

Suivi hebdomadaire
Equations de Maxwell

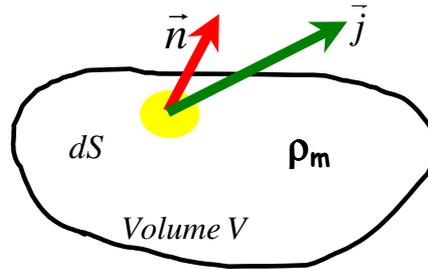
PC (O Granier, Lycée J Decour)*



Le cours

I) Equation locale de conservation de la charge :

On considère un volume V délimité par une surface fermée S (fixe dans le référentiel d'étude). Soit ρ_m la densité volumique de charges mobiles dans le milieu. La charge totale $Q(t)$ comprise dans le volume à l'instant t vaut : $Q(t) = \iiint_{(V)} \rho_m d\tau$



La conservation de la charge électrique permet d'écrire :

$$\frac{dQ}{dt} = -i(t) \text{ à travers } S$$

Par conséquent :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{(V)} \rho_m(M, t) d\tau \right) = - \oiint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

Le volume (V) étant fixe :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{(V)} \rho_m(M, t) d\tau \right) = \iiint_{(V)} \frac{\partial \rho_m(M, t)}{\partial t} d\tau$$

Finalement, le principe de conservation de la charge conduit à $\iiint_{(V)} \frac{\partial \rho_m(M, t)}{\partial t} d\tau = - \oiint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} dS$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial \rho_m(M, t)}{\partial t} d\tau = - \iiint_{(V)} \text{div} \vec{j} d\tau \quad \text{soit} \quad \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial \rho_m(M, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{j} \right) d\tau = 0$$

Ce résultat étant vrai pour tout volume (V) , il vient :

$$\boxed{\frac{\partial \rho_m(M, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0}$$

C'est l'équation locale de conservation de la charge électrique.

* Remarque : une telle forme d'équation se retrouve couramment lorsque l'on fait le bilan d'une grandeur scalaire extensive qui, en l'absence de sources, obéit à un principe de conservation :

- Conservation de l'énergie EM (vecteur de Poynting)
- Conservation de la masse (en mécanique des fluides)
- Equations de la diffusion et de la chaleur (phénomènes de transport).

* Densité de courant et intensité en régime permanent :

On a alors $\frac{\partial \rho_m(M,t)}{\partial t} = 0$ et donc $\text{div } \vec{j} = 0$.

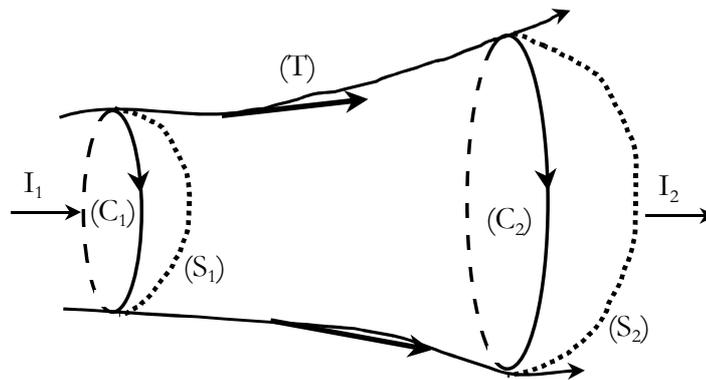
On en déduit :

- L'intensité totale qui sort d'une surface fermée (S) quelconque est nulle en régime permanent :

$$i = \oiint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{(V)} \text{div } \vec{j} \, d\tau = 0$$

- En régime permanent, l'intensité a même valeur à travers toutes les sections d'un même tube de champ.

On considère une surface fermée (S) constituée par un tube de champ (T) du champ \vec{j} (appelé tube de courant) et deux surfaces (S₁) et (S₂) s'appuyant sur deux contours de même orientation tracés sur (T) et soient I₁ et I₂ les intensités, flux de \vec{j} respectivement à travers (S₁) et (S₂).



$$\oiint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS = 0 = -I_1 + I_2 + \iint_{(T)} \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS = -I_1 + I_2$$

Soit :

$$I_1 = I_2 = I$$

En régime permanent, l'intensité du courant électrique prend la même valeur dans toute section d'une branche de circuit. On peut également en déduire la loi des nœuds (conservation du flux du vecteur densité de courant).

II) Equations de Maxwell :

Dans la théorie de Maxwell, l'interaction entre deux particules est transmise par l'intermédiaire de modifications de proche en proche du champ EM. Cette propagation de l'interaction par l'intermédiaire du champ EM se fait précisément sous forme d'ondes EM avec la célérité c.

Pour se représenter l'interaction de deux particules dans le cadre d'une théorie de champ, une image possible est celle de deux bouchons A et B flottant sur l'eau et initialement immobiles. Une oscillation verticale de A engendre des oscillations de l'eau qui se transmettent de proche en proche dans toutes les directions jusqu'à ce qu'elles atteignent B qui est alors mis en mouvement.

