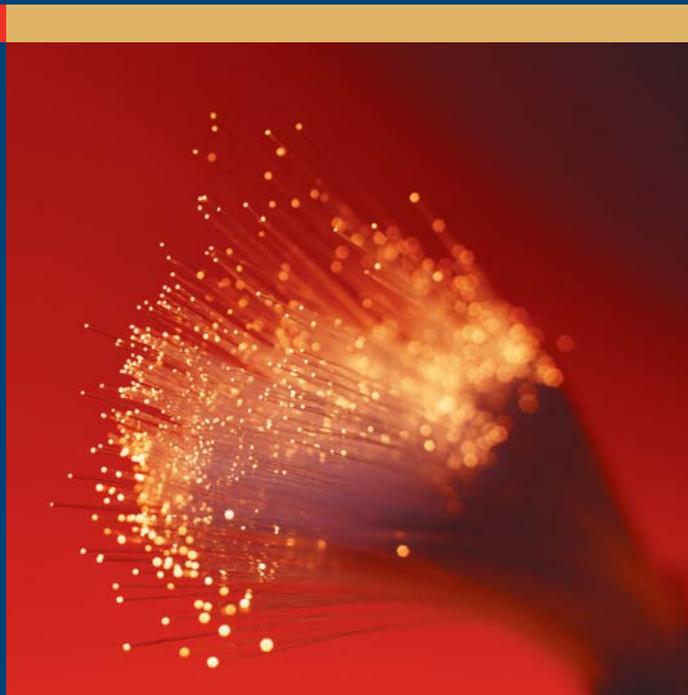


Optique

Eugene Hecht



Traduction française dirigée par
Sébastien Matte la Faveur et Jean-Louis Meyzonnette

PEARSON

Préface de Pierre Léna

Optique

4^e édition

Eugene Hecht

Adelphi University

Traduction française dirigée par Sébastien Matte la Faveur
et Jean-Louis Meyzonnette (Institut d'Optique/École Supérieure d'Optique)



Le présent ouvrage est la traduction de *Optics, 4th edition*, d'Eugene Hecht, publié par Pearson Education Inc sous la marque Benjamin Cummings.

Authorized translation from the English language edition, entitled OPTICS, 4th Edition by HECHT, EUGENE, published by Pearson Education, Inc, publishing as Benjamin Cummings, Copyright © 2002.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

FRENCH language edition published by PEARSON EDUCATION FRANCE, Copyright © 2005.

Publié par Pearson Education France
47 bis, rue des Vinaigriers
75010 PARIS
Tél. : 01 72 74 90 00

Titre original : *Optics*

Mise en page : Compo-Méca

ISBN : 978-2-7440-4129-7
Copyright © 2010 Pearson Education France

ISBN original : 0-8053-8566-5
Copyright © 2002 Pearson Education Inc.

Tous droits réservés

Tous droits réservés

Tous les noms de produits ou marques cités dans ce livre sont des marques déposées par leurs propriétaires respectifs. Aucune représentation ou reproduction, même partielle, autre que celles prévues à l'article L 122-5 2° et 3° a) du code de la propriété intellectuelle ne peut être faite sans l'autorisation expresse de Pearson Education France, ou, le cas échéant, sans le respect des modalités prévues à l'article L 122-10 dudit code.

Préface

à l'édition française

Voici, à coup sûr, un ouvrage monumental qui se propose de couvrir l'ensemble de l'Optique, c'est-à-dire des propriétés de la lumière, de sa propagation dans le vide et dans la matière, ainsi que de certaines de ses interactions avec celle-ci. En outre, ce traité présente un certain nombre d'applications fondamentales et modernes, comme la conception des instruments d'optique, des lasers, des cristaux liquides, des fibres optiques, de l'imagerie holographique, etc.

L'approche choisie par l'auteur est classique, puisqu'il traite successivement du modèle géométrique de la lumière (rayons, aberrations géométriques), du modèle ondulatoire avec ses phénomènes associés (polarisation, interférences, diffraction, optique de Fourier et cohérence). Enfin, un chapitre de conclusion, intitulé *L'optique moderne : lasers et autres sujets*, traite quelques aspects de l'interaction entre lumière et matière. Un effort louable est fait pour couvrir l'ensemble du spectre électromagnétique, et non pas seulement la lumière visible et ses deux domaines proches (infrarouge et ultraviolet). En outre, l'auteur de cette préface ne peut que se réjouir de voir autant d'exemples et d'illustrations empruntées à sa discipline, l'astrophysique, dont le mariage avec l'optique fut et demeure si fécond.

Il n'existait pas jusqu'ici, en langue française, d'ouvrage récent qui renouvelle et actualise le monumental *Optique* de Georges Bruhat, dans lequel étudia toute une génération de physiciens. Celui-ci tente de combler ce vide et y réussit en grande partie par sa qualité pédagogique, confortée par d'excellentes illustrations. L'auteur intègre heureusement les trois modèles de la lumière, présente même rapidement la synthèse qu'en fit Richard Feynman par l'électrodynamique quantique, et sait passer de l'un à l'autre de ces modèles au fil de ses explications. Seul le traitement, qui d'ailleurs n'est pas simple,

de la quantification des interactions microscopiques entre lumière et matière est un peu rapide. Cette volonté de cohérence fait de cet ouvrage un outil de travail précieux pour les étudiants ou les ingénieurs qui voudront avoir, avant de se spécialiser, une vue globale de l'optique moderne, avec un outillage mathématique indispensable, mais raisonnablement limité.

Que l'on permette toutefois au préfacer d'exprimer ici un regret. Il apprécie les très nombreuses références historiques qui émaillent le livre, après un premier chapitre panoramique et passionnant sur l'histoire de l'optique : rien de tel que l'histoire pour redonner à la science, et à sa progression, sa saveur d'humanité. Le lecteur français se réjouira ici de retrouver la contribution considérable de ses compatriotes qui, avec les noms de Fresnel, Fourier, Cornu, Babinet, Fizeau, Niepce, Fabry, Pérot, etc., ont illuminé le XIX^e siècle. Il s'étonnera, en revanche, de voir leurs successeurs (Kastler, Jacquinot, Cohen-Tannoudji, Maréchal, Aspect, Labeyrie, etc.) pratiquement ignorés par le texte lorsqu'il s'agit du XX^e siècle. Cette négligence vis-à-vis de l'école française moderne d'optique est d'autant plus regrettable que cette traduction française va contribuer à en conforter encore l'excellence !

Cela étant dit, merci à l'éditeur, ainsi qu'à Sébastien Matte la Faveur et Jean-Louis Meyzonnette, Jean-Philippe Quiviger et Laurent Sans qui ont produit une traduction fluide d'excellente qualité, de mettre cet ouvrage de référence à la disposition du public universitaire et professionnel français : le *phénomène lumière* et ses applications ont encore de beaux jours devant eux !

Pierre Léna
de l'*Académie des sciences*

Avant-propos

des traducteurs

Ce livre constitue la première traduction en langue française de l'ouvrage de référence *Optics* (dans sa 4^e édition en langue anglaise) du physicien américain Eugene Hecht. Il traite, en 700 pages environ, de l'ensemble de l'optique, depuis les connaissances fondamentales (optique géométrique, optique physique, ondes, etc.) jusqu'aux domaines plus particuliers ou plus récents (optique de Fourier, laser, optique non linéaire, holographie, etc.) dont ne parlent normalement que des ouvrages plus spécialisés. Très didactique, le livre d'Eugene Hecht se distingue par son souci de clarté et de synthèse, par ses très nombreuses illustrations, et par ses exercices d'application variés.

Par son contenu et par la complexité progressive des sujets traités, ce livre peut constituer un ouvrage d'initiation ou d'approfondissement, parfaitement adapté aux étudiants et aux enseignants scientifiques du premier et du deuxième cycles universitaires, ainsi qu'à ceux des écoles d'ingénieurs.

Le chapitre 1 reprend l'histoire de l'optique et explique l'évolution des connaissances dans ce domaine de la science. Autant d'éléments parascientifiques qui « humanisent » les grandes étapes ainsi que les grands noms de cette discipline, et qui en facilitent la compréhension.

Le chapitre 2 pose les bases mathématiques de la théorie ondulatoire, au moyen de rappels généralement déjà connus, mais formulés ici de manière à rendre les connaissances existantes les plus claires possible.

Le chapitre 3 étudie plus spécifiquement les propriétés des ondes électromagnétiques. Il rappelle également les notions d'énergie et de quantité de mouvement, et décrit les différents principes et les catégories de rayonnement. Il traite aussi les différents mécanismes d'interaction entre lumière et matière, et se termine par une introduction à la théorie quantique des champs.

Le chapitre 4, consacré à la propagation de la lumière, s'intéresse aux phénomènes de transmission, de réflexion, et de réfraction en suivant une double approche : la première reprend les notions générales d'ondes et de rayons, et la seconde s'appuie sur la théorie électromagnétique. Il présente également une analyse simplifiée de l'électrodynamique

quantique, afin d'apporter une interprétation moderne de ces phénomènes.

Le chapitre 5 est le plus volumineux, mais il ne présente pas de difficulté notable : il concerne les bases de l'optique géométrique et la théorie paraxiale. Il apporte une description méticuleuse des différents composants optiques (lentilles, miroirs, prismes, etc.), suivie d'une analyse des principaux systèmes optiques. Ce chapitre essentiel comporte également un paragraphe sur les fibres optiques, ainsi que sur les corrections de front d'onde et les lentilles gravitationnelles.

Dans la continuité du chapitre qui le précède, le chapitre 6 va plus loin. Il dépasse les deux approximations de la théorie paraxiale, lentilles minces et théorie au premier ordre, et étudie le cas des lentilles épaisses en tenant compte des aberrations. Ce chapitre est donc très intéressant pour apprécier les limites et les subtilités de la conception optique.

Le chapitre 7 introduit les bases conceptuelles qui permettent de comprendre ce qui se passe lorsque deux ondes lumineuses se superposent dans une région de l'espace. Ce chapitre permet ainsi de découvrir formellement les différents phénomènes où ce processus intervient, tels que la polarisation, les interférences et la diffraction, étudiées dans les chapitres suivants.

Le chapitre 8 est consacré à l'étude du phénomène de polarisation. Il invite ainsi le lecteur à étudier et à assimiler la forme exacte que prend la lumière et les moyens dont nous disposons pour observer, produire, changer et utiliser son état de polarisation.

Le chapitre 9 est consacré à l'étude des phénomènes d'interférences, grâce à l'approche simple de la théorie des ondes qui permet d'en définir les conditions adéquates. La suite du chapitre comporte l'étude de quelques-uns des dispositifs les plus souvent utilisés pour produire de tels phénomènes.

La diffraction est abordée au chapitre 10 qui, après quelques considérations générales, décrit les conditions et les caractéristiques de la diffraction de Fraunhofer, puis de celle de Fresnel. Enfin, deux petits paragraphes sont consacrés à la théorie de la diffraction scalaire de Kirchhoff, ainsi qu'à la diffraction par les bords.

Le chapitre 11 continue la discussion sur la méthode de Fourier, introduite au chapitre 7. Il permet en particulier de comprendre la puissance de cette méthode pour analyser la formation des images par les systèmes optiques, et pour caractériser l'amplitude et la phase des différentes ondes. Le chapitre 12 est une introduction à la théorie de la cohérence, qui fait actuellement l'objet d'intenses recherches. Bien que ses subtilités exigent des connaissances allant bien au-delà du niveau de ce livre, ce chapitre en expose néanmoins quelques-unes des idées de base, telles que la visibilité des franges, la fonction de cohérence mutuelle et le degré de cohérence. Il fait également le lien entre ce dernier et l'interférométrie stellaire.

Enfin, le chapitre 13 est consacré aux domaines les plus récents de l'optique. Les premiers paragraphes exposent les principes et les applications des lasers, ainsi que la notion d'information optique. Par la suite, deux autres parties s'intéressent à l'holographie et à l'optique non linéaire.

Chaque chapitre est complété par des énoncés de problèmes dont la plupart sont corrigés à la fin de l'ouvrage. Certains permettent au lecteur d'évaluer sa compréhension du sujet, d'autres apportent quelques compléments intéressants.

Cet ouvrage possède les qualités attendues d'un livre d'enseignement scientifique moderne. Bien sûr, il comporte les formules fondamentales essentielles à la résolution de problèmes types, mais il présente aussi l'optique en favorisant une compréhension qualitative des phénomènes et en faisant appel au « sens physique » du lecteur, deux éléments qui sont essentiels dans la formation des jeunes scientifiques.

À la différence de bien des entreprises de traduction, ce projet a vu le jour sur l'initiative des traducteurs. Ceux-ci, ayant découvert les grandes qualités de l'ouvrage d'Eugene Hecht, ont en effet estimé qu'une traduction de ce manuel serait une plus-value académique pertinente pour la littérature scientifique francophone. Nous désirons donc remercier la maison d'édition Pearson Education France, qui a accueilli avec intérêt notre projet de traduction de cet ouvrage. Nous désirons également remercier les personnalités, enseignants universitaires et

d'écoles d'ingénieurs, qui ont partagé notre enthousiasme et nous ont soutenus pour appuyer le bien-fondé de notre démarche : Pierre Léna, de l'Académie des sciences, Éric Lacot, maître de conférences à l'université Joseph Fourier de Grenoble, sans oublier l'aimable soutien collectif de l'équipe des enseignants et chercheurs en optique de la Faculté des sciences et techniques de Limoges : Alain Barthélémy, Frédéric Louradour, Bernard Colombeau, Laurent Delage, Agnès Desfarges-Berthelemot, Claude Froehly, Ludovic Grossard, Vincent Kermene, François Reynaud et Michel Vampouille, membres de l'équipe de recherche d'optique cohérente et non linéaire, de même que Philippe Dibin, Pierre Faugeras, Sébastien Février, Philippe Leproux, Dominique Pagnoux et Philippe Roy, membres de l'équipe de recherche d'optique guidée et intégrée. Enfin, nous tenons à remercier M^{lle} Isabelle Ronzetti, du département d'anglais de l'université Montpellier III, ainsi que M^{lle} Agnès Jany, pour leurs conseils de logistique et de traduction, qui nous ont été toujours bien utiles.

La traduction d'un ouvrage si long et si riche ne pouvait être qu'une œuvre collective. La traduction originale a été élaborée par trois anciens élèves de l'École Supérieure d'Optique d'Orsay : Sébastien Matte la Faveur, Laurent Sans, Jean-Philippe Quiviger, ainsi que par Jonathan Benadiba, du département de physique de l'Université de New York (NYU). Jean-Louis Meyzonnette, professeur à l'Institut d'optique théorique et appliquée, École Supérieure d'Optique d'Orsay, en a assuré, par la suite, la relecture et la correction.

Étant donné l'ampleur de la tâche, il peut certainement rester quelques erreurs ou oublis de traduction, propres à toute première édition. Nous invitons cordialement le lecteur à nous signaler tout problème, afin que nous puissions toujours améliorer la qualité de cet ouvrage. Nous espérons finalement que ce livre saura susciter autant d'enthousiasme pour ses lecteurs qu'il en a suscité pour ceux qui ont contribué à sa traduction.

Sébastien Matte la Faveur
Jean-Louis Meyzonnette

Table des matières

1 Bref historique 1

- 1.1 Prologue 1
- 1.2 Au tout début 1
- 1.3 À partir du xvii^e siècle 2
- 1.4 Le xix^e siècle 4
- 1.5 L'optique au xx^e siècle 7

2 Mouvements ondulatoires 11

- 2.1 Ondes à une dimension 12
- 2.2 Ondes harmoniques 16
- 2.3 Phase et vitesse de phase 19
- 2.4 Le principe de superposition 21
- 2.5 La représentation complexe 22
- 2.6 Phaseurs et addition d'ondes 25
- 2.7 Ondes planes 26
- 2.8 L'équation d'onde différentielle à trois dimensions 29
- 2.9 Ondes sphériques 30
- 2.10 Ondes cylindriques 33
Exercices et problèmes 34

3 Théorie électromagnétique, photons et lumière 39

- 3.1 Les lois élémentaires de la théorie électromagnétique 40
- 3.2 Ondes électromagnétiques 48
- 3.3 Énergie et quantité de mouvement 51
- 3.4 Rayonnement 63
- 3.5 La lumière dans la matière 71
- 3.6 Le spectre électromagnétique du photon 79
- 3.7 La théorie quantique des champs 86
Exercices et problèmes 88

4 La propagation de la lumière 93

- 4.1 Introduction 93
- 4.2 Diffusion de Rayleigh 93
- 4.3 Réflexion 102

4.4 Réfraction 107

- 4.5 Principe de Fermat 112
- 4.6 L'approche électromagnétique 117
- 4.7 Réflexion totale interne 127
- 4.8 Propriétés optiques des métaux 132
- 4.9 Aperçus de l'interaction entre la lumière et la matière 137
- 4.10 La réflexion et la réfraction selon Stokes 141
- 4.11 Photons, ondes et probabilités 143
Exercices et problèmes 147

5 Optique géométrique 155

- 5.1 Introduction 155
- 5.2 Les lentilles 156
- 5.3 Diaphragmes 178
- 5.4 Miroirs 182
- 5.5 Prismes 193
- 5.6 Fibres optiques 201
- 5.7 Systèmes optiques 211
- 5.8 Correction de front d'onde 238
- 5.9 Lentille gravitationnelle 244
Exercices et problèmes 246

6 Compléments

d'optique géométrique 257

- 6.1 Systèmes de lentilles épaisses 257
- 6.2 Tracé de rayons 260
- 6.3 Aberrations 266
- 6.4 Systèmes GRIN 287
- 6.5 Remarques pour conclure 289
Exercices et problèmes 291

7 Superposition des ondes 295

- 7.1 Addition d'ondes de même fréquence 296
- 7.2 Addition d'ondes de fréquences différentes 308

7.3	Ondes périodiques anharmoniques	316
7.4	Ondes non périodiques	322
	Exercices et problèmes	334
8	Polarisation	339
8.1	La nature de la lumière polarisée	339
8.2	Polariseurs	345
8.3	Dichroïsme	347
8.4	Biréfringence	350
8.5	Diffusion et polarisation	358
8.6	Polarisation par réflexion	362
8.7	Retardateurs	366
8.8	Polariseurs circulaires	371
8.9	Polarisation de la lumière polychromatique	372
8.10	Activité optique	374
8.11	Effets optiques induits. Modulateurs optiques	380
8.12	Cristaux liquides	385
8.13	Une description mathématique de la polarisation	388
	Exercices et problèmes	394
9	Interférences	401
9.1	Considérations générales	402
9.2	Conditions d'interférence	406
9.3	Interféromètres à division de front d'onde	409
9.4	Interféromètres à division d'amplitude	416
9.5	Types et localisation des franges d'interférence	430
9.6	Interférence à ondes multiples	432
9.7	Application des couches simples et des multicouches	441
9.8	Applications de l'interférométrie	447
	Exercices et problèmes	454
10	Diffraction	459
10.1	Considérations préliminaires	459
10.2	La diffraction de Fraunhofer	468
10.3	Diffraction de Fresnel	502
10.4	Théorie de la diffraction scalaire de Kirchhoff	527
10.5	Ondes de diffraction par les bords	530
	Exercices et problèmes	532
11	Optique de Fourier	537
11.1	Introduction	537
11.2	Transformées de Fourier	537
11.3	Applications optiques	547
	Exercices et problèmes	574
12	Bases de la Théorie de la Cohérence	577
12.1	Introduction	577
12.2	Visibilité	579
12.3	Fonction de cohérence mutuelle et degré de cohérence	584
12.4	Cohérence et interférométrie stellaire	590
	Exercices et problèmes	595
13	L'optique moderne : lasers et autres sujets	597
13.1	Lasers et lumière laser	597
13.2	Imagerie et distribution spatiale de l'information optique	623
13.3	Holographie	639
13.4	Optique non linéaire	657
	Exercices et problèmes	662
	Annexes	667
	Solutions des problèmes corrigés	676
	Bibliographie	703
	Index	707



Bref historique

1.1 Prologue

Dans le présent ouvrage, nous allons développer une analyse formelle des différents aspects des sciences optiques, en portant un intérêt tout particulier aux résultats contemporains. Le sujet regroupe une vaste somme de connaissances accumulées sur près de trois mille années de notre histoire. Avant de nous diriger vers l'étude moderne de l'optique, il est aussi important de retracer brièvement la route qui a mené aux derniers aboutissements de cette science, ne serait-ce simplement que pour mettre en perspective le chemin parcouru et la somme des connaissances accumulées.

1.2 Au tout début

Les origines de l'optique remontent à l'Antiquité. L'Exode 38:8 (1200 ans av. J.-C.) raconte comment Bezaléel fit fondre « les miroirs des femmes » pour réaliser un bassin cérémoniel. Les premiers miroirs étaient effectivement faits de cuivre ou de bronze poli et plus tard, de spéculum, un alliage de cuivre riche en étain. Des fouilles effectuées dans la vallée du Nil, à proximité de la pyramide du pharaon Sésostris II (1900 av. J.-C.) ont permis de retrouver de tels objets provenant de l'Égypte ancienne. Plus tard, les philosophes grecs : Pythagore, Démocrite, Empédocle, Platon, Aristote et d'autres, développèrent plusieurs théories sur la nature de la lumière. L'idée de propagation rectiligne de la lumière ainsi que la loi de la réflexion furent énoncées par Euclide (300 av. J.-C.) dans son ouvrage, *Catoptrique*. Héron d'Alexandrie tenta, lui, d'expliquer ces deux phénomènes en affirmant que la lumière passait par le plus court chemin entre deux points. Dans la comédie *Les Nuées*, Aristophane (424 av. J.-C.) fait aussi allusion à l'optique et aux fameux

miroirs ardents (lentilles convergentes utilisées pour allumer un feu). De même, la coupure apparente des objets à moitié immergés dans l'eau est mentionnée dans *La République* de Platon. La réfraction fut, elle, étudiée par Cléomède (50 apr. J.-C.) et par la suite par Claude Ptolémée (130 apr. J.-C.) qui établit une correspondance assez précise entre les angles d'incidence et les angles de réfraction pour plusieurs milieux. D'autre part, il est clair, d'après les témoignages de l'historien Pline (23-79 apr. J.-C.), que les Romains avaient réussi à construire des miroirs ardents. Plusieurs sphères de verres et de cristal ont été retrouvées dans des ruines romaines et une lentille plan-convexe a même été mise au jour à Pompéi. D'ailleurs, le philosophe romain Sénèque (4 av. J.-C., 65 apr. J.-C.) faisait déjà remarquer qu'un globe de verre rempli d'eau pouvait être utilisé pour obtenir un effet loupe. Il est sans doute possible que certains artisans romains aient utilisé des verres grossissants pour des travaux de précision.

Après la chute de l'Empire romain d'Occident (475 apr. J.-C.) qui marqua le début d'une période sombre de notre histoire, il ne devait y avoir en Europe que peu, voire aucun, progrès scientifique pendant longtemps. Autour du bassin méditerranéen, l'hégémonie culturelle gréco-romaine déclina avec les conquêtes et l'expansion de l'Islam. Après celles d'Athènes et de Rome, la culture des nouveaux conquérants s'imposa enfin et l'optique fut à nouveau étudiée et approfondie, en particulier par le savant Alhazen (vers 1000 apr. J.-C.). Celui-ci améliora la formulation de la loi de la réflexion en précisant que les rayons incident et réfléchi appartenaient à un même plan, perpendiculaire à l'interface. Il étudia aussi les miroirs sphériques et paraboliques et donna une description détaillée de l'œil humain.

À la fin du treizième siècle, l'Europe commença à émerger de sa torpeur intellectuelle. Les travaux d'Alhazen furent traduits en latin et influencèrent les érudits comme Robert

Grosseteste (1175-1253), évêque de Lincoln ou le mathématicien polonais Vitello. Ces derniers furent à l'origine d'un regain d'intérêt pour l'étude de l'optique. Leurs travaux furent portés à l'attention du franciscain Roger Bacon (1215-1294), qui est généralement considéré comme le premier scientifique au sens moderne du terme. Il semble que c'est grâce à Bacon que fut introduite l'idée d'utiliser des verres pour corriger la vision. Il est même possible que Bacon ait suggéré la possibilité de combiner des lentilles pour réaliser une lunette d'observation. Le savant anglais avait aussi quelques idées plus théoriques sur la manière dont les rayons pouvaient traverser une lentille. Après sa mort, la connaissance de l'optique recommença à piétiner. Cependant, à partir du milieu du XIV^e siècle, des peintures européennes montrent déjà des moines portant des lunettes. C'est aussi à cette époque que les alchimistes mirent au point un mélange liquide d'étain et de mercure qui, déposé sur la face arrière d'un verre plan, permettait de réaliser des miroirs. Un siècle plus tard, Léonard de Vinci (1452-1519) décrivait le principe de la chambre noire (camera obscura), popularisée plus tard par le travail de Gian Battista Della Porta (1535-1615) qui proposait d'ailleurs des assemblages comportant plusieurs miroirs et combinaisons de lentilles convergentes et divergentes (*Magia naturalis*, 1589).

Voilà un modeste compte-rendu des personnages et des événements qui ont composé ce que nous pouvons appeler la première période de l'optique. Cependant, les contributions de ce « premier âge » furent, somme toute, relativement modestes. Le véritable accomplissement de cette science devait venir plus tard, au XVII^e siècle.

1.3 À partir du XVII^e siècle

Si l'on ne sait pas exactement qui a véritablement inventé la lunette d'observation, les archives de La Haye indiquent que le 2 octobre 1608, un Hollandais nommé Hans Lippershey (1587-1619), lunetier de son état, déposa une demande de brevet pour ce nouvel objet. À Padoue, Galilée (1564-1642), qui avait entendu parler de l'invention, construisit son propre instrument en quelques mois en polissant à la main les différentes lentilles. Le microscope composé fut inventé à la même époque, sans doute par le Hollandais Zacharias Janssen (1588-1632). En Italie, le Napolitain Francisco Fontana (1580-1656) eut alors l'idée de remplacer l'oculaire concave des microscopes par une lentille convexe ; un perfectionnement similaire fut apporté à la lunette d'observation par l'astronome allemand Johannes



Johannes Kepler (1571–1630) (Burndy Library)

Kepler (1571-1630). En 1611, Kepler publiait sa *Dioptrice*. Il y décrivait le phénomène de réflexion totale et avait abouti à la loi de la réfraction avec l'approximation des angles petits, pour laquelle les angles d'incidence et de réfraction sont proportionnels. Il en déduisait un traitement de l'optique au premier ordre pour les systèmes de lentilles minces et décrivait également le fonctionnement détaillé de la lunette de Kepler (avec oculaire convergent) ainsi que de la lunette de Galilée (avec oculaire divergent). En 1621, Willebrord Snell (1591-1626), professeur à Leyde, découvrit empiriquement la *loi de la réfraction généralisée*. Cet événement fut une découverte majeure pour l'optique. En expliquant précisément comment les rayons de lumière étaient redirigés en traversant la frontière entre deux milieux, Snell ouvrait d'un coup la porte de l'optique appliquée moderne. À son tour, René Descartes (1596-1650) fut le premier à publier la formulation aujourd'hui bien connue de la loi



René Descartes par Frans Hals (1596–1650) (© Musées Nationaux)



Sir Isaac Newton (1642–1727) (Burndy Library)

de la réfraction en termes de sinus. Descartes développa sa formulation en utilisant un modèle dans lequel la lumière était considérée comme une pression transmise par un milieu élastique, comme nous pouvons le lire dans sa *Dioptrique* (1637) :

souvenez-vous de la nature que j'ai attribuée à la lumière, quand j'ai dit qu'elle n'était autre chose qu'un certain mouvement ou une action reçue en une matière très subtile qui remplit les pores des autres corps...

L'univers devenait un tout. Pierre de Fermat (1601-1665), insatisfait des présomptions de Descartes, fit résulter la loi de la réflexion du *principe du temps minimal* qu'il avait lui-même établi en 1657.

Le phénomène de diffraction, c'est-à-dire la déviation de la propagation rectiligne qui arrive quand la lumière rencontre une obstruction, fut observé pour la première fois par le professeur Francesco Maria Grimaldi (1618-1663) au Collège jésuite de Bologne. Il remarqua d'étranges bandes lumineuses à la limite de l'ombre d'un bâtonnet éclairé par une petite source. Plus tard, Robert Hooke (1635-1703), chargé d'expérimentations pour la Royal Society de Londres, observa à son tour les effets de ce phénomène. Il fut le premier à étudier les interférences colorées réalisées avec des lames minces (*Micrographia*, 1665). Il proposa l'idée que la lumière était un mouvement vibratoire rapide d'un milieu, se propageant à une très grande vitesse. De plus, « chaque pulsation ou vibration du corps lumineux doit générer une sphère » ; cette affirmation marqua le

début de la théorie ondulatoire. Moins d'un an après la mort de Galilée, Isaac Newton (1642-1727) naissait. Il devait apporter un esprit nouveau pour la science : celui de raisonner sur l'observation et non de se livrer à des hypothèses spéculatives. Aussi, il resta longtemps ambivalent sur la véritable nature de la lumière. Était-elle corpusculaire, un courant de particules, comme certaines personnes le soutenaient ? Ou bien était-ce plutôt une onde dans un milieu omniprésent : l'éther ? Fort de ces interrogations, le jeune Newton, âgé de 23 ans, entreprit sa célèbre expérience sur la dispersion :

Je me suis procuré un prisme de verre triangulaire pour faire des expériences sur les fameux phénomènes de couleurs...

Newton en conclut que la lumière blanche était composée d'un mélange d'une certaine gamme de couleurs indépendantes. Il estima alors que ce devait être les corpuscules associés aux différentes couleurs qui excitaient l'éther suivant des vibrations caractéristiques. Cependant, bien que son travail ait couvert à la fois les théories ondulatoires et corpusculaires de la lumière, Newton devait, en vieillissant, négliger davantage le point de vue ondulatoire.

Après quelques expérimentations assez limitées, Newton renonça également à l'idée d'éliminer l'aberration chromatique des lentilles des lunettes d'approche. Concluant à tort que cela ne pouvait être réalisé, il se tourna vers les configurations à miroirs. Le premier télescope à réflexion que réalisa Newton en 1668 ne faisait que 6 pouces (environ 15 cm) de long et 1 pouce (2,5 cm) de diamètre, mais il grossissait déjà 30 fois.

Alors qu'en Angleterre, Newton prenait parti pour la théorie corpusculaire, Christiaan Huygens (1629-1695),



Christiaan Huygens (1629–1695) (Rijksmuseum voor de geschiedenis der natuurwetenschappen, AIP Emilio Segrè Visual Archives)

continuait, sur le continent, ses recherches sur la théorie ondulatoire. Contrairement à Descartes, Hooke et Newton, Huygens arriva correctement à la conclusion que la lumière ralentit en pénétrant dans un milieu plus dense. En utilisant la théorie ondulatoire, il fut capable de dériver les lois de la réflexion et de la réfraction et même d'expliquer la double réfraction de la calcite. C'est aussi en étudiant la calcite qu'il découvrit le phénomène de *polarisation* :

Comme il y a deux réfractions différentes, j'imaginai aussi qu'il y avait deux types distincts d'ondes de lumière...

Ainsi, la lumière pouvait être, soit un courant de particules, soit une ondulation rapide de l'éther. Dans tous les cas, il était généralement reconnu que sa vitesse était excessivement grande. En fait, beaucoup pensaient même que la lumière se propageait instantanément, une conviction qui remontait au moins à Aristote. Mais le fait que cette vitesse soit finie fut à son tour déterminé par l'astronome danois Ole Christensen Römer (1644-1710). Il se trouve que le plus proche satellite de Jupiter, Io, a une trajectoire orbitale proche de la propre orbite de la planète autour du Soleil. Römer fit une étude rigoureuse des éclipses de Io, alors que celui-ci passait dans l'ombre derrière Jupiter. En 1676, il annonça aussi que, le 9 novembre de la même année, Io sortirait de l'obscurité avec un retard de 10 minutes par rapport à ce qui était prévu d'après sa trajectoire annuelle moyenne, ce qui se passa effectivement. Römer expliqua aussi que ce phénomène était dû au caractère limité de la vitesse de la lumière. Il calcula aussi que la lumière mettait aux alentours de 22 minutes pour traverser la distance équivalente au diamètre de l'orbite de la Terre autour du Soleil, environ 300 millions de kilomètres. Huygens et Newton, entre autres, furent rapidement convaincus de la validité des travaux de l'astronome danois. Estimant indépendamment la valeur de l'orbite terrestre, ils trouvèrent respectivement pour c , $2,3 \times 10^8$ m/s et $2,4 \times 10^8$ m/s*.

Au XVIII^e siècle, malgré les travaux d'Huygens, l'immense aura scientifique que Newton avait acquise dans tous les domaines écarta du devant de la scène la théorie ondulatoire et ses partisans. Pourtant, envers et contre tous, le célèbre mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) était farouchement convaincu de la légitimité de celle-ci. Euler avança l'hypothèse, d'ailleurs erronée, que les aberrations chromatiques, responsables de la présence d'effets colorés



Augustin Jean Fresnel (1788–1827) (Service culturel de l'ambassade de France)

désagréables dans les lentilles, devaient être parfaitement corrigées dans l'œil du fait de sa structure alliant plusieurs milieux dispersifs. Il suggéra aussi que des montages achromatiques pouvaient être construits suivant de telles combinaisons. Enthousiasmé par ces affirmations, le mathématicien suédois Samuel Klingenstierna (1698-1765), professeur à Uppsala, refit les expériences de Newton sur les aberrations chromatiques et se rendit compte que le grand savant anglais s'était trompé. Refaisant lui aussi ces expériences, l'opticien londonien John Dollond (1706-1761) en arriva à la même conclusion. Quelques temps après, Dollond réussit lui-même à réaliser un montage achromatique en assemblant deux types de verres, du crown et du flint. Signalons cependant que la primauté de l'invention de l'objectif achromatique semble appartenir à un scientifique amateur anglais, Chester Moor Hall (1703-1771), qui n'avait pas publié ni fait connaître ses travaux.

1.4 Le XIX^e siècle

La théorie ondulatoire de la lumière fut à nouveau portée au premier plan grâce à la contribution du savant anglais - Thomas Young (1773-1829), l'un des plus grands esprits scientifiques du XIX^e siècle. En 1801, 1802 et 1803, il écrivit une série d'articles en faveur de la théorie ondulatoire en

*A. Wróblewski, *Am. J. Phys.* **53**, 620 (1985)

y ajoutant un nouveau concept fondamental, le *principe d'interférence* :

Quand deux ondulations, de différentes origines, coïncident soit parfaitement, soit de manière très proche suivant une direction, il en résulte une combinaison de leurs deux déplacements respectifs.

Young fut ainsi capable d'expliquer les franges colorées obtenues avec des lames minces et il détermina les longueurs d'onde de différentes couleurs d'après les informations de Newton. Bien que soutenant à maintes reprises avoir déduit ses conceptions directement des recherches de Newton, Young fut violemment attaqué. Dans une série d'articles, probablement écrits par Lord Brougham, dans le *Edinburgh Review*, les publications de Young furent décrites comme étant « dépourvues d'aucune espèce de mérite ».

