_0 \omega_c}(\omega_c t - sin\, \omega_c t) \quad ; \quad y = \frac{E_0}{B_0 \omega_c}(1 - cos\, \omega_c t)$$

Des applications classiques

- **Comment utiliser les différents principes de la mécanique ?**

Un point matériel de masse m, initialement au repos en A, peut se déplacer sans frottement dans la rainure d'un cerceau vertical et immobile, de rayon R. On lui communique une vitesse $\vec{v}_0$ horizontale.



Etudier les différents mouvements possibles du point matériel, en fonction des paramètres du problème (R, $\vec{v}_0$,...).

1. Si la vitesse initiale est importante, la voiture effectuera des tours complets à l'intérieur du cerceau. Dans le cas contraire, elle quittera celui-ci avant d'arriver en son sommet S ou possédera un mouvement d'oscillations (dans la partie basse du cerceau) autour de sa position initiale O. Ces trois types de mouvements sont résumés sur les figures suivantes : dans le 1^er cas (figure (a)), ni la réaction $\vec{N}$ (exercée par le cerceau sur la voiture, normale au cerceau en l'absence de frottements) ni la vitesse (ou la vitesse angulaire $\dot{\theta}$) ne s'annulent ; dans le 2^ème cas (figure (b)), la réaction s'annule avant la vitesse angulaire et dans le dernier cas (figure (c)), c'est le contraire.

2. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la voiture (assimilée à un point matériel), dans le référentiel galiléen terrestre, s'écrit $m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}$ *. Le vecteur position de la voiture est* $\vec{r} = R\,\vec{u}_r$ *, sa vitesse* $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ *et son accélération égale à* $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ *. En projection sur le vecteur* $\vec{u}_r$ *(*$\vec{N} = -N\vec{u}_r, N \geq 0$*), on obtient :*

$$-mR\dot{\theta}^2 = -N + mg\cos\theta \qquad \textit{soit} \qquad N = mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

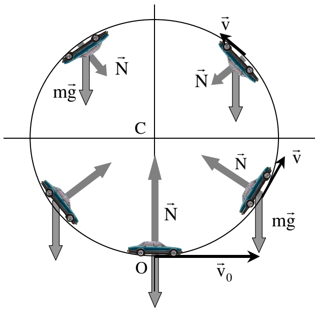


Figure (a)

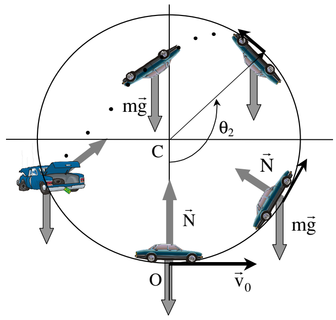


Figure (b)

Pour déterminer l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ *en fonction de* θ*, on applique le théorème de l'énergie cinétique à la voiture entre la position initiale O et sa position M à l'instant t :*

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = -mgR(1-\cos\theta)$$

Soit, avec $v = R\dot{\theta}$ *:*

$$\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} - \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)$$

Cette dernière expression permet alors d'obtenir N(θ), sous la forme :

$$N = \frac{mv_0^2}{R} + (3\cos\theta - 2)mg$$

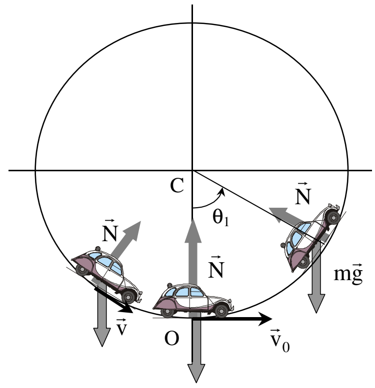


Figure (c)

3. La voiture s'arrête le long du cerceau lorsque sa vitesse angulaire s'annule, c'est-à-dire pour un angle noté θ_1 *tel que* $\cos\theta_1 = 1 - v_0^2/2Rg$ *. Elle quitte le cerceau pour* $N = 0$ *, correspondant à un angle* θ_2 *tel que* $\cos\theta_2 = (2 - v_0^2/Rg)/3 = (2/3)\cos\theta_1$ *. L'angle* θ_1 *est défini si* $|\cos\theta_1| \leq 1$ *, soit* $v_0^2 \leq 4Rg$ *. De même, l'angle* θ_2 *existe si* $v_0^2 \leq 5Rg$ *. Les mouvements possibles de la voiture dépendent donc bien de la valeur de la vitesse initiale* v_0 *:*