Les équations de Maxwell sont des équations locales qui expriment des relations entre le champ EM (\vec{E}, \vec{B}) et ses sources (ρ, \vec{j}) :

$\text{div } \vec{B} = 0$	<i>(Equation du flux magnétique – Flux)</i>
$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	<i>(Equation de Maxwell – Gauss – MG)</i>
$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	<i>(Equation de Maxwell – Faraday – MF)</i>
$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	<i>(Equation de Maxwell – Ampère – MA)</i>

* Les équations de propagation du champ EM :

Soit une distribution (D) de charges localisées autour d'un point O, dont les densités sont fonction du temps (exemple : une antenne métallique). Selon les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère, cette distribution (D) est la source de champs \vec{E} et \vec{B} variables dans le temps qui vont s'établir dans tout le voisinage de O. Un point M de ce voisinage, bien que situé en dehors de (D), est lui-même source de champs en raison des termes en $\partial \vec{B} / \partial t$ et $\partial \vec{E} / \partial t$ « provenant de O » qui jouent un rôle de sources dans les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère. Les points P du voisinage de M sont à leur tour dans leur propre voisinage des sources de champs variables dans le temps ...

On conçoit ainsi que le champ EM se propage en faisant penser à des rides se transmettant de proche en proche à la surface de l'eau.

« Le couplage qui est introduit dans les équations de Maxwell par la présence des deux dérivées partielles par rapport au temps $\partial \vec{B} / \partial t$ et $\partial \vec{E} / \partial t$ est à l'origine du phénomène de propagation du champ EM. »

Obtention des équations de propagation du champ EM :

On calcule le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})$$

Or :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

Avec $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ et $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, il vient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\rho}{\epsilon_0}\right) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Soit, finalement :

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}} \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

De manière symétrique, on élimine E au profit de B en calculant le rotationnel de MA :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E})$$

Soit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(0) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

Finalement :

$$\Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}$$

Dans une région sans charges ni courants ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$) :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Ces équations sont les équations de propagation du champ EM. Si l'on note $s(t)$ l'une des six coordonnées des champ EM (E_x, \dots, B_x, \dots), alors :

$$\Delta s - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \Delta s - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad \left(\frac{1}{v^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \right)$$

C'est l'équation de d'Alembert (équation classique de propagation des ondes, encore appelée équation des cordes vibrantes) établie au XVIII^{ème} siècle pour modéliser les vibrations d'une corde tendue. Comme le montre le paragraphe suivant, les solutions de cette équation traduisent un phénomène de propagation de célérité v .

* Résolution de l'équation de d'Alembert : (voir cours sur les ondes mécaniques)

On se propose de résoudre l'équation de d'Alembert unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

Interprétation physique : on considère une fonction de la forme :

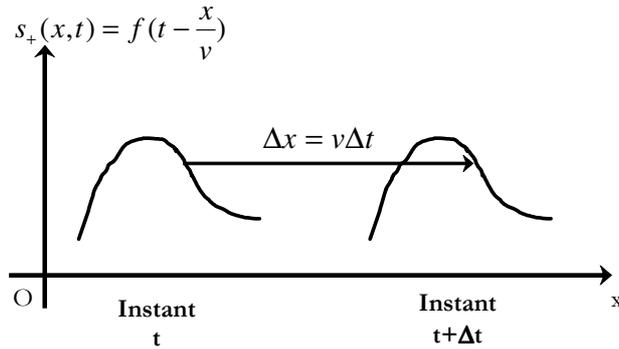
$$s_+(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

On constate que :

$$f\left(t - \frac{x}{v}\right) = f\left(t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{v}\right)$$

pour tout couple Δx et Δt vérifiant : $\Delta x = v \Delta t$. Ainsi, $s_+(x, t)$ représente un signal qui se propage sans déformation à la vitesse v le long de l'axe (Ox) dans le sens positif.

La solution $s_-(x, t) = f\left(t + \frac{x}{v}\right)$ représente un signal qui se propage sans déformation à la vitesse v le long de l'axe (Ox) dans le sens négatif.



On se propose maintenant de résoudre l'équation de d'Alembert tridimensionnelle :

$$\Delta s - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec } s(\vec{r}, t) = s(x, y, z, t)$$

On vérifie que des fonctions de la forme :

$$s_{x,\pm}(x, y, z, t) = f\left(t \mp \frac{x}{v}\right) ; \quad s_{y,\pm}(x, y, z, t) = f\left(t \mp \frac{y}{v}\right) ; \quad s_{z,\pm}(x, y, z, t) = f\left(t \mp \frac{z}{v}\right)$$

sont solution de l'équation tridimensionnelle (ces solutions sont appelées ondes planes de directions de propagations respectives \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z , dans le sens positif ou négatif).