Ignorant tout des efforts que Young avait déployés quelque treize années auparavant, le Français Augustin Jean Fresnel (1788-1827), originaire de Broglie, en Normandie, entreprit à son tour une brillante restauration de la théorie ondulatoire de la lumière. Fresnel fit la synthèse des concepts de la description ondulatoire de Huygens et du principe d'interférence. Il interpréta la propagation d'une onde primaire à un instant donné comme celle d'une succession d'ondelettes secondaires sphériques, se chevauchant et interférant pour reformer l'onde d'origine l'instant d'après. Avec les mots de Fresnel :

Les vibrations d'une onde lumineuse en chacun de ses points peuvent être considérées comme la somme des mouvements élémentaires transmis à elle, au même moment, par l'action séparée de chacune des portions d'une onde non obstruée considérée dans chacune de ses positions antérieures.

Ces ondes étaient supposées être de type longitudinal, par analogie avec les ondes sonores dans l'air. Grâce à ces conceptions, Fresnel fut à même de calculer les figures de diffraction obtenues pour un certain nombre d'ouvertures et d'obstacles caractéristiques ; il put aussi expliquer de manière satisfaisante le phénomène de propagation rectiligne de la lumière dans les milieux homogènes isotropes et ainsi dissiper la principale objection newtonienne à la théorie ondulatoire. Quand il fut finalement mis au courant de l'antériorité de Young sur la paternité du principe d'interférence, Fresnel, bien qu'un peu déçu, écrivit à celui-ci pour lui dire qu'il était cependant consolé par le fait de s'être fait devancé par un si grand savant. Young et Fresnel devinrent ainsi des amis et des alliés. Déjà à son époque, Huygens avait connaissance du phénomène de

polarisation qui se produisait dans les cristaux de calcite, tout comme Newton. Ainsi, on peut lire dans son *Opticks* :

Chaque rayon de lumière a ainsi deux orientations opposées...

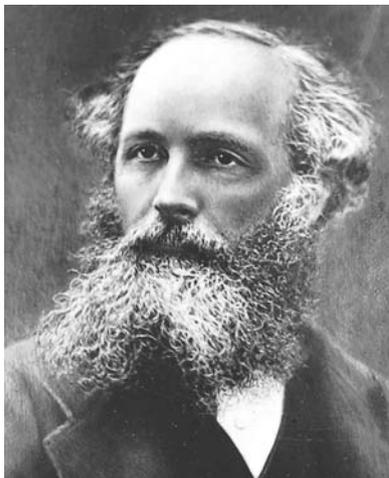
Pourtant, ce ne fut pas avant 1808, avec les travaux de Louis Étienne Malus (1775-1812) que l'on prit conscience que cette double orientation de la lumière pouvait aussi se produire en réflexion. Le phénomène n'était donc pas dépendant du cristal mais bel et bien inhérent à la nature de la lumière. Fresnel et Dominique François Arago (1786-1853) entreprirent une série d'expériences pour déterminer les effets de la polarisation sur les interférences. Cependant, leurs résultats demeurèrent inexplicables avec leurs hypothèses de départ qui considéraient des ondes longitudinales. Ce fut une période sombre pour l'optique. Pendant des années, Young, Arago et Fresnel s'escrimèrent avec ce casse-tête, jusqu'au jour où Young proposa que la vibration de l'éther pouvait être *transverse*, comme celle d'une corde. La double orientation de la lumière n'était ainsi simplement qu'une manifestation des deux vibrations orthogonales de l'éther, transversalement à la direction de propagation. Fresnel en vint à proposer une description mécanique des oscillations de l'éther, ce qui lui permit d'énoncer ses célèbres formules sur les amplitudes de la lumière réfléchie et transmise. En 1825, la théorie corpusculaire ne comptait plus qu'un très petit nombre de défenseurs.

La première détermination terrestre de la vitesse de la lumière fut établie en 1849 par le Français Armand Hippolyte Louis Fizeau (1819-1896). Son dispositif, constitué d'une roue dentée rotative et d'un miroir éloigné (8 633 m), fut assemblé dans les faubourgs de Paris, entre Suresnes et Montmartre. Le principe était assez simple : une impulsion lumineuse, passant à travers une ouverture de la roue, rencontrait le miroir et revenait à son point de départ. En ajustant la vitesse de rotation de la roue, paramètre connu, la lumière renvoyée par le miroir pouvait repasser par une ouverture de la roue et être vue, ou bien être obstruée. Fizeau calcula ainsi que la valeur de la vitesse de la lumière devait être de 315 300 km/s. Son collègue, Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868) devait aussi s'intéresser à ce sujet. En 1834, le physicien anglais Charles Wheatstone (1802-1875) avait en effet mis au point un système à miroir tournant pour mesurer la durée d'une étincelle électrique. S'inspirant de celui-ci, Arago avait proposé un montage similaire pour mesurer la vitesse de la lumière dans les milieux denses, mais il n'était jamais arrivé à mener l'expérience à bien. Foucault reprit alors le problème, qu'il développa d'ailleurs dans sa thèse de

doctorat. Le 6 mai 1850, il communiqua à l'Académie des sciences que la vitesse de la lumière dans l'eau était plus petite que dans l'air. Ce résultat, en opposition directe avec la formulation de Newton, finit de convaincre les derniers défenseurs de la théorie corpusculaire.

Alors que ces événements se déroulaient dans le petit monde de l'optique, d'autres études, menées dans des domaines tels que l'électricité et le magnétisme, commençaient également à porter leurs fruits. En 1845, constatant que la direction de polarisation d'un faisceau lumineux pouvait être perturbée par un champ magnétique puissant appliqué au milieu, l'excellent expérimentateur anglais Michael Faraday (1791-1867) établit aussi le premier lien entre l'électromagnétisme et la lumière. Quelque temps plus tard, James Clerk Maxwell (1831-1879) condensait et généralisait brillamment ces résultats expérimentaux sous la forme de quatre équations mathématiques, aussi simples qu'efficaces. Grâce à cette synthèse remarquable, il fut également capable de montrer, de manière purement théorique, que le champ électromagnétique pouvait se propager comme une onde transversale dans l'éther luminifère.

Cherchant à déterminer la vitesse de cette onde, Maxwell arriva à une expression faisant intervenir les propriétés électriques et magnétiques du milieu de propagation ($c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$). Quand il substitua les valeurs de ces paramètres, qu'il avait déterminées empiriquement, il obtint un résultat égal à la valeur connue de la vitesse de la lumière ! Les conclusions semblaient évidentes : la lumière était, « en



James Clerk Maxwell (1831–1879) (AIP Emilio Segré Visual Archives)

termes d'ondes, une perturbation électromagnétique se propageant à travers l'éther ». Malheureusement pour la physique, Maxwell mourut assez jeune, à l'âge de 48 ans, 8 ans trop tôt pour voir la confirmation expérimentale de ses intuitions. Ce privilège revint en effet au physicien allemand Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894). Dans une série d'expériences dont les résultats furent publiés en 1888, Hertz réussit à produire et détecter des ondes électromagnétiques, ce qui apporta définitivement la preuve de leur existence.

La confirmation de la théorie ondulatoire semblait aller de pair avec celle de l'existence du milieu de propagation universel qu'était l'éther luminifère. S'il y avait des ondes, il semblait en effet évident qu'elles étaient supportées par un milieu matériel. Naturellement, de nombreux scientifiques portèrent de fait leurs efforts à essayer de déterminer la nature physique de cet éther, qui devait posséder des propriétés bien particulières. Il devait en effet être très léger, afin ne pas entraver le mouvement des corpuscules célestes.

Dans le même temps, il devait également pouvoir supporter les oscillations correspondant aux fréquences extrêmement hautes ($\sim 10^{15}$ Hz) d'une lumière voyageant à 300 000 kilomètres par seconde ! Ceci laissait supposer l'existence de forces de retour remarquablement grandes inhérentes à cet étrange milieu. La vitesse à laquelle une onde progresse à travers un environnement est en effet directement liée aux propriétés de celui-ci, et non pas à de quelconques mouvements de la source. Ce résultat est d'ailleurs en opposition avec le comportement d'un courant de particules dont le critère essentiel est la vitesse par rapport à la source.

Certains aspects liés à la nature de l'éther apparaissaient aussi quand on étudiait les images des corps en mouvement. Ce fut d'ailleurs grâce aux développements indépendants de ce domaine que la nouvelle étape fut franchie. En 1725, le Britannique James Bradley (1693-1762), alors professeur d'astronomie à Oxford, essayait de mesurer l'éloignement des étoiles en observant leurs situations à deux moments différents de l'année. Du fait de son orbite autour du Soleil, la position de la Terre changeait et la méthode permettait en effet d'obtenir un système de triangulation avec l'étoile observée. À sa grande surprise, Bradley constata que les étoiles « fixes » possédaient un mouvement systématique apparent lié à la direction du déplacement de la Terre sur son orbite, et, contrairement à ce que l'on avait pensé, indépendant de la position de la Terre dans l'espace. Cette « aberration stellaire » est en fait comparable au phénomène bien connu de l'apparence de la pluie qui tombe. Le trajet d'une goutte de pluie qui semble vertical pour un observateur immobile, semble par contre s'incliner pour un

observateur en mouvement. Ainsi, le modèle corpusculaire de la lumière peut expliquer très intuitivement ce phénomène de l'aberration stellaire. D'un autre côté, le point de vue ondulatoire peut aussi fournir une explication satisfaisante dans la mesure où *l'éther reste totalement imperturbable quand la Terre le traverse*.

Face aux spéculations sur le fait de savoir si le déplacement de la Terre à travers l'éther devait provoquer des différences observables entre la lumière de sources terrestres et celle du reste de l'univers, Arago tâcha d'examiner le problème d'un point de vue expérimental. Il constata en fait que de telles différences n'existaient pas. La lumière se comportait juste comme si la Terre était au repos par rapport à l'éther. Pour expliquer ces résultats, Fresnel suggéra que la lumière était partiellement entraînée lorsqu'elle traversait un milieu transparent en mouvement. Des expériences, comme celle de Fizeau, qui faisait passer des faisceaux de lumière à travers un courant d'eau, ou celle de Sir George Biddell Airy (1801-1892), qui utilisait un télescope rempli d'eau pour examiner l'aberration stellaire (1871), semblèrent confirmer l'hypothèse de Fresnel. Se basant définitivement sur un éther au repos absolu, le physicien Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) élabora une théorie qui reprenait les idées de Fresnel.

En 1879, dans une lettre adressée au Bureau de l'Almanach nautique américain, Maxwell proposa une méthode pour mesurer la vitesse du Système solaire par rapport à l'éther luminifère. Le physicien américain Albert Abraham Michelson (1852-1931), alors instructeur naval, allait reprendre cette idée. Dès l'âge de 26 ans, ce brillant jeune homme s'était déjà fait connaître en réalisant une mesure très précise de la vitesse de la lumière.

Quelques années plus tard, il mit au point un protocole expérimental pour évaluer l'effet du mouvement de la Terre à travers l'éther. Comme la lumière devait avoir une vitesse constante dans ce dernier, et que la Terre, en rotation, était supposée se déplacer par rapport à l'éther (vitesse orbitale de 107 000 km/h), la vitesse de la lumière mesurée par rapport à la Terre devait être affectée par le mouvement de la planète. En 1881, Michelson publia ses résultats : il n'y avait pas de déplacement détectable de la Terre par rapport à l'éther : celui-ci était stationnaire. Cependant, l'importance de ce résultat fut quelque peu occultée lorsque Lorentz signala un oubli dans les calculs de Michelson. Quelques années plus tard, Michelson, devenu entre-temps professeur de physique à la Case School of Applied Science de Cleveland (Ohio), et Edwards Williams Morley (1838-1923), qui était un professeur de chimie très réputé, entreprirent de refaire l'expérience avec une précision

considérablement accrue. Leurs résultats, publiés en 1887, furent encore une fois négatifs :

Il apparaît raisonnablement certain, d'après tout ce qui précède, que, s'il existe un mouvement relatif entre la Terre et l'éther luminifère, celui-ci doit être petit ; assez petit en effet pour réfuter l'explication de l'aberration proposée par Fresnel.

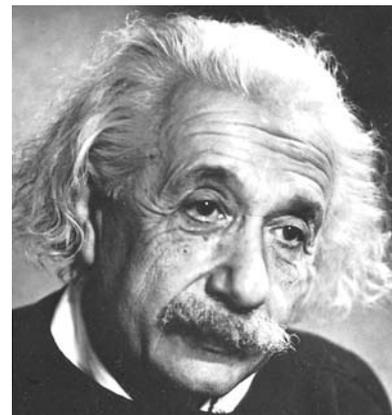
Ainsi, alors que, dans le cadre de la théorie ondulatoire, l'explication de l'aberration stellaire impliquait l'existence d'un mouvement relatif entre la Terre et l'éther, l'expérience de Michelson-Morley réfutait cette possibilité. De surcroît, les résultats établis par Fizeau et Airy nécessitaient l'hypothèse nouvelle d'un entraînement partiel de la lumière lié au mouvement du milieu.

1.5 L'optique au xx^e siècle

Le mathématicien français Jules Henri Poincaré (1854-1912) fut peut-être le premier à saisir la signification véritable de l'incapacité à observer expérimentalement les effets du mouvement relatif de l'éther au plan expérimental. En 1899, il commença à divulguer ses opinions, et en 1900, il dit :

Notre éther, existe-t-il vraiment ? [...] Je ne crois pas que des observations plus précises puissent jamais mettre en évidence autre chose que les déplacements relatifs des corps matériels.

En 1905, Albert Einstein (1879-1955) divulguait sa *Théorie de la relativité restreinte*, dans laquelle il rejetait lui aussi, de façon indépendante, la théorie de l'éther.



Albert Einstein (1879-1955)

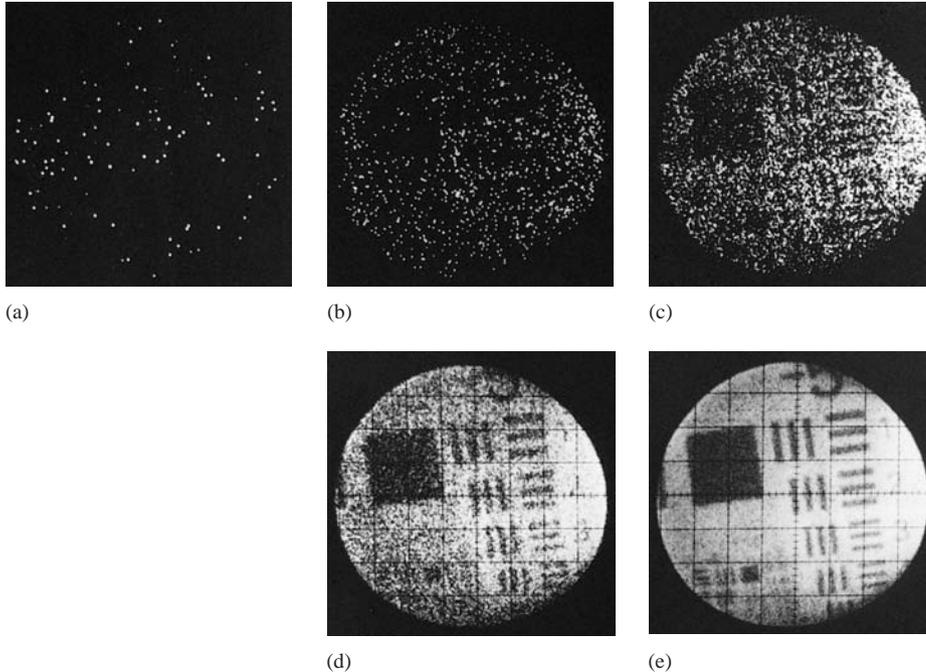


Figure 1.1 Illustration assez convaincante de la nature corpusculaire de la lumière. Cette séquence de photos a été prise à l'aide d'un tube photomultiplicateur à imagerie éclairé par une mire ($8,5 \times 10^3$ coups par seconde). Les temps d'exposition sont de (a) 8 ms, (b) 125 ms, (c) 1 s, (d) 10 s, et (e) 100 s. Chaque point peut être interprété comme représentant l'arrivée d'un photon individuel.

(Photos ITT Corporation, Electro-Optical Products Division, Tube and Sensor Laboratories, Fort Wayne, Indiana)

Nous prouverons l'inutilité d'un « éther luminifère », attendu que le point de vue qui sera développé ne nécessitera pas un « espace absolument stationnaire ».

Einstein postule par la suite :

La lumière se propage toujours dans le vide avec une vitesse définie c qui est indépendante du mouvement de sa source...

Les expériences de Fizeau, Airy et Michelson-Morley furent par la suite interprétées assez naturellement dans le cadre de la cinématique relativiste d'Einstein*. Sans la notion d'éther, les physiciens devaient se faire à l'idée que les ondes électromagnétiques pouvaient se propager à travers le vide : il n'y avait pas d'autre alternative. La lumière était à présent perçue comme une onde autoportée, et le concept de champ remplaçait celui d'éther comme nouveau paradigme scientifique. L'onde électromagnétique était ainsi devenue une entité en elle-même.

Le 19 octobre 1900, le physicien allemand Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947) fit une déclaration à la Société allemande de Physique dans laquelle il présentait les débuts

hésitants de ce qui allait devenir une autre grande révolution scientifique. Cette *mécanique quantique* concernait la physique de l'infiniment petit. En 1905, travaillant audacieusement sur ces idées, Einstein proposa une nouvelle théorie corpusculaire dans laquelle il affirmait que la lumière était constituée de globules ou de « particules » d'énergie. Chacun de ces quanta d'énergie radiative ou *photon**, comme on allait l'appeler, avait une énergie proportionnelle à sa fréquence ν , selon la relation $\mathcal{E} = h\nu$, où h est connu sous le nom de constante de Planck (figure 1.1). À la fin des années 20, grâce aux efforts de physiciens de renom, comme Bohr, Born, Heisenberg, Schrödinger, de Broglie, Pauli, Dirac et d'autres, la mécanique quantique était devenue une théorie solide. Il devint graduellement évident que les deux concepts de particules et d'onde, qui dans le monde macroscopique semblaient être totalement exclusifs l'un de l'autre, devaient être associés au point de vue microscopique. La représentation des particules atomiques (électrons, neutrons...) par de minuscules boules de matière localisées était devenue insuffisante. Il fut en effet prouvé que

*Voir, par exemple, *Special Relativity*, French, chapitre 5.

*Le mot photon fut employé la première fois par G.N. Lewis dans la revue *Nature*, le 18 décembre 1926.

ces « particules » pouvaient être à l'origine de phénomènes d'interférences ou de diffraction, exactement comme la lumière. Ainsi, les photons, les protons, les électrons, les neutrons, etc., pouvaient se manifester aussi bien en termes d'ondes qu'en termes de particules. Cependant, le problème n'était pas du tout réglé. « Tous les physiciens pensent savoir ce qu'est un photon », écrit Einstein. « Pour ma part, j'ai passé toute ma vie à essayer de le savoir, et je ne le sais toujours pas ».

Le début du xx^e siècle fut ainsi une période faste. Avant toute chose, l'avènement de la théorie de la relativité avait permis de libérer la physique du concept d'éther et de montrer la relation entre la masse et l'énergie ($E_0 = mc^2$). Ces deux notions qui semblaient totalement opposées devenaient parfaitement interchangeables. Par la suite, la mécanique quantique démontra qu'à une particule de quantité de mouvement p pouvait être associée une longueur d'onde λ , telle que $p = h/\lambda$. L'existence du neutrino, particule neutre et de masse présumée nulle, fut postulée avec des considérations théoriques en 1930 par le physicien d'origine autrichienne Wolfgang Pauli (1900-1958), et vérifiée expérimentalement dans les années 50. Les images obtenues par la suite de ces grains de matière submicroscopiques confirmèrent la théorie : la dichotomie onde-particule avait évolué une dualité.

La mécanique quantique traite également de l'émission et de l'absorption de la lumière par les atomes. Quand l'on chauffe un gaz, directement ou bien par décharges électriques, la lumière qu'il rayonne est en effet caractéristique de la structure des atomes qui le constituent. L'analyse de la composition de la lumière, ou spectroscopie, remonte en fait aux travaux de Newton avec son expérience du prisme. Plus tard, William Hyde Wollaston (1766-1828) s'illustra en identifiant le premier les bandes sombres du spectre solaire (1802) (comme l'ouverture des spectroscopes est généralement une fente, on obtient en effet en sortie de fines raies colorées de lumière, les bandes spectrales). Travaillant indépendamment, le physicien allemand Joseph Fraunhofer (1787-1826) développa aussi considérablement le sujet. Après avoir découvert accidentellement la raie double du sodium, il en vint à s'intéresser à l'analyse de la lumière naturelle, ce qui lui permit, en utilisant des réseaux de diffraction de réaliser les premières déterminations de longueurs d'onde. Par la suite, les physiciens Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) et Robert Wilhelm Bunsen (1811-1899), travaillant ensemble à Heidelberg, établirent que chaque type d'atomes avait une signature qui lui était propre, correspondant à un motif caractéristique de raies spectrales. Et en 1913, le physicien danois

Niels Henrik David Bohr (1885-1962) présenta une première modélisation quantique de l'atome d'hydrogène qui permettait de prévoir les longueurs d'onde de son spectre d'émission. À présent, il est entendu que la lumière émise par un atome provient de ses électrons périphériques. Le mécanisme de ce phénomène est du domaine de la théorie quantique moderne, qui explique dans les moindres détails les résultats observés avec une précision et une beauté incomparables.

La dernière grande révolution qu'ait connue l'optique correspond aux formidables développements de l'optique appliquée survenus dès la seconde moitié du xx^e siècle. À partir des années 50, de nombreux scientifiques commencèrent à introduire en optique les techniques mathématiques ainsi que les résultats de la toute nouvelle théorie des télécommunications. Le concept de fréquence spatiale ouvrait, par exemple, des perspectives aussi nombreuses qu'intéressantes pour apprécier une grande variété de phénomènes optiques. Rassemblés sous l'égide du formalisme mathématique de l'analyse de Fourier, ces travaux ont été très fructueux. On peut, par exemple, citer ceux concernant la théorie de la formation et de l'analyse des images, les *fonctions de transfert*, ainsi que le concept de *filtrage spatial*.

Les progrès de l'informatique ont, par ailleurs, entraîné des améliorations considérables dans le calcul et la réalisation des systèmes optiques. Ainsi, les éléments à lentilles asphériques ont pris de plus en plus d'importance, alors que les systèmes *limités par la diffraction*, sur des champs appréciables, sont devenus une réalité. Dans un autre domaine, le polissage par bombardements d'ions, dans lequel chaque atome est individuellement traité, permet aussi une précision jamais obtenue auparavant dans la réalisation des pièces optiques. Les progrès de la technologie ont, de la même manière, rendu tout à fait courante l'utilisation de traitements des surfaces (antireflets, etc.) monocouches ou multicouches.

Dans un autre domaine, les fibres optiques sont devenues un support pratique extrêmement employé pour les télécommunications, alors que les couches minces continuent d'être étudiées en tant que guides de lumière. Beaucoup de travaux ont été menés dans l'infrarouge (systèmes de surveillance, guidages de missiles, etc.), ce qui a conduit au développement de nouveaux matériaux infrarouges. Les plastiques sont devenus de plus en plus courants en optique (composants d'objectifs, répliques de réseaux, fibres, asphériques, etc.). On a aussi développé de nouvelles céramiques partiellement vitrifiées, qui présentent l'intérêt d'avoir un très faible coefficient d'expansion thermique. Sur le plan de l'instrumentation, on assiste également depuis la fin des années 60 à une véritable résurgence de la

construction des outils d'observation astronomique (aussi bien sur Terre que dans l'espace).

L'optique connaît aussi une grande avancée depuis l'avènement du laser. Le premier laser fut construit en 1960 et en moins d'une décennie, la gamme de longueurs d'onde disponible fut considérablement élargie, allant de l'infrarouge à l'ultraviolet. La disponibilité de puissantes sources de lumière cohérente a permis en particulier la découverte de nouveaux effets optiques (génération d'harmoniques, mixage de fréquences, etc.), eux-mêmes à la base d'une grande variété de nouveaux composants très utiles. Ces technologies servent en particulier dans les télécommunications optiques. L'utilisation de cristaux particuliers dans des composants novateurs tels que les doubleurs de fréquences ou les modulateurs électro-optiques et acousto-optiques a contribué à stimuler la recherche actuelle en optique cristalline. De même, l'*holographie*, procédé de reconstruction du front d'onde, qui permet d'obtenir de magnifiques images tridimensionnelles, sert dans de nombreuses applications (analyse non destructive, stockage de données, etc.).

L'orientation militaire de nombreux projets d'optique des années 1960 s'est largement perpétuée jusqu'à notre époque. L'optique présente en effet de nombreux intérêts dans l'armement, que cela concerne les « bombes intelligentes », les satellites espions, les armes à faisceaux dirigés (« rayons de la mort ») ou les systèmes de vision nocturne. Néanmoins, les considérations économiques couplées au souci d'améliorer la qualité de vie de leurs concitoyens, ont amené les ingénieurs à

adapter ces technologies à toute une gamme de produits de consommation courante.

Aujourd'hui, les lasers sont utilisés partout : pour lire de la musique et des DVD, pour découper de l'acier dans l'industrie, pour lire des codes-barres dans les supermarchés ou comme scalpels de haute technologie en chirurgie. Des millions de systèmes optiques pour visualisation circulent dans le monde entier au sein d'écrans d'ordinateurs, de montres, de calculatrices, de téléphones portables, etc. L'usage presque exclusif, les cent dernières années, de signaux électriques dans les télécommunications est en train de décliner au profit de procédés optiques, qui sont bien plus efficaces. Une véritable révolution dans les méthodes de transport et de traitement de l'information est en train de se produire, une révolution qui continuera à changer nos vies dans les années à venir.

Les évolutions profondes viennent lentement en sciences. Et même si le rythme des découvertes semble s'intensifier, il a fallu plus de trois mille ans pour obtenir le peu que nous savons. Malgré cela, il est étonnant de constater que si les réponses ont évolué au cours des siècles, la question est restée la même : *qu'est-ce que la lumière ?**

.....
*Pour plus d'informations sur l'histoire de l'optique, lire : F. Cajori, *A History of Physics*, et V. Ronchi, *Histoire de la lumière*. Certains passages d'ouvrages historiques figurent également dans W. F. Magie, *A Source Book in Physics*, et dans M. H. Shamos, *Great Experiments in Physics*.



Mouvements ondulatoires

L'une des questions fondamentales de l'optique concerne la véritable nature de la lumière et nous allons nous y intéresser tout au long de cet ouvrage. En effet, peut-on dire que la lumière est composée de particules ou est-ce, au contraire, un phénomène ondulatoire ? En fait, les deux points de vue, corpusculaire et ondulatoire, coexistent, malgré leur apparente opposition. Les concepts physiques de particules et d'ondes présentent effectivement des spécificités très différentes. D'une part, une particule a comme caractéristique principale sa localisation spatiale. Elle existe dans une « petite » région de l'espace bien déterminée. De façon pratique, on a tendance à se représenter le concept de particule en considérant des objets familiers, balles ou cailloux, et en les rétrécissant par la pensée jusqu'à ce qu'ils deviennent infiniment petits. Mais qu'ils soient cailloux, balles ou particules, les objets matériels sont toujours caractérisés par une interaction avec un environnement, par l'intermédiaire de champs. Une balle possède, par exemple, un champ gravitationnel propre, en interaction avec la Terre (et la Lune, le Soleil, etc.). Ce champ gravitationnel, dont l'influence, si minime qu'elle soit, s'étend à travers tout l'univers, ne peut être séparé de la balle. De la même manière, les particules élémentaires interagissent, elles-aussi, au moyen de champs. Là encore, il faut appréhender les deux notions ensemble. Car, si le champ est inhérent à la particule, la particule ne doit pas non plus être considérée sans son champ. Cette petite énigme relève du domaine de la théorie quantique des champs, une discipline dont on discutera plus tard de manière plus approfondie (p. 144). Retenons, pour l'instant, que si la lumière consiste en un flux de particules sub-microscopiques (les *photons*), il ne s'agit, en aucune manière, de « mini-balles » classiques.

Par ailleurs, la caractéristique principale d'une onde est sa délocalisation. *Une onde progressive classique est un ébranlement qui se propage dans un milieu, d'un endroit à un*

autre, en transportant de l'énergie et de la quantité de mouvement. Une onde idéale est une entité continue qui occupe une région étendue. Mais si l'on examine attentivement le cas de vraies ondes (comme sur une corde), on constate un phénomène continu et composé, faisant intervenir un grand nombre de particules se déplaçant de concert. Les milieux supportant ces ondes sont atomiques (i.e. faits de particules). Ainsi, les ondes ne sont pas, par elles-mêmes, des entités continues. La seule exception à cette règle concerne l'onde électromagnétique. De façon conceptuelle, l'onde électromagnétique classique (p. 48) est supposée être une entité continue. Elle sert d'ailleurs de modèle pour la définition même de la notion d'onde, par opposition à la notion de particule. Cependant, au siècle dernier, il a été établi que l'énergie d'une onde électromagnétique n'était pas distribuée de façon continue. La formulation classique de la théorie électromagnétique de la lumière, aussi élégante qu'elle soit à l'échelle macroscopique, ne convient pas entièrement à l'échelle microscopique. Einstein fut le premier à suggérer que l'onde électromagnétique, que nous percevons à l'échelle macroscopique, était, en fait, la manifestation statistique d'un phénomène microscopique sous-jacent, fondamentalement corpusculaire (p. 55). Au niveau subatomique, le concept classique d'une onde physique est donc une illusion. Cependant, à l'échelle à laquelle nous travaillons habituellement, le modèle des ondes électromagnétiques semble suffisamment efficace, et la théorie classique s'applique très bien.

Puisque le traitement classique et le traitement quantique de la lumière utilisent, tous les deux, une description mathématique des ondes, ce chapitre pose les bases utilisées par chacun de ces formalismes. Les idées développées ici s'appliqueront à toutes les ondes physiques, depuis les vagues à la surface d'une tasse de café jusqu'aux impulsions de lumière nous parvenant des galaxies lointaines.

2.1 Ondes à une dimension

L'un des aspects essentiels d'une onde progressive est d'être une perturbation *auto-entretenu* du milieu dans lequel elle se propage. Les ondes les plus familières et les plus faciles à visualiser (figure 2.1) sont les ondes mécaniques, parmi lesquelles on trouve les vibrations d'une corde, les vagues à la surface d'un liquide et les ondes sonores dans l'air. Celles-ci présentent cependant des caractéristiques différentes. Les ondes sonores sont en effet **longitudinales**, c'est-à-dire que le

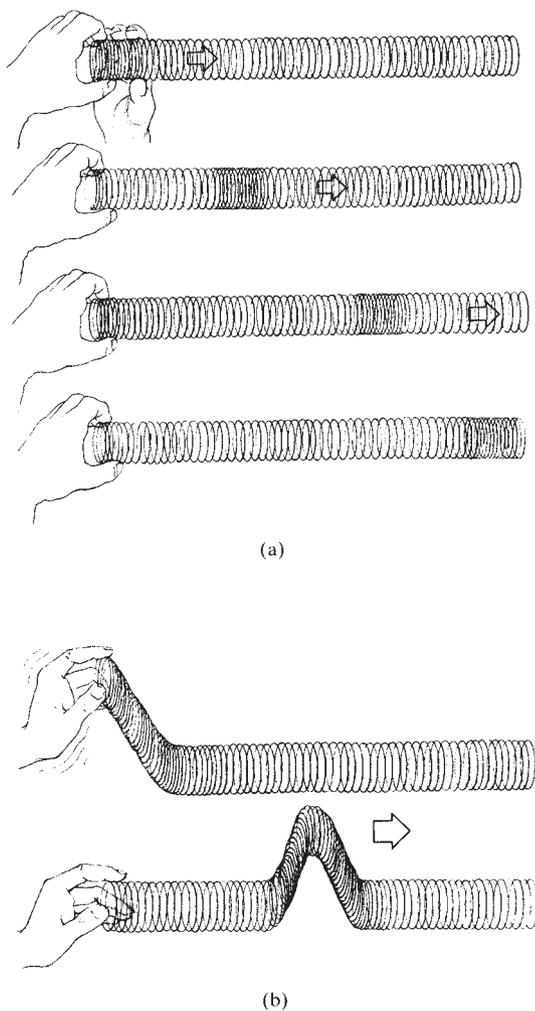


Figure 2.1 (a) Onde longitudinale sur un ressort, (b) Onde transversale sur un ressort.

milieu se déplace dans la direction de propagation de l'onde. Les vibrations d'une corde (et les ondes électromagnétiques) sont, en revanche, **transversales** : le milieu se déplace dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. Dans tous les cas, bien que la perturbation transportant l'énergie progresse au travers du milieu considéré, les atomes impliqués restent proches de leur position d'équilibre : la perturbation progresse, et non pas le milieu matériel. Cela est l'une des caractéristiques fondamentales de l'onde, la distinguant en particulier d'un rayon de particules. Cette notion est assez facilement visualisable. En effet, le vent qui souffle sur un champ de blé crée des « vagues d'épis » qui se déplacent majestueusement, même si chaque tige, qui se balance, reste en place. Léonard de Vinci semble avoir été le premier à reconnaître qu'une onde ne transporte pas le milieu dans lequel elle se déplace. C'est d'ailleurs précisément cette propriété qui permet aux ondes de se propager à de très grandes vitesses...

Imaginons une perturbation ψ se déplaçant dans la direction x positive à une vitesse v constante. La nature spécifique de cette perturbation n'est pas importante pour le moment. Elle pourrait être le déplacement vertical de la corde de la figure 2.2, ou la valeur d'un champ électrique ou magnétique

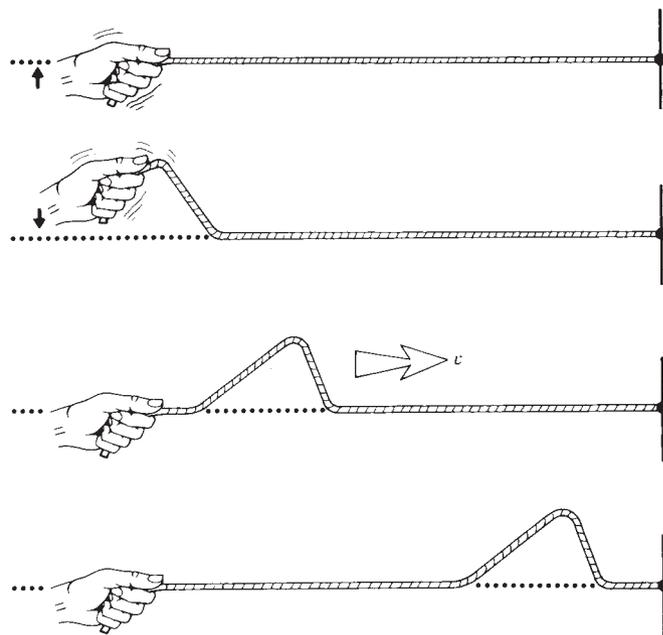


Figure 2.2 Onde sur une corde.

associé à une onde électromagnétique (voire l'amplitude de probabilité d'une onde de matière en mécanique quantique).