- $v_0 < \sqrt{2Rg}$ *:* $\cos\theta_1 > \cos\theta_2 > 0$*, donc* $\theta_1 < \theta_2$ *et la voiture oscille autour de O.*
- $\sqrt{2Rg} < v_0 < 2\sqrt{Rg}$ *:* $\cos\theta_1 < \cos\theta_2 < 0$*, soit* $\theta_1 > \theta_2$*, la voiture quitte le cerceau.*
- $2\sqrt{Rg} < v_0 < \sqrt{5Rg}$ *: seule N s'annule (*θ_1 *n'est pas défini), la masse quitte le cerceau avant le sommet S.*
- $v_0 > \sqrt{5Rg}$ *: la voiture effectue des loopings.*

Application numérique : si l'on choisit un rayon du cercle égal à $R = 15\,cm = 0{,}15\,m$*, alors, avec* $g = 9{,}81\,m.s^{-2}$*, la vitesse minimale* $v_{0,\ell}$ *que doit avoir la voiture pour réussir son looping sera* $v_{0,\ell} = \sqrt{5Rg} = 2{,}7\,m.s^{-1}$*. Cette vitesse peut être couramment atteinte par les voitures miniatures que l'on trouve chez les marchands de jouets !*

- **Utilisation de l'intégrale 1ère du mouvement : limites de la trajectoire et énergie**

Une particule fixe, de charge électrique q, est placée à l'origine O d'un axe (Ox) : tout le problème se déroule sur cet axe. On néglige le poids des particules.

a) On lance à une distance a de O une seconde particule, de charge - q et de masse m, dans une direction tendant à l'éloigner de O. Quelle vitesse initiale v_0 doit-on lui communiquer pour qu'elle échappe à l'attraction de la particule fixe en O ?

b) La particule mobile a maintenant la charge + q et sa vitesse initiale est v_0 et est dirigée vers O. Montrer que cette particule ne peut atteindre O ; calculer la distance minimale d'approche b en fonction de v_0.

a) La particule doit arriver à l'infini (où l'énergie potentielle est nulle) avec une vitesse nulle.

La vitesse v_0 *minimale à donner doit vérifier : (conservation de l'énergie mécanique)*

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} = 0$$

Soit :

$$v_0 = \sqrt{\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 m}\frac{1}{a}}$$

b) La force est désormais répulsive. La particule va s'arrêter à une distance b donnée par :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{b}$$

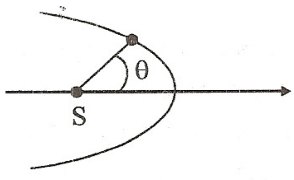
D'où :

$$b = \frac{1}{\frac{2\pi\varepsilon_0}{q^2}mv_0^2 + \frac{1}{a}}$$

- **La comète de Hyakutaké (Un peu de gravitation …) :**

La comète de Hyakutaké a atteint son périhélie à une distance du Soleil de 0,23 ua le 1er juin 1996. On suppose que sa trajectoire est parabolique.

La Terre a une orbite circulaire de rayon a = 1 ua = 150 millions de km, parcourue à la vitesse u = 30 km.s^{-1}. On suppose que les trajectoires sont coplanaires.



a) Calculer la vitesse de la comète à son périhélie.

b) Calculer les angles θ_1 et θ_2 de rencontre de la comète avec l'orbite terrestre.

c) Calculer les dates d'arrivée et de sortie de la comète dans l'orbite terrestre.

a) La trajectoire de la comète étant parabolique, son énergie mécanique est nulle :

$$E_m = \frac{1}{2}M_C v^2 - G\frac{M_C M_S}{r} = 0$$

Ecrite au périhélie, cette relation donne :