Des ondes sphériques sont également solution de l'équation de d'Alembert tridimensionnelle : on cherche, par exemple, des solutions à symétrie sphérique $s(r, t)$.

En utilisant la forme du laplacien en coordonnées sphériques, il vient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rs) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

Soit encore :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rs) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rs) = 0$$

On constate alors que la fonction $rs(r, t)$ est solution de l'équation unidimensionnelle de d'Alembert. Par conséquent :

$$rs(r, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

Soit :

$$s(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

Les deux termes de cette somme représentent des ondes sphériques respectivement divergente et convergente. On constate que le signal ne se propage pas sans déformation en raison de l'affaiblissement exprimé par le facteur $1/r$.

III) Contenus physiques des équations de Maxwell :

Ce paragraphe permet de montrer que les équations « locales » de Maxwell donnent, par intégration, des lois et théorèmes connus qui peuvent être vérifiés expérimentalement.

- Equation de Maxwell-Gauss et théorème de Gauss :

On part de l'équation de MG, $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, afin de calculer le flux sortant du champ électrique à travers une surface fermée (S) :

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{(V)} \text{div } \vec{E} \, d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(V)} \rho \, d\tau = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Le théorème de Gauss apparaît ainsi encore valable en EM, même si les charges électriques peuvent être en mouvement.

En régime permanent, les sources du champ électrique sont les charges caractérisées par la densité ρ . Les lignes de champ divergent à partir des charges positives à la manière d'un fluide sortant d'une véritable source et disparaissent sur les charges négatives comme un fluide dans un puits.

Tel est encore le cas en régime non permanent, à la différence près que (voir conséquence de l'équation de Maxwell-Faraday), ρ n'est plus la seule source du champ électrique, de telle sorte que les cartes de champ électrique n'ont plus nécessairement la même allure.

- Equation de Maxwell-Ampère et théorème d'Ampère « généralisé » :

On calcule la circulation à un instant donné du champ magnétique le long d'un contour (C) sur lequel s'appuie une surface (S) et on utilise l'équation de MA :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Il vient :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \text{rot } \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{(S)} \left(\mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \, dS$$

On reconnaît :

$$i = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS$$

l'intensité qui traverse (S). On peut noter que, en régime non permanent, cette grandeur ne dépend pas seulement de (C) mais de la surface (S) car \vec{j} n'est plus à flux conservatif.

Alors : (théorème d'Ampère généralisé)

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left[i + \iint_{(S)} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dS \right]$$

où le terme :

$$i_D = \iint_{(S)} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dS$$

s'interprète comme le flux du courant de déplacement à travers la surface (S). Ainsi, en régime non permanent, les sources du champ magnétique sont de deux natures : les courants « réels » et le courant de déplacement qui provient de la dépendance temporelle du champ électrique.

En régime permanent, on retrouve bien évidemment le théorème d'Ampère classique :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i$$

- Equation du flux magnétique et champ magnétique à flux conservatif :

L'équation locale $\text{div } \vec{B} = 0$ permet de montrer que :

$$\oint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{(V)} \text{div } \vec{B} \cdot d\vec{\tau} = 0 \quad \text{soit} \quad \oint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

Le champ magnétique est à flux conservatif. Par conséquent :

* Le flux magnétique se conserve à chaque instant à travers toute section d'un tube de champ magnétique : $\Phi_1 = \Phi_2$.

* Il est possible de définir le flux magnétique Φ qui traverse un contour (C) sans avoir à préciser la surface (S) qui s'appuie sur celui-ci.

En comparant avec l'expression du théorème de Gauss, on constate que le champ magnétique n'a pas de sources qui joueraient pour B le rôle que les charges jouent pour E. Autrement dit, il n'existe pas de charges magnétiques (de monopôles magnétiques).

- Equation de Maxwell-Faraday et loi de Faraday :

On évalue la circulation e du champ électrique le long d'un contour (C) fermé sur lequel s'appuie une surface (S) et on utilise l'équation de Maxwell-Faraday $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$:

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{(S)} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \, dS = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS \right)$$

Soit :

$$e = \oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad ; \quad \Phi = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

En régime permanent :

$$e = \oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (\text{et } \text{rot } \vec{E} = \vec{0})$$

Le champ électrique permanent est à circulation conservative. On peut définir un potentiel scalaire tel que :

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

En régime non permanent : la circulation e du champ s'identifie à la fém qui est induite sur (C). On démontre ainsi la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

dégagée expérimentalement par Faraday en 1831.

La circulation du champ E n'est plus nulle : un champ magnétique variable dans le temps est source d'un champ électrique à circulation non conservative.