Puisque la perturbation se déplace, elle doit être fonction à la fois de la position et du temps. On a donc :

$$\psi(x, t) = f(x, t) \quad (2.1)$$

où $f(x, t)$ correspond à une fonction particulière qui décrit la forme de l'onde. La figure 2.3a représente ainsi une impulsion se déplaçant dans un système de coordonnées stationnaire S à une vitesse v . À n'importe quel instant, par exemple $t = 0$, la forme de la perturbation peut être déterminée en fixant le temps égal à cette valeur. Dans ce cas,

$$\psi(x, t)|_{t=0} = f(x, 0) = f(x) \quad (2.2)$$

Cette expression représente la forme ou le **profil** de l'onde à cet instant. Par exemple, si $f(x) = e^{-ax^2}$, où a est une constante, la fonction a la forme d'une cloche, c'est une **fonction de Gauss** ou **gaussienne** (du fait du carré, la représentation de la fonction est symétrique par rapport à l'axe $x = 0$). En fin de compte, ce procédé revient à prendre une « photographie » de l'impulsion, au moment où elle passe.

Pour le moment, on se limitera d'ailleurs à des ondes qui ne *changent pas de forme* en se propageant dans l'espace. Après un temps t , l'impulsion s'est déplacée le long de l'axe x d'une distance vt . En revanche, sous tout autre aspect, elle n'a pas subi de changements. On introduit maintenant un système de coordonnées S' , se déplaçant parallèlement à l'impulsion, avec la même vitesse v . Dans ce système, ψ n'est donc plus fonction du temps. Un observateur se déplaçant avec S' perçoit donc un profil immobile constant correspondant à l'équation (2.2). Ici, la coordonnée est x' et non plus x , de telle sorte que :

$$\psi = f(x') \quad (2.3)$$

Ainsi, dans S' , la perturbation garde la même forme quelle que soit la valeur de t . Elle est identique à ce qu'elle était dans S à $t = 0$, lorsque S et S' avaient une origine commune (figure 2.3c).

On veut maintenant réécrire l'équation (2.3) de telle sorte que ψ puisse être décrite en termes de la variable x associée au système stationnaire S . D'après la figure 2.3, on voit que :

$$x' = x - vt \quad (2.4)$$

En remplaçant dans l'équation (2.3), on obtient donc :

$$\psi(x, t) = f(x - vt) \quad (2.5)$$

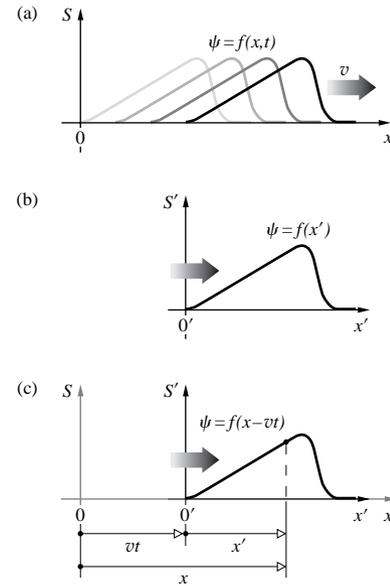


Figure 2.3 Déplacement du système de référence.

Cette expression représente la forme la plus générale de la **fonction d'onde** à une dimension. Pour être plus précis, il s'agit donc de remplacer x par $(x - vt)$ dans l'expression choisie pour $f(x)$. **L'expression qui en découle décrit ainsi une onde ayant le profil désiré, se déplaçant dans la direction x positive avec une vitesse v .** Avec l'expression de $f(x)$ précédente, on obtient par exemple $\psi(x, t) = e^{-a(x-vt)^2}$ qui correspond toujours à un profil gaussien.

Afin d'examiner cette méthode plus en détail, appliquons notre analyse à une impulsion spécifique, par exemple, $\psi(x) = 3/[10x^2 + 1] = f(x)$. Ce profil est tracé à la figure 2.4a. Cet exemple est général et il pourrait s'appliquer à des situations physiques très différentes. Si l'étude concernait, par exemple, la vibration d'une corde, ψ représenterait le déplacement vertical et l'on pourrait le remplacer par le symbole y . ψ pourrait de même représenter une pression ou un champ électrique. Sans spécifier la nature particulière du phénomène ondulatoire, l'important est donc, ici, de connaître le profil de la perturbation. Pour transformer $f(x)$ en $\psi(x, t)$, c'est-à-dire, pour la transformer en description d'une onde se déplaçant dans la direction des x positifs avec une vitesse v , il suffit donc de remplacer tous les x par $(x - vt)$, dans l'expression de $f(x)$. On obtient ainsi $\psi(x, t) = 3/[10(x - vt)^2 + 1]$. Si v est arbitrairement fixée à, par exemple, 1,0 m/s et que la fonction est tracée successivement à $t = 0$, $t = 1$ s, $t = 2$ s, et

$t = 3$ s, on obtient la figure 2.4b qui montre bien l'impulsion se déplaçant vers la droite à 1,0 m/s. Signalons d'ailleurs que, si nous avions remplacé x par $(x + vt)$, l'expression résultante aurait décrit une onde se déplaçant non plus vers la droite, mais vers la gauche.

Après un incrément de temps Δt , soit un incrément de distance correspondant de $v \Delta t$ en x , l'équation (2.5) s'écrit :

$$f[(x + v \Delta t) - v(t + \Delta t)] = f(x - vt)$$

Et le profil ψ reste inchangé.

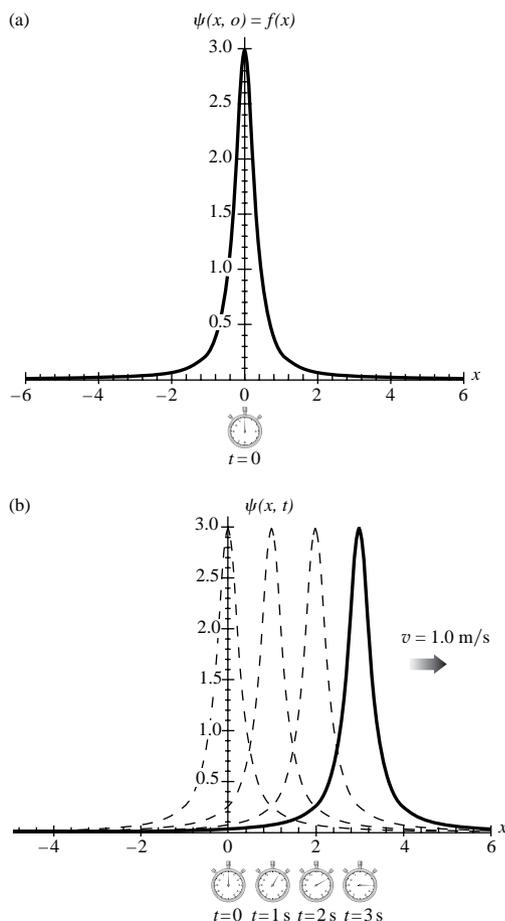


Figure 2.4 (a) Le profil d'une impulsion donnée par la fonction $f(x) = 3/(10x^2 + 1)$, (b) Le profil montré en (a) se déplace maintenant comme une onde $\psi(x, t) = 3/[10(x - vt)^2 + 1]$, vers la droite. Il a une vitesse de 1,0 m/s et avance dans la direction x positive.

De même, si l'onde se déplaçait dans la direction des x négatifs, c'est-à-dire vers la gauche, l'équation (2.5) deviendrait :

$$\psi = f(x + vt), \quad \text{avec } v > 0 \quad (2.6)$$

On peut donc en conclure que, quelle que soit la forme de la perturbation, les variables x et t doivent apparaître dans la fonction en tant que variable unique de la forme $(x \mp vt)$. L'équation (2.5) est souvent exprimée de manière équivalente comme une fonction de $(t - x/v)$. En effet :

$$f(x - vt) = F\left(-\frac{x - vt}{v}\right) = F(t - x/v) \quad (2.7)$$

L'impulsion de la figure 2.2 et la perturbation de l'équation (2.5) sont qualifiées de *monodimensionnelles*, car elles se déplacent le long d'un axe : il suffit d'une seule variable d'espace pour les caractériser. Attention, donc, à ne pas se laisser tromper par le fait que, dans ce cas particulier, la corde s'élève dans une seconde dimension. En revanche, une onde bidimensionnelle se propage sur une surface, comme les vagues sur un lac, et peut être décrite par deux variables d'espace.

2.1.1 L'équation d'onde différentielle

En 1747, le grand mathématicien français Jean Le Rond d'Alembert introduisit le concept d'équation différentielle partielle dans le traitement mathématique de la physique. La même année, il écrivit un article sur le mouvement des cordes vibrantes dans lequel il définit, pour la première fois, l'*équation d'onde différentielle*. Cette équation différentielle partielle, homogène, linéaire et du second degré, exprime de façon très générale le comportement de toutes sortes d'ondes physiques se propageant dans des milieux sans pertes. Il existe, en physique, de nombreux phénomènes ondulatoires. On peut ainsi parler d'ondes de pression ou de déplacement et, bien évidemment, d'ondes électromagnétiques. Quelle que soit leur nature spécifique, il est intéressant de constater que toutes ces ondes peuvent être décrites par une fonction d'onde $\psi(x)$, solution de la même équation d'onde différentielle. D'autre part, certaines précisions de terminologie s'imposent. La raison pour laquelle l'équation d'onde est qualifiée de *partielle* provient du fait que les ondes doivent être fonction de plusieurs variables indépendantes, généralement l'espace et le temps. Une équation différentielle *linéaire* est une équation consistant en deux termes ou plus, proportionnels à une fonction $\psi(x)$ ou

à ses dérivées. Il est important de savoir que chaque terme ne peut apparaître qu'à la puissance un, et qu'il ne peut y avoir de produits croisés de ψ et de ses dérivées ni des dérivées entre elles. Rappelons que le *degré* ou l'*ordre* d'une équation différentielle est égal au degré de la plus haute dérivée dans cette équation. La solution d'une équation différentielle de degré N comprend d'ailleurs N constantes arbitraires.

On peut maintenant établir l'équation d'onde à une dimension, en tenant compte du fait (p. 15) que la plus simple des ondes, progressant à une vitesse fixe, est caractérisée par deux paramètres (amplitude et fréquence ou longueur d'onde), ce qui suggère de faire appel aux dérivées du second degré. Puisqu'il y a deux variables indépendantes (ici x et t), on peut dériver $\psi(x, t)$ soit par rapport à x , soit par rapport à t , c'est-à-dire en différenciant par rapport à l'une des variables, tout en considérant l'autre comme une constante. Les règles habituelles de la différentiation s'appliquent donc, mais pour que les choses soient bien claires, la dérivée partielle est notée $\partial/\partial x$.

Afin de relier les dépendances temporelle et spatiale de $\psi(x, t)$, on calcule la dérivée partielle de $\psi(x, t) = f(x')$ par rapport à x , en gardant t constant. On utilise pour cela le changement de variable : $x' = x \mp vt$. On a aussi :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \quad (2.8)$$

Puisque :

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial(x \mp vt)}{\partial x} = 1$$

En gardant, cette fois, x constant, la dérivée partielle par rapport à t s'écrit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} (\mp v) = \mp v \frac{\partial f}{\partial x'} \quad (2.9)$$

En combinant les équations (2.8) et (2.9), on obtient alors :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mp v \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Cela signifie donc que les dérivées de ψ par rapport à t et par rapport à x sont proportionnelles, comme le montre la figure 2.5. De la même manière, on calcule les dérivées partielles secondes des équations (2.8) et (2.9) :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \quad (2.10)$$

et
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} (\mp v \frac{\partial f}{\partial x'}) = \mp v \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)$$

car
$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \mp v \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)$$

D'après l'équation (2.9), on obtient donc :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

En combinant cette équation avec l'équation (2.10), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

Cette expression constitue l'**équation d'onde différentielle** à une dimension qui est recherchée. Notons que cette équation est qualifiée d'équation différentielle *homogène* car elle ne contient pas de termes n'impliquant que des variables indépendantes (comme une « force » ou une « source »). En

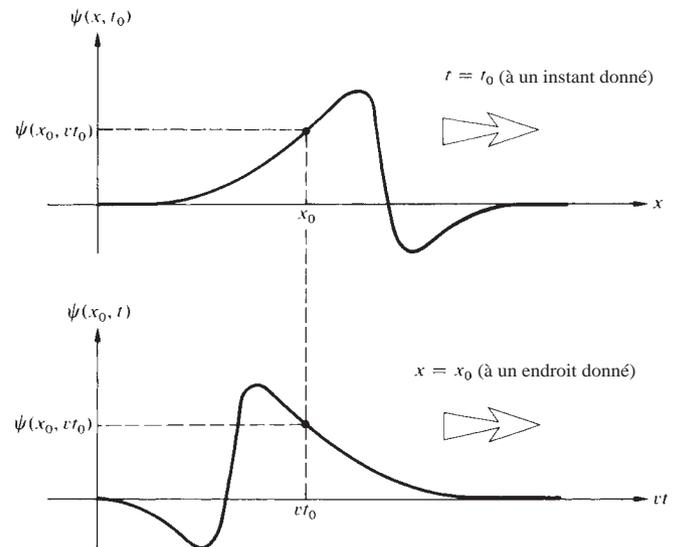


Figure 2.5 Variation de ψ en fonction de x et t .

d'autres termes, ψ est présent dans chaque terme de l'équation. Cela signifie que si ψ est solution, tout multiple de ψ est aussi solution. L'équation (2.11) est **l'équation d'onde différentielle pour les systèmes non amortis** qui ne contiennent pas de sources dans la région considérée. Les effets de l'amortissement peuvent être décrits en ajoutant un terme $\partial\psi/\partial t$ pour former une équation d'onde plus générale, mais cette question sera étudiée plus tard (p. 77).

De manière générale, une équation différentielle partielle survient lorsque le système décrit est continu. Le fait que le temps soit l'une des variables indépendantes souligne ici le concept de continuité temporelle du phénomène considéré. En général, les théories des champs s'appliquent à des distributions de quantités continues dans l'espace et le temps ; elles prennent de fait la forme d'équations différentielles partielles. La formulation de l'électromagnétisme de Maxwell, qui est une théorie de champs, utilise une variante de l'équation (2.11), à partir de laquelle le concept d'onde électromagnétique découle de manière très naturelle (p. 49).

Cette discussion a été engagée en considérant le cas particulier d'ondes qui conservent leur forme lorsqu'elles se propagent. Mais les ondes ont généralement un profil qui se modifie au cours de leur propagation. Malgré tout, cette hypothèse simple nous a amenés à une formulation générale, l'équation d'onde différentielle. Si une fonction représentant une onde est solution de cette équation, elle sera également une fonction de $(x \mp vt)$ – plus particulièrement, elle sera différentiable deux fois, par rapport à la fois à x et à t .

2.2 Ondes harmoniques

Examinons à présent les modèles d'ondes les plus simples, pour lesquels le profil est une courbe en sinus ou en cosinus. Ces dernières sont connues en physique sous le nom d'ondes sinusoïdales, ondes harmoniques simples, ou simplement **ondes harmoniques**. Elles ont une importance toute particulière ; on verra effectivement, au chapitre 7, que toute onde quelconque peut être décrite comme une superposition d'ondes harmoniques.

Considérons un profil de départ exprimé par une fonction simple, par exemple :

$$\psi(x, t)|_{t=0} = \psi(x) = A \sin kx = f(x) \quad (2.12)$$

k est ici une constante positive qu'il est nécessaire d'introduire tout simplement parce que l'on ne peut pas prendre le

sinus d'une grandeur autre qu'un angle ; kx est en radians. On sait, d'autre part, que la fonction sinus varie de $+1$ à -1 . La valeur maximale de $\psi(x)$ est donc A . Cette perturbation maximale est appelée **amplitude** de l'onde (figure 2.6). On applique ici la méthode expliquée au paragraphe 2.1. Pour transformer l'équation (2.12) en une expression décrivant une *onde progressive* se déplaçant dans la direction x positive, à la vitesse v , il suffit donc de remplacer tous les x par $(x-vt)$. Dans ce cas :

$$\psi(x, t) = A \sin k(x - vt) = f(x - vt) \quad (2.13)$$

Cela est explicitement une solution de l'équation d'onde différentielle (voir problème 2.18). En considérant x ou t fixés, on obtient ainsi une perturbation sinusoïdale ; l'onde est périodique à la fois dans l'espace et le temps. La **période spatiale** est appelée **longueur d'onde**, et notée λ : c'est la longueur d'un cycle. L'unité de mesure habituelle pour λ est le *nanomètre*, où $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$, bien que le *micromètre* ($1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$) soit souvent utilisé ou que le plus ancien *angstrom* ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$) figure toujours dans la littérature. Par définition, une augmentation ou une diminution de x par une quantité λ laisse donc ψ inchangée, c'est-à-dire :

$$\psi(x, t) = \psi(x \pm \lambda, t) \quad (2.14)$$

Dans le cas d'une fonction harmonique, cela revient donc à ajouter $\pm 2\pi$ à l'argument du sinus. Ainsi :

$$\sin k(x - vt) = \sin k[(x \pm \lambda) - vt] = \sin [k(x - vt) \pm 2\pi]$$

Et donc : $|k\lambda| = 2\pi$

Ou bien, comme k et λ sont tous deux positifs,

$$k = 2\pi/\lambda \quad (2.15)$$

La figure 2.6 montre comment tracer le profil donné par l'équation (2.12) en termes de λ . Ici, φ est l'argument de la fonction sinus, également appelé **phase**. Notons que $\psi(x) = 0$ lorsque $\sin \varphi = 0$, ce qui arrive lorsque $\varphi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ et ainsi de suite. Ces situations ont respectivement lieu pour $x = 0, \lambda/2, \lambda$, et $3\lambda/2$.

De même que pour le paramètre espace et la période spatiale λ , on définit également la **période temporelle**, τ . Celle-ci correspond donc au temps que met le cycle complet pour

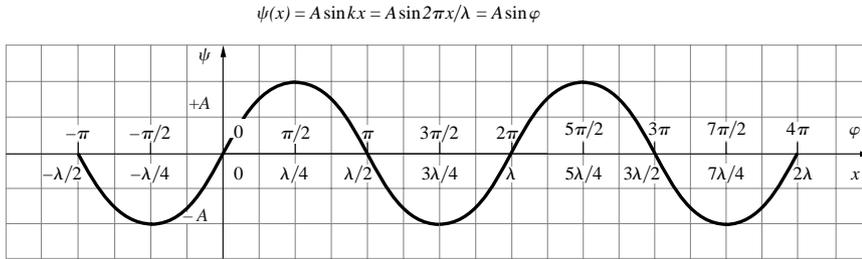


Figure 2.6 Une fonction harmonique, servant de profil à une onde harmonique. Une longueur d'onde correspond à un changement de phase φ de 2π rad.

défiler devant un observateur stationnaire et se répéter dans le temps. On a donc :

$$\psi(x, t) = \psi(x, t \pm \tau) \quad (2.16)$$

Ainsi : $\sin k(x - vt) = \sin k[x - v(t \pm \tau)]$

$$\sin k(x - vt) = \sin [k(x - vt) \pm 2\pi]$$

Donc,

$$|kv\tau| = 2\pi$$

Toutes ces quantités étant positives, on peut écrire :

$$kv\tau = 2\pi \quad (2.17)$$

avec $\frac{2\pi}{\lambda} v\tau = 2\pi$

On obtient donc finalement :

$$\tau = \lambda/v \quad (2.18)$$

La période temporelle est *la durée d'un cycle* (figure 2.7). Son inverse est la **fréquence temporelle** ν , ou le *nombre de vibrations par unité de temps* (i.e. par seconde). Ainsi,

$$\nu \equiv 1/\tau$$

ν s'exprime ainsi en nombre de cycles par seconde ou hertz (Hz). L'équation (2.18) devient donc :

$$v = \nu\lambda \quad (2.19)$$

Imaginons, par exemple, une onde harmonique sur une corde située à proximité d'un observateur immobile. Pendant chaque

seconde, le nombre de cycles défilant devant l'observateur est donc ν . D'autre part, chaque cycle a une longueur λ . En 1,0 s, la longueur totale de la perturbation passant devant l'observateur est, par conséquent, le produit $\nu\lambda$. Si la longueur d'onde est par exemple 2,0 m et que les ondes arrivent à un rythme de 5,0 par seconde, alors en 1,0 s, 10,0 m d'ondes seront passés. La vitesse d'une onde (v) est celle en m/s, de sa progression. En d'autres termes, puisqu'une longueur d'onde λ passe en un temps τ , sa vitesse doit être égale à $\lambda/\tau = \nu\lambda$. Newton nota cette relation dans ses *Principia* (1687), dans la section intitulée « *Déterminer la vitesse des ondes* ».

On définit aussi deux autres quantités fréquemment utilisées dans la description des phénomènes ondulatoires. L'une d'elles est la **pulsation** :

$$\omega \equiv 2\pi/\tau = 2\pi\nu \quad (2.20)$$

Ce paramètre s'exprime en radians par seconde. On définit également le **nombre d'onde**, notion très importante en spectroscopie :

$$\kappa \equiv 1/\lambda \quad (2.21)$$

Ce paramètre est le *nombre d'ondes par unité de longueur* et s'exprime en m^{-1} . Signalons ici que ces différents paramètres permettent de décrire toutes les ondes, et non pas spécifiquement les ondes harmoniques, pourvu qu'elles soient constituées d'un **profil unique**, répété régulièrement (figure 2.8).

Avec ces définitions, plusieurs expressions équivalentes peuvent être écrites pour représenter des ondes harmoniques progressives :

$$\psi = A \sin k(x \mp vt) \quad [2.13]$$

$$\psi = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{\tau} \right) \quad (2.22)$$

$$\psi = A \sin 2\pi(\kappa x \mp \nu t) \quad (2.23)$$

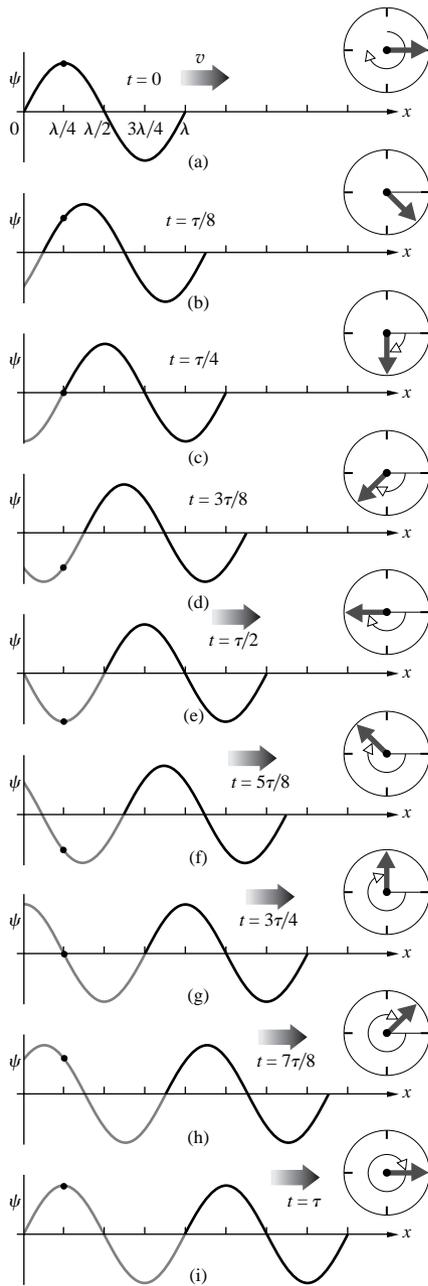


Figure 2.7 Une onde harmonique se déplaçant le long de l'axe x , pour une durée correspondant à une période. Notons que, dans le cas d'une corde, tout point ne se déplace que verticalement. On discutera de la signification de la flèche tournante dans le paragraphe 2.6.

$$\psi = A \sin (kx \mp \omega t) \quad (2.24)$$

$$\psi = A \sin 2\pi v \left(\frac{x}{v} \mp t \right) \quad (2.25)$$

Parmi ces dernières, les équations (2.13) et (2.24) sont celles que l'on rencontrera le plus fréquemment. Notons bien que toutes ces ondes idéales ont une extension infinie. Cela signifie que, pour n'importe quelle valeur de t , il n'y a pas de limitation mathématique sur x , qui varie donc de $-\infty$ à $+\infty$. Chacune de ces ondes a une fréquence constante unique : elle est aussi qualifiée de **monochromatique** (ou **monoénergétique**). Les ondes réelles ne sont jamais monochromatiques. En effet, aucun générateur d'ondes sinusoïdales, même parfaites, ne peut être en marche depuis toujours ! Les ondes générées contiennent donc inévitablement une gamme de fréquences différentes, dues au fait que ces ondes ne s'étendent pas depuis $t = -\infty$. Ainsi, toute onde comprend, non pas une seule fréquence, mais une bande de fréquences. Lorsque cette bande est étroite, on dit aussi que l'onde est **quasi monochromatique**.

Avant de changer de sujet, illustrons l'équation (2.13) par quelques exemples numériques. Pour cela, posons, par exemple, que $v = 1,0 \text{ m/s}$ et $\lambda = 2,0 \text{ m}$. Or, on a, pour la fonction d'onde :

$$\psi = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt)$$

Avec les valeurs précédentes, ψ s'écrit, en unités internationales (SI) :

$$\psi = A \sin \pi (x - t)$$

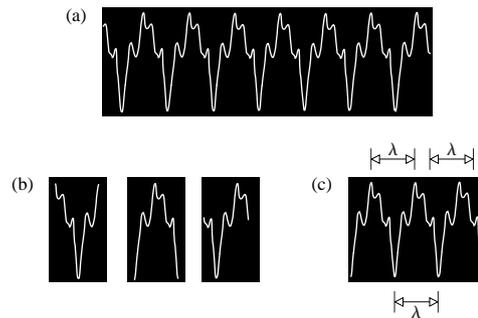


Figure 2.8 (a) La forme d'une onde produite par un saxophone : imaginons n'importe quel nombre d'éléments de profil (b) qui, lorsqu'ils sont répétés, créent la forme d'onde. (c) La distance après laquelle l'onde se répète est appelée la longueur d'onde, λ .

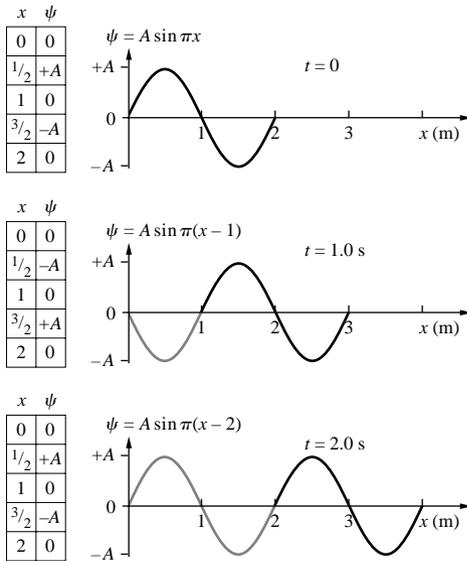


Figure 2.9 Une onde progressive de la forme $\psi(x, t) = A \sin k(x - vt)$, se déplaçant vers la droite à une vitesse de 1,0 m/s.

La figure 2.9 montre comment l'onde progresse vers la droite à 1,0 m/s pendant que le temps passe de $t = 0$ [où $\psi = A \sin \pi x$] à $t = 1,0 \text{ s}$ [où $\psi = A \sin \pi(x - 1,0)$] et à $t = 2,0 \text{ s}$ [$\psi = A \sin \pi(x - 2,0)$].

2.3 Phase et vitesse de phase

Considérons une fonction d'onde harmonique, par exemple :

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (2.26)$$

L'argument du sinus est la phase φ de l'onde, avec :

$$\varphi = (kx - \omega t) \quad (2.27)$$

A $t = x = 0$,

$$\psi(x, t)|_{x=0} = \psi(0, 0) = 0$$

Cela constitue néanmoins un cas particulier. Plus généralement, on peut écrire :

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varepsilon) \quad (2.28)$$

où ε est la **phase initiale**. Pour mieux comprendre le sens physique de ε , imaginons que l'on veuille produire une onde

harmonique progressive sur une corde tendue, comme le montre la figure 2.10. Pour générer des ondes harmoniques, le mouvement de la main qui tient la corde devrait être tel que son déplacement vertical, y , soit proportionnel à l'opposée de son accélération, c'est-à-dire être un mouvement harmonique simple (voir le problème 2.15). Cependant, on comprend qu'à $t = 0$ et $x = 0$, la main ne se trouve pas obligatoirement sur l'axe x , prête à bouger vers le bas, comme sur la figure 2.10. Elle pourrait, par exemple, commencer son mouvement par un coup vers le haut, auquel cas $\varepsilon = \pi$, comme sur la figure 2.11. Pour ce dernier cas :

$$\psi(x, t) = y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \pi)$$

Cela est équivalent à :

$$\psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx) \quad (2.29)$$

Ou bien : $\psi(x, t) = A \cos\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right)$

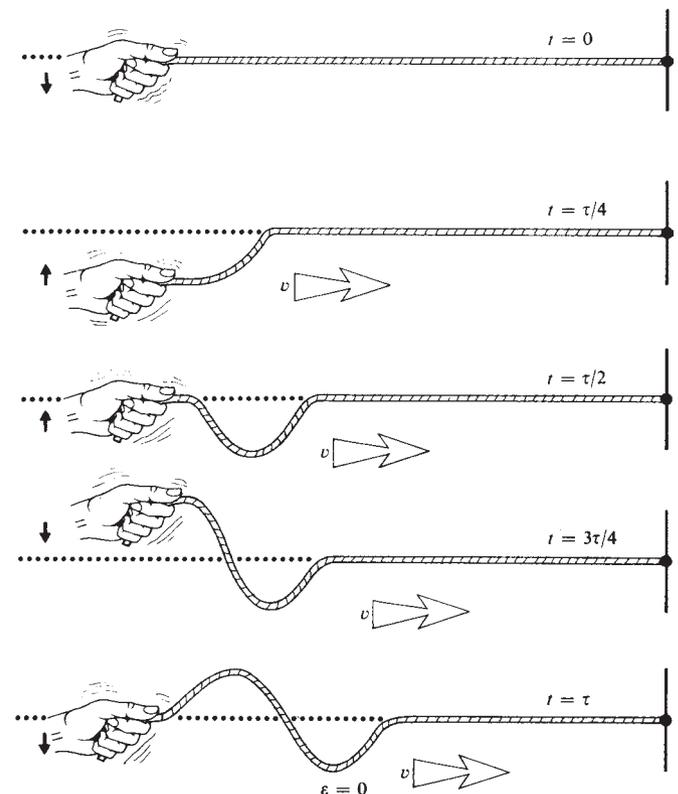


Figure 2.10 Avec $\varepsilon = 0$, notez qu'à $x = 0$ et $t = \tau/4 = \pi/2\omega$, $y = A \sin(-\pi/2) = -A$.

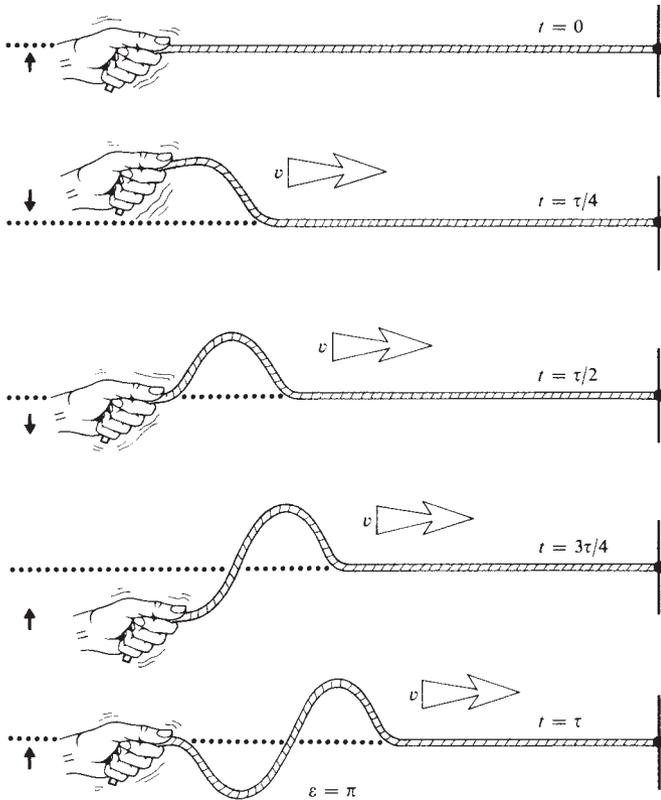


Figure 2.11 Avec $\varepsilon = \pi$, on note qu'à $x = 0$ et $t = \tau/4$, $y = A \sin(\pi/2) = A$.

L'angle de phase initial ne constitue donc qu'une contribution constante à la phase de l'onde. Il est, de même, indépendant de la distance parcourue par l'onde, ainsi que de la durée du trajet.

Dans l'équation (2.26), on constate que la valeur de la phase est $(kx - \omega t)$, alors qu'elle est de $(\omega t - kx)$ dans l'équation (2.29). Cependant, ces équations décrivent toutes deux des ondes se déplaçant dans la direction x positive, absolument identiques, à l'exception d'une différence de phase relative de π . En fait, lorsque la phase initiale n'a pas d'importance particulière (comme c'est souvent le cas), une onde peut être décrite par n'importe laquelle des équations (2.26) ou (2.29) (ou même un cosinus). Dans certaines situations, l'une des expressions pourra, en revanche, être mathématiquement plus attrayante que l'autre. Quoiqu'il en soit, on trouve les deux dans la littérature et elles seront donc utilisées ici.

Pour la perturbation $\psi(x, t)$ donnée par l'équation (2.28), la phase est donc :

$$\varphi(x, t) = (kx - \omega t + \varepsilon)$$

Celle-ci est visiblement fonction de x et de t . On définit ici la *vitesse de rotation de la phase*, comme étant égal à la dérivée partielle de φ par rapport à t , en gardant x constant :

$$\left| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_x \right| = \omega \quad (2.30)$$

Ainsi, pour un point donné de la corde, la vitesse de rotation de la phase correspond à la pulsation de l'onde. Ce point est sujet au même nombre de cycles par seconde que l'onde. À chaque cycle, φ change de 2π .

De même, la *variation de la phase par rapport à la distance*, est, cette fois à t constant,

$$\left| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_t \right| = k \quad (2.31)$$

Ces deux expressions rappellent une équation de la théorie des dérivées partielles, utilisée fréquemment en thermodynamique :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_\varphi = \frac{-(\partial \varphi / \partial t)_x}{(\partial \varphi / \partial x)_t} \quad (2.32)$$

Le terme de gauche représente la *vitesse de propagation à phase constante*. Imaginons, par exemple, une onde harmonique, et choisissons un point du profil, par exemple, l'une des crêtes de l'onde. Lorsque l'onde se déplace, le déplacement en y de la crête reste fixe. Vu que la seule variable dans la fonction d'onde harmonique est la phase, il faut que celle-ci reste constante pour le point en mouvement. Ainsi, la phase doit elle être fixée à la valeur qui maintient constant le déplacement y correspondant au point choisi. Le point se déplace avec le profil à une vitesse v , et il en va de même pour la condition de phase constante.