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM_S}{r_p}}$$

La vitesse de la Terre sur sa trajectoire circulaire est donnée par :

$$M_T\frac{u^2}{r_T} = G\frac{M_T M_S}{r_T^2} \qquad soit \qquad u = \sqrt{\frac{GM_S}{r_T}}$$

finalement :
$$v_p = \sqrt{\frac{2r_T}{r_p}}u$$

b) Il suffit d'écrire que :

$$r_C = \frac{p}{1+\cos\theta} = \frac{2r_p}{1+\cos\theta} = r_T$$

c) La constante des aires donne :

$$C_0 = r_C^2\dot{\theta} = r_p v_p \quad soit \quad \frac{p^2}{(1+\cos\theta)^2}\frac{d\theta}{dt} = r_p v_p$$

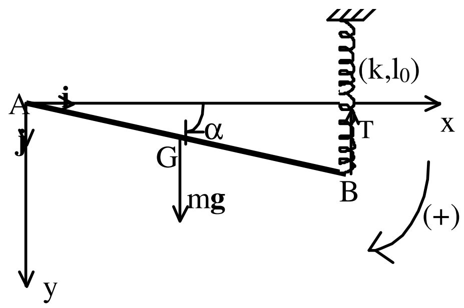
$$\frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{v_p}{4r_p}dt$$

La Comète reste à l'intérieur de l'orbite terrestre durant une durée τ donnée par :

$$\tau = \frac{4r_p}{v_p}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$

- **Un peu de mécanique du solide : mouvement d'une barre autour d'un axe fixe**

Une barre AB, de longueur 2ℓ et de masse m, est mobile autour d'un axe Az horizontal. Le point B est fixé à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. L'autre extrémité du ressort est fixe. Dans sa position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical.



La barre est écartée légèrement de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale.

Déterminer la période des petites oscillations de la barre. On considère que le point B se déplace verticalement.

On utilise le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Az), dans le référentiel galiléen du laboratoire. Ce théorème donne :

$$\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\alpha} = mg\ell\cos\alpha - 2f\ell\cos\alpha$$

L'angle α étant petit, $\cos\alpha \approx 1$.

Lorsque la barre est à l'équilibre :

$$mg\ell - 2f_0\ell = 0$$

où f_0 est la tension du ressort à l'équilibre, qui vaut par ailleurs :

$$f_0 = k(\ell_1 - \ell_0)$$

où ℓ_1 est la longueur du ressort à l'équilibre.

Quand la barre fait l'angle α, la longueur du ressort a varié de $2\ell\alpha$ et f vaut :

$$f_0 = k(\ell_1 + 2\ell\alpha - \ell_0) = f_0 + 2k\ell\alpha$$

L'équation du mouvement devient alors :

$$\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\alpha} = mg\ell - 2f_0\ell - 4k\ell^2\alpha = -4k\ell^2\alpha$$

soit :

$$\ddot{\alpha} = -\frac{3k}{m}\alpha$$

La barre effectue donc des oscillations sinusoïdales de période : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{3k}}$

Autre méthode : utiliser la conservation de l'énergie mécanique.

Des résolutions de problèmes …

- Un cosmonaute échoué sur un astéroïde de rayon R et de même densité que la Terre parvient à s'échapper en sautant en l'air. Quelle est la valeur maximale de R ?

- Vous souhaitez sauter à l'élastique d'un pont haut de 100 m. Quelles doivent être les caractéristiques du fil élastique que vous pourriez utiliser ?

- Est-il possible de faire léviter une sphère totalement réfléchissante ?

- Comment évaluer la force de portance sur un avion ? Quel le C_x d'une voiture ?

- On a un objet M de masse m à la surface de la Terre. Celui-ci est plus ou moins proche du Soleil qui l'attire. Peut-on dire que le poids de l'objet est différent à midi ou à minuit ?

- Un point matériel de masse m se déplace dans un plan vertical sans frottements sur une courbe (C) dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$ uniforme.

  Quelle doit être la forme de cette courbe pour que la composante verticale de sa vitesse soit constante

- Quelle force $\vec{F}$ faut-il exercer pour soulever à vitesse constante V une chaîne de masse linéique λ ?

- Donner une condition pour que le Soleil ne soit plus visible, c'est-à-dire soit un trou noir