IV) Equations de Maxwell dans un conducteur ohmique :

- Loi d'Ohm dans les conducteurs ohmique dans le cadre de l'ARQS :

La loi d'Ohm : pour un conducteur comme le cuivre par exemple, le temps de relaxation (« durée » de collision des porteurs de charges) est de l'ordre de $\tau \approx 10^{-14} s$. Or on sait que, dans un conducteur, la loi d'Ohm est satisfaite si le temps caractéristique d'évolution du système T vérifie $T \gg \tau$. Dans le cadre de l'ARQS, cette condition sera bien vérifiée.

Ainsi, dans le cadre de l'ARQS, la loi d'Ohm locale sera valable :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

- Courant de déplacement dans un conducteur ohmique :

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit, compte tenu de la loi d'Ohm locale :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\sigma \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On note T le temps d'évolution caractéristique de la distribution (D) (sa période d'évolution). On peut comparer le courant de conduction avec le courant de déplacement :

$$\frac{|\sigma \vec{E}|}{\left| \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right|} \approx \frac{\sigma E}{\epsilon_0 \frac{E}{T}} = \frac{\sigma T}{\epsilon_0}$$

Pour le cuivre de conductivité $\sigma = 6.10^7 \Omega^{-1}.m^{-1}$, ce rapport est de l'ordre de $10^{18} T$ (avec T en s). Ainsi, même si T est de l'ordre de $10^{-10} s$ (soit une fréquence de 10 GHz) :

$$\frac{|\sigma \vec{E}|}{\left| \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right|} \approx 10^8$$

Par conséquent, pour les régimes d'évolution justifiant l'emploi de la loi d'Ohm, le courant de déplacement est, au sein du conducteur ohmique, négligeable devant le courant de conduction.

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit alors :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E}$$

- Neutralité électrique :

On suppose qu'à l'instant $t = t_0$, il existe en un point M intérieur au conducteur une charge volumique $\rho(M, t_0)$. Comment varie dans le temps cette charge volumique ?

L'équation de Maxwell-Gauss, la loi d'Ohm locale et la conservation de la charge électrique :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad ; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad ; \quad \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

permettent d'écrire : $\operatorname{div} \frac{1}{\sigma} \vec{j} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ soit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho = 0$

Par intégration :

$$\rho(M, t) = \rho(M, t_0) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_d}\right) \quad \text{avec} \quad \tau_d = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$$

Pour le cuivre, $\tau_d \approx 4.10^{-14} s$: très rapidement, le conducteur devient neutre en volume :

$$\rho(M, t) = 0$$

Ainsi, comme en régime stationnaire, les charges s'accumulent au voisinage immédiat de la surface d'un conducteur, d'où l'intérêt de la notion de charge surfacique σ .

- Equations de Maxwell dans un conducteur :

Finalement, dans le cadre de l'ARQS, le champ EM vérifie les équations de Maxwell « simplifiées » suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E} \end{aligned} \right\}$$

Ainsi, dans un conducteur, l'ARQS ne diffère des régimes stationnaires que par la prise en compte des phénomènes d'induction (équation de Maxwell-Faraday).

Puisque $\rho = 0$, l'équation de conservation de la charge électrique conduit (à l'intérieur du conducteur) à :

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Le flux du vecteur courant volumique se conserve, entraînant ainsi la validité de la loi des branches et des nœuds dans le cadre de l'ARQS.

Remarque :

Il ne faut pas confondre ρ et ρ_m : au sein du conducteur, qui reste globalement neutre, $\rho = 0$; par contre, les porteurs de charges, dont la répartition de charges est ρ_m , contribuent au vecteur densité de courant selon la relation $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$.

V) Densité volumique d'énergie électromagnétique, vecteur de Poynting, équation locale de conservation de l'énergie :

1 – Puissance volumique cédée par le champ EM à la matière :

Un champ EM (\vec{E}, \vec{B}) va interagir avec des particules chargées et leur fournir de l'énergie. En effet, une charge q est soumise de la part de ce champ EM à la force de Lorentz, dont la puissance s'écrit :

$$P_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

En notant n le nombre de porteurs de charges par unité de volume, la puissance volumique cédée par le champ EM à la matière s'écrit donc :

$$p_L = \frac{dP_L}{d\tau} = nq \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Remarque : la puissance reçue par le champ EM de la part des porteurs de charge est $-p_L$ (permet de faire l'analogie avec p_s , puissance volumique reçue par un milieu conducteur de la chaleur de la part des sources de chaleur).

2 - Equation locale de conservation de l'énergie :

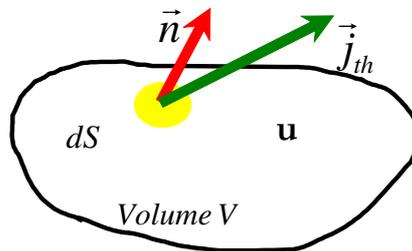
Rappel (équation de conservation de l'énergie lors des phénomènes conductifs, que l'on peut démontrer ici directement à 3D, voir cours sur les transferts thermiques) :

$$\frac{\partial u(M, t)}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}_{th}) + p_s(M, t) \quad (\text{u énergie interne volumique})$$

$$\text{ou} \quad \rho c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}_{th}) + p_s(M, t)$$

On considère un volume V délimité par une surface fermée S (fixe dans le référentiel d'étude).