En prenant les dérivées partielles appropriées de l'expression de φ qui est donnée par l'équation (2.29) et en les remplaçant dans l'équation (2.32), on obtient :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_\varphi = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v \quad (2.33)$$

Ce résultat correspond à la *vitesse* à laquelle le profil se déplace. Elle est plus communément connue en tant que **vitesse de phase** de l'onde. La vitesse de phase est de signe positif lorsque l'onde se déplace dans la direction où x augmente et de signe négatif lorsque x diminue. Cela est cohérent avec notre développement de v en tant qu'amplitude de la vitesse de l'onde : $v > 0$.

Considérons à présent le concept de propagation de phase constante et étudions comment il se rapporte à l'une ou à l'autre des équations d'ondes harmoniques, par exemple :

$$\psi = A \sin k(x \mp vt)$$

Avec : $\varphi = k(x - vt) = \text{constante}$

À mesure que t augmente, x doit également augmenter. Même si $x < 0$, de sorte que $\varphi < 0$, x doit augmenter (i.e. devenir « moins négatif »). Ici, la condition de phase constante se déplace donc dans la direction des x croissants. Tant que les deux termes dans la phase se soustraient l'un à l'autre, l'onde se déplace dans la direction des x positifs. La situation est différente si l'on a :

$$\varphi = k(x + vt) = \text{constante}$$

À mesure que t augmente, x peut être positif et décroître ou négatif et devenir encore plus négatif. Dans les deux cas, la condition de phase constante se déplace dans la direction où x diminue.

Tout point à amplitude constante d'une onde harmonique se déplace de telle sorte que $\varphi(x, t)$ soit constante dans le temps. En d'autres termes, $d\varphi(x, t)/dt = 0$ ou bien $d\psi(x, t)/dt = 0$. Cela est vrai pour toutes les ondes, périodiques ou non, et mène (voir problème 2.27) à l'expression :

$$\pm v = \frac{-(\partial\psi/\partial t)_x}{(\partial\psi/\partial x)_t} \quad (2.34)$$

Celle-ci peut être utilisée pour calculer v lorsqu'on connaît $\psi(x, t)$. Notons d'ailleurs que, puisque v est toujours un nombre positif, le déplacement se fait dans la direction des x négatifs, lorsque le quotient de droite est négatif.

La figure 2.12 représente une source produisant d'hypothétiques ondes à deux dimensions à la surface d'un liquide. La nature essentiellement sinusoïdale de la perturbation, alors que le milieu monte et descend, apparaît clairement sur le diagramme. Il existe cependant une autre façon utile de percevoir ce qui se passe. On peut effectivement remarquer que *les courbes joignant tous les points ayant une phase donnée forment un groupe de cercles concentriques*. De plus, puisque A est constante partout à une certaine distance de la source, si φ est constante sur un cercle, alors ψ l'est également. Autrement dit, tous les sommets et les creux correspondants forment des cercles. On parle, de ce fait, d'*ondes circulaires*, qui se dirigent toutes vers l'extérieur à la vitesse v .



Figure 2.12 Ondes circulaires (Photo E.H.)

2.4 Le principe de superposition

La forme de la fonction d'onde différentielle [équation (2.11)] révèle une propriété étonnante des ondes, bien différente en particulier du comportement d'un flux de particules classiques. Supposons que les fonctions d'onde ψ_1 et ψ_2 soient deux solutions distinctes de l'équation d'onde. Il en résulte alors que $(\psi_1 + \psi_2)$ est aussi une solution ! Ce principe porte le nom de **principe de superposition** et peut être prouvé facilement. Il est en effet justifié d'écrire :

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}$$

En additionnant ces expressions, on obtient alors :

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\psi_1 + \psi_2) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\psi_1 + \psi_2)$$

Cela établit que $(\psi_1 + \psi_2)$ est aussi une solution. La signification concrète de ce principe est que, lorsque deux ondes séparées arrivent et se superposent à un même endroit de l'espace, elles s'ajoutent (ou se soustraient) simplement l'une à l'autre, sans que

cela ne détruit, ou même ne dérange aucune d'entre elles. **En tout point de la région de superposition, la perturbation résultante est la somme algébrique des ondes individuelles présentes à cet endroit** (figure 2.13). Une fois sortie de la région où les deux ondes coexistent, chacune continue son chemin sans avoir été perturbée par la rencontre précédente.

Rappelons que nous discutons ici de superposition linéaire d'ondes, un processus très commun et largement validé. Néanmoins, il est parfois possible que les amplitudes d'ondes soient importantes au point de rendre le milieu non linéaire (p. 657). Pour l'instant, on n'étudiera que des équations d'ondes linéaires, desquelles découle un principe de superposition linéaire.

Une grande partie de l'optique fait appel au concept de superposition d'ondes. Même les processus élémentaires de réflexion et de réfraction sont les manifestations de la diffusion de la lumière par d'innombrables atomes (p. 93), un phénomène qui ne peut être traité de façon satisfaisante qu'en termes de superposition d'ondes. Il est donc crucial de comprendre ce processus, au moins de façon qualitative. De ce fait, examinons attentivement les deux ondes coexistantes de la figure 2.13.

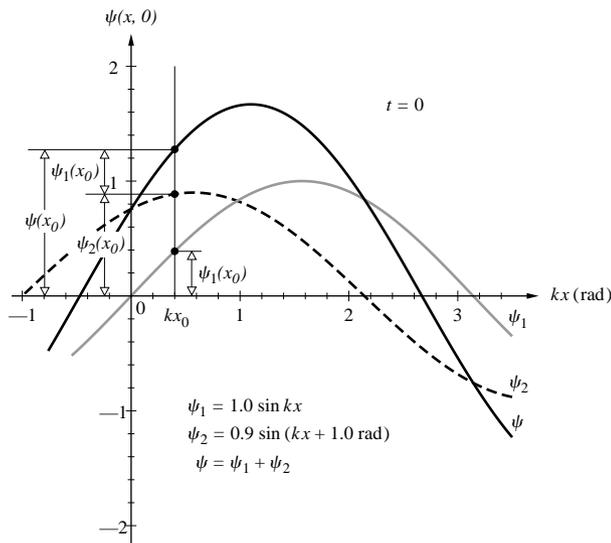


Figure 2.13 Superposition de deux ondes sinusoïdales ψ_1 et ψ_2 de même longueur d'onde : le résultat est également une onde sinusoïdale, de longueur d'onde identique, égale, en tout point, à la somme algébrique des sinusoides d'origine. Ainsi, à $x = x_0$, $\psi(x_0) = \psi_1(x_0) + \psi_2(x_0)$, les amplitudes s'ajoutent. L'amplitude A de ψ peut être déterminée de différentes manières ; voir figure 2.17.

En chaque point (i.e. chaque valeur de kx), on additionne tout simplement ψ_1 et ψ_2 , qui peuvent être elles-mêmes positives ou négatives. En guise de vérification rapide, on peut se rappeler qu'à chaque fois que l'une des ondes constituantes est nulle (par exemple, $\psi_1 = 0$), l'onde résultante doit avoir la valeur de l'autre ($\psi = \psi_2$). Dans ce cas, les deux courbes se croisent à cet endroit (par exemple, à $kx = 0$ et $+3,14$ rad). D'un autre côté, $\psi = 0$ lorsque les deux ondes constituantes ont la même amplitude mais des signes opposés ($kx = +2,67$ rad). Notons aussi comment une différence de phase relative *positive* de 1,0 rad entre les deux courbes déplace ψ_2 vers la gauche de 1,0 rad par rapport à ψ_1 .

Afin d'approfondir un peu plus ce raisonnement, examinons la figure 2.14. Celle-ci montre comment le résultat de la superposition de deux ondes d'amplitudes presque égales dépend de la différence de phase entre elles. À la figure 2.14a, les deux ondes ont la même phase. Leur différence d'angle de phase est donc nulle et elles sont alors dites **en phase**. Dans ce cas, leurs évolutions relatives sont identiques et elles se renforcent mutuellement. L'onde résultante, qui a une amplitude substantielle, est sinusoïdale et possède la même fréquence et la même longueur d'onde que les ondes qui la constituent (p. 299). En continuant à regarder la suite de ces graphiques, on voit finalement que l'amplitude de l'onde résultante diminue lorsque la différence de phase augmente, jusqu'à disparaître pratiquement lorsque cette différence est égale à π . Les ondes constituantes ont alors une différence de phase de 180° et l'on dit qu'elles sont **en opposition de phase**. C'est d'ailleurs parce que des ondes en opposition de phase ont tendance à s'éliminer entre elles, que l'on a donné le nom d'**interférences** au phénomène global.

2.5 La représentation complexe

L'analyse approfondie des phénomènes ondulatoires souligne l'insuffisance des fonctions sinus et cosinus pour décrire les ondes harmoniques. Les expressions peuvent en effet devenir assez compliquées et les manipulations trigonométriques requises sont d'autant moins attrayantes. L'utilisation des nombres complexes offre aussi une description mathématique plus simple. En fait, les exponentielles complexes sont utilisées de façon intensive à la fois en mécanique classique, en physique quantique et en optique.

Un nombre complexe \bar{z} est de la forme :

$$\bar{z} = x + iy \quad (2.35)$$

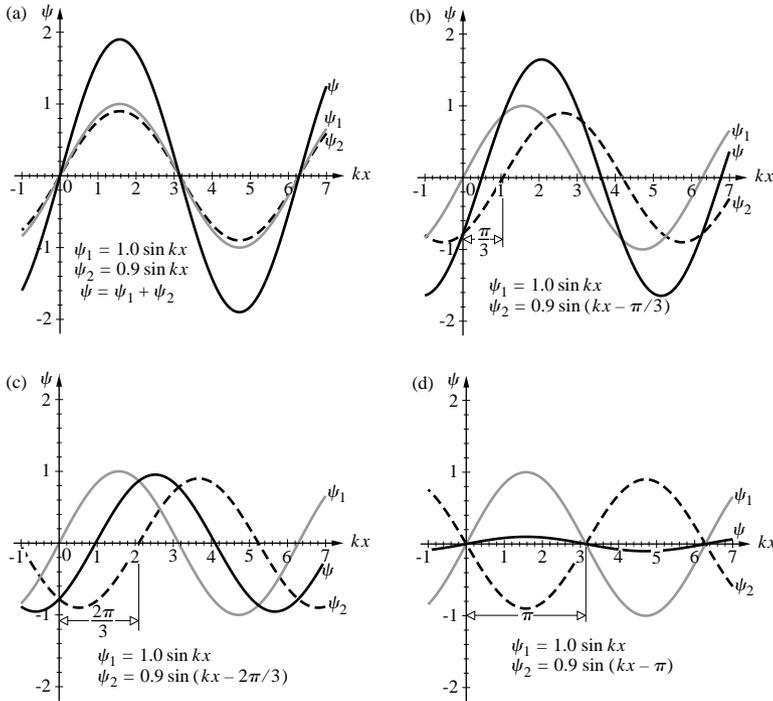


Figure 2.14 Superposition de deux ondes sinusoïdales d'amplitudes de $A_1 = 1,0$ et $A_2 = 0,9$: (a) elles sont en phase. (b) ψ_1 précède ψ_2 de $\pi/3$. (c) ψ_1 précède ψ_2 de $2\pi/3$. (d) ψ_1 et ψ_2 sont en opposition de phase (déphasées de π) et s'annulent pratiquement l'une et l'autre. Voir figure 2.18 pour comprendre comment les amplitudes peuvent être déterminées.

où $i = \sqrt{-1}$. Les nombres x et y sont des réels qui constituent respectivement les parties réelle et imaginaire de \bar{z} . Un nombre complexe peut être représenté graphiquement grâce à un *diagramme d'Argand*, en coordonnées cartésiennes, x et y (figure 2.15a) ou polaires, r et θ (figure 2.15b). On peut passer de l'une à l'autre grâce aux deux relations :

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

Et donc : $\bar{z} = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

Il est également utile de connaître la *formule d'Euler** :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Elle conduit naturellement à l'expression : $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$. En additionnant et soustrayant ces deux équations, on obtient donc :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

.....

*Si vous doutez de cette identité, prenez la différentielle de $\bar{z} = \cos \theta + i \sin \theta$ où $r = 1$. Cela donne $d\bar{z} = i\bar{z} d\theta$ et l'intégration donne $\bar{z} = \exp(i\theta)$.

Et

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

De plus, la formule d'Euler nous permet d'écrire (figure 2.15b) :

$$\bar{z} = r e^{i\theta} = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

où r et θ sont respectivement le *module* et l'*angle de phase* (ou l'*angle de phase*) de \bar{z} . Ces deux paramètres sont clairement identifiables sur le diagramme d'Argand. Le module, souvent noté $|\bar{z}|$, correspond à la norme du vecteur associé au nombre complexe. L'angle de phase, exprimé en radians, est l'angle que fait ce vecteur avec l'axe des réels. D'autre part, on définit également le *nombre complexe conjugué*, indiqué par un astérisque (figure 2.15c), qui est obtenu en remplaçant i , où qu'il se trouve, par $-i$, de sorte que :

$$\bar{z}^* = (x + iy)^* = (x - iy)$$

$$\bar{z}^* = r(\cos \theta - i \sin \theta)$$

Et

$$\bar{z}^* = r e^{-i\theta}$$

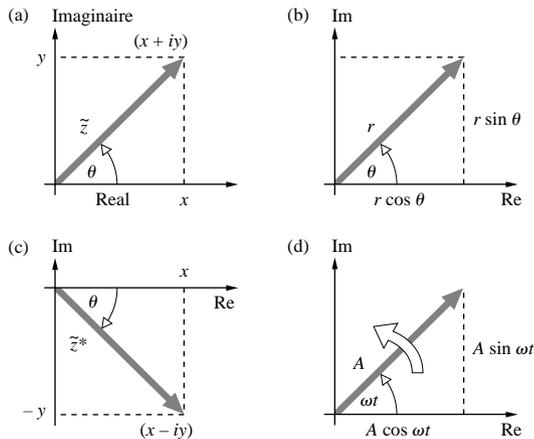


Figure 2.15 Le diagramme d'Argand est la représentation d'un nombre complexe en fonction de ses composantes réelles et imaginaires. On peut le construire en utilisant (a) soit les coordonnées cartésiennes x et y , (b) soit les coordonnées polaires r et θ . De plus, (d) lorsque θ change constamment en fonction du temps, la flèche tourne à une vitesse angulaire ω .

Les opérations d'addition et de soustraction des nombres complexes obéissent à des règles assez simples :

$$\tilde{z}_1 \pm \tilde{z}_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2)$$

Et, donc :

$$\tilde{z}_1 \pm \tilde{z}_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

Notons que ce procédé est similaire aux opérations d'addition ou de soustraction des vecteurs.

D'autre part, les opérations de multiplication et de division sont exprimées le plus simplement avec la forme polaire :

$$\tilde{z}_1 \tilde{z}_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Et

$$\frac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Certains autres résultats, qui seront utiles dans des calculs futurs, valent la peine d'être mentionnés. Il découle, par exemple, des formules d'addition trigonométrique ordinaires (problème 2.37) telles que :

$$e^{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2} = e^{\tilde{z}_1} e^{\tilde{z}_2}$$

Ainsi, si $\tilde{z}_1 = x$ et $\tilde{z}_2 = iy$,

$$e^{\tilde{z}} = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

D'autre part, on peut obtenir simplement le module d'une quantité complexe en faisant :

$$r = |\tilde{z}| \equiv (\tilde{z} \tilde{z}^*)^{1/2}$$

Ainsi : $|e^{\tilde{z}}| = e^x$

Par ailleurs, comme $\cos 2\pi = 1$ et $\sin 2\pi = 0$,

$$e^{i2\pi} = 1$$

De même,

$$e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1 \quad \text{et} \quad e^{\pm i\pi/2} = \pm i$$

La fonction $e^{\tilde{z}}$ est périodique. Ainsi, elle se répète tous les $i2\pi$:

$$e^{\tilde{z} + i2\pi} = e^{\tilde{z}} e^{i2\pi} = e^{\tilde{z}}$$

Finalement, il est important de retenir que tout nombre complexe peut être représenté en tant que somme d'une partie réelle $\text{Re}(\tilde{z})$ et d'une partie imaginaire $\text{Im}(\tilde{z})$:

$$\tilde{z} = \text{Re}(\tilde{z}) + i \text{Im}(\tilde{z})$$

De sorte que :

$$\text{Re}(\tilde{z}) = \frac{1}{2}(\tilde{z} + \tilde{z}^*) \quad \text{et} \quad \text{Im}(\tilde{z}) = \frac{1}{2i}(\tilde{z} - \tilde{z}^*)$$

Ces deux expressions peuvent être déduites directement du diagramme d'Argand, (figure 2.15a et c). Par exemple, $\tilde{z} + \tilde{z}^* = 2x$ puisque les parties imaginaires s'annulent et donc $\text{Re}(\tilde{z}) = x$.

En termes de coordonnées polaires, on a donc :

$$\text{Re}(\tilde{z}) = r \cos \theta \quad \text{et} \quad \text{Im}(\tilde{z}) = r \sin \theta$$

D'un point de vue physique, il est donc clair que l'une ou l'autre des parties peut être choisie pour décrire une onde harmonique. Il est cependant usuel de choisir la partie réelle. Dans ce cas, une onde harmonique s'écrit :

$$\psi(x, t) = \text{Re}[Ae^{i(\omega t - kx + \varepsilon)}] \quad (2.36)$$

Cette expression est, bien sûr, tout à fait équivalente à :

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varepsilon)$$

Désormais, lorsque cela sera commode, on écrira donc les fonctions d'onde sous la forme :

$$\psi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx + \varepsilon)} = Ae^{i\varphi} \quad (2.37)$$

On utilisera la forme complexe dans toutes les étapes calculatoires afin de profiter de la simplicité avec laquelle les exponentielles complexes peuvent être manipulées. Ce n'est seulement qu'après être arrivé au résultat final que l'on prendra la partie réelle du résultat pour représenter l'onde en question. Notons qu'il est finalement devenu assez usuel d'écrire $\psi(x, t)$ comme dans l'équation (2.37), en sous-entendant intuitivement que l'onde n'est uniquement représentée que par la partie réelle de l'expression.

2.6 Phaseurs et addition d'ondes

La flèche représentée sur le diagramme d'Argand (figure 2.15d) tourne à une vitesse angulaire ω et fait ainsi un angle égal à ωt avec l'axe des réels. Ce résultat suggère aussi une méthode pour aider à représenter (et finalement additionner) les ondes. On l'introduit ici de façon qualitative mais elle sera développée plus tard (p. 301) quantitativement.

La figure 2.16 décrit une onde harmonique d'amplitude A se déplaçant vers la gauche. On peut ainsi la représenter, sur un diagramme circulaire, sous la forme d'une flèche de longueur A tournant à la vitesse angulaire ω . À un instant t donné, cette flèche fait ainsi un angle ωt avec l'axe des abscisses. Cette flèche tournante et l'angle de phase qui lui est associé constituent ce que l'on appelle un **vecteur de Fresnel** ou **phaseur**. La norme du phaseur est donc égale à l'amplitude de la grandeur sinusoïdale alors que l'angle qu'il fait avec l'axe Ox en représente la phase (d'où le nom de *phaseur*). De ce fait, un phaseur contient toutes les informations essentielles (amplitude et phase) sur l'onde harmonique correspondante. Un phaseur correspondant à une onde d'amplitude A et de phase φ est noté sous la forme : $A \angle \varphi$.

Pour bien comprendre cette méthode de représentation, examinons attentivement les différentes parties de la figure 2.16. Le phaseur de la figure 2.16a possède un angle de phase nul. Il est donc confondu avec l'axe des abscisses. La fonction sinus associée peut aussi servir de référence. Dans ce cas, la variation sinusoïdale représentative de l'onde est celle de la projection du phaseur sur l'axe vertical. Sur la figure 2.16b, le phaseur fait un angle de $+\pi/3$ rad et la courbe du sinus est décalée vers la gauche de $\pi/3$ rad. Cette courbe atteint donc son premier sommet pour une valeur de kx inférieure à celle de la courbe de référence (a). Elle précède donc la référence de $\pi/3$ rad. Pour (c), (d) et (e) de la figure 2.16, les angles de phase sont respectivement $+\pi/2$ rad, $+2\pi/3$ rad, et $+\pi$ rad.

La séquence de ces courbes peut être vue comme une onde $\psi = A \sin(kx + \omega t)$, se déplaçant vers la gauche. Elle est représentée de façon équivalente par la méthode du vecteur tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre de telle sorte que son angle de phase, à un instant t , soit ωt . La même chose se produisait à la figure 2.7, mais pour celle-ci, l'onde se déplaçait vers la droite et le phaseur tournait dans le sens des aiguilles d'une montre.

Lorsqu'on étudie une superposition d'ondes, on cherche généralement à connaître l'amplitude et la phase du résultat. Dans cette optique, réexaminons la façon dont les ondes s'ajoutaient, à la figure 2.14. Dans le cas où les perturbations sont en phase (figure 2.14a), il apparaît que l'amplitude A de l'onde résultante est la somme des amplitudes des ondes constituantes : $A = A_1 + A_2 = 1,0 + 0,9 = 1,9$. On obtient la même chose si l'on additionne deux vecteurs colinéaires

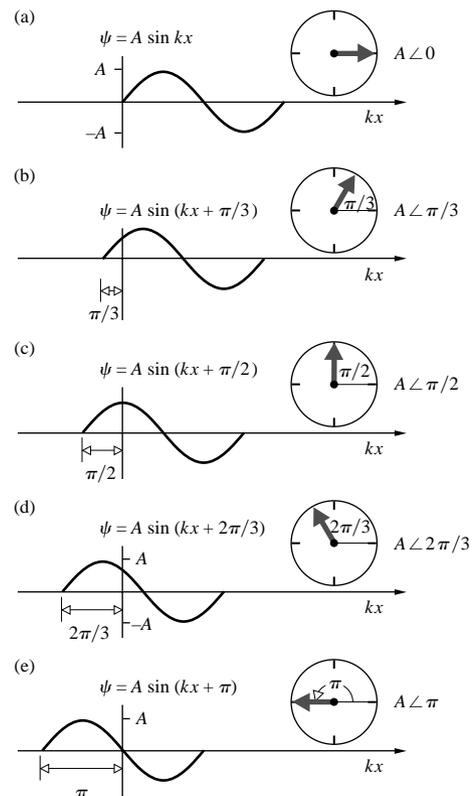


Figure 2.16 Tracé de la fonction $\psi = A \sin(kx + \omega t)$ et des phaseurs correspondants : en (a), (b), (c), (d) et (e), les valeurs de ωt sont respectivement de 0, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, et π .

pointant dans la même direction. De même, lorsque les perturbations sont en opposition de phase (180° – figure 2.14d), $A = A_1 - A_2 = 1,0 - 0,9 = 0,1$ comme si l'on additionnait deux vecteurs colinéaires pointant dans des directions opposées. Bien que les phaseurs ne soient pas à proprement parler des vecteurs, ils s'additionnent donc de façon similaire. Plus tard, on montrera que deux phaseurs arbitraires, $A_1 \angle \varphi_1$ et $A_2 \angle \varphi_2$ se combinent comme le feraient des vecteurs (figure 2.17), pour produire le résultat $A \angle \varphi$. Par ailleurs, comme les deux ondes qui se superposent ont la même pulsation ω , les deux phaseurs tournent ensemble à la même vitesse angulaire ω . De ce fait, on peut faire en sorte de les « bloquer » à $t = 0$ et ne plus s'inquiéter de leur dépendance temporelle. Cette manipulation les rend nettement plus faciles à tracer.

Les quatre phaseurs de la figure 2.18 correspondent respectivement aux quatre configurations d'ondes de la figure 2.14. Lorsque les ondes sont en phase (figure 2.14a), on peut décider que les phases de l'onde 1 et de l'onde 2 sont toutes deux nulles (figure 2.18a). On positionne alors les phaseurs correspondants l'un derrière l'autre le long de l'axe de référence pour lequel $\varphi = 0$. Lorsque les ondes ont une différence de phase de $\pi/3$ (figure 2.14b), les phaseurs font donc entre eux un angle de $\pi/3$. L'onde résultante, qui a bien une amplitude réduite, possède une phase φ comprise entre 0 et $\pi/3$, comme on peut le voir sur les figures 2.14b et 2.18b. Lorsque les ondes présentent un déphasage de $2\pi/3$ (figure 2.14c), les phaseurs correspondants (figure 2.18c) forment pratiquement un triangle équilatéral (mis à part qu'ici, $A_1 > A_2$). Par conséquent, A se trouve maintenant entre A_1 et A_2 . Finalement, lorsque la différence de phase entre les deux ondes (ou la différence d'angle entre les deux phaseurs) est de π rad (i.e. 180°), elles s'annulent pratiquement entièrement et l'amplitude résultante est minimale. Notons (figure 2.18d) que le phaseur résultant pointe le long de l'axe de référence. Il a donc la même phase (i.e. zéro) que $A_1 \angle \varphi_1$. Il est ainsi en opposition de phase de 180° avec $A_2 \angle \varphi_2$. On observe le même résultat pour les ondes correspondantes de la figure 2.14d.

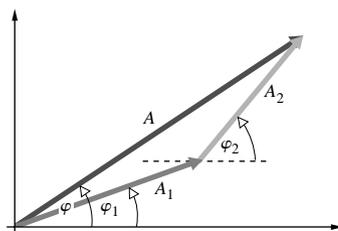


Figure 2.17 La somme de deux phaseurs $A_1 \angle \varphi_1$ et $A_2 \angle \varphi_2$ est égale à $A \angle \varphi$. Examinez à nouveau la figure 2.13 représentant la superposition de deux sinusoides d'amplitudes $A_1 = 1,0$, et $A_2 = 0,9$ et de phases $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_2 = 1,0$ rad.

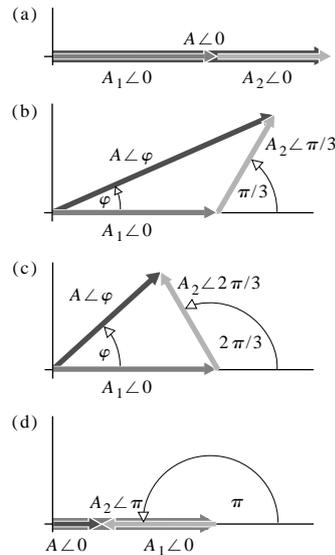


Figure 2.18 Addition de deux phaseurs représentant deux ondes d'amplitude $A_1 = 1,0$ et $A_2 = 0,9$ pour quatre différences de phase relatives, comme indiqué à la figure 2.14.

2.7 Ondes planes

L'onde plane est probablement l'exemple le plus simple d'ondes à trois dimensions. Elle existe à un instant donné, lorsque toutes les surfaces sur lesquelles la perturbation a une phase constante forment un groupe de *plans*, chacun étant en général perpendiculaire à la direction de propagation. Ces perturbations sont étudiées pour plusieurs raisons, l'une d'elles étant qu'il est facile de produire de la lumière sous forme d'ondes planes au moyen de dispositifs optiques.

L'expression mathématique d'un plan perpendiculaire à un vecteur \mathbf{k} donné et passant par un point (x_0, y_0, z_0) est assez facile à établir (figure 2.19). Exprimons tout d'abord le vecteur position en coordonnées cartésiennes, en termes de vecteurs unités (figure 2.19a) :

$$\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

Ce vecteur a une origine arbitraire O et se termine en un point (x, y, z) , qui peut, pour le moment, être n'importe où dans l'espace. Ainsi,

$$(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0) = (x - x_0)\hat{\mathbf{i}} + (y - y_0)\hat{\mathbf{j}} + (z - z_0)\hat{\mathbf{k}}$$

En fixant :

$$(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0) \cdot \vec{\mathbf{k}} = 0 \quad (2.38)$$

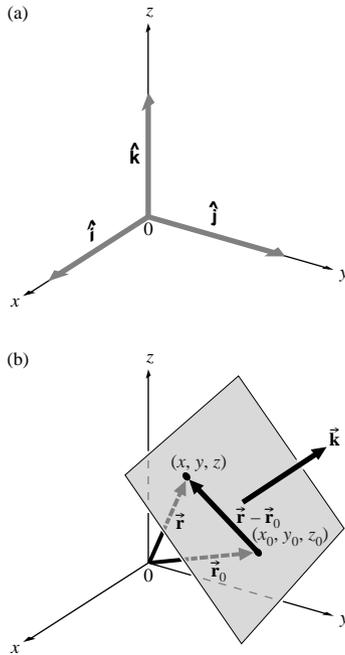


Figure 2.19 (a) Repère cartésien ; (b) une onde plane se déplaçant dans la direction \vec{k} .

on force le vecteur $(\vec{r} - \vec{r}_0)$ à balayer un plan perpendiculaire à \vec{k} , alors que son extrémité (x, y, z) assure toutes les valeurs permises. En écrivant :

$$\vec{k} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j} + k_z \hat{k} \quad (2.39)$$

L'équation (2.38) peut être exprimée sous la forme :

$$k_x(x - x_0) + k_y(y - y_0) + k_z(z - z_0) = 0 \quad (2.40)$$

Ou bien :
$$k_x x + k_y y + k_z z = a \quad (2.41)$$

Avec

$$a = k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0 = \text{constante} \quad (2.42)$$

La forme la plus concise de l'équation d'un plan perpendiculaire à un vecteur \vec{k} est donc simplement :

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{constante} = a \quad (2.43)$$

Ce plan est le lieu de tous les points dont les vecteurs position ont la même projection sur le vecteur \vec{k} .

On peut, à présent, construire un ensemble de plans sur lesquels $\psi(\vec{r})$ varie sinusoidalement dans l'espace, c'est-à-dire :

$$\psi(\vec{r}) = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (2.44)$$

$$\psi(\vec{r}) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (2.45)$$

Ou bien
$$\psi(\vec{r}) = A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (2.46)$$

Pour chacune de ces expressions, $\psi(\vec{r})$ est constante sur chaque plan défini par $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{constante}$. Or, comme on considère ici des fonctions harmoniques, celles-ci doivent se répéter spatialement après un déplacement de λ dans la direction de \vec{k} . La figure 2.20 illustre un aperçu de cette idée. Seuls quelques-uns de ces plans (qui sont en nombre infini, chacun ayant une $\psi(\vec{r})$ différente) ont été représentés. La perturbation occupant tout l'espace, les plans auraient également dû être représentés avec une étendue spatiale infinie, puisqu'il n'y a pas de limites sur \vec{r} .

La nature répétitive (d'un point de vue spatial) de ces ondes harmoniques peut être exprimée par :

$$\psi(\vec{r}) = \psi\left(\vec{r} + \frac{\lambda \vec{k}}{k}\right) \quad (2.47)$$

Dans cette expression, k représente la norme de \vec{k} , ce qui fait de \vec{k}/k un vecteur unitaire parallèle à \vec{k} (figure 2.21). Sous forme exponentielle, on peut alors écrire :

$$A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = A e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} + \lambda \vec{k}/k)} = A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i\lambda k}$$

Pour que cette expression soit vraie, on doit donc avoir :

$$e^{i\lambda k} = 1 = e^{i2\pi}$$

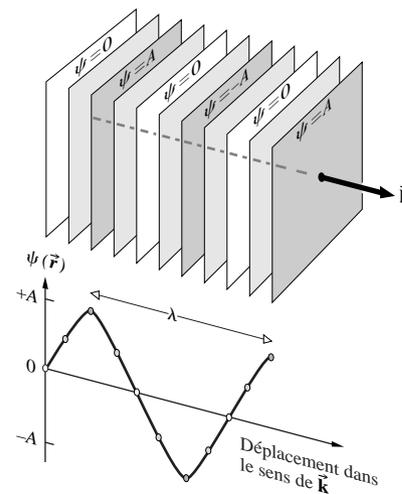
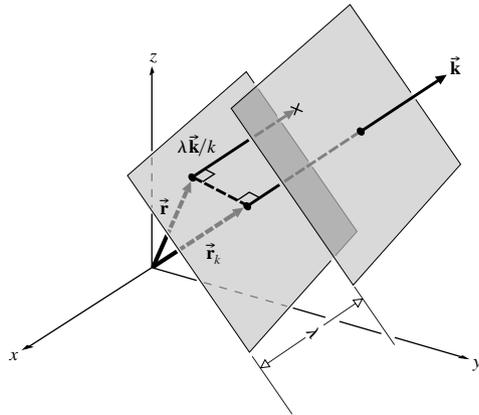


Figure 2.20 Fronts d'ondes pour une onde plane harmonique


Figure 2.21 Ondes planes.

Donc,

$$\lambda k = 2\pi$$

Et

$$k = 2\pi/\lambda$$

Le vecteur \vec{k} est appelé **vecteur d'onde** et sa norme k est le *nombre d'ondes* (déjà introduit).

En tout point de l'espace, où \vec{r} est constant, la phase est donc constante, de même que $\psi(\vec{r})$. On peut considérer finalement que les plans sont immobiles. Pour mettre ces éléments en mouvement, $\psi(\vec{r})$ doit varier dans le temps, ce qui peut être accompli en introduisant une dépendance temporelle de façon analogue à celle de l'onde à une dimension. On peut donc écrire :

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \mp \omega t)} \quad (2.48)$$

avec A , ω , et k constantes. Lorsque cette perturbation progresse le long de la direction \vec{k} , on peut lui associer une phase qui lui correspond en chaque point de l'espace et à chaque instant. À un instant donné, **les surfaces joignant tous les points de même phase sont appelées fronts d'onde**. Notons que les fonctions d'onde n'auront une valeur constante sur les fronts d'ondes que si l'amplitude A a une valeur fixe en tout point du front d'onde. En général, A est fonction de \vec{r} et peut ne pas être constante sur tout l'espace, ou même sur un front d'onde. Dans ce cas, l'onde est dite *inhomogène*. On n'étudiera ce genre de perturbation que plus tard, lorsque l'on considérera les rayons laser et la réflexion interne totale.

La vitesse de phase d'une onde plane, donnée par l'équation (2.48), est équivalente à la vitesse de propagation du front

d'onde. Sur la figure 2.21, r_k est la composante scalaire de \vec{r} , dans la direction de \vec{k} . La perturbation est constante sur un front d'onde, de sorte qu'après un instant dt , si le front s'est déplacé sur une distance dr_k le long de \vec{k} , on doit avoir :

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(r_k + dr_k, t + dt) = \psi(r_k, t) \quad (2.49)$$

Sous forme exponentielle,

$$A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \mp \omega t)} = A e^{i(kr_k + kdr_k \mp \omega t \mp \omega dt)} = A e^{i(kr_k \mp \omega t)}$$

et, par conséquent : $k dr_k = \pm \omega dt$

La valeur de la vitesse de l'onde, dr_k/dt , est alors :

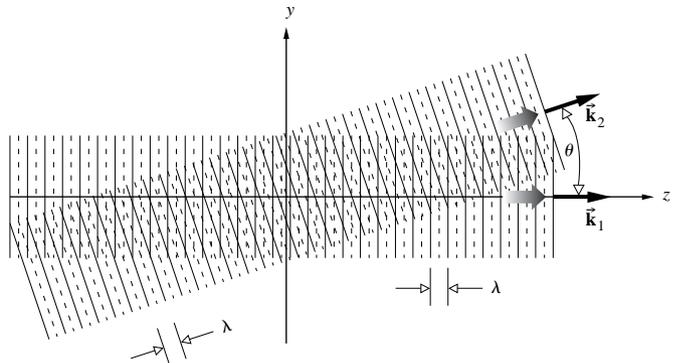
$$\frac{dr_k}{dt} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v \quad (2.50)$$

On aurait pu anticiper ce résultat en effectuant une rotation du système de coordonnées de la figure 2.21, de façon à ce que \vec{k} soit parallèle à l'axe x . Pour cette orientation, on a :

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(kx \mp \omega t)}$$

car $\vec{k} \cdot \vec{r} = kr_k = kx$. L'onde a donc effectivement été réduite au cas d'une perturbation à une dimension, déjà abordé précédemment.