L'énergie interne totale $U(t)$ comprise dans le volume à l'instant t vaut : $U(t) = \iiint_{(V)} u d\tau$ (u : énergie interne volumique)



La conservation de l'énergie interne permet d'écrire :

$$\frac{dU}{dt} = -\oint_{(S)} \vec{j}_{th} \cdot \vec{n} dS + \iiint_{(V)} p_s(M, t) d\tau$$

Le volume (V) étant fixe :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\iiint_{(V)} u(M, t) d\tau \right) = \iiint_{(V)} \frac{\partial u(M, t)}{\partial t} d\tau$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky, il vient :

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial u(M, t)}{\partial t} d\tau = \left(\iiint_{(V)} (-\text{div} \vec{j}_{th} + p_s(M, t)) d\tau \right)$$

Ce résultat étant vrai pour tout volume (V) , il vient :

$$\frac{\partial u(M, t)}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}_{th} + p_s(M, t)$$

Cette équation avait été démontrée dans le cas à une dimension.

Par analogie avec les équations de conservation (charge, masse, diffusion, chaleur), on souhaite obtenir une équation du type :

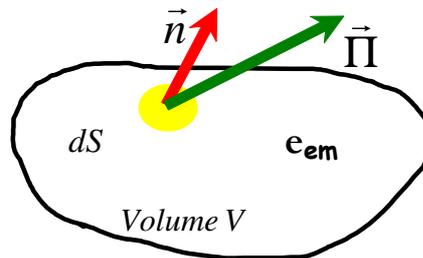
$$\frac{\partial e_{em}}{\partial t} = -\text{div } \vec{\Pi} + (-\vec{j} \cdot \vec{E})$$

où e_{em} désigne l'énergie électromagnétique volumique (contenue dans le champ EM) et $\vec{\Pi}$ un vecteur (appelé vecteur de Poynting) sensé donner le sens des échanges d'énergie EM (notamment par le calcul de son flux à travers une surface).

On considère un volume V délimité par une surface fermée S (fixe dans le référentiel d'étude).

L'énergie EM totale $E_m(t)$ comprise dans le volume à l'instant t vaut : $E_m(t) = \iiint_{(V)} e_{em} d\tau$

(e_{em} : énergie EM volumique)



La conservation de l'énergie EM permet d'écrire :

$$\frac{dE_m}{dt} = -\oint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot \vec{n} dS - \iiint_{(V)} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

Le volume (V) étant fixe :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\iiint_{(V)} e_{em}(M, t) d\tau \right) = \iiint_{(V)} \frac{\partial e_{em}(M, t)}{\partial t} d\tau$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky, il vient :

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial e_{em}(M, t)}{\partial t} d\tau = - \left(\iiint_{(V)} (\text{div } \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E}) d\tau \right)$$

Ce résultat étant vrai pour tout volume (V) , il vient :

$$\frac{\partial e_{em}(M, t)}{\partial t} = -\text{div } \vec{\Pi} - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

C'est l'équation locale de conservation de l'énergie EM. Elle est semblable à l'équation de conservation de la charge électrique (dans ce cas, il n'y a pas de terme de création de charges électriques) et à celle de conservation de la matière en diffusion (avec ici un terme de sources) :

$$\frac{\partial \rho_m(M, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial n(M, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_D = \sigma_s$$

Cette équation locale de conservation de l'énergie EM se détermine à partir des équations de Maxwell.

Le calcul suivant n'est pas au programme des CPGE :

On exprime le produit $\vec{j} \cdot \vec{E}$ en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B} - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{E}^2)}{\partial t}$$

En écrivant que :

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{B} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B}$$

Soit :

$$\vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B} = -\frac{1}{2} \frac{\partial (\vec{B}^2)}{\partial t} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})$$

Il vient :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial (\vec{B}^2)}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{E}^2)}{\partial t}$$

Soit :

$$\text{div}\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right] = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Ou encore :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right] = -\text{div}\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) + (-\vec{j} \cdot \vec{E})$$

On est ainsi amené à poser :

$$\text{Densité volumique d'énergie électromagnétique : } e_{em} = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$$

$$\text{Vecteur de Poynting : } \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Cette équation se réécrit alors :

$$\frac{\partial e_{em}}{\partial t} = -\text{div} \vec{\Pi} - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

et correspond bien alors à un bilan d'énergie EM.

Un bilan macroscopique de conservation de l'énergie EM est :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{(V)} e_{em} d\tau \right) = -\oiint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot \vec{n} dS - \iiint_{(V)} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

Ou :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{(V)} \left(\frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right) d\tau \right) = -\oiint_{(S)} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{n} dS - \iiint_{(V)} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

Remarque : (vitesse de propagation de l'énergie)

Par analogie avec l'équation de conservation de la charge, on peut définir la vitesse de propagation de l'énergie (notée \vec{u}) par la relation :

$$\vec{u} = \frac{\vec{\Pi}}{e_{em}}$$

3 – Bilan énergétique pour un fil conducteur ohmique :

On considère un fil conducteur ohmique de conductivité γ , assimilé à un cylindre d'axe (Oz) et de rayon a , soumis au champ électrique uniforme et permanent (à l'intérieur et à l'extérieur du fil) :

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$$

Le fil est alors parcouru par des courants de densité $\vec{j} = j \vec{u}_z = \gamma E_0 \vec{u}_z$ uniforme.

Le champ magnétique créé par cette distribution est de la forme $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$ et se calcule en écrivant le théorème d'Ampère. On obtient (en notant $I = \pi a^2 j$ le courant total qui traverse une section transverse du fil) :

Pour $r < a$:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r \vec{u}_\theta$$

Pour $r > a$:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Le vecteur de Poynting vaut :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Pour $r < a$:

$$\vec{\Pi} = -\frac{E_0 I}{2\pi a^2} r \vec{u}_r$$

Pour $r > a$:

$$\vec{\Pi} = -\frac{E_0 I}{2\pi r} \vec{u}_r$$

On rappelle l'expression générale de conservation de l'énergie EM :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{(V)} e_{em} d\tau \right) = -\oiint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot \vec{n} dS - \iiint_{(V)} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

Dans ce cas particulier (régime permanent) :

$$\oiint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot \vec{n} dS = -\iiint_{(V)} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = -\iiint_{(V)} \frac{j^2}{\gamma} d\tau$$

Physiquement, la puissance dissipée par effet Joule est évacuée en dehors du volume (V) en régime stationnaire.

On calcule le flux sortant du vecteur de Poynting à travers un cylindre d'axe (Oz) et de rayon r .

Lorsque $r < a$:

$$\Phi = -\frac{E_0 I}{\pi a^2} \pi r^2 h = -\frac{j^2}{\gamma} \pi r^2 h$$

Lorsque $r > a$:

$$\Phi = -\frac{E_0 I}{\pi a^2} \pi a^2 h = -\frac{j^2}{\gamma} \pi a^2 h$$

On reconnaît bien, dans les deux cas, la puissance absorbée par effet Joule dans le cylindre de rayon r considéré et on vérifie bien l'équation de conservation précédente.



Des applications classiques

Effet de peau :

On considère un métal de conductivité σ pour lequel on cherche une solution des équations de Maxwell correspondant à des champs sinusoïdaux de pulsation ω . On sait que, dans un métal, le courant de

déplacement $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant le courant de conduction $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. De façon plus précise, on

cherche pour le champ électrique une expression de la forme : $\vec{E} = E_0 f(x) \exp i(kx - \omega t) \vec{u}_z$, où \vec{u}_z désigne le vecteur unitaire de l'axe Oz parallèle à la surface du métal et $f(x)$ une fonction de la profondeur x à l'intérieur du métal que l'on va déterminer.

a) A partir de l'expression du champ \vec{E} , déterminer le champ magnétique \vec{B} . Vérifier que $\text{div} \vec{E} = 0$ et $\text{div} \vec{B} = 0$.

b) En négligeant le courant de déplacement, déterminer une équation différentielle vérifiée par $f(x)$ et montrer que : $f(x) = A \exp(-x / \delta)$. Donner les expressions de δ puis de k .

Pour le cuivre : $\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Calculer δ pour différentes fréquences (10^2 Hz, 10^3 Hz, 10^4 Hz et 10^5 Hz).

Solution :

On peut, à partir de l'expression du champ \vec{E} , déterminer le champ magnétique \vec{B} . En effet, l'équation de Maxwell-Faraday permet de déterminer \vec{B} :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 f(x) e^{i(kx - \omega t)} \end{pmatrix} = i\omega \vec{B} \quad \text{d'où} \quad -\frac{\partial}{\partial x} (E_0 f(x) e^{i(kx - \omega t)}) \vec{u}_y = i\omega \vec{B}$$

D'où l'expression du champ \vec{B} :

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} E_0 (-kf(x) + if'(x)) e^{i(kx - \omega t)} \vec{u}_y$$

On vérifie aisément que ces deux champs vérifient les équations de Maxwell-Flux et de Maxwell-Gauss :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \text{div } \vec{E} = 0$$

L'équation de Maxwell-Ampère, en négligeant le courant de déplacement, s'écrit :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E}$$

On en déduit l'équation :

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \sigma E$$

Soit :

$$\frac{1}{\omega} E_0 (-kf'(x) + if''(x) - ik^2 f(x) - kf'(x)) e^{i(kx - \omega t)} = \mu_0 \sigma E_0 f(x) e^{i(kx - \omega t)}$$

$$-2kf'(x) + i(f''(x) - k^2 f(x)) = \mu_0 \sigma \omega f(x)$$

On en déduit deux équations différentielles :

$$-2kf'(x) = \mu_0 \sigma \omega f(x) \quad \text{et} \quad f''(x) - k^2 f(x) = 0$$

qui s'intègrent en :

$$f(x) = A e^{-\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2k} x} \quad \text{et} \quad f(x) = A e^{-kx}$$

(Pour la deuxième solution, on a éliminé la solution en exponentielle croissante).