Considérons, à présent, les deux ondes de la figure 2.22. Elles ont la même longueur d'onde λ de sorte que $k_1 = k_2 = k = 2\pi/\lambda$. On peut alors exprimer la première onde, se propageant le long de l'axe z , sous la forme :


Figure 2.22 Superposition locale de deux ondes de même longueur d'onde progressant dans des directions différentes.

$$\psi_1 = A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z - \omega t\right)$$

où, puisque \vec{k}_1 et \vec{r} sont parallèles, $\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = kz = (2\pi/\lambda)z$. De même, pour l'onde 2, $\vec{k}_2 \cdot \vec{r} = k_z z + k_y y = (k \cos \theta)z + (k \sin \theta)y$ et :

$$\psi_2 = A_2 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda} (z \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t\right]$$

On reviendra sur ces expressions et sur ce qui arrive dans la région de superposition lorsqu'on étudiera les phénomènes d'interférence plus en détail.

En coordonnées cartésiennes, l'onde harmonique plane est souvent écrite sous la forme :

$$\psi(x, y, z, t) = A e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \quad (2.51)$$

Ou bien
$$\psi(x, y, z, t) = A e^{i[k(\alpha x + \beta y + \gamma z) - \omega t]} \quad (2.52)$$

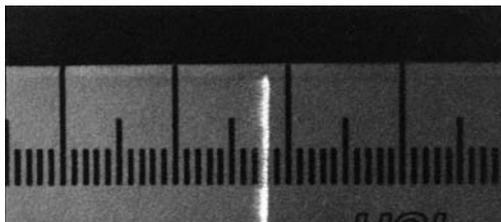
Où α , β , et γ sont les cosinus directeurs de \vec{k} (voir problème 2.39). La norme du vecteur de propagation s'écrit, en fonction de ses composantes,

$$|\vec{k}| = k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} \quad (2.53)$$

Et l'on a, bien sûr :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (2.54)$$

Jusqu'à présent, les ondes planes ont été examinées en mettant l'accent sur les fonctions harmoniques. La signification profonde de ces ondes est double. Physiquement, les ondes sinusoïdales peuvent être générées relativement facilement, en utilisant une forme d'oscillateur harmonique. D'autre part, il



L'image d'une impulsion laser prise alors qu'elle passait le long de la surface d'une règle. Cette explosion de lumière correspond à une portion d'onde plane. Elle a existé pendant 300×10^{-15} s et ne mesurait qu'une fraction de millimètre. (Photo J. Valdmán et N.H. Abramson.)

apparaît que **toute onde à trois dimensions peut être exprimée comme la combinaison d'ondes planes**, ayant chacune une amplitude et une direction de propagation particulières.

On peut, bien entendu, imaginer une série d'ondes planes, comme celles de la figure 2.20, où la perturbation n'est pas harmonique (voir photo). En fait, nous allons voir dans le paragraphe suivant que les ondes harmoniques sont un cas particulier de la solution générale de l'équation d'onde, obtenue pour les ondes planes.

2.8 L'équation d'onde différentielle à trois dimensions

De toutes les ondes à trois dimensions, il est à noter que seule l'onde plane (harmonique ou pas) peut se déplacer dans l'espace sans changer de profil. Clairement, l'idée d'une perturbation ondulatoire dont le profil ne serait jamais altéré laisse quelque part à désirer. Une alternative est de définir une onde comme étant n'importe quelle solution de l'équation d'onde différentielle. Ce que l'on cherche, à présent, est une équation d'onde tridimensionnelle. Celle-ci devrait être facile à obtenir en généralisant l'expression obtenue à une dimension (équation (2.11)). Les seuls impératifs sont, qu'en coordonnées cartésiennes, les variables de position x , y et z doivent apparaître symétriquement* pour les trois dimensions, ce qu'il ne faut pas perdre de vue. Avec ces conditions, la fonction d'onde $\psi(x, y, z, t)$ donnée par l'équation (2.52) doit alors être une solution particulière de l'équation différentielle que l'on recherche. Par analogie avec le raisonnement qui a permis d'établir l'équation (2.11), on calcule alors les dérivées partielles de l'équation (2.52) :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\alpha^2 k^2 \psi \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\beta^2 k^2 \psi \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\gamma^2 k^2 \psi \quad (2.57)$$

Et
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi \quad (2.58)$$

*En coordonnées cartésiennes, les axes n'ont pas de caractéristiques distinctes. On devrait donc être capable de changer les noms entre, disons, x et z , y et x et z et y (en gardant le système orienté suivant la règle de la main droite) sans altérer l'équation d'onde différentielle.

En ajoutant les trois dérivées spatiales et en tenant compte du fait que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -k^2 \psi \quad (2.59)$$

En combinant cette expression avec la dérivée temporelle [équation (2.58)] et en se rappelant que $v = \omega/k$, on arrive à :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.60)$$

Cela constitue l'équation d'onde différentielle à trois dimensions. Notons que x , y et z apparaissent symétriquement et que la forme est précisément celle à laquelle on pouvait s'attendre en généralisant l'équation (2.11).

L'équation (2.60) est habituellement écrite sous une forme plus concise grâce à l'utilisation de l'opérateur laplacien :

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.61)$$

Auquel cas :

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.62)$$

À présent que cette équation fondamentale a été exprimée, revenons brièvement aux ondes planes et voyons comment elles s'intègrent à ce formalisme. Une fonction de la forme :

$$\psi(x, y, z, t) = A e^{ik(\alpha x + \beta y + \gamma z - vt)} \quad (2.63)$$

est équivalente à l'équation (2.52). Elle est donc solution de l'équation (2.62). On peut également prouver (problème 2.40) que :

$$\psi(x, y, z, t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z - vt) \quad (2.64)$$

$$\text{et} \quad \psi(x, y, z, t) = g(\alpha x + \beta y + \gamma z + vt) \quad (2.65)$$

sont deux ondes planes solutions de l'équation d'onde différentielle. Les fonctions f et g , qui sont différentiables deux fois, sont par ailleurs arbitraires et non nécessairement harmoniques. Une combinaison linéaire de ces solutions est aussi une solution. On peut formuler ce résultat de manière légèrement différente en écrivant :

$$\psi(\vec{r}, t) = C_1 f(\vec{r} \cdot \vec{k}/k - vt) + C_2 g(\vec{r} \cdot \vec{k}/k + vt) \quad (2.66)$$

Où C_1 et C_2 sont des constantes.

Les coordonnées cartésiennes sont particulièrement pratiques pour décrire des ondes planes. Cependant, dans beaucoup d'autres situations physiques, on pourra se servir avantageusement des symétries existantes et utiliser d'autres représentations.

2.9 Ondes sphériques

Lorsque l'on jette une pierre dans un bassin, on voit que les vaguelettes qui naissent du point d'impact se déploient en ondes circulaires, donc à deux dimensions. On peut étendre ce phénomène au cas d'une petite sphère en vibration dans l'eau. Au fur et à mesure que la source se contracte et se dilate, elle crée des variations de pression qui se propagent dans l'eau sous la forme d'ondes sphériques.

Considérons à présent le cas d'une source de lumière ponctuelle idéale. Dans ce cas, le rayonnement qu'elle émet progresse uniformément dans toutes les directions, également de manière radiale. On dit alors que la source est *isotrope*. Les fronts d'onde résultants sont, là encore, des sphères concentriques dont le diamètre augmente au fur et à mesure qu'elles s'étendent dans l'espace environnant. La symétrie évidente de ces fronts d'ondes suggère aussi de les décrire en termes de coordonnées polaires sphériques (figure 2.23). Dans cette représentation, l'opérateur laplacien s'exprime sous la forme :

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.67)$$

Où r , θ , ϕ sont définis par :

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

Rappelons que l'on cherche ici à décrire des ondes de symétrie sphérique (i.e. qui ne dépendent pas de θ et ϕ), c'est-à-dire :

$$\psi(\vec{r}) = \psi(r, \theta, \phi) = \psi(r)$$

Le laplacien de $\psi(r)$ est donc, tout simplement,

$$\nabla^2 \psi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (2.68)$$

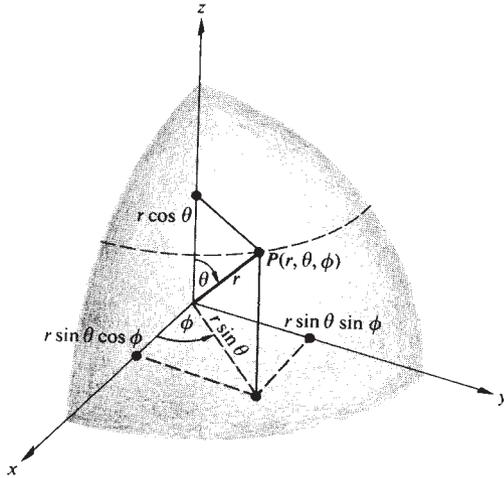


Figure 2.23 Coordonnées sphériques.

Il n'est pas besoin de connaître l'expression du laplacien en coordonnées sphériques pour obtenir ce résultat. En effet, on peut appliquer le laplacien en coordonnées cartésiennes [équation (2.61)] à la fonction d'onde $\psi(r)$ de symétrie sphérique puis convertir chaque terme en coordonnées polaires. Si l'on examine seulement la dépendance en x , on obtient alors :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}$$

Et
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

Comme :
$$\psi(\vec{r}) = \psi(r)$$

En utilisant :
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

On obtient :
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} x + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right)$$

Et donc :
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

À présent que l'on a $\partial^2 \psi / \partial x^2$, on calcule de même $\partial^2 \psi / \partial y^2$ et $\partial^2 \psi / \partial z^2$. En additionnant ces expressions, on obtient :

$$\nabla^2 \psi(r) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Ce qui est équivalent à l'équation (2.68). Ce résultat peut être exprimé sous une forme légèrement différente :

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) \tag{2.69}$$

L'équation d'onde différentielle peut alors être écrite sous la forme :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{2.70}$$

En multipliant chaque côté par r , on obtient :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\psi) \tag{2.71}$$

Notons que cette expression n'est, à présent, rien de plus que l'équation d'onde différentielle à une dimension [équation (2.11)], où la variable de position est r et la fonction d'onde est le produit $(r\psi)$. La solution de l'équation (2.71) est donc tout simplement :

$$r\psi(r, t) = f(r - vt)$$

Ou bien :
$$\psi(r, t) = \frac{f(r - vt)}{r} \tag{2.72}$$

Cela représente une onde sphérique progressant radialement de l'origine vers l'extérieur, à une vitesse constante v et ayant une forme fonctionnelle f arbitraire. Une autre solution est donnée par :

$$\psi(r, t) = \frac{g(r + vt)}{r}$$

Dans ce cas, l'onde converge vers l'origine*. Le fait que cette expression diverge pour $r=0$ n'est pas très important dans la pratique.

Remarquons finalement qu'un cas particulier de la solution générale :

$$\psi(r, t) = C_1 \frac{f(r - vt)}{r} + C_2 \frac{g(r + vt)}{r} \tag{2.73}$$

*D'autres solutions plus compliquées existent lorsque l'onde n'est pas à symétrie sphérique. Voir C. A. Coulson, Waves, chapitre 1.

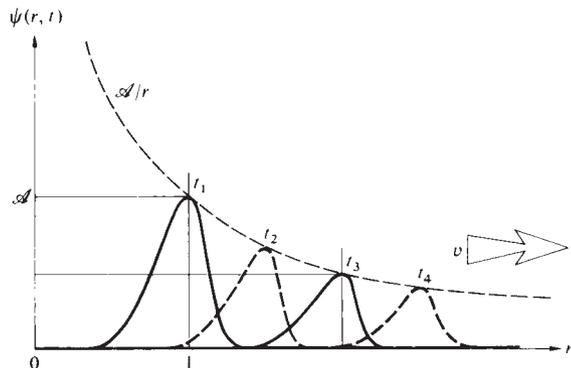


Figure 2.24 « Exposition quadruple » d'une onde impulsionnelle sphérique.

est l'onde sphérique harmonique :

$$\psi(r, t) = \left(\frac{\mathcal{A}}{r}\right) \cos k(r \mp vt) \quad (2.74)$$

Ou encore
$$\psi(r, t) = \left(\frac{\mathcal{A}}{r}\right) e^{ik(r \mp vt)} \quad (2.75)$$

La constante \mathcal{A} est appelée *la force de la source*. Pour un instant donné, cela représente une famille de sphères concentriques remplissant tout l'espace. Chaque front d'onde, ou surface de phase constante, est donné par :

$$kr = \text{constante}$$

Notons que l'amplitude de toute onde sphérique est fonction de r et que le terme r^{-1} sert de facteur d'atténuation. Contrairement à l'onde plane, l'onde sphérique diminue en amplitude, changeant ainsi de profil lorsqu'elle s'étend et s'éloigne de l'origine*. La figure 2.24 illustre ce résultat en montrant une « exposition multiple » d'une onde impulsionnelle sphérique à

*Le facteur d'atténuation est une conséquence directe du principe de conservation d'énergie. Le chapitre 3 discute de la façon dont ces idées s'appliquent spécifiquement aux radiations électromagnétiques.

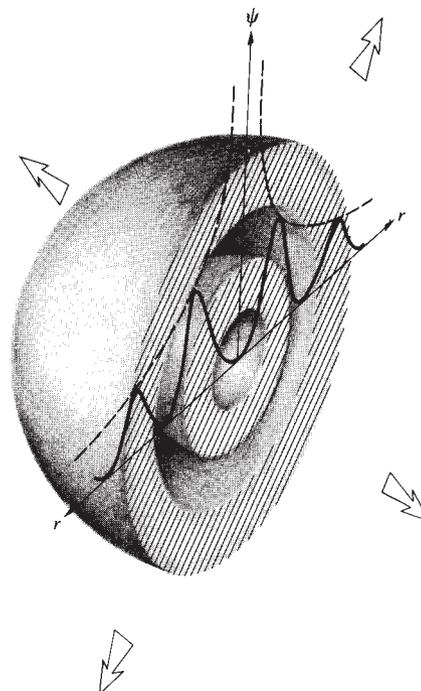


Figure 2.25 Fronts d'onde sphériques.

quatre instants différents. L'impulsion a la même extension en n'importe quel point, le long de tout rayon r . Cela signifie que la largeur de l'impulsion est constante le long de l'axe r . La figure 2.25 constitue une tentative de représentation de la fonction $\psi(r, t)$ de la figure 2.24, sous la forme d'onde sphérique. Elle montre la moitié de l'impulsion sphérique à deux instants distincts, alors que l'onde s'étend vers l'extérieur. Rappelons que, du fait de la symétrie sphérique, les résultats ont été obtenus indépendamment de la direction de r . Au lieu d'une impulsion, on aurait également pu tracer une onde harmonique, dans les figures 2.24 et 2.25. Dans ce cas, l'enveloppe de la perturbation sinusoïdale aurait été délimitée par les courbes :

$$\psi = \mathcal{A}/r \quad \text{et} \quad \psi = -\mathcal{A}/r$$

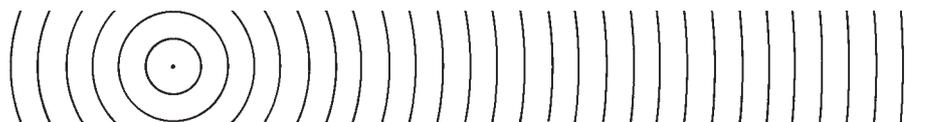


Figure 2.26 Aplatissement des ondes sphériques avec la distance.

Une onde sphérique divergente émanant d'un point source (ou une onde convergeant en un point) constitue un modèle idéal. En réalité, en optique, les ondes sphériques, comme les ondes planes, ne sont que des approximations.

Lorsqu'un front d'onde sphérique se propage vers l'extérieur, son rayon augmente. Assez loin de la source, le front d'onde ressemblera à une portion d'onde plane (figure 2.26).

2.10 Ondes cylindriques

Nous allons examiner à présent une autre forme idéalisée d'ondes, les ondes cylindriques. Cependant, un traitement mathématique précis est bien trop compliqué pour être développé ici. On se contentera donc d'en décrire brièvement le principe. Comme précédemment, on considère le laplacien de ψ , cette fois en coordonnées cylindriques (figure 2.27) :

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (2.76)$$

Où

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \text{et} \quad z = z$$

Par symétrie cylindrique, on a ici :

$$\psi(\vec{r}) = \psi(r, \theta, z) = \psi(r)$$

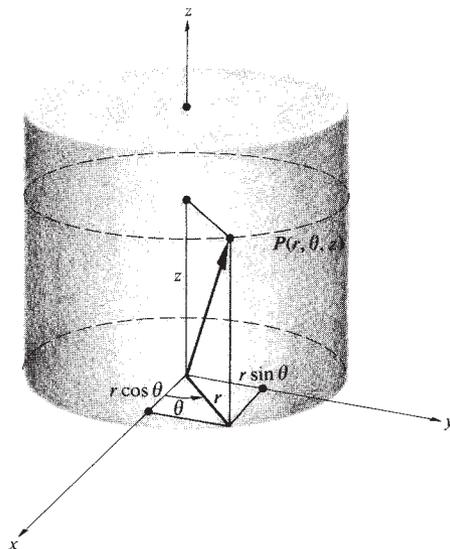


Figure 2.27 Coordonnées cylindriques.

Le fait que ψ ne dépende pas de θ signifie qu'un plan perpendiculaire à l'axe z recoupe le front d'onde en un cercle dont le rayon r peut varier selon la valeur de z . De même, l'indépendance par rapport à z restreint les fronts d'ondes à des cylindres circulaires droits centrés sur l'axe z et de longueur infinie. L'équation d'onde différentielle devient ainsi :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.77)$$

Après quelques manipulations, dans lesquelles on isole la dépendance temporelle, l'équation (2.77) devient ce que l'on appelle « l'équation de Bessel ». Lorsque r est suffisamment grand, les solutions de cette équation s'approchent progressivement de formes trigonométriques simples. Lorsque r est grand, on a, effectivement,

$$\begin{aligned} \psi(r, t) &\approx \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{r}} e^{ik(r \mp vt)} \\ \psi(r, t) &\approx \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{r}} \cos k(r \mp vt) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Cette équation représente un groupe de cylindres circulaires coaxiaux qui occupe tout l'espace et qui se propage depuis, ou vers, une source infinie en forme de ligne. On ne peut pas trouver, ici, de solution en termes de fonctions arbitraires, comme on pouvait le faire avec des ondes sphériques [équation (2.73)] et des ondes planes [équation (2.66)].

Une onde plane qui éclaire l'arrière d'un écran plan opaque contenant une longue fente produit, à travers cette fente, une émission très proche d'une onde cylindrique (figure 2.28). Cette technique est d'ailleurs utilisée fréquemment pour générer des ondes de lumière cylindriques (p. 410).

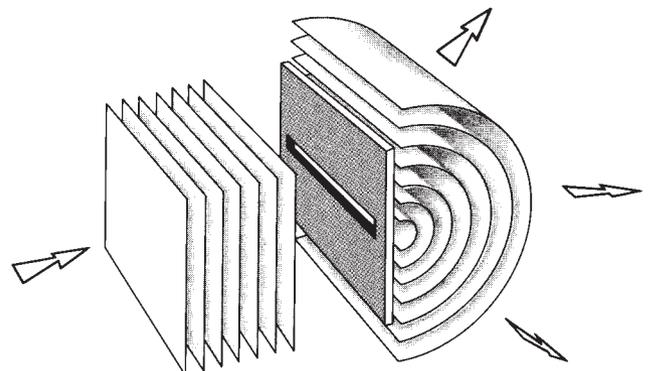


Figure 2.28 Ondes cylindriques émergeant d'une fente étroite.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Les solutions complètes des exercices (excepté ceux ayant un astérisque) figurent à la fin de l'ouvrage.

2.1 Déterminer le nombre de longueurs d'onde, dans le jaune ($\lambda = 580$ nm), qui pourraient être contenues sur une longueur égale à l'épaisseur d'une feuille de papier (0,08 mm). Quelle serait l'extension du même nombre de longueurs d'onde en micro-ondes ($\nu = 10^{10}$ Hz, i.e. 10 GHz, et $v = 3 \times 10^8$ m/s) ?

2.2* La vitesse de la lumière dans le vide est approximativement 3×10^8 m/s. Déterminer la longueur d'onde de la radiation rouge de fréquence 5×10^{14} Hz. Comparer ce résultat avec les paramètres associés à une onde électromagnétique de 60 Hz.

2.3* Dans certains cristaux, il est possible de créer des ondes ultrasonores de longueurs d'onde similaires à la lumière (5×10^{-5} cm) mais avec des fréquences plus basses (6×10^8 Hz). Calculer la vitesse correspondante de ces ondes.

2.4* Un enfant sur un bateau, au milieu d'un lac, voit ce qui semble être une succession infinie de crêtes identiques défilant à raison de deux par seconde. Il faut 1,5 s pour que chaque vaguelette parcoure toute la longueur de la barque de 4,5 m. Quelles sont la fréquence, la période et la longueur d'onde de ces perturbations ?

2.5* Une pointe vibrante percute l'extrémité d'une longue tige métallique de telle manière qu'une onde de compression périodique de 4,3 m de longueur d'onde se propage à travers la longueur de la tige à une vitesse de 3,5 km/s. Quelle est la fréquence de cette vibration ?

2.6 Lors du mariage de deux amateurs de plongée, un ami violoniste joue de son instrument au fond d'une piscine. Étant donné que la vitesse des ondes de compression dans l'eau douce est de 1 498 m/s, quelle est la longueur d'onde d'un La de 440 Hz émis par le violon dans ces conditions ?

2.7* Une impulsion se propage le long de 10 m de corde en 2 s. Une perturbation harmonique de longueur d'onde 0,5 m est alors produite sur la corde. Quelle est la fréquence associée ?

2.8* Montrer que, pour une onde périodique, $\omega = (2\pi/\lambda)v$.

2.9* Établir un tableau de variation des fonctions $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\sin(\theta - \pi/4)$, $\sin(\theta - \pi/2)$, $\sin(\theta - 3\pi/4)$ et $\sin(\theta + \pi/2)$ pour des valeurs de θ allant de $-\pi/2$ à 2π avec un intervalle de $\pi/4$. Tracer ces fonctions et noter l'effet d'un déphasage. Peut-on dire que $\sin \theta$ est en avance ou en retard sur $\sin(\theta - \pi/2)$? En d'autres termes, est-ce que l'une de ces fonctions atteint une amplitude particulière

pour une valeur inférieure de θ et est donc en avance par rapport à l'autre fonction (de même que $\cos \theta$ est en avance sur $\sin \theta$) ?

2.10* Établir un tableau de variation des fonctions $\cos(kx - \pi/4)$ et $\cos(kx + 3\pi/4)$ pour des valeurs de kx allant de $x = -\lambda/2$ à $x = +\lambda$, avec des intervalles de x de $\lambda/4$. On a, bien sûr, $k = 2\pi/\lambda$. Tracer ensuite les fonctions $15 \cos(kx - \pi/4)$ et $25 \cos(kx + 3\pi/4)$.

2.11* Établir un tableau de variation des fonctions $\sin(\omega t + \pi/4)$ et $\sin(\pi/4 - \omega t)$ pour des valeurs de ωt allant de $t = -\tau/2$ à $t = +\tau$, avec des intervalles en t de $\tau/4$. On a, bien sûr, $\omega = 2\pi/\tau$. Tracer ensuite ces deux fonctions.

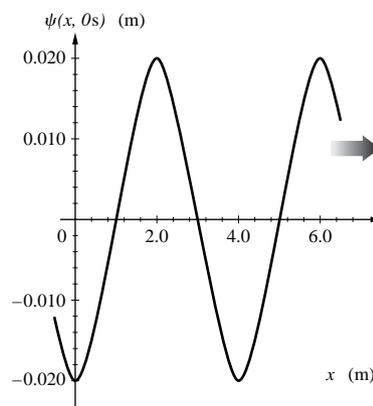
2.12* Le profil d'une onde transversale harmonique, se propageant à 1,2 m/s sur une corde, est donné par la fonction :

$$y = (0,02 \text{ m}) \sin(157 \text{ m}^{-1})x$$

Déterminer son amplitude, sa longueur d'onde, sa fréquence et sa période.

2.13* La figure P2.13 représente le profil (à $t = 0$) d'une onde transversale se propageant sur une corde, dans la direction x positive, à la vitesse de 20 m/s. (a) Déterminer sa longueur d'onde. (b) Quelle est la fréquence de cette onde ? (c) Donner la fonction d'onde de cette perturbation. (d) Lorsque l'onde passe en un point fixe quelconque sur l'axe x , on note que la corde oscille en fonction du temps à cet endroit. Tracer un graphe de ψ en fonction de t montrant comment un point de la corde oscille à $x = 0$.

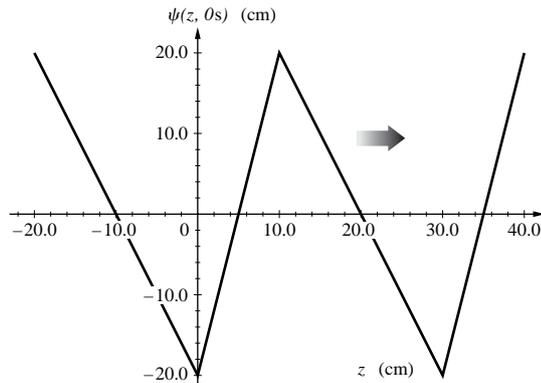
Figure P.2.13



2.14* La figure P2.14 représente le profil (à $t = 0$) d'une onde transversale se propageant sur une corde, dans la direction z positive, à la vitesse de 100 cm/s. (a) Déterminer sa longueur d'onde. (b) Alors que

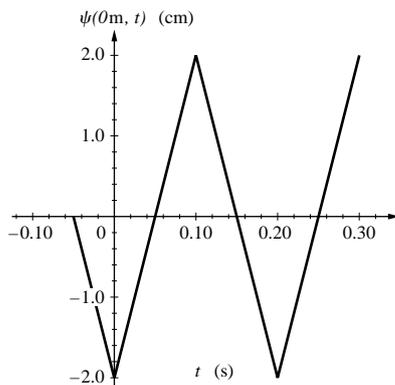
l'onde passe un point fixe quelconque sur l'axe z , on note que la corde oscille en fonction du temps à cet endroit. Tracer un graphe de ψ en fonction de t montrant comment un point de la corde oscille à $x = 0$. (c) Quelle est la fréquence de cette onde ?

Figure P.2.14



2.15* Une onde transversale se propage sur une corde, dans la direction y négative, à la vitesse de 40 cm/s. La figure P2.15 est un graphe de ψ en fonction de t montrant comment un point de la corde oscille à $y = 0$. (a) Déterminer la période de l'onde. (b) Quelle est la fréquence de cette onde ? (c) Déterminer sa longueur d'onde. (d) Représenter le profil de l'onde [$\psi(y)$].

Figure P.2.15



2.16 Soient les fonctions d'onde :

$$\psi_1 = 4 \sin 2\pi(0,2x - 3t)$$

et

$$\psi_2 = \frac{\sin(7x + 3,5t)}{2,5}$$

Déterminer dans chaque cas les valeurs (a) de la fréquence, (b) de la longueur d'onde, (c) de la période, (d) de l'amplitude, (e) de la vitesse de phase et (f) de la direction du mouvement. Le temps est en secondes et x est en mètres.

2.17* La fonction d'onde d'une onde transversale sur une corde est donnée par l'équation :

$$\psi(x, t) = (30,0 \text{ cm}) \cos [(6,28 \text{ rad/m})x - (20,0 \text{ rad/s})t]$$

Calculer (a) la fréquence, (b) la longueur d'onde, (c) la période, (d) l'amplitude, (e) la vitesse de phase et (f) la direction du mouvement.

2.18* Montrer que :

$$\psi(x, t) = A \sin k(x - vt) \quad [2.13]$$

est une solution de l'équation d'onde différentielle.

2.19* Montrer que :

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

est une solution de l'équation d'onde différentielle.

2.20* Démontrer que :

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t - \pi/2)$$

est équivalent à :

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

2.21 Montrer que, si le déplacement de la corde de la figure 2.7 est donné par la fonction :

$$y(x, t) = A \sin[kx - \omega t + \varepsilon]$$

Alors, la main qui provoque l'onde doit se déplacer verticalement selon un mouvement harmonique simple.

2.22 Écrire l'expression de la fonction d'onde d'une onde harmonique d'amplitude 10^3 V/m , de période $2,2 \times 10^{-15} \text{ s}$ et de vitesse $3 \times 10^8 \text{ m/s}$. L'onde se propage dans la direction x négative et possède une valeur de 10^3 V/m à $t = 0$ et $x = 0$.

2.23 Soit une impulsion décrite, à $t = 0$, en termes de déplacement par :

$$y(x, t)|_{t=0} = \frac{C}{2 + x^2}$$

où C est une constante. Représenter le profil de l'onde. Écrire une expression pour l'onde, qui se déplace dans la direction x négative, à la vitesse v , comme une fonction du temps. Si $v = 1 \text{ m/s}$, représenter le profil à $t = 2 \text{ s}$.

2.24* Déterminer la valeur d'une fonction $\psi(z, t) = A \cos[k(z + vt) + \pi]$ en un point $z = 0$, lorsque $t = \tau/2$ et $t = 3\tau/4$.

2.25 Soit la fonction :

$$\psi(y, t) = (y - vt)A$$

où A est une constante. Cette expression représente-t-elle une onde ? Expliquer le raisonnement.

2.26* Utiliser l'équation (2.33) pour calculer la vitesse de l'onde dont la représentation, en unités SI, est :

$$\psi(y, t) = A \cos \pi(3 \times 10^6 y + 9 \times 10^{14} t)$$

2.27 On considère le théorème suivant : si $z = f(x, y)$ et $x = g(t)$, $y = h(t)$, alors :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Utiliser cette propriété pour établir l'équation (2.34).

2.28 En utilisant les résultats du problème précédent, montrer que, pour une onde harmonique de phase $\varphi(x, t) = k(x - vt)$, on peut déterminer la vitesse en faisant $d\varphi/dt = 0$. Appliquer cette méthode au problème 2.26 et déterminer la vitesse de l'onde.

2.29* Une onde gaussienne a une expression de la forme $\psi(x, t) = Ae^{-a(bx + ct)^2}$. Utiliser le fait que $\psi(x, t) = f(x \mp vt)$ afin de déterminer la vitesse. Vérifier ensuite ce résultat en utilisant l'équation (2.34).

2.30 Trouver une expression pour le profil d'une onde harmonique progressant dans la direction z , de valeur $0,866$ à $z = -\lambda/12$, $1/2$ à $z = +\lambda/6$ et 0 à $z = \lambda/4$.

2.31 Déterminer lesquelles des expressions suivantes correspondent à des ondes progressives. Pour chacune d'elles, déterminer la vitesse de l'onde. Les quantités a , b et c sont des constantes positives.

- (a) $\psi(z, t) = (az - bt)^2$
- (b) $\psi(x, t) = (ax + bt + c)^2$
- (c) $\psi(x, t) = 1/(ax^2 + b)$

2.32* Déterminer lesquelles des expressions suivantes décrivent des ondes progressives :

- (a) $\psi(y, t) = e^{-(a^2 y^2 + b^2 t^2 - 2abty)}$
- (b) $\psi(z, t) = A \sin(az^2 - bt^2)$
- (c) $\psi(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{a} + \frac{t}{b} \right)^2$
- (d) $\psi(x, t) = A \cos^2 2\pi(t - x)$

Dans les cas appropriés, représenter le profil de l'onde et déterminer la vitesse et la direction du mouvement.

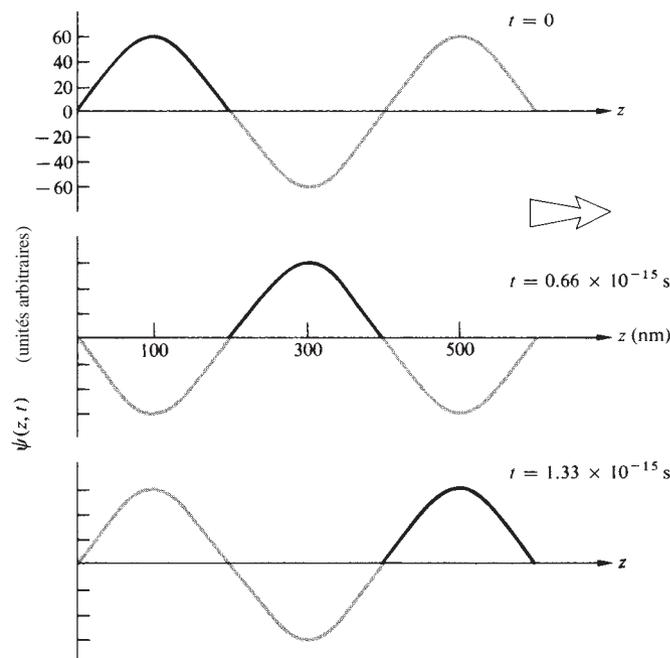
2.33 Soit l'onde progressive $\psi(x, t) = 5,0 \exp(-ax^2 - bt^2 - 2\sqrt{ab}xt)$. Déterminer sa direction de propagation. Calculer quelques valeurs de ψ et représenter cette onde à $t = 0$, en prenant $a = 25 \text{ m}^{-2}$ et $b = 9,0 \text{ s}^{-2}$. Quelle est la vitesse de cette onde ?

2.34* Soit une onde sonore de fréquence $1,10 \text{ kHz}$ se propageant à une vitesse de 330 m/s . Déterminer la différence de phase entre deux points de cette onde séparés de 10 cm .

2.35 Soit une onde lumineuse de vitesse de phase $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ et de fréquence $6 \times 10^{14} \text{ Hz}$. Quelle est la plus courte distance sur la courbe entre deux points ayant une différence de phase de 30° ? Quel est le déphasage pour un point donné en 10^{-6} s ? Combien d'ondes y passent pendant cette durée ?

2.36 Écrire une expression pour l'onde représentée à la figure P.2.36. Déterminer sa longueur d'onde, sa vitesse, sa fréquence et sa période.

Figure P.2.36 Onde harmonique.



2.37* En travaillant uniquement avec des expressions exponentielles, montrer que l'amplitude de $\psi = Ae^{i\omega t}$ est A . Démontrer le même résultat en utilisant les formules d'Euler. Démontrer que $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$.

2.38* Démontrer que la partie imaginaire d'un nombre complexe \tilde{z} est donnée par l'expression $(\tilde{z} - \tilde{z}^*)/2i$.

2.39 À partir de l'équation (2.51), vérifier que :

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{i[k(\alpha x + \beta y + \gamma z) \mp \omega t]}$$

Et que : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

Représenter graphiquement toutes les quantités pertinentes.

2.40* Démontrer que les équations (2.64) et (2.65), représentant des ondes planes de forme quelconque, satisfont l'équation d'onde différentielle à trois dimensions.