Par identification, on déduit :

$$k = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2k} \quad \text{soit} \quad \delta = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

\square est la longueur de pénétration dans le métal. Pour le cuivre ($\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$), on calcule δ pour différentes fréquences :

Fréquence	Longueur de pénétration
50 Hz	3 mm
50 MHz	$3 \square$ m
50 THz	3 nm

Lorsque la pulsation augmente, la profondeur de pénétration diminue comme l'inverse de la racine carrée de la pulsation.

Pour un métal parfait, la conductivité est infinie et la profondeur de pénétration devient nulle : une onde EM ne peut pénétrer dans un métal parfait (elle s'y réfléchit).

Remarque : si au lieu d'imposer une onde EM incidente, on impose le courant dans le conducteur, ce dernier crée un champ EM à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur ; le problème est régi par les mêmes équations et les mêmes conditions aux limites, ce qui conduit aux mêmes résultats pour l'effet de peau.

Les résultats obtenus restent valables pour une géométrie cylindrique ; ainsi, un câble cylindrique homogène de section droite circulaire ne peut être parcouru par des courants que dans une zone cylindrique superficielle d'épaisseur quelques \square . Il ne sert à rien pour transporter un courant électrique sinusoïdal d'utiliser un câble en cuivre de rayon nettement supérieur à \square .

Etude énergétique d'un câble en régime statique :

Un câble électrique est assimilé à un cylindre de longueur L, d'axe Oz et de rayon a, conducteur ohmique de conductivité σ , parcouru par des courants indépendants du temps, de densité volumique $\mathbf{j} = j\mathbf{u}_z$ uniforme dont l'intensité totale vaut $I = j\pi a^2$.

a) On néglige les effets de bord. Calculer en un point de la surface du conducteur le champ électrique, le champ magnétique et le vecteur de Poynting. En déduire la puissance électromagnétique reçue par le câble à travers sa surface latérale (S) et commenter.

b) A l'extérieur du câble, on admet les expressions des champs :

$$\vec{E} = \frac{I}{\sigma\pi a^2} \vec{u}_z \quad ; \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Vérifier la compatibilité de ces expressions avec les relations de passage à la surface du câble. Montrer que la puissance électromagnétique traversant un cylindre d'axe (Oz), de hauteur L et de rayon r supérieur à a est indépendante de r et commenter.

Energie magnétique stockée dans une bobine :

Une bobine de longueur ℓ , de rayon a et d'axe (Oz), est constituée par un enroulement de n spires circulaires jointives par unité de longueur. On utilisera pour l'étude qui suit l'approximation du solénoïde infini et on se place dans l'ARQS.

- 1) Déterminer le champ magnétique créé par la bobine parcourue par le courant I.
- 2) Quelle est l'énergie magnétique de la bobine ? En déduire la valeur de l'inductance L de la bobine.
- 3) La bobine est placée dans un circuit série avec une résistance R et un générateur de fém constante U_0 . Déterminer l'expression I(t) du courant dans la bobine en fonction du temps.
- 4) Calculer les champs magnétique et électrique créés par la bobine en tout point à l'instant t.
- 5) Déterminer les densités volumiques d'énergies magnétique et électrique. Que peut-on dire du rapport de ces deux énergies ? Conclure.
- 6) Quelle est l'expression du flux du vecteur de Poynting à travers la surface délimitant le volume de la bobine ? Commentaires.

Solution :

1) Le champ magnétique est $\vec{B} = \mu_0 n I(t) \vec{u}_z$.

2) L'énergie magnétique s'écrit de deux manières :

$$\frac{B^2}{2\mu_0} (\pi a^2 \ell) = \frac{1}{2} L I^2 \quad \text{d'ou} \quad L = \mu_0 n^2 \ell \pi a^2 = 100 \text{ mH}$$

3) Classiquement : $I(t) = \frac{e}{R} (1 - \exp(-t/\tau))$, $\tau = \frac{L}{R}$.

4) On note $B_0 = \frac{\mu_0 n e}{R}$; à l'intérieur, $\vec{B} = B_0 (1 - e^{-t/\tau}) \vec{u}_z$. A l'extérieur, le champ est nul.

Le champ électrique est orthoradial (faire une étude de symétries) ; il dépend de r et du temps.