2.41 L'hypothèse de de Broglie établit qu'à chaque particule est associée une onde dont la longueur d'onde est donnée par la constante de Planck ($h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$) divisée par la quantité de mouvement de la particule. Comparer la longueur d'onde d'une pierre de 6 kg se déplaçant à une vitesse de 1 m/s avec celle de la lumière (dans le visible, $\lambda = 500 \text{ nm}$).

2.42 Déterminer, en coordonnées cartésiennes, une expression d'une onde plane harmonique d'amplitude A et de pulsation ω se déplaçant dans la direction d'un vecteur \vec{k} , passant par l'origine du repère et par le point de coordonnées (4,2,1). Astuce : déterminer d'abord \vec{k} puis \vec{r} .

2.43* Déterminer, en coordonnées cartésiennes, une expression d'une onde plane harmonique d'amplitude A et de pulsation ω se déplaçant dans la direction x positive.

2.44 Démontrer que $\psi(\vec{k} \cdot \vec{r}, t)$ représente une onde plane telle que \vec{k} soit normal au front d'onde. Astuce : considérer \vec{r}_1 et \vec{r}_2 , deux vec-

teurs positions pour deux points arbitraires du plan et montrer que $\psi(\vec{r}_1, t) = \psi(\vec{r}_2, t)$.

2.45* Établir le tableau de variation des fonctions $\sin \theta$ et $2 \sin \theta$ pour des valeurs de θ allant de $-\pi/2$ à 2π , avec un intervalle de $\pi/4$. Additionner ensuite celles-ci afin d'établir les valeurs de la fonction $\sin \theta + 2 \sin \theta$. Tracer chacune de ces trois fonctions en notant leurs phases et leurs amplitudes relatives.

2.46* Établir le tableau de variation des fonctions $\sin \theta$ et $\sin(\theta - \pi/2)$ pour des valeurs de θ allant de $-\pi/2$ à 2π , avec un intervalle de $\pi/4$. Additionner ensuite celles-ci afin d'établir les valeurs de la fonction $\sin \theta + \sin(\theta - \pi/2)$. Tracer chacune de ces trois fonctions en notant leurs phases et leurs amplitudes relatives.

2.47* En considérant les deux problèmes précédents, tracer les trois fonctions (a) $\sin \theta$, (b) $\sin(\theta - 3\pi/4)$ et (c) $\sin \theta + \sin(\theta - 3\pi/4)$. Comparer l'amplitude de la fonction (c) avec celles du problème précédent.

2.48* Établir le tableau de variation des fonctions $\cos kx$ et $\cos(kx + \pi)$ pour des valeurs de kx allant de $x = -\lambda/2$ à $x = +\lambda$, avec un intervalle de $\lambda/4$. Tracer ensuite les trois fonctions $\cos kx$, $\cos(kx + \pi)$ et $\cos kx + \cos(kx + \pi)$.

3

Théorie électromagnétique, photons et lumière

Les travaux de James Clerk Maxwell et les développements de la science depuis la fin du XIX^e siècle ont définitivement démontré la nature électromagnétique de la lumière. L'électrodynamique classique, comme nous allons le voir, s'appuie sur l'idée d'un transfert continu d'énergie par le biais d'ondes électromagnétiques. En revanche, le point de vue plus moderne de l'électrodynamique quantique (p. 86) décrit les interactions électromagnétiques et le transport d'énergie en termes de « particules » élémentaires sans masse appelées *photons*. La nature quantique du rayonnement n'est cependant pas toujours apparente ni essentielle en optique. Dans bien des situations, les équipements de détection ne sont pas capables, et c'est d'ailleurs préférable, de distinguer les quanta individuels.

Si la longueur d'onde de la lumière est petite en comparaison de la taille des composants (lentilles, miroirs), on peut utiliser, en première approximation, les règles de l'optique géométrique. On peut appliquer également un traitement un peu plus précis lorsque les dimensions des composants sont réduites : c'est celui de l'optique physique. Dans cette dernière, la propriété dominante de la lumière est sa nature ondulatoire. Il est même possible de développer le traitement sans jamais spécifier le type d'onde dont il est question. De ce fait, dès que le point de vue de l'optique physique sera sollicité, il suffira seulement de considérer la lumière comme une onde électromagnétique.

On peut concevoir la lumière comme la forme la plus ténue de matière. En effet, l'un des postulats de base de la mécanique quantique est qu'aussi bien la lumière que les particules matérielles manifestent des propriétés ondulatoires et corpusculaires qui sont similaires. Citons ici Erwin C. Schrödinger (1887-1961), l'un des fondateurs de la théorie quantique :

« Dans le nouveau courant d'idées, la distinction [entre particules et ondes] a disparu, car il a été découvert que toutes les particules ont aussi les propriétés des ondes, et vice versa.

Aucun des deux concepts ne peut être écarté et ils doivent au contraire être amalgamés. L'aspect qui est mis en avant dépend non seulement de l'objet physique, mais aussi de l'appareil expérimental qui l'examine.* »

Le traitement quantique associe une équation d'onde à une particule : un photon, un électron, un proton, ou n'importe quoi d'autre. Dans le cas des particules matérielles, les aspects ondulatoires sont introduits par l'équation de champ dite *équation de Schrödinger*. Pour la lumière, la nature ondulatoire est décrite sous la forme des équations de champ électromagnétiques classiques de Maxwell. À partir de celles-ci, on peut construire une théorie quantique des photons et de leur interaction avec les charges. La double nature de la lumière est mise en évidence par le fait qu'elle se propage dans l'espace à la manière d'une onde et manifeste pourtant le comportement d'une particule pour les phénomènes d'émission et d'absorption. Le rayonnement électromagnétique est créé et annihilé sous forme de quanta (photons) et non pas de manière continue comme pour une onde classique. Néanmoins ses mouvements à travers une lentille, un trou ou un groupe de fentes ont les caractéristiques d'ondes. Si nous ne sommes pas habitués à ce genre de comportement dans le monde macroscopique, c'est parce que la longueur d'onde d'un objet matériel est inversement proportionnelle à sa quantité de mouvement (p. 60). De fait, même un grain de sable (bougeant à peine) possède une longueur d'onde si petite qu'elle ne peut être détectée par aucune expérience concevable.

Le photon a une masse nulle, et l'on conçoit donc qu'un faisceau de lumière contienne un très grand nombre de photons peu énergétiques. Dans ce modèle, il faut des quantités importantes de photons pour produire des champs classiques bien

.....

*Erwin C. Schrödinger, *Science Theory and Man*.

définis (p. 57). En fait, on pourrait comparer ces photons à un flot de passagers dans une gare à l'heure de pointe. Individuellement, chaque passager se comporte de manière unique, comme un « quantum d'humanité ». Cependant, tous partagent globalement une intention commune et suivent à peu près la même trajectoire. Pour un observateur éloigné et myope, ils représentent un flot continu et uniforme pour qui le comportement en masse de ce flot de passagers est prévisible quotidiennement, sans que le mouvement individuel de chaque passager soit significatif. Ainsi, l'énergie transportée par un grand nombre de photons est, *en moyenne*, équivalente à l'énergie transmise par une onde électromagnétique classique. C'est pour ces raisons que la représentation ondulatoire des phénomènes électromagnétiques a été et restera toujours si utile. Cependant, insistons bien sur le fait que l'apparente continuité des ondes électromagnétiques, comme celle de la matière, est une illusion créée par notre observation macroscopique.

En pratique, on peut donc considérer la lumière comme une onde électromagnétique, mais sans oublier qu'il y a des situations pour lesquelles cette description est inadéquate.

3.1 Les lois élémentaires de la théorie électromagnétique

L'objectif de ce paragraphe est de revoir et de développer quelques-unes des idées nécessaires à l'appréciation du concept d'ondes électromagnétiques.

On sait, par expérience, que des charges, même séparées par du vide, exercent des interactions mutuelles. Souvenons-nous, par exemple, de l'expérience élémentaire d'électrostatique dans laquelle une boule de laine subit l'influence d'un

bâtonnet électriquement chargé, sans même qu'ils soient en contact. Une explication possible consisterait à spéculer que chaque charge émet (et absorbe) un flot de particules non détectées (des *photons virtuels*). L'échange de ces particules entre les charges pourrait alors être considéré comme le mode d'interaction. D'un autre côté, on peut suivre l'approche classique qui consiste à imaginer que chaque charge est entourée d'une entité dénommée champ électrique. Dans cette représentation, il suffit de supposer que chaque charge réagit directement avec le champ électrique qui l'entoure. Ainsi, si une charge q est soumise à une force \vec{F}_E , le *champ électrique* \vec{E} exercé à l'emplacement de la charge est défini par $\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}$. D'autre part, on observe qu'une charge en déplacement subit une autre force \vec{F}_M , qui est proportionnelle à sa vitesse \vec{v} . Cela conduit à définir un autre champ, l'*induction magnétique*, ou *champ magnétique*, \vec{B} , tel que $\vec{F}_M = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$. Si les forces \vec{F}_E et \vec{F}_M agissent simultanément, la charge se déplace dans une région où règne à la fois un champ électrique et un champ magnétique, auquel cas, on a : $\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$.

Comme on va le voir, les champs électriques sont créés à la fois par des charges électriques et par des *champs magnétiques variant dans le temps*. De même, les champs magnétiques sont créés par des courants électriques et par des *champs électriques variant dans le temps*. Cette interdépendance entre \vec{E} et \vec{B} est une notion clé de la description de la lumière.

3.1.1 La loi d'induction de Faraday

« Convertir le magnétisme en électricité ». Ce fut cette brève remarque que le physicien britannique Michael Faraday (1791-1867) inscrit dans son carnet de notes en 1822. Un défi qu'il se posa avec tant de confiance que la tâche lui semblait très

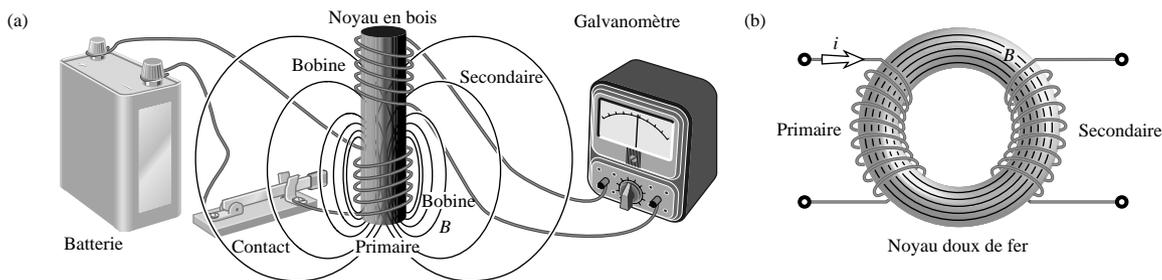


Figure 3.1 (a) Le passage du courant dans une bobine produit un champ magnétique fluctuant par rapport au temps et induit un courant dans l'autre bobine. (b) Un anneau de fer doux couple la bobine primaire et la bobine secondaire.

facilement atteignable. Après plusieurs années passées à d'autres recherches, Faraday retourna au problème de l'induction électromagnétique en 1831. Cette année-là, il mit au point un premier dispositif consistant en deux bobines montées sur une tige de bois (figure 3.1a). La bobine *primaire* était reliée à une batterie et à un interrupteur tandis que la bobine *secondaire* était reliée à un galvanomètre. Avec ce montage, il observa que, lorsqu'on fermait l'interrupteur, l'aiguille du galvanomètre déviait dans une direction pendant un court instant avant de retourner à zéro, malgré le courant constant toujours présent dans la bobine primaire. Chaque fois qu'il ouvrait l'interrupteur, coupant ainsi l'alimentation du courant principal, le galvanomètre du circuit secondaire déviait dans la direction opposée et retournait rapidement à zéro.

Utilisant un noyau ferromagnétique pour concentrer la force magnétique, Faraday enroula deux bobines autour des sections opposées d'un anneau de fer doux (figure 3.1b) au centre duquel il déplaçait une tige aimantée. Cette fois, l'effet était évident : **la variation du champ magnétique induisait un courant électrique dans les bobines**. Comme il allait continuer à le découvrir, la variation du champ magnétique était effectivement un aspect essentiel du phénomène d'induction électromagnétique.

En déplaçant un aimant à travers une bobine, Faraday établit qu'il existait une tension électrique – appelée *force électromotrice induite* ou **fem** – entre les extrémités de la bobine. Signalons d'ailleurs que le terme force électromotrice induite est particulièrement mal choisi puisqu'il s'agit bien d'une tension et non d'une force électrique. Pour cela, on utilisera que le terme fem. Par la suite, il démontra que l'amplitude de la fem dépendait de la vitesse à laquelle l'aimant était translaté. *La fem induite dépend donc du taux de variation de B à travers la bobine et non de la seule valeur de B* . Un aimant faible déplacé rapidement peut induire une fem supérieure à celle d'un aimant fort, mais oscillant lentement.

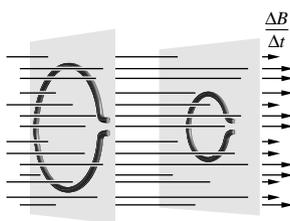


Figure 3.2 La fem induite entre les extrémités d'une boucle de circuit est d'autant plus importante que la boucle est grande et que la variation du champ magnétique est importante.

Lorsque deux boucles de tailles différentes sont placées dans un champ magnétique qui varie (figure 3.2), on constate que la fem induite est d'autant plus importante que la boucle est grande. Plus précisément, on trouve même que **la fem induite est proportionnelle à l'aire A de la projection de la boucle sur la perpendiculaire au champ magnétique**. Par exemple, si le circuit est incliné comme sur la figure 3.3, l'aire effective, perpendiculaire au champ (A_{\perp}), varie comme $A \cos \theta$. De fait, lorsque $\theta = 90^\circ$, la fem induite est nulle, vu qu'aucune ligne du champ B ne pénètre dans le circuit : lorsque $\Delta B/\Delta t \neq 0$, $fem \propto A_{\perp}$. La réciproque est également vraie : **lorsque le champ est constant, la fem induite est proportionnelle à la vitesse de variation de l'aire effective perpendiculaire aux lignes de champ**. Si une bobine subit une inclinaison variable dans un champ B constant, l'aire que « voient » les lignes de champ est également variable. Il y a donc induction d'une fem $\propto \Delta A_{\perp}/\Delta t$ et également proportionnelle à B . En résumé, lorsque $A_{\perp} = \text{constante}$, $fem \propto A_{\perp} \Delta B/\Delta t$ et lorsque $B = \text{constante}$, $fem \propto B \Delta A_{\perp}/\Delta t$.

Tout cela suggère finalement que la fem dépend à la fois de la vitesse de variation de A_{\perp} et de celle de B , c'est-à-dire de

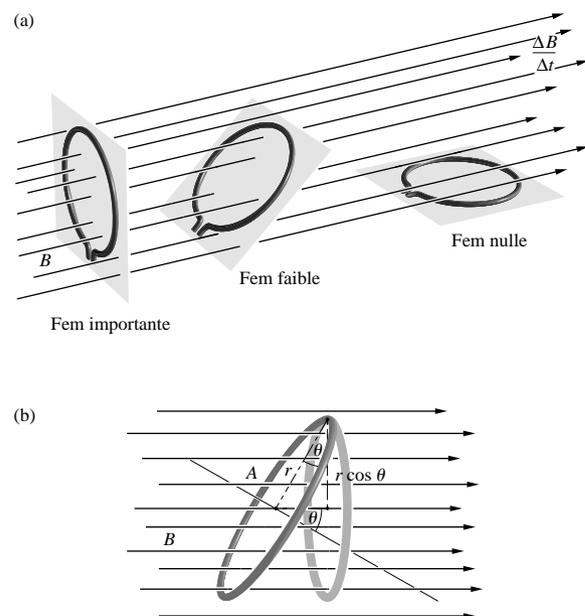


Figure 3.3 (a) La fem induite est proportionnelle à l'aire interceptée perpendiculairement par les lignes du champ magnétique. (b) Cette aire effective varie en $\cos \theta$.

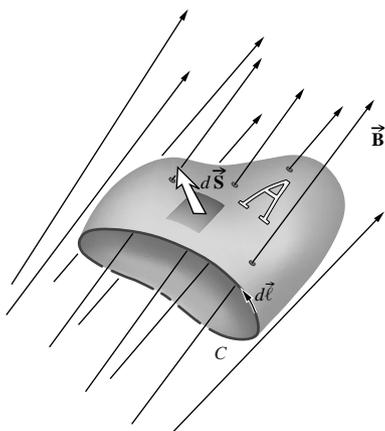


Figure 3.4 Champ \vec{B} à travers une surface ouverte A.

la vitesse de variation de leur produit. Cela appelle donc naturellement la notion de flux du champ – égal au produit du champ par l’aire perpendiculairement traversée. Le **flux du champ magnétique** à travers la boucle est donc donné par :

$$\Phi_M = B_{\perp} A = BA_{\perp} = BA \cos \theta$$

Plus généralement, si B varie dans l’espace, comme c’est souvent le cas, le flux du champ magnétique à travers n’importe quelle aire ouverte A formée par une boucle conductrice (figure 3.4) est donné par :

$$\Phi_M = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.1)$$

La fem induite dans la boucle est alors :

$$\text{fem} = - \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (3.2)$$

Notre propos n’est cependant pas de nous laisser envahir par des visions de câbles, de courants et de fem, mais de nous concentrer sur les champs électrique et magnétique eux-mêmes.

De façon générale, une fem induite est une différence de potentiel, qui est une différence d’énergie potentielle par unité de charge. Cette notion traduit le travail par unité de charge, c’est-à-dire à la force par unité de charge multipliée par la distance parcourue par la charge. Ce calcul mène finalement au produit du champ électrique par la distance. La fem induite est donc une conséquence de la présence du champ électrique :

$$\text{fem} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (3.3)$$

L’intégration se fait sur le chemin fermé C correspondant à la boucle conductrice. En égalant les équations (3.2) et (3.3) et en utilisant l’équation (3.1), on obtient :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.4)$$

La discussion, commencée en examinant une boucle conductrice, conduit finalement à l’équation (3.4). À part le domaine d’intégration, cette expression ne contient aucune référence au circuit physique. En fait, le domaine d’intégration peut être choisi de manière complètement arbitraire, sans qu’on ait même besoin de se trouver à l’intérieur ou à proximité d’un conducteur. Le champ électrique de l’équation (3.4) ne provient pas de la présence de charges électriques mais plutôt de la variation temporelle du champ magnétique. Sans charges pouvant agir comme sources ou comme puits, les lignes de champ se referment sur elles-mêmes, en formant des boucles (figure 3.5).

On s’intéresse ici à la propagation d’ondes électromagnétiques dans un espace qui est dépourvu de boucles conductrices, et dans lequel les variations de flux magnétique sont provoquées par les variations de \vec{B} . On peut alors réécrire la *loi d’induction* (équation 3.4) sous la forme :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (3.5)$$

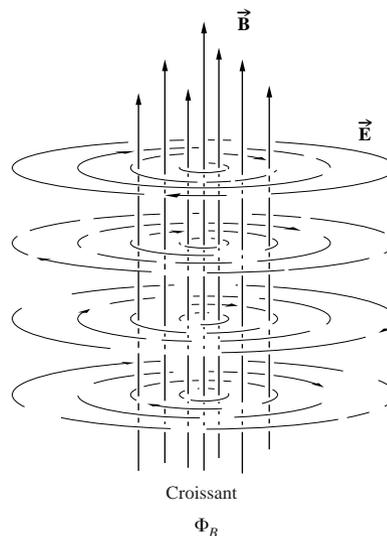


Figure 3.5 Champ \vec{B} variable dans le temps. Le champ \vec{E} forme des lignes circulaires fermées autour de chaque point où Φ_M varie.



Johann Karl
Friedrich Gauss

On prend la dérivée partielle de \vec{B} par rapport à t car \vec{B} est fonction, aussi, des variables de position. Cette expression est réellement fascinante, puisqu'elle conclut qu'*il faut associer un champ électrique à un champ magnétique variable dans le temps.*

3.1.2 Loi de Gauss électrique

Une autre loi fondamentale de l'électromagnétisme est nommée d'après le grand mathématicien allemand Karl Friedrich Gauss (1777-1855). La loi de Gauss décrit la relation entre le flux du champ électrique et les sources de ce flux, à savoir les charges. Les idées préliminaires furent en fait dérivées de la dynamique des fluides, domaine où les concepts de champs et de flux étaient déjà utilisés. Le mouvement d'un fluide, représenté par son champ de vitesses, est décrit grâce à des lignes de courant, de la même manière qu'un champ électrique est décrit par ses lignes de champ. La figure 3.6 montre une portion de

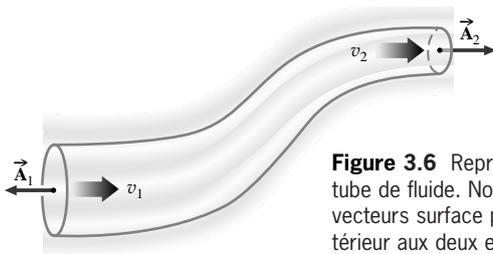


Figure 3.6 Représentation d'un tube de fluide. Noter que les deux vecteurs surface pointent vers l'extérieur aux deux extrémités.

fluide en mouvement à l'intérieur duquel on considère une région isolée par une surface fermée imaginaire. La vitesse d'écoulement, ou *flux volumique* (Av) est le volume de fluide passant dans une section du tube par unité de temps. Le flux volumique est identique aux deux extrémités, car le flux entrant par seconde est égal au flux sortant par seconde. La différence des flux passant par les deux surfaces est donc nulle. Cela reste bien évidemment vrai tant qu'aucun élément extérieur ne perturbe cet équilibre. Si un petit tube est inséré dans la région et qu'il pompe du fluide (puits) ou qu'il en injecte (source), la différence des flux ne sera plus nulle.

Pour appliquer ces principes au champ électrique, considérons une surface fermée A imaginaire placée dans un champ électrique arbitraire comme le décrit la figure 3.7. Le flux du champ électrique à travers cette surface s'écrit :

$$\Phi_E = \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (3.6)$$

Le cercle entourant les signes intégrales rappelle que la surface considérée est fermée. Le vecteur $d\vec{S}$ est pris dans la direction de la normale vers l'extérieur. **Lorsqu'il n'y a ni source ni puits de champ électrique à l'intérieur de la région qu'entoure la surface fermée, le flux à travers la surface est nul**, ce qui est une loi générale pour tous les champs de ce type.

Pour déterminer ce qui arriverait en présence de sources ou de puits internes, considérons une surface sphérique de rayon r centrée sur un point de charge positive q , dans le vide. Le champ E est en tout point radial, dirigé vers l'extérieur et

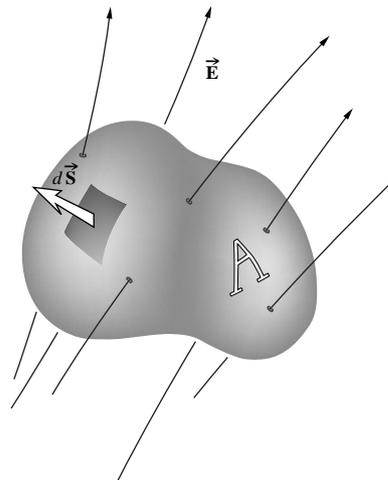


Figure 3.7 Champ \vec{E} à travers une surface fermée A .

pour toute distance r , il est perpendiculaire à la surface : $E = E$. On a alors :

$$\Phi_E = \oiint_A E dS = \oiint_A E dS$$

De plus, comme E est constant sur toute la surface de la sphère, on peut le sortir de l'intégrale :

$$\Phi_E = E \oiint_A dS = E 4\pi r^2$$

Par ailleurs, on sait, d'après la loi de Coulomb, qu'une charge ponctuelle émet un champ électrique donné par :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

où ϵ_0 est appelée la *permittivité du vide*. Ainsi :

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

C'est le flux électrique associé à une charge unique q située à l'intérieur d'une surface fermée. Puisque toute distribution de charges est faite de charges uniques, il est raisonnable d'écrire que le flux dû à plusieurs charges contenues dans une surface fermée est donc :

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q.$$

En combinant les deux équations pour Φ_E , on obtient finalement la **loi de Gauss** :

$$\oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q.$$

D'un point de vue purement mathématique, il est utile d'approximer la distribution de charges par une distribution continue. Dans ce cas, si le volume délimité par A est V et que la distribution de charge a une densité ρ , la loi de Gauss devient :

$$\oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \quad (3.7)$$

Permittivité électrique

Pour le cas particulier du vide, la permittivité électrique est donnée par $\epsilon_0 = 8,854 2 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2$. Si la charge se

trouve non pas dans le vide mais dans un matériau spécifique, on parle de permittivité absolue ϵ ; celle-ci remplace alors ϵ_0 dans l'équation (3.7). Dans cette équation, l'une des fonctions de la permittivité est d'équilibrer les unités et de rendre l'équation homogène. Cette quantité est aussi très importante pour la description du condensateur à plaques parallèles (paragraphe 3.1.4). Dans ce cas, c'est une constante de proportionnalité, caractéristique du milieu, entre la capacité du condensateur et ses caractéristiques géométriques. La permittivité d'un matériau ϵ est d'ailleurs le plus souvent mesurée grâce à un protocole dans lequel le matériau étudié est placé entre les faces d'un condensateur. De façon conceptuelle, la permittivité représente donc le comportement électrique du milieu. C'est, en un sens, une mesure du degré auquel le matériel est sensible au champ électrique dans lequel il se trouve.

À l'époque des premiers développements de ces notions, les scientifiques de domaines très différents avaient développé des systèmes d'unités dissociés, ce qui impliquait des difficultés évidentes. Chaque système d'unité nécessitait des tabulations propres de la valeur numérique de ϵ , d'où une énorme perte de temps et d'homogénéité scientifique. Le même problème avait été évité pour les notions de densités grâce à l'introduction des densités spécifiques (en fait, des quotients de densité). Ainsi, il fut rapidement établi qu'il était plus avantageux de tabuler non pas la valeur numérique de ϵ mais une autre quantité indépendante du système d'unités employé. On définit ainsi la **constante diélectrique** (ou *permittivité relative*) d'un matériau, qui fut notée ϵ_r ou K_E , tel que $K_E = \epsilon/\epsilon_0$. Par définition, ce paramètre est donc sans unité. La permittivité du matériau peut alors être exprimée en termes de ϵ_0 comme :

$$\epsilon = K_E \epsilon_0 \quad (3.8)$$

L'intérêt pour K_E anticipe le fait que la permittivité est liée à la vitesse de la lumière dans les matériaux diélectriques, comme le verre, l'air et le quartz.

3.1.3 Loi de Gauss magnétique

Il n'existe pas d'équivalent magnétique connu de la charge électrique. Aucun pôle magnétique isolé n'a jamais été découvert et ce, malgré des recherches approfondies, incluant même des échantillons de sol lunaire. Contrairement au champ électrique, le champ magnétique \vec{B} ne diverge pas de (ou ne converge pas vers) quelque charge magnétique que ce soit (un

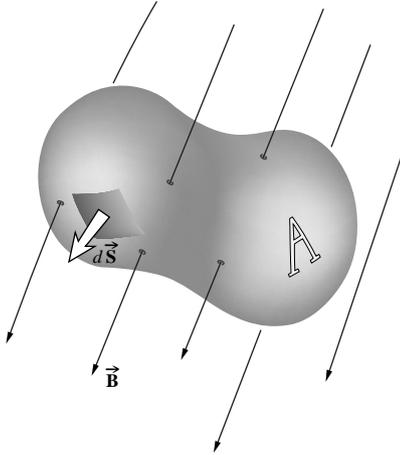


Figure 3.8 Champ \vec{B} à travers une surface fermée A .

pôle unique : source ou puits). Les champs magnétiques peuvent, en revanche, être décrits en termes de distributions de courant. On peut, en effet, concevoir un aimant élémentaire comme un petit circuit de courant dans lequel les lignes de champ de \vec{B} sont continues et refermées. Toute surface fermée placée dans un champ magnétique doit donc être traversée par un nombre égal de lignes de \vec{B} , entre celles qui y pénètrent et celles qui en ressortent (figure 3.8). Cette situation est une conséquence directe de l'absence de pôles uniques dans le volume fermé en question. Le flux du champ magnétique Φ_M à travers une telle surface est nul et l'on retrouve l'équivalent magnétique de la loi de Gauss :

$$\Phi_M = \oiint_A \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.9)$$

3.1.4 Loi d'Ampère

Une autre équation très importante est associée au grand savant français André Marie Ampère (1775-1836). Elle est connue sous le nom de *loi des circuits* ou *loi d'Ampère*, mais ses origines « physiques » ne sont pas claires. Il n'est pas évident de justifier cette loi, mais cela en vaut la peine. Imaginons un câble rectiligne dans le vide transportant un courant, et le champ B circulaire autour de lui (figure 3.9). On sait, par expérimentation, que le champ magnétique créé par un câble rectiligne transportant un courant i est $B = \mu_0 i / 2\pi r$. Maintenant, replaçons-nous dans l'état de pensée des scientifiques du XIX^e siècle, où il était commun de parler de charge magnétique (q_m). Définissons cette charge, constituant un pôle unique, de façon à ce que, lorsqu'elle est placée dans un champ magnétique B , elle

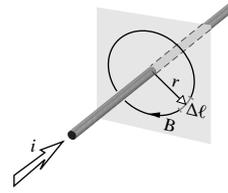


Figure 3.9 Champ \vec{B} engendré autour d'un fil conducteur transportant du courant.

subisse une force $q_m B$ dans la direction de B , exactement comme une charge électrique q_e subit une force $q_e E$ dans un champ électrique E . Supposons que l'on déplace cette « charge magnétique » le long d'une orbite circulaire fermée centrée sur le câble dans lequel circule un courant, perpendiculairement au câble. Quel serait le travail effectué durant ce processus ? Puisque la direction de la force change, étant donné que \vec{B} change de direction, on doit diviser l'orbite circulaire en segments élémentaires ($\Delta\ell$) et additionner le travail fait pour chaque segment. Le travail correspond donc à la projection de la force sur la parallèle au déplacement, multiplié par le déplacement : $\Delta W = q_m B_{\parallel} \Delta\ell$. Le travail total effectué par le champ est ainsi $\sum q_m B_{\parallel} \Delta\ell$. Dans le cas étudié, \vec{B} est en tout point tangent à la trajectoire, de sorte que $B_{\parallel} = B = \mu_0 i / 2\pi r$, qui est constant pour le cercle. Avec q_m et B tous deux constants, la somme devient alors :

$$q_m \sum B_{\parallel} \Delta\ell = q_m B \sum \Delta\ell = q_m B 2\pi r$$

où $\sum \Delta\ell = 2\pi r$ est la circonférence de l'orbite.

Si l'on remplace B par son expression équivalente contenant le courant et inversement proportionnelle à r , les rayons du numérateur et du dénominateur s'annulent. Le travail effectué est donc indépendant de l'orbite suivie. Or, puisqu'aucun travail n'est fait lorsqu'on se déplace perpendiculairement à \vec{B} , le travail effectué doit être le même si l'on déplace q_m le long d'un rayon (en l'éloignant du câble ou en la rapprochant), passant ainsi d'un segment circulaire à l'autre. De fait, W est vraiment complètement indépendant du chemin emprunté : le travail effectué sera le même pour *n'importe quelle boucle fermée* contenant le courant. En introduisant l'expression de B dans l'équation précédente et en éliminant les termes de « charges » q_m des deux côtés, on obtient la remarquable expression :

$$\sum B_{\parallel} \Delta\ell = \mu_0 i$$

Celle-ci doit être sommée pour tous les chemins fermés qui entourent i . Le terme de charge magnétique a disparu de

l'équation, ce qui est avantageux puisque l'on sait maintenant qu'il n'y a pas de pôle unique magnétique. Malgré tout, le raisonnement physique développé ici est cohérent et l'équation trouvée est valable avec ou sans charges magnétiques. De plus, si la boucle fermée comprend plusieurs câbles transportant du courant, il s'agit seulement d'additionner les divers champs afin de trouver le champ résultant. L'équation étant vraie pour chaque champ pris séparément, elle doit être vraie pour le champ total. Donc :

$$\sum B_{\parallel} \Delta \ell = \mu_0 \sum i$$

Lorsque $\Delta \ell \rightarrow 0$, la sommation discrète se transforme en intégration sur un chemin fermé :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum i$$

De nos jours, cette équation est connue sous le nom de **loi d'Ampère**, bien que pendant longtemps elle a simplement été dénommée « règle du travail ». Elle établit donc une relation entre l'intégration linéaire du champ \vec{B} tangent à la courbe fermée C et le courant total i passant à l'intérieur de C .

Lorsque le courant a une section non uniforme, la loi d'Ampère s'écrit en termes de *densité de courant* ou courant par unité de surface J , dont l'intégration se fait sur l'aire tout entière :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (3.10)$$

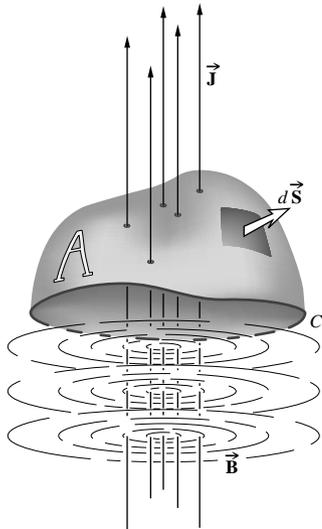


Figure 3.10 Densité de courant à travers une surface ouverte A .

L'aire ouverte A est encerclée par C (figure 3.10). La quantité μ_0 est la **perméabilité magnétique du vide**, telle que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N} \cdot \text{s}^2 / \text{C}^2$. Pour les milieux matériels, ce paramètre est remplacé par la perméabilité absolue μ du milieu ou du matériau en question. Celle-ci remplace μ_0 dans l'équation (3.10) et l'on a, comme pour l'équation (3.8) :

$$\mu = K_M \mu_0 \quad (3.11)$$

où K_M est la *perméabilité relative* du matériau par rapport au vide, quantité sans dimensions.

L'équation (3.10), bien qu'elle soit le plus souvent juste, ne constitue pas une règle générale. La loi d'Ampère ne spécifie pas l'aire considérée, tant que celle-ci reste entourée par la courbe C . Ce point pose un problème évident pour l'étude du phénomène de charge du condensateur, comme le montre la figure 3.11a. Si l'on utilise l'aire plane A_1 , on considère qu'il y passe un courant total i et qu'il y a un champ \vec{B} le long de la courbe C . Le côté droit de l'équation (3.10) étant non nul, le côté gauche l'est également. Mais si l'on utilise l'aire A_2 , le courant total est nul. Le champ devrait donc aussi être nul, alors que rien n'a changé physiquement. De façon évidente, quelque chose ne va pas !

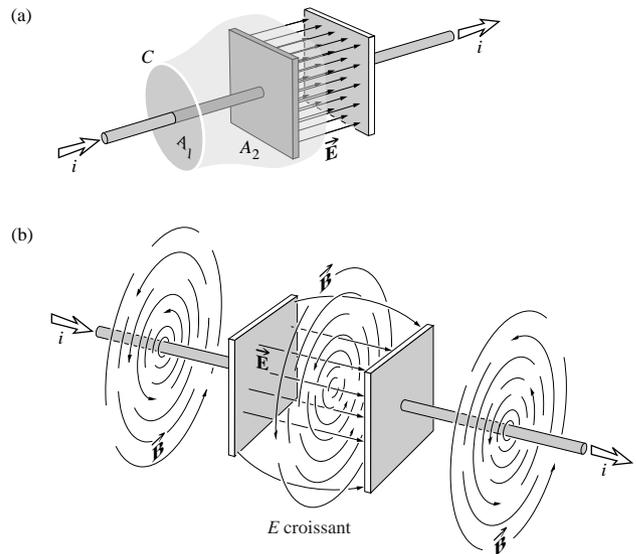


Figure 3.11 (a) Lorsque l'on applique la loi d'Ampère, le choix de la surface A_1 ou A_2 , entourée par le chemin C est indifférent. Pourtant un courant passe par A_1 et non pas par A_2 , ce qui signifie une incohérence grave. (b) Champ \vec{B} correspondant à un champ \vec{E} variable dans le temps entre les deux plaques d'un condensateur.

Des charges en mouvement ne sont pas les seules sources de champ magnétique. Lorsque l'on charge ou que l'on décharge un condensateur, on peut mesurer le champ \vec{B} dans la région située entre les plaques (figure 3.11b). Celui-ci ne peut pas être distingué du champ entourant les conducteurs électriques, même si aucun courant ne traverse vraiment le condensateur. Notons cependant que si A est l'aire de chaque plaque, et Q la charge, on a :

$$E = \frac{Q}{\epsilon A}$$

Lorsque la charge varie, le champ électrique varie également. En prenant la dérivée de chaque côté de l'équation, on obtient :

$$\epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{i}{A}$$

qui est, en effet, une densité de courant pour le champ \vec{E} . James Clerk Maxwell avança l'hypothèse de l'existence d'un tel mécanisme, appelé la *densité de courant de déplacement** définie par :

$$\vec{J}_D \equiv \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.12)$$

L'introduction de ce paramètre permet de réécrire la loi d'Ampère sous la forme :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu \iint_A \left(\vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (3.13)$$

qui fut, d'ailleurs, l'une des plus grandes contributions de Maxwell. Cette équation montre que, même lorsque $\vec{J} = 0$, un *champ électrique variable dans le temps est accompagné d'un champ magnétique* (figure 3.7).

3.1.5 Les équations de Maxwell

L'ensemble des intégrations données par les équations (3.5), (3.7), (3.9) et (3.13) constitue les célèbres équations de Maxwell. Celles-ci sont la généralisation de résultats expérimentaux.

*Les propres termes de Maxwell concernant ce mécanisme sont examinés dans l'article de A. M. Bork, *Am. J. Phys.* **31**, 854 (1963). Incidentally, Clerk est d'ailleurs écrit Clark.

Les formes les plus simples des équations de Maxwell décrivent le comportement des champs électrique et magnétique dans le vide, où $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ et où ρ et \vec{J} sont tous les deux nuls. Dans ce cas,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (3.14)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \iint_A \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (3.15)$$

$$\oiint_A \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.16)$$

$$\oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.17)$$

Observons qu'à une constante multiplicative près, les champs électrique et magnétique apparaissent dans ces équations avec une symétrie remarquable (\vec{E} affecte \vec{B} et \vec{B} affecte \vec{E} à son tour). En fait, comme souvent, la symétrie mathématique implique une symétrie physique.

Les équations de Maxwell peuvent être réécrites sous forme différentielle, plus utile dans une majorité de situations. Après quelques étapes de calculs (voir l'appendice 1), les équations deviennent, dans le cas du vide :

$$\frac{\partial \vec{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial z} = - \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial t} \quad (i)$$

$$\frac{\partial \vec{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial x} = - \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial t} \quad (ii) \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \vec{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial y} = - \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial t} \quad (iii)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial t} \quad (i)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial t} \quad (ii) \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial y} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} \quad (iii)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial z} = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \vec{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial z} = 0 \quad (3.21)$$

Cette étape permet donc de passer des équations de Maxwell, constituées d'intégrales sur des régions finies à une formulation en termes de dérivées en des *points* de l'espace.

On dispose donc, à présent, de tous les outils nécessaires pour comprendre comment les champs électrique et magnétique, inséparables et mutuellement dépendants, se propagent dans l'espace comme une seule entité, libre de charges et courants, sans matière ni éther.

3.2 Ondes électromagnétiques

L'ensemble complet des calculs qui permet d'obtenir l'équation d'onde électromagnétique figure dans l'annexe 1 de cet ouvrage. Ici, l'enjeu principal porte davantage sur la tâche tout aussi importante de développer une appréciation plus intuitive du processus physique en question. On dispose en fait de trois observations à partir desquelles on peut établir un point de vue qualitatif : la perpendicularité entre les deux champs, la symétrie des équations de Maxwell et l'interdépendance de \vec{E} et \vec{B} dans ces équations.

En étudiant l'électricité et le magnétisme, on se rend vite compte que de nombreuses relations impliquent des produits vectoriels, obéissant à la *règle de la main droite*. En d'autres termes, la présence de l'un des deux champs entraîne une réponse de l'autre, dirigée perpendiculairement. Par exemple, un champ \vec{E} oscillant dans le temps génère un champ \vec{B} en tout point perpendiculaire à la direction de vibration de \vec{E} (figure 3.12). De même, un champ \vec{B} oscillant engendre un champ \vec{E} qui est en tout point perpendiculaire à la direction d'oscillation de \vec{B} (figure 3.5). Par conséquent, on peut déjà anticiper la nature généralement transverse des champs \vec{E} et \vec{B} dans une perturbation électromagnétique.

Considérons une charge qui, partant du repos, est accélérée d'une façon ou d'une autre. Lorsque la charge est immobile, elle est associée à un champ \vec{E} radial et constant qui s'étend, dans toutes les directions, jusqu'à l'infini. Au moment où la charge commence à se déplacer, le champ \vec{E} se modifie au voisinage de la charge, et cette modification se propage dans l'espace à une vitesse finie. Ce champ électrique, variable dans le temps, induit à son tour un champ magnétique, selon

l'équation (3.15) ou (3.19). Si la vitesse de la charge est constante, le champ \vec{E} varie à un rythme constant et le champ \vec{B} résultant est constant. Dans le cas considéré, la charge accélère. Par conséquent, $\partial \vec{E} / \partial t$ n'est pas constant et le champ \vec{B} qui est induit dépend également du temps. Ce champ \vec{B} variable dans le temps produit à son tour un champ \vec{E} , selon l'équation (3.14) ou (3.18). Le processus continue, avec \vec{E} et \vec{B} couplés sous la forme d'une impulsion. Lorsqu'un des deux champs varie, il en crée un nouveau un peu plus loin, et l'impulsion se déplace ainsi dans l'espace, de proche en proche.

En faisant une analogie avec la mécanique assez parlante, on peut imaginer les lignes de champ électrique comme étant un ensemble dense de cordes radialement disposées (p. 64). Lorsqu'elles sont pincées, chaque corde se déforme, créant un coude qui s'éloigne du centre. Tous ces coudes se combinent à chaque instant pour former une impulsion à trois dimensions qui s'étend dans le continuum du champ électrique.

De façon plus appropriée, les champs \vec{E} et \vec{B} peuvent être considérés comme étant deux aspects d'un seul et même phénomène physique, le *champ électromagnétique*, dont l'origine est une charge en mouvement. La perturbation, une fois engendrée par le champ électromagnétique, constitue une onde sans attache qui s'éloigne, indépendamment de sa source. Liés ensemble comme une seule entité, les champs électrique et magnétique, variant dans le temps, se régénèrent l'un l'autre au cours d'un cycle sans fin. Par exemple, les

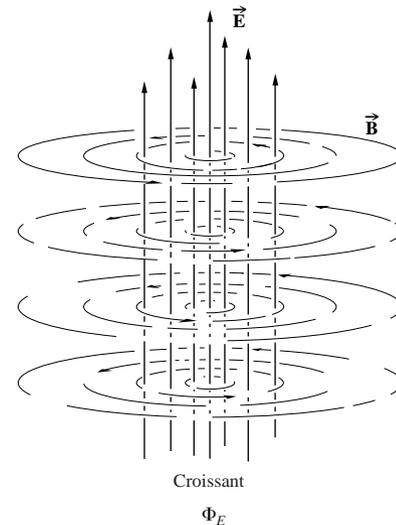


Figure 3.12 Champ \vec{E} variable dans le temps. Autour de chaque point où Φ_E varie, le champ \vec{B} forme des boucles fermées.

ondes électromagnétiques qui nous parviennent de la galaxie d'Andromède, pourtant relativement proche, ont voyagé pendant près de 2 200 000 ans.

Nous n'avons pas encore considéré la direction de la propagation des ondes par rapport aux champs qui les constituent. Notons cependant que le haut degré de symétrie des équations de Maxwell dans le vide suggère que la perturbation se déplacera dans une direction qui est symétrique à la fois pour \vec{E} et pour \vec{B} . Cela implique qu'une onde électromagnétique ne peut être purement longitudinale (i.e. tant que \vec{E} et \vec{B} ne sont pas parallèles). Mais il s'agit, à présent, de conforter ces notions par quelques informations quantitatives.

Les calculs effectués à l'annexe 1 montrent que les équations de Maxwell peuvent être exprimées sous la forme de deux expressions vectorielles extrêmement concises :

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad [\text{A1.26}]$$

et

$$\nabla^2 \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad [\text{A1.27}]$$

Le laplacien*, ∇^2 , opère sur chaque composante de \vec{E} et de \vec{B} , de sorte que les deux équations vectorielles représentent en fait un total de six équations scalaires. En coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

*En coordonnées cartésiennes,

$$\nabla^2 \vec{E} = \hat{i} \nabla^2 E_x + \hat{j} \nabla^2 E_y + \hat{k} \nabla^2 E_z$$

Des expressions de ce type, reliant les variations dans le temps et dans l'espace de grandeurs physiques, avaient été étudiées bien avant les travaux de Maxwell et étaient déjà utilisées pour décrire les phénomènes ondulatoires. Chaque composante du champ électromagnétique ($E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$) obéit à l'équation d'onde différentielle scalaire :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad [2.60]$$

à condition que :

$$v = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \quad (3.24)$$

Afin d'évaluer v , Maxwell utilisa les résultats des expériences électriques entreprises en 1856, à Leipzig, par les physiciens allemands Wilhem Weber (1804-1891) et Rudolph Kohlrausch (1809-1858). De nos jours, on estime que la perméabilité du vide est telle que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ m}\cdot\text{kg}/\text{C}^2$ en unités SI. Jusqu'à très récemment, on déterminait ϵ_0 directement grâce à de simples mesures effectuées avec un condensateur. En unités modernes, on a finalement :

$$\epsilon_0 \mu_0 \approx (8,85 \times 10^{-12} \text{ s}^2 \cdot \text{C}^2/\text{m}^3 \cdot \text{kg}) (4\pi \times 10^{-7} \text{ m}\cdot\text{kg}/\text{C}^2)$$

Ou bien $\epsilon_0 \mu_0 \approx 11,12 \times 10^{-18} \text{ s}^2/\text{m}^2$

Et maintenant, le moment de vérité ! Dans le vide, la prévision pour la vitesse de toutes les ondes électromagnétiques est donc :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Lorsque cette valeur théorique fut établie pour la première fois, on remarqua qu'elle était remarquablement similaire à la vitesse de la lumière (315 300 km/s) qui avait été déterminée expérimentalement peu de temps avant par Fizeau. Les résultats de cette expérience, menée en 1849 par Fizeau, avec une roue crantée, étaient à la disposition de Maxwell. Il en apporta le commentaire suivant :

« Cette vitesse [i.e. sa prédiction théorique] est si proche de celle de la lumière, qu'il semble que nous ayons de fortes raisons de conclure que la lumière elle-même (rayonnement thermique et autres radiations incluses) est une perturbation électromagnétique sous la forme d'ondes propagées par le champ électromagnétique, en accord avec les lois de l'électromagnétisme. »

Cette analyse brillante fut l'un des plus grands triomphes intellectuels de tous les temps. Il est maintenant habituel de désigner la vitesse de la lumière dans le vide par le symbole c , première lettre du mot latin *celer* signifiant « rapide ». En 1983, la 17^e Conférence générale des Poids et Mesures, à Paris, adopta une nouvelle définition du mètre et fixa donc la vitesse de la lumière dans le vide à exactement :

$$c = 2,997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s}$$

3.2.1 Ondes transversales

Il s'agit, à présent, d'expliquer le caractère transverse de la lumière, vérifié expérimentalement, dans le contexte de la théorie électromagnétique. Pour cela, considérons le cas simple d'une onde plane se propageant dans le vide dans la direction x positive. L'intensité du champ électrique est une solution de l'équation (A1.26) où \vec{E} est constant sur chacun des plans perpendiculaires à l'axe x . Celle-ci n'est donc fonction que de x et t , c'est-à-dire $\vec{E} = \vec{E}(x, t)$. On se réfère, à présent, aux équations de Maxwell et en particulier à l'équation (3.21) qui s'interprète généralement en disant que *la divergence de \vec{E} est égale à zéro*. Puisque \vec{E} n'est fonction ni de y ni de z , l'équation peut être réduite à :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad (3.25)$$

Si E_x n'est pas nul, c'est-à-dire s'il existe une composante de \vec{E} dans la direction de la propagation, cette expression nous indique qu'elle ne varie pas avec x . À tout instant, E_x est donc constante pour n'importe quelle valeur de x . Cette assertion ne peut cependant correspondre au cas d'une onde se déplaçant dans la direction x . De façon alternative, l'équation (3.25) implique que pour une onde, $E_x = 0$, l'onde électromagnétique est telle que le champ électrique n'a pas de composante dans la direction de la propagation. Le champ \vec{E} associé à une onde plane est donc exclusivement *transversal*.

Par conséquent, le fait que le champ \vec{E} soit transversal signifie qu'il faut spécifier la direction de \vec{E} à chaque instant pour pouvoir complètement caractériser l'onde. Une telle description correspond à la notion de **polarisation** de la lumière et elle sera traitée dans le chapitre 8. Sans se restreindre à quelques cas particuliers, on parlera donc généralement d'*ondes polarisées, planes ou linéaires*, pour lesquelles la direction du vecteur \vec{E} oscillant sera fixée. On orientera ainsi

le système de coordonnées de sorte que le champ électrique soit toujours parallèle à l'axe y . Dans ce cas :

$$\vec{E} = \hat{j}E_y(x, t) \quad (3.26)$$

D'après l'équation (3.18), il s'ensuit donc que :

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (3.27)$$

Ainsi, B_x et B_y sont constantes et sans intérêt pour l'instant. Le champ \vec{B} , dépendant du temps, ne peut avoir qu'une composante dans la direction z . **Dans un espace vide, dénué de champs, une onde électromagnétique plane sera donc transversale** (figure 3.13). Excepté dans le cas d'une incidence normale, les ondes électromagnétiques qui se propagent dans les milieux matériels réels ne sont généralement pas transversales. Cette complication vient du fait que le milieu peut avoir des propriétés dissipatives ou contenir des charges libres.

Bien que l'on ait stipulé que l'étude s'appliquait aux ondes planes, aucune forme de perturbation n'a été spécifiée. Les conclusions que l'on tire ici sont donc générales et s'appliquent aussi bien aux impulsions qu'aux ondes continues. On a déjà mentionné le fait que les fonctions harmoniques étaient particulièrement intéressantes, car toute onde peut être exprimée sous forme sinusoïdale grâce aux techniques de Fourier (p. 316). On limitera donc cette discussion aux ondes harmoniques, pour lesquelles on peut exprimer $E_y(x, t)$ sous la forme :

$$E_y(x, t) = E_{0y} \cos [\omega(t - x/c) + \varepsilon] \quad (3.28)$$

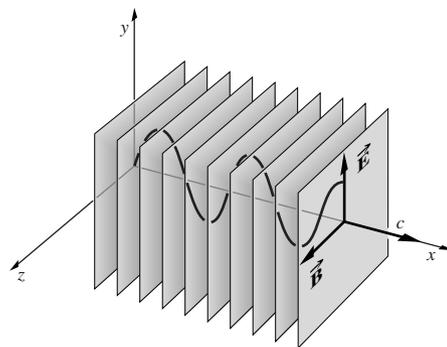


Figure 3.13 Représentation des champs dans le cas d'une onde électromagnétique plane et harmonique.

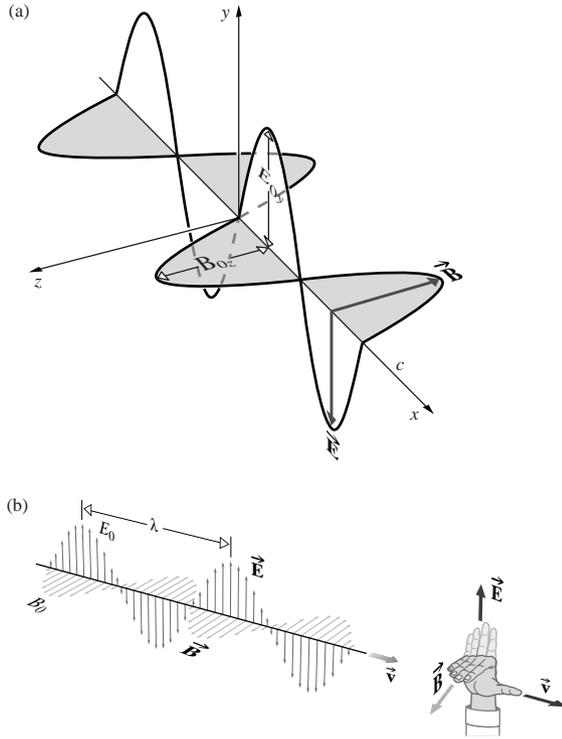


Figure 3.14 (a) Représentation des champs harmoniques orthogonaux \vec{E} et \vec{B} pour une onde plane polarisée. (b) Les ondes se propagent dans la direction donnée par le produit vectoriel $\vec{E} \times \vec{B}$.

la vitesse de propagation étant c . La densité de flux magnétique associée peut être évaluée en intégrant directement l'équation (3.27) :

$$B_z = - \int \frac{\partial E_y}{\partial x} dt$$

En utilisant l'équation (3.28), on obtient :

$$B_z = - \frac{E_{0y}\omega}{c} \int \sin [\omega(t - x/c) + \varepsilon] dt$$

ou bien
$$B_z(x, t) = \frac{1}{c} E_{0y} \cos [\omega(t - x/c) + \varepsilon] \quad (3.29)$$

La constante d'intégration, qui représente un champ indépendant du temps, a été ignorée. En comparant ce résultat avec l'équation (3.28), il est alors évident que :

$$E_y = cB_z \quad (3.30)$$

Comme E_y et B_z ne diffèrent que par un scalaire et ont donc la même dépendance temporelle, il apparaît que \vec{E} et \vec{B} sont *en phase* pour tout point de l'espace. De plus, $\vec{E} = \hat{j}E_y(x, t)$ et $\vec{B} = \hat{k}B_z(x, t)$ sont mutuellement perpendiculaires tandis que leur produit vectoriel, $\vec{E} \times \vec{B}$, pointe dans la direction de propagation, \hat{i} (figure 3.14).

Les ondes planes, bien que très importantes en physique, ne sont pas les seules solutions des équations de Maxwell. Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, l'équation d'onde différentielle a de nombreuses solutions, parmi lesquelles on trouve, par exemple, les ondes sphériques et cylindriques (figure 3.15).

3.3 Énergie et quantité de mouvement

L'une des propriétés essentielles d'une onde électromagnétique est qu'elle transporte de l'énergie et de la quantité de mouvement. La lumière provenant des étoiles les plus proches, en dehors du système solaire, voyage 25 millions de millions de kilomètres avant d'atteindre la Terre. Et pourtant, elle transporte encore assez d'énergie pour agir sur les électrons de l'œil humain.

3.3.1 Le vecteur de Poynting

Toute onde électromagnétique existe dans une région de l'espace et il est donc naturel de parler d'*énergie radiative par unité de volume*, ou **densité d'énergie**, u . On suppose que le champ électrique lui-même peut stocker de l'énergie, ce qui constitue une étape logique majeure puisque cela

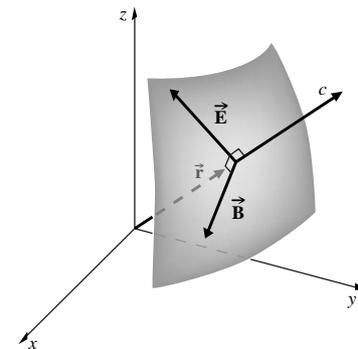


Figure 3.15 Une portion de front d'onde sphérique à grande distance de la source.

permet d'attribuer au champ un caractère physique réel. Si le champ a de l'énergie, il existe en lui-même. De plus, tant que le champ classique est continu, son énergie l'est également. Considérons aussi que cette assertion est vraie et voyons où cela mène. On peut exprimer la densité d'énergie du champ \vec{E} (par exemple, entre les plaques d'un condensateur chargé) par (Problème 3.6) :

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (3.31)$$

De même, la densité d'énergie du champ B seul est :

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (3.32)$$

La relation $E = cB$ a été obtenue spécifiquement pour les ondes planes. Elle peut néanmoins être appliquée de manière assez générale. Avec $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, il s'ensuit que :

$$u_E = u_B \quad (3.33)$$

L'énergie qui se propage dans l'espace sous forme d'onde électromagnétique est répartie de façon égale entre les champs électrique et magnétique qui la constituent. Pour autant que :

$$u = u_E + u_B \quad (3.34)$$

$$u = \epsilon_0 E^2 \quad (3.35)$$

Ou, de manière équivalente :

$$u = \frac{1}{\mu_0} B^2 \quad (3.36)$$

Pour représenter le débit d'énergie électromagnétique associé à une onde en mouvement (*onde progressive*), appelons S , l'éclairement énergétique qui, dans le système SI, s'exprime en W/m^2 . La figure 3.16 décrit une onde électromagnétique qui traverse une aire A à une vitesse c . Pendant un intervalle de temps très court Δt , l'énergie traversant A est celle qui est contenue dans le volume cylindrique $u(c \Delta t A)$. Ainsi :

$$S = \frac{uc \Delta t A}{\Delta t A} = uc \quad (3.37)$$

Ou, d'après l'équation (3.35),

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB \quad (3.38)$$

On peut alors raisonnablement présumer (pour des milieux isotropes) que l'énergie est transportée le long de la direction

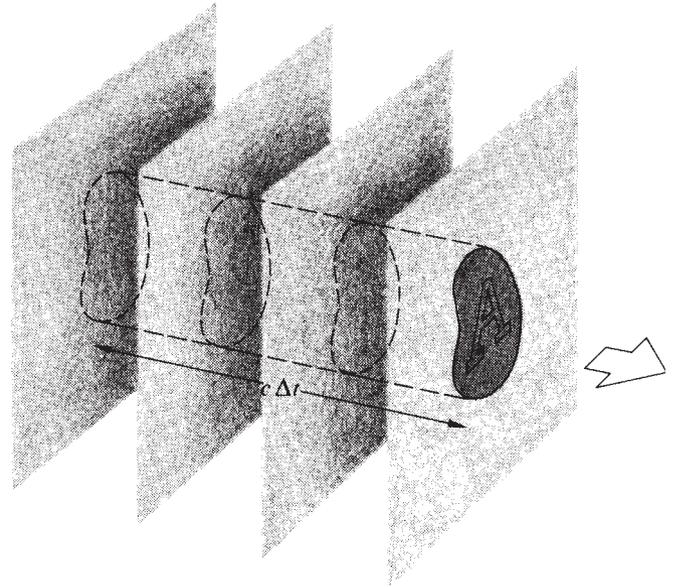


Figure 3.16 Flux d'énergie électromagnétique.

de la propagation de l'onde. Le vecteur \vec{S} correspondant est alors :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (3.39)$$

Ou bien :

$$\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \quad (3.40)$$

La longueur de \vec{S} représente l'éclairement d'une surface normale à \vec{S} . Nommé, d'après le physicien britannique John Henry Poynting (1852-1914), \vec{S} est désormais connu en tant que **vecteur de Poynting**. Appliquons maintenant ces considérations au cas d'une onde harmonique plane polarisée linéairement (les directions des champs \vec{E} et \vec{B} sont fixées) se propageant en espace libre, dans la direction \vec{k} :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (3.41)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (3.42)$$

D'après l'équation (3.40), on trouve :

$$\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (3.43)$$

Ce résultat correspond donc à l'éclairement instantané dû à l'onde.

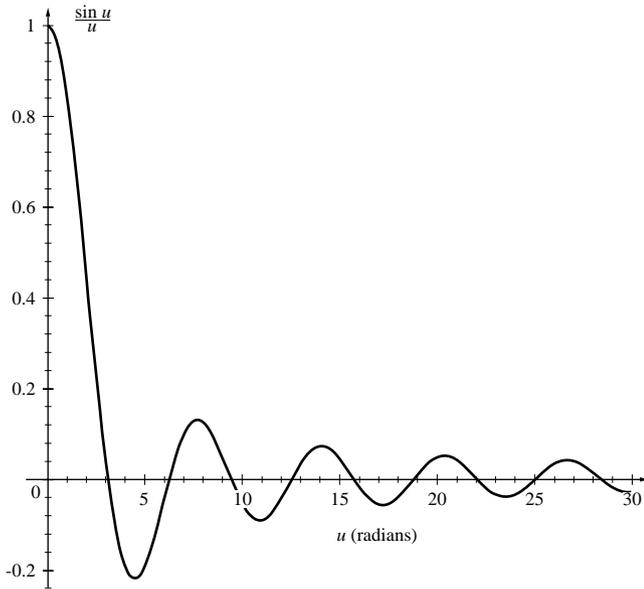


Figure 3.17 $\text{sinc } u$. Noter que la fonction sinc s'annule pour $u = \pi, 2\pi, 3\pi$, et ainsi de suite.

Moyenne des fonctions harmoniques

Il est évident que $\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ oscille entre des maxima et des minima. Aux fréquences optiques ($\approx 10^{15}$ Hz), $\vec{\mathbf{S}}$ est une fonction du temps qui varie extrêmement rapidement (en fait, deux fois plus vite que les champs, puisqu'un cosinus au carré a une fréquence double de celle du cosinus). Ainsi, sa valeur instantanée est une quantité difficile à mesurer directement. En fait, les détecteurs réels sont sensibles à la moyenne correspondant à l'éclairage moyen pendant un intervalle de temps fini. C'est ce que font les cellules photoélectriques, les plaques photosensibles, ou encore la rétine de l'œil humain.

La forme spécifique de l'équation (3.43) et le rôle central joué par les ondes harmoniques suggèrent d'étudier les valeurs moyennes de ces fonctions. La valeur moyenne, par rapport au temps, d'une fonction $f(t)$ sur un intervalle T , notée $\langle f(t) \rangle_T$ est donnée par :

$$\langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(t) dt$$

La valeur de $\langle f(t) \rangle_T$ résultante dépend vraiment de T . Pour trouver la moyenne d'une fonction harmonique, on évalue :

$$\langle e^{i\omega t} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega T} e^{i\omega t} \Big|_{t-T/2}^{t+T/2}$$

$$\langle e^{i\omega t} \rangle_T = \frac{1}{i\omega T} (e^{i\omega(t+T/2)} - e^{i\omega(t-T/2)})$$

$$\text{Et } \langle e^{i\omega t} \rangle_T = \frac{1}{i\omega T} e^{i\omega t} (e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2})$$

Le terme entre parenthèses rappelle l'expression de $\sin \omega T/2$ (p. 24). Ainsi :

$$\langle e^{i\omega t} \rangle_T = \left(\frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} \right) e^{i\omega t}$$

Le quotient entre crochets est très important en optique. L'expression $(\sin u)/u$ constitue la fonction (sinc u). En prenant les parties réelle et imaginaire de l'expression précédente, on obtient :

$$\langle \cos \omega t \rangle_T = (\text{sinc } u) \cos \omega t$$

$$\text{Et } \langle \sin \omega t \rangle_T = (\text{sinc } u) \sin \omega t$$

La moyenne d'un cosinus est donc elle-même un cosinus, oscillant avec la même fréquence mais ayant une amplitude en sinus cardinal (sinc) qui chute rapidement à partir de sa valeur initiale

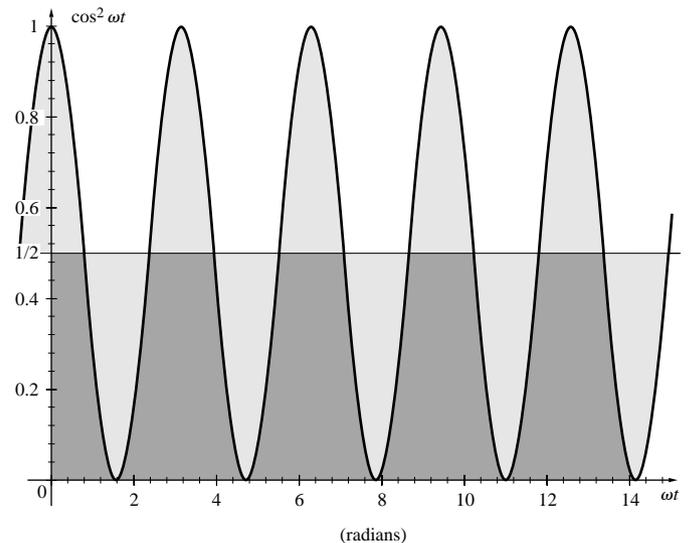


Figure 3.18 En utilisant les « bosses » au-dessus de la ligne d'ordonnée $\frac{1}{2}$, pour remplir les « creux » en clair, on voit tout de suite que la valeur moyenne est $\frac{1}{2}$.

1,0 (figure 3.17 et Table 1 de l'annexe). Puisque $\text{sinc } u = 0$ pour $u = \omega T/2 = \pi$, il s'ensuit que, lorsque $T = \tau$, la moyenne de $\cos \omega t$ est nulle sur un intervalle T égal à une période. Par extension, la moyenne de $\cos \omega t$ est nulle sur tout nombre entier de périodes, et il en est de même pour $\sin \omega t$. Il est raisonnable que chacune de ces fonctions embrasse autant d'aire positive au-dessus de l'axe que d'aire négative en dessous de l'axe et c'est ce à quoi correspond l'intégration d'origine. Après un intervalle de plusieurs périodes, le terme sinc est donc si petit que les fluctuations autour de zéro peuvent être négligées ; les termes $\langle \cos \omega t \rangle_T$ et $\langle \sin \omega t \rangle_T$ sont alors essentiellement nuls.

On peut également montrer (problème 3.8) que $\langle \cos^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2}[1 + \text{sinc } \omega T \cos 2\omega t]$. Cette expression oscille autour d'une valeur de 1/2 à une fréquence de 2ω et s'approche rapidement de 1/2 lorsque T augmente au-delà de quelques dizaines de périodes. Dans le cas de la lumière, $\tau \approx 10^{-15}$ s. De fait, prendre la moyenne sur, ne serait-ce qu'une microseconde, correspond à $T \approx 10^9 \tau$, bien plus qu'il n'en faut pour rendre la fonction sinc totalement négligeable. Dans ce cas, on a $\langle \cos^2 \omega t \rangle_T = 1/2$. On peut voir ce résultat à l'aide de la figure 3.18, où les aires des « bosses » situées au-dessus de la ligne 1/2 sont utilisées pour remplir les surfaces manquantes en dessous. Après assez de cycles, l'aire sous la courbe $f(t)$ divisée par T , correspondant à $\langle f(t) \rangle_T$, s'approche de la valeur 1/2.

3.3.2 Éclairement

Lorsqu'on parle de la « quantité » de lumière illuminant une surface, on fait référence à la notion d'**éclairement***. Noté I (pour le terme anglais *Irradiance*), c'est l'**énergie moyenne par unité d'aire et de temps**. Tous les détecteurs de haut niveau ont une fenêtre d'entrée qui admet le rayonnement au travers d'une aire fixée A . La dépendance de l'énergie reçue par rapport à la taille de cette fenêtre est donc éliminée si l'on divise celle-ci par A . De plus, comme la puissance incidente ne peut être mesurée instantanément, le détecteur doit *intégrer* le flux énergétique sur un temps fini, T . La valeur mesurée est donc la quantité d'énergie totale reçue par unité d'aire, pendant un temps T . Mais là encore, cette valeur est d'une utilité limitée. En effet, si quelqu'un d'autre reproduit cette mesure dans des conditions similaires, mais avec un T différent, il obtiendra un autre résultat. En divisant cette quantité par T , on

*Dans le passé, les physiciens utilisaient généralement le mot *intensité* pour qualifier le flux d'énergie par unité de surface et par unité de temps. En optique, ce paramètre est lentement remplacé par le terme *éclairement*.

obtient, en revanche, une quantité réellement utile, correspondant à l'énergie moyenne par unité d'aire et par unité de temps, c'est-à-dire I .

Une mesure de I correspond à la valeur moyenne, prise par rapport au temps ($T \gg \tau$), de l'amplitude du vecteur de Poynting, symbolisée par $\langle S \rangle_T$. Dans le cas particulier des champs harmoniques et de l'équation (3.43),

$$\langle S \rangle_T = c^2 \epsilon_0 | \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 | \langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle$$

Or, comme $\langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle_T = \frac{1}{2}$ pour $T \gg \tau$ (problème 3.7) :

$$\langle S \rangle_T = \frac{c^2 \epsilon_0}{2} | \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 |$$

ou bien

$$I \equiv \langle S \rangle_T = \frac{c \epsilon_0}{2} E_0^2 \tag{3.44}$$

L'éclairement est donc proportionnel au carré de l'amplitude du champ électrique. On peut d'ailleurs exprimer le même résultat en écrivant simplement :

$$I = \frac{c}{\mu_0} \langle B^2 \rangle_T \tag{3.45}$$

et

$$I = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle_T \tag{3.46}$$

Dans un matériau diélectrique, isotrope, homogène et linéaire, l'expression de l'éclairement devient :

$$I = \epsilon v \langle E^2 \rangle_T \tag{3.47}$$

Puisque, comme on l'a vu, \vec{E} exerce des forces et effectue du travail beaucoup plus efficacement que \vec{B} , on se référera plutôt à \vec{E} en tant que champ optique. On utilisera donc presque exclusivement l'équation (3.46).

Le débit d'énergie d'un rayonnement optique par unité de temps est le **flux énergétique** F_e ou **puissance optique** P , exprimé en watts. En divisant ce flux incident sur (ou émis par) une surface par l'aire de cette surface, on obtient une mesure de la **densité surfacique de flux énergétique** (W/m^2). Dans le cas d'une surface réceptrice, cette **densité de flux** s'appelle l'*éclairement*, alors que, dans le cas d'un émetteur (source), elle est appelée *exitance*. L'éclairement exprime une *concentration* de la puissance par unité de surface.