On applique le théorème de Stokes en prenant un cercle comme contour :

$$\text{Si } r < a : \vec{E}(r,t) = -\mu_0 n \frac{r}{2} \frac{dI(t)}{dt} \vec{u}_\theta$$

$$\text{Si } r > a : \vec{E}(r,t) = -\mu_0 n \frac{a^2}{2r} \frac{dI(t)}{dt} \vec{u}_\theta$$

L'énergie volumique magnétique vaut : $e_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2}$. L'énergie volumique électrique vaut, par exemple en $r = a$ où elle est maximale : (en utilisant $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$)

$$e_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E(a)^2 = \frac{a^2 \mu_0 n^2}{8c^2} \left(\frac{dI}{dt} \right)^2$$

On évalue le rapport :

$$\frac{e_E(r=a)}{e_B} = \frac{a^2}{4c^2} \left(\frac{(dI/dt)}{I} \right)^2 = \frac{a^2}{4c^2} \frac{1}{\tau^2} \approx 1,7 \cdot 10^{-5} \quad (\text{Avec } R = 10 \text{ k}\Omega)$$

L'énergie électrique est négligeable ; dans l'ARQS, une bobine est essentiellement magnétique !

5) On évalue le vecteur de Poynting en $r = a$:

$$\Pi(a,t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \left(-\mu_0 n \frac{a}{2} \frac{dI(t)}{dt} \vec{u}_\theta \right) \wedge (\mu_0 n I \vec{u}_z) = -\frac{1}{2} \mu_0 n^2 a I(t) \frac{dI(t)}{dt} \vec{u}_r$$

Le flux entrant à travers la bobine est alors :

$$\Phi = \left(\frac{1}{2} \mu_0 n^2 a I(t) \frac{dI(t)}{dt} \right) 2\pi a l = LI(t) \frac{dI(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right)$$

Ce flux correspond bien à la variation de l'énergie emmagasinée sous forme magnétique par la bobine par unité de temps.

Effet de peau dans un conducteur ohmique plongé dans un solénoïde :

Un solénoïde cylindrique d'axe (O,z) de rayon r_0 comportant n spires par mètre est parcouru par un courant variable dont l'intensité est $i(t) = I \cos(\omega t)$. On admet que le champ magnétique propre créé par le solénoïde est uniforme à l'intérieur ($r < r_0$) $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$, nul à l'extérieur ($r > r_0$) et que le champ électrique est orthoradial $\vec{E} = E(r,t) \vec{u}_\theta$.

1. Déterminer le champ électrique \vec{E} à l'intérieur du solénoïde.
2. On place un cylindre massif long de conductivité γ , de hauteur h et de rayon $r_1 < r_0$ à l'intérieur du solénoïde. Déterminer la densité de courant \vec{j} créée par le champ électrique \vec{E} . Quel est l'effet observable associé à ces courants ?
3. En déduire le champ magnétique \vec{B}_i créé sur l'axe par les courants et donner la condition sous laquelle ce champ (appelé champ induit) est négligeable devant celui créé par le solénoïde.
4. Si cette condition n'est pas vérifiée, indiquer sans justification la répartition des courants dans le cylindre.

Solution :

1) On utilise l'expression intégrale de l'équation de MF (obtenue avec le théorème de Stokes) :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n} dS \right) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Avec les hypothèses de l'énoncé :

$$2\pi r E(r) = -\mu_0 n \frac{di}{dt} \pi r^2 \quad \text{soit} \quad \vec{E} = -\frac{\mu_0 n r}{2} \frac{di}{dt} \vec{u}_\theta$$

2) Loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\frac{\gamma \mu_0 n r}{2} \frac{di}{dt} \vec{u}_\theta = \frac{\gamma \mu_0 n r}{2} I \omega \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$.

Echauffement dû à l'effet Joule :

$$p_j = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{\mu_0^2 n^2 r^2}{4} \left(\frac{di}{dt} \right)^2$$

3) On a des solénoïdes emboîtés ; pour un solénoïde situé entre r et $r + dr$, le champ magnétique sur l'axe est :

$$d\vec{B}_i = \frac{\mu_0^2 nr}{2} I \omega \sin(\omega t) dr \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}_i = \frac{\mu_0^2 n}{2} I \omega \sin(\omega t) \vec{u}_z \int_0^{r_1} r dr$$

Finalement :

$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0^2 n}{4} I \omega r_1^2 \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

On évalue le rapport des deux champs magnétiques :

$$\frac{B_i}{\mu_0 n I} \approx \frac{\mu_0}{4} \omega r_1^2 \ll 1 \quad \text{si} \quad r_1 \ll \sqrt{\frac{4}{\mu_0 \gamma \omega}} = \sqrt{2} \delta$$

Soit $r_1 \ll$ l'épaisseur de peau.

4) Sinon, on a effet de peau et le courant n'existe que sur la partie périphérique du cylindre de l'ordre de quelques δ .