La loi en 1/d²

On a vu précédemment que l'onde sphérique, solution de l'équation d'onde différentielle, possède une amplitude inversement

proportionnelle à r . Examinons cette dépendance du point de vue de la conservation d'énergie. Considérons une source ponctuelle isotrope placée en espace libre émettant des ondes sphériques dans toutes les directions. Encerclons alors cette source avec deux sphères concentriques imaginaires de rayon r_1 et r_2 , comme le montre la figure 3.19. Posons $E_0(r_1)$ et $E_0(r_2)$, les amplitudes des ondes traversant respectivement la première et la seconde surface. Si l'énergie est conservée, les quantités totales d'énergie traversant chaque surface par unité de temps doivent être les mêmes, étant donné qu'il n'y a pas d'autres sources ou puits présents. En multipliant I par la surface et en prenant la racine carrée, on obtient :

$$r_1 E_0(r_1) = r_2 E_0(r_2)$$

Étant donné que r_1 et r_2 sont arbitraires, il s'ensuit que :

$$r E_0(r) = \text{constant},$$

L'amplitude est donc inversement proportionnelle à r . L'extinction à la distance r d'un point source est donc proportionnelle à $1/r^2$. C'est la loi bien connue de l'**inverse du carré de la distance**, facilement vérifiable avec une source ponctuelle et un appareil d'exposition photographique.

3.3.3 Photons

La lumière est émise ou absorbée sous forme de paquets de « matière » électromagnétique, appelés *photons*. Ce résultat a

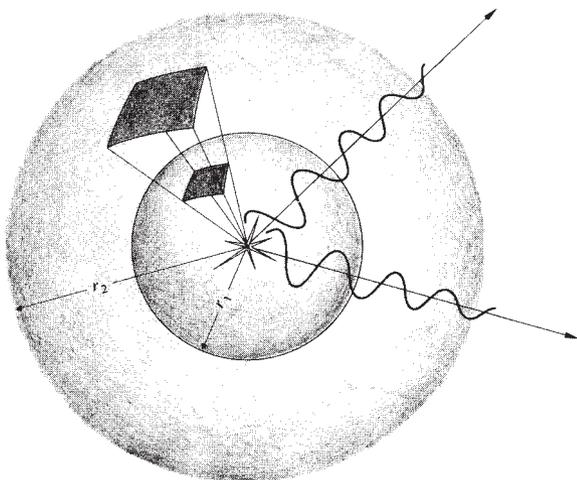


Figure 3.19 Géométrie de la loi en $1/r^2$ du carré.

été établi et confirmé de manière rigoureuse. Cependant, la question de savoir si la lumière est « réellement » un faisceau de photons ou non n'a toujours pas de réponse claire et l'on y reviendra fréquemment*.

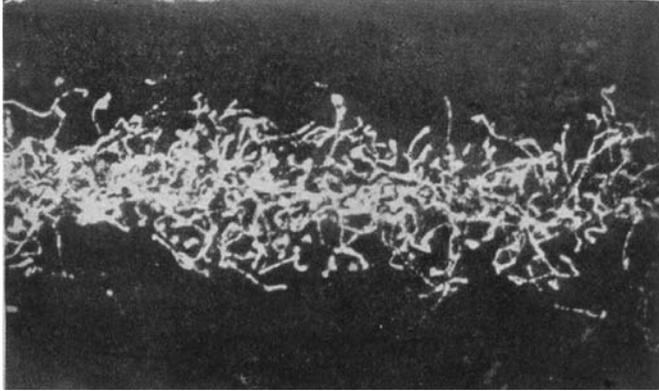
Ordinairement, un faisceau de lumière délivre tellement de minuscules quanta d'énergie que sa nature granulaire inhérente est totalement masquée, et c'est un phénomène continu que l'on observe à l'échelle macroscopique. Ce genre de situation est commun dans la nature. Par exemple, dans le vent, les forces exercées par chacune des molécules d'air se combinent pour former ce qui semble être une pression continue, mais qui ne l'est évidemment pas. On va d'ailleurs revenir tout de suite sur cette analogie entre un gaz et un flot de photons.

Comme le grand physicien français Louis de Broglie (1892-1987) l'a montré, « la lumière est, en résumé, la forme la plus succincte de la matière ». Or, toute matière, lumière incluse, est quantifiée. À l'échelle la plus petite, on trouve les minuscules particules élémentaires, quarks, leptons et photons. Cette élémentarité extrême est l'une des raisons les plus séduisantes pour considérer le photon comme une particule (quoi que puisse être une « particule »).

L'échec de la théorie classique

En 1900, le physicien allemand Max Planck (1858-1947) publia une analyse très novatrice, bien que finalement erronée, sur le *rayonnement du corps noir* (p. 597). L'expression qu'il avait obtenue expliquait magnifiquement les données expérimentales de l'époque, ce qu'aucun autre formalisme n'avait réussi à faire. De manière élémentaire, les hypothèses de Planck considèrent des ondes électromagnétiques (EM) en équilibre dans une cavité isotherme. Tout le rayonnement EM de l'intérieur de la cavité est émis et absorbé par les parois, sans que rien n'entre ni ne sorte. Ces suppositions garantissent donc que la composition spectrale du rayonnement soit identique à celle qu'émettrait un corps noir idéal. L'objectif est alors de prévoir le spectre du rayonnement qui émergerait par une petite ouverture de la cavité. Totalement obnubilé par ce

*Chaque fois que, pour des questions de concision, on utilisera une expression comme « un faisceau de photons » ; le lecteur ne doit pas oublier que (en particulier en physique des hautes énergies), la validité du point de vue corpusculaire de la lumière n'est pas définitivement prouvée (comme la plupart des connaissances de la physique), bien que cette approche soit couramment acceptée. Voir, par exemple, l'article de R. Kidd, J. Ardin, and A. Anton, « Evolution of the modern photon », *Am. J. Phys.* **57** (1), 27 (1989).



Un faisceau de rayons X pénètre dans une chambre à brouillard par la gauche. Les marques sont faites par des électrons émis par effet photoélectrique (longues traces avec des angles importants par rapport au faisceau) ou par effet Compton (traces courtes, plus dans la direction du faisceau). Bien que classiquement, un faisceau de rayons X ait une énergie uniformément distribuée le long de fronts d'onde transversaux, la diffusion semble discrète et aléatoire. (D'après le Smithsonian Report, 1915.)

problème, Planck se tourna, dans une dernière tentative, vers l'analyse statistique classique de Maxwell et Boltzmann. Il est à noter que, loin de ces préoccupations électromagnétiques, celle-ci avait été développée comme fondement de la théorie cinétique des gaz. Cette théorie consiste en une approche complètement déterministe qui assure que l'on peut suivre, du moins en principe, chaque atome évoluant dans un système. Par conséquent, chaque atome est identifiable, indépendant et peut être compté. Pour des raisons purement calculatoires, Planck émit alors l'hypothèse que chacun des oscillateurs formant les parois de la cavité ne pouvait émettre ou absorber que des quantités d'énergie finies et proportionnelles à la fréquence d'oscillation, ν . Ces « paquets » d'énergie étaient égaux à des multiples entiers de $h\nu$, avec $h = 6,626 \times 10^{-34}$ J.s (**constante de Planck**). Étant plutôt traditionnel, Planck resta fidèle, pour le reste, à la théorie ondulatoire classique de la lumière, affirmant que seuls les oscillateurs étaient quantifiés.

Prophétiquement, le physicien britannique J. J. Thomson, qui avait découvert l'électron, étendit cette idée, en 1903, en suggérant que les ondes électromagnétiques pouvaient être, en fait, radicalement différentes des autres ondes. Peut-être des concentrations locales de rayonnement existaient-elles réellement ? Thomson avait, en effet, observé que, lorsqu'un faisceau EM de haute fréquence (rayons X) était concentré sur un gaz, seuls quelques-uns des atomes étaient ionisés, ici et là,

comme si l'énergie n'était pas distribuée de façon continue sur le front d'onde (voir photo p. 56).

Il ne fallut alors plus qu'attendre deux années et les brillants travaux théoriques d'Einstein sur l'effet photoélectrique (1905) pour que prenne naissance le concept moderne du photon. Lorsqu'un métal est exposé à un rayonnement EM, il émet des électrons. Les détails de ce phénomène avaient été étudiés expérimentalement pendant des décennies, mais ils continuaient à défier toute analyse par la théorie électromagnétique classique. Einstein établit alors que *le champ électromagnétique lui-même est quantifié*. Chaque photon possède une énergie donnée par le produit de la constante de Planck et de la fréquence du rayonnement, c'est-à-dire :

$$\mathcal{E} = h\nu \quad (3.48)$$

Les photons sont des particules élémentaires stables, sans charge et sans masse, qui n'existent qu'à la vitesse c .

En 1924, le physicien indien Satyendra N. Bose (1894-1974) apporta une nouvelle preuve, rigoureuse, de l'équation du corps noir de Planck en utilisant des méthodes statistiques appliquées aux quanta de lumière. Il imagina la cavité comme étant remplie d'un « gaz » de photons, *totalelement indifférentiables les uns des autres*. Ce point de vue était une caractéristique cruciale de ce traitement par la mécanique quantique. Il signifiait, en particulier, que les microparticules étaient complètement interchangeables, ce qui eut un profond effet sur la formulation statistique. D'un point de vue mathématique, chaque particule de ce « gaz » quantique est liée aux autres, si bien qu'aucune ne peut être considérée statistiquement indépendamment du système entier. Ce comportement est très différent de celui de microparticules classiques d'un gaz ordinaire qui agissent de manière indépendante. La densité de probabilité de mécanique quantique qui décrit le comportement statistique du rayonnement thermique est désormais connue sous le nom de *distribution de Bose-Einstein*. Le photon est ainsi devenu un outil indispensable de la physique théorique.

À la différence des objets ordinaires, les photons ne peuvent pas être vus directement ; ce que l'on sait d'eux provient uniquement de l'observation des effets de leur création ou de leur annihilation. Il est impossible de voir la lumière simplement passer devant soi. On observe un photon en détectant son effet sur l'environnement, et cet effet n'est observable que lorsque le photon apparaît ou qu'il disparaît ! La vie des photons commence et finit sur des particules chargées. Le plus

souvent, ils sont émis et absorbés par des électrons, en général, par ceux des nuages électroniques des atomes. De nombreuses expériences ont confirmé directement la nature quantique du processus d'émission. L'une d'entre elles consiste, par exemple, à placer, à égale distance d'une source de lumière très faible, des photodétecteurs identiques, capables de mesurer des infimes quantités de lumière. Si l'émission, *aussi faible qu'elle soit*, se fait sous la forme d'une onde continue (dans la terminologie classique), tous les détecteurs devraient enregistrer en même temps une impulsion émise par la source. Mais ce n'est pas ce qui se produit. Au lieu de cela, chaque détecteur enregistre des signaux indépendants, de manière discrète et à des instants différents. Ces observations confirment donc bien l'idée qu'un atome émet dans des directions aléatoires des quanta de lumière localisés.

De plus, il a été confirmé qu'à l'émission d'un photon, un atome subit un « recul » dans la direction opposée, de la même façon qu'un pistolet recule quand il tire une balle. Sur la figure 3.20, des atomes ayant été « pompés » avec de l'énergie en excès (c'est-à-dire *excités*, p. 68), se propage sous la forme d'un faisceau étroit. Assez rapidement, ils émettent spontanément des photons dans toutes les directions et l'effet de recul, qui a souvent une composante latérale, les fait s'éloigner de l'axe initial. L'élargissement du faisceau qui en résulte est un effet quantique qui n'a rien à voir avec la situation classique de l'émission d'une onde symétrique.

Tir de barrage de photons

Lorsque l'on analyse des phénomènes impliquant l'activité d'un très grand nombre de participants, l'usage des techniques statistiques est souvent la seule façon pratique de procéder. En plus des statistiques classiques de Maxwell-Boltzmann (pour des

particules différentiables), il existe deux sortes de statistiques quantiques (pour des particules non différentiables) : celles de Bose-Einstein et de Fermi-Dirac. Celle de Bose-Einstein concerne des particules qui ne sont pas sujettes au principe d'exclusion de Pauli (i.e. celles dont le spin est zéro ou un nombre entier). Celle de Fermi-Dirac concerne les particules obéissant au principe d'exclusion de Pauli (celles dont le spin est un multiple impair de $1/2$). Les photons sont appelés des **bosons** ; ce sont des particules de spin 1, et la manière dont ils se regroupent obéit donc à la statistique de Bose-Einstein. Similairement, les électrons sont des **fermions** ; ce sont des particules de spin $1/2$ qui obéissent donc à la statistique de Fermi-Dirac.

Les microparticules ont des caractéristiques physiques intrinsèques, comme la masse, la charge et le spin. À l'aide de ces paramètres, le type de particule observé peut être complètement spécifié. Alternativement, certaines propriétés peuvent être altérées comme l'énergie, la quantité de mouvement et l'orientation du spin. Celles-ci décrivent donc la condition momentanée de la particule. Lorsque ces quantités sont données, elles fixent l'**état** particulier dans lequel se trouve la particule à un moment donné.

Les fermions sont des particules solitaires ; *un seul fermion peut occuper un état donné*. En comparaison, les bosons sont grégaires ; *n'importe quel nombre de bosons peut occuper le même état et ils ont, de plus, tendance à se regrouper*. **Lorsqu'un grand nombre de photons occupent le même état, la granularité inhérente du faisceau de lumière disparaît et un champ électromagnétique apparaît comme le milieu continu de l'onde électromagnétique**. Ainsi, on peut associer une onde plane monochromatique (monoénergétique) à un débit élevé de photons qui se déplacent tous dans le même état (même énergie, même fréquence, même quantité de mouvement, même direction). **Des ondes planes monochromatiques différentes représentent des états de photons différents**.

À la différence des photons, et parce qu'ils sont des fermions, les électrons ne peuvent donc pas se regrouper en grand nombre dans le même état, et un faisceau monoénergétique d'électrons ne se comporte pas, au niveau macroscopique, comme une onde classique continue. De ce point de vue, le rayonnement EM est donc très spécifique.

Pour un faisceau de lumière monochromatique uniforme de fréquence ν , la quantité $I/h\nu$ représente le nombre moyen de photons incidents par unité de surface (normale au faisceau), et par unité de temps. C'est la densité surfacique du flux de photons ou *éclairement photonique*. De façon plus réaliste, si le faisceau est quasi monochromatique (p. 19) avec une fréquence moyenne ν_0 , son **éclairement photonique** est $I/h\nu_0$.

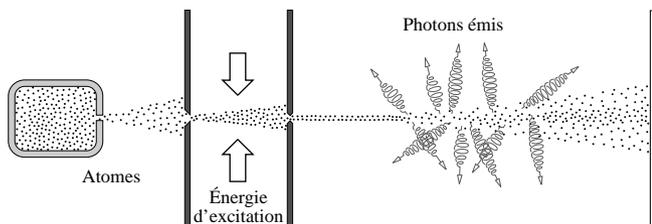


Figure 3.20 Lorsque des atomes excités formant un faisceau étroit émettent des photons, ils reculent vers l'extérieur, ce qui a pour effet d'élargir le faisceau. Inversement, si le faisceau est formé d'atomes non excités (i.e. dans leurs états fondamentaux), il reste étroit jusqu'à l'écran.

Si ce faisceau possède une section de surface A , son **flux photonique** est donc :

$$\Phi = AI/h\nu_0 = P/h\nu_0 \quad (3.49)$$

où P est la **puissance optique** ou **flux énergétique** du faisceau, en watts. Le flux photonique est le nombre moyen de photons arrivant par unité de temps (tableau 3.1). Par exemple, un laser He-Ne de 1 mW, à une longueur d'onde moyenne de 632,8 nm, délivre un flux photonique $P/h\nu_0 = (1,0 \times 10^{-3} \text{ W}) / [(6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})(2,998 \times 10^8 \text{ m/s}) / (632,8 \times 10^{-9} \text{ m})] = 3,2 \times 10^{15}$ photons par seconde.

Considérons un faisceau de lumière uniforme incident sur un écran avec un éclairage constant (il possède donc un flux moyen de photons constant). À l'échelle microscopique, l'énergie du faisceau est déposée sur l'écran de façon aléatoire, par à-coups. Individuellement, les photons incidents arrivent effectivement sur l'écran à des localisations et à des instants totalement imprévisibles. Tout se passe comme si le faisceau était composé d'un débit aléatoire de photons. Ne retenons pourtant pas pour l'instant cette conclusion qui sort du domaine de l'observation. Ce que l'on peut dire c'est que la lumière délivre son énergie par impacts saccadés et de manière aléatoire, dans l'espace et le temps, le long du faisceau.

Supposons à présent que l'on projette un motif lumineux sur l'écran, tel que des franges d'interférence ou une image, comme le visage d'une personne. Le barrage de photons formant l'image est un *tumulte statistique*. On ne peut pas prédire quand un photon arrivera à une position donnée. Par contre, on peut déterminer la probabilité pour qu'un ou plusieurs photons arrivent en un point particulier pendant un intervalle de temps substantiel. **En tout point de l'écran, la valeur mesurée (ou calculée de façon**

classique) de l'éclairage est proportionnelle à la probabilité de détecter un photon à cette position (p. 143).

La figure 1.8, qui montre, image par image, l'arrivée de photons individuels, a été réalisée à l'aide d'un type spécifique de tube photomultiplicateur. Afin de souligner encore plus la nature photonique du rayonnement, on peut utiliser une approche photographique différente et plus simple. Une émulsion photographique contient une distribution de cristaux d'argent microscopiques ($\approx 10^{-6}$ m), comprenant chacun environ 10^{10} atomes d'argent. Un simple photon peut entrer en interaction avec un tel cristal, briser une liaison halogène-argent et libérer un atome d'argent. Ces atomes d'argent servent ensuite de centre de développement sur le cristal exposé. Le film est développé en utilisant un agent chimique réduisant l'argent. Ce produit dissout les différents cristaux exposés, déposant à leurs places des atomes d'argent sous forme métallique.

La figure 3.21 illustre un exemple de ce procédé, par le biais d'une série de photographies prises en augmentant graduellement l'éclairage. Exposée avec une lumière extrêmement faible, composée de seulement quelques milliers de photons, la première photographie ne comprend que quelques amas d'argent, commençant à suggérer une image. Seuls quelques cristaux ont subi le bombardement de photons. Lorsque le nombre de photons mis en jeu augmente (à peu près d'un facteur 10 entre deux images successives), l'image devient de plus en plus fine et reconnaissable. Lorsque des dizaines de milliers de photons participent à la formation de l'image, la nature statistique du phénomène se perd et l'image prend une apparence continue familière.

Comptage de photons

Que peut-on dire de la nature statistique du tir de barrage de photons délivrés par un faisceau de lumière? Pour répondre à cette question, les chercheurs ont conduit, au cours des trente-cinq dernières années, des expériences, où ils ont, littéralement, compté chaque photon. Leurs conclusions laissent finalement penser que le débit instantané des photons dépend du type de source*. Sans plus entrer dans les détails de cette théorie, il est cependant important de considérer rapidement les résultats obtenus pour les deux cas extrêmes que constituent ce que l'on appelle la *lumière cohérente* et la *lumière chaotique*.

*Voir P. Koczyk, P. Wiewior, and C. Radzewicz, « Photon counting statistics – Undergraduate experiment », *Am. J. Phys.* **64** (3), 240 (1996) and A. C. Funk and M. Beck, « Sub-Poissonian photocurrent statistics: Theory and undergraduate experiment » *Am. J. Phys.* **65** (6), 492 (1997).

Tableau 3.1 Éclairage photonique moyen pour des sources habituelles

Source de lumière	Éclairage photonique moyen Φ/A en (photons/s·m ²)
Faisceau laser (10 mW, He-Ne, focalisé sur un diamètre de 20 μm)	10^{26}
Faisceau laser (1 mW, He-Ne)	10^{21}
Lumière solaire plein jour	10^{18}
Éclairage d'intérieur	10^{16}
Crépuscule	10^{14}
Nuit avec pleine lune	10^{12}
Nuit étoilée	10^{10}

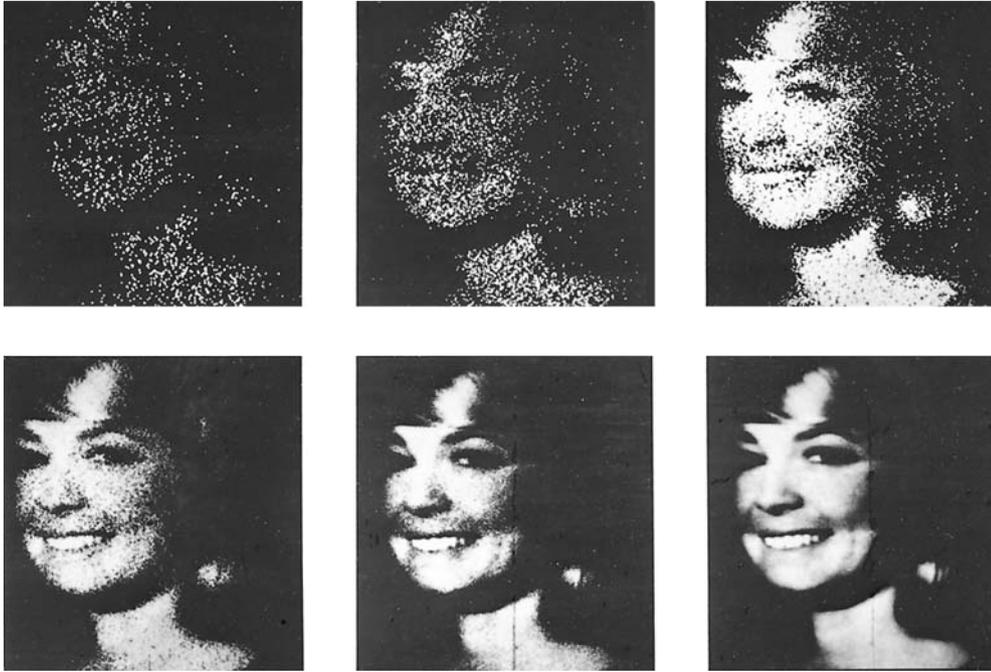


Figure 3.21 Ces photographies (qui ont été améliorées électroniquement) constituent une illustration de la granularité de la lumière et de son interaction avec la matière. Lorsque l'exposition est extrêmement faible, la figure obtenue (chaque point correspondant à un photon) semble totalement aléatoire. À mesure que le niveau augmente, le caractère quantique du phénomène devient de moins en moins évident. (Voir *Advances in Biological and Medical Physics V*, 1957, 211–242.) (Photos Radio Corporation of America)

Considérons un faisceau laser continu idéal produisant un *éclairage constant*. Rappelons que l'éclairage est une quantité moyenne par rapport au temps [équation (3.46)]. Le faisceau a une puissance optique P constante (également une quantité moyenne par rapport au temps) correspondant, via l'équation (3.49) à un flux de photons moyen Φ . La figure 3.22 représente l'arrivée aléatoire des photons pour une échelle de temps courte comparée à l'intervalle sur lequel l'éclairage est moyenné. Ainsi, il est possible de mesurer la quantité macroscopique P constante, bien qu'il y ait un transfert d'énergie discontinu implicite.

À présent, on place sur ce faisceau un obturateur qui ne reste ouvert qu'un court instant T (de l'ordre de $10 \mu\text{s}$ à 10ms). On compte alors le nombre de photons qui arrivent sur le photodétecteur pendant cet intervalle. Après une courte pause, on répète cette procédure, encore et encore, des dizaines de milliers de fois. Les résultats sont présentés sous la forme d'un histogramme (figure 3.23) donnant le nombre d'essais où un nombre N de photons a été compté, en fonction de N . On constate que peu d'essais enregistrent, soit un nombre très faible, soit un nombre très important de photons. En moyenne, le nombre de photons par essai est $N_{\text{av}} = \Phi T = PT/h\nu_0$. La forme du tracé suit de très près la *distribution de Poisson*, bien connue. Cette distribution correspond aux probabilités

pour que le détecteur enregistre zéro photon, un, deux photons et ainsi de suite, durant un temps d'essai T .

Bien connue en statistique, la distribution de Poisson est la courbe symétrique obtenue en comptant, par exemple, le nombre de particules émises par un matériau radioactif, ou le nombre de gouttes d'eau tombant aléatoirement sur une surface

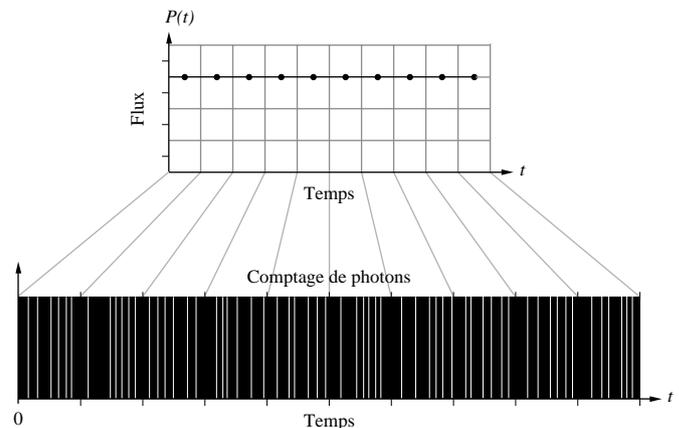


Figure 3.22 Source émettant un flux optique constant et le comptage des photons correspondant émis de façon aléatoire. L'arrivée de chaque photon est un événement indépendant.

donnée sous un jet de douche régulier. C'est aussi la courbe de la probabilité d'obtenir « face » N fois en lançant une pièce plus d'une vingtaine de fois, à pile ou face. Ainsi, avec $N_{\max} = 20$, la plus haute probabilité arrive pour la valeur moyenne N_{av} , c'est-à-dire $\frac{1}{2}N_{\max}$ ou 10 et la plus faible à $N = 0$ et $N = 20$. La valeur la plus probable sera donc 10 faces pour 20 lancers et les chances de ne jamais ou de toujours obtenir « face » est extrêmement faible. Pour en revenir à l'optique, il semblerait que de quelque manière qu'un laser produise de la lumière, il génère un faisceau de photons dont les arrivées individuelles sont aléatoires et statistiquement indépendantes. Pour des raisons que l'on verra plus tard, un faisceau mono-énergétique idéal, c'est-à-dire une onde plane monochromatique, est l'exemple même de ce qu'on appelle une **lumière cohérente**.

Sans surprise, **la distribution statistique du nombre de photons arrivant sur le détecteur dépend de la nature de la source**. Elle est fondamentalement différente pour une *source cohérente* idéale et pour une source (toute aussi idéale) complètement incohérente ou *chaotique*. Un laser stabilisé s'approche d'une source cohérente, tandis qu'une source thermique ordinaire, comme une ampoule, une étoile ou une lampe à décharge, s'approche d'une source chaotique. La lumière ordinaire présente des fluctuations inhérentes en éclairage et, donc, en puissance optique (p. 52). Ces fluctuations sont corrélées, de même que le nombre de photons associé, même si celui-ci est aléatoire dans le temps (figure 3.24). En fait, plus la puissance optique est grande, plus la densité de photons est élevée. Puisque l'arrivée des photons sur le détecteur n'est pas une succession d'évènements indépendants, la statistique de Bose-Einstein s'y applique (figure 3.25). Dans cette statistique, le nombre le plus probable par intervalle est zéro, alors qu'idéalement, pour la lumière laser, le nombre le plus probable de photons comptabilisés pendant un intervalle test est égal à la moyenne. Par conséquent, un faisceau laser et un faisceau de lumière ordinaire seront toujours différentiables, même s'ils produisent un éclairage identique et s'ils ont le même spectre ; un résultat qui va bien au-delà de la théorie classique.

3.3.4 Pression de radiation et quantité de mouvement

En 1619 déjà, Johannes Kepler proposait que c'était la pression de la lumière du Soleil qui repoussait les queues des comètes de façon à ce qu'elles pointent toujours loin de l'astre. Cet argument devait particulièrement plaire aux futurs partisans de la théorie corpusculaire de la lumière. Après tout, ils

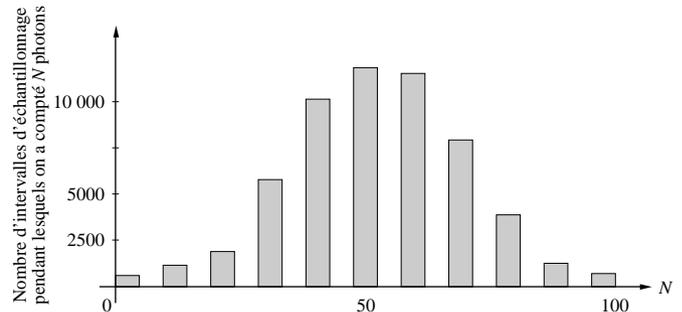


Figure 3.23 Un histogramme caractéristique montrant la probabilité, ou la distribution de comptage de photons, pour un faisceau d'éclairage constant.

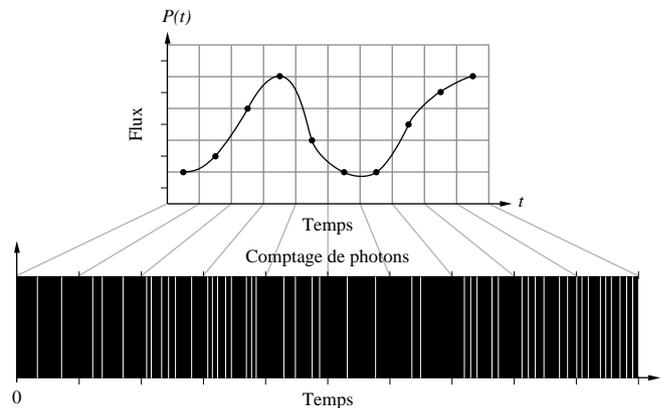


Figure 3.24 Source émettant un flux optique variable dans le temps et le diagramme aléatoire de comptage de photons correspondant. À présent, les fluctuations sont corrélées et l'arrivée d'un photon n'est plus un phénomène indépendant.

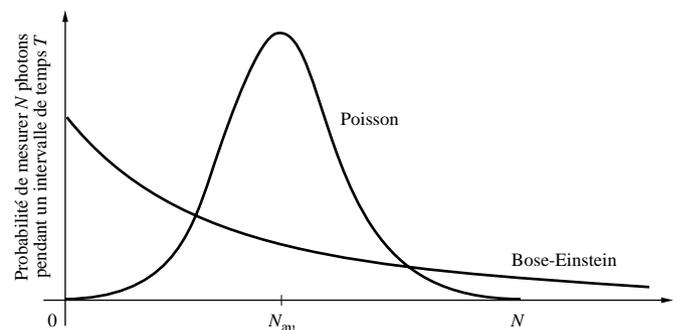


Figure 3.25 Comptages de photons avec distributions de Poisson et de Bose-Einstein.

envisageaient un faisceau lumineux comme un flot de particules, qui devait exercer une force lorsqu'il bombardait la matière. Pendant longtemps, il sembla bien que ce raisonnement allait établir la supériorité de la théorie corpusculaire sur la théorie ondulatoire. Néanmoins, tous les efforts expérimentaux échouèrent à détecter la force exercée par la radiation, et l'intérêt se perdit peu à peu.

Ironiquement, ce fut Maxwell qui, en 1873, ressuscita le sujet en établissant théoriquement que les ondes exercent vraiment une pression. Citons-le « Dans un milieu où se propagent des ondes, il existe, dans la direction normale aux ondes, une pression qui est numériquement égale à l'énergie par unité de volume ».

Lorsque une onde électromagnétique arrive sur la surface d'un matériau quelconque, elle entre en interaction avec les charges qui constituent la matière. Que l'onde soit partiellement absorbée ou réfléchie, elle exerce une force sur ces charges et donc sur la surface elle-même. Dans le cas d'un bon conducteur, par exemple, le champ électrique de l'onde engendre des courants et son champ magnétique engendre des forces sur ces courants.

Il est possible de calculer la force résultante à partir de la théorie électromagnétique. En fait, la seconde loi de Newton (qui stipule que la force est égale à la variation de la quantité de mouvement par rapport au temps) suggère qu'une *onde transporte, par elle-même, une quantité de mouvement*. En effet, chaque fois qu'il y a transport d'énergie, il est raisonnable de s'attendre à ce qu'il y ait une quantité de mouvement associée ; les deux sont les aspects du mouvement liés à l'espace et au temps.

Comme le démontra Maxwell, la **pression de radiation**, \mathcal{P} , est égale à la densité d'énergie de l'onde électromagnétique par unité de volume. D'après les équations (3.31) et (3.32), on sait que, dans le vide,

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad \text{et} \quad u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Comme $\mathcal{P} = u = u_E + u_B$,

$$\mathcal{P} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

En utilisant l'équation (3.37), on peut également exprimer la pression de radiation en fonction de la longueur instantanée du vecteur de Poynting :

$$\mathcal{P}(t) = \frac{S(t)}{c} \quad (3.50)$$

Notons que cette équation est homogène à une puissance par unité de surface, divisée par une vitesse, soit, à une force multipliée par une vitesse, divisée par une surface et une vitesse. Cette expression équivaut donc à une force multipliée par une surface, donc une pression. En fait, **c'est la pression instantanée qu'exerce un faisceau sur une surface parfaitement absorbante et normale au faisceau**.

Comme les champs \vec{E} et \vec{B} varient rapidement, il en est de même pour $S(t)$. Il est donc plus pratique de considérer la pression de radiation moyenne :

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle_T = \frac{\langle S(t) \rangle_T}{c} = \frac{I}{c} \quad (3.51)$$

exprimée en newtons par mètre carré. Cette même pression s'exerce d'ailleurs, en réaction, sur la source.

Examinons à nouveau la figure 3.16. Si p est la quantité de mouvement, la force exercée par le faisceau sur une surface absorbante est :

$$A\mathcal{P} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad (3.52)$$

En posant p_V , la *quantité de mouvement par unité de volume de la radiation*, une quantité $\Delta p = p_V(c \Delta t A)$ est transportée sur A pendant chaque intervalle Δt et :

$$A\mathcal{P} = \frac{p_V(c \Delta t A)}{\Delta t} = A \frac{S}{c}$$

Ainsi, la densité volumique de la quantité de mouvement électromagnétique est :

$$p_V = \frac{S}{c^2} \quad (3.53)$$

Lorsque la surface éclairée est **parfaitement réfléchissante**, le faisceau qui est arrivé avec une vitesse $+c$ repart avec une vitesse $-c$. Cela correspond à une variation de quantité qui est double de celle qui se produit dans le cas d'une surface absorbante, et donc :

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle_T = 2 \frac{\langle S(t) \rangle_T}{c}$$

D'après les équation (3.50) et (3.52), remarquons que, si une quantité d'énergie \mathcal{E} est transportée par mètre carré et par seconde, il y a alors une quantité de mouvement correspondante \mathcal{E}/c , également transportée par mètre carré et par seconde.

Au niveau du photon, chaque quantum a une énergie $\mathcal{E} = h\nu$. Il en résulte qu'un photon transporte une quantité de mouvement :

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (3.54)$$

En notation vectorielle, cette expression devient :

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

Où \vec{k} est le vecteur de propagation et $\hbar \equiv h/2\pi$. Cette relation « cadre » bien la théorie de la relativité restreinte, qui relie entre-elles la masse m , l'énergie et la quantité de mouvement d'une particule par :

$$\mathcal{E} = [(cp)^2 + (mc^2)^2]^{1/2}$$

Pour un photon, $m = 0$ et $\mathcal{E} = cp$.

Ces considérations quantiques ont été confirmées expérimentalement en utilisant l'effet Compton qui détecte l'énergie et la quantité de mouvement transférées à un électron lors d'une interaction avec un photon X individuel (voir photo p. 57).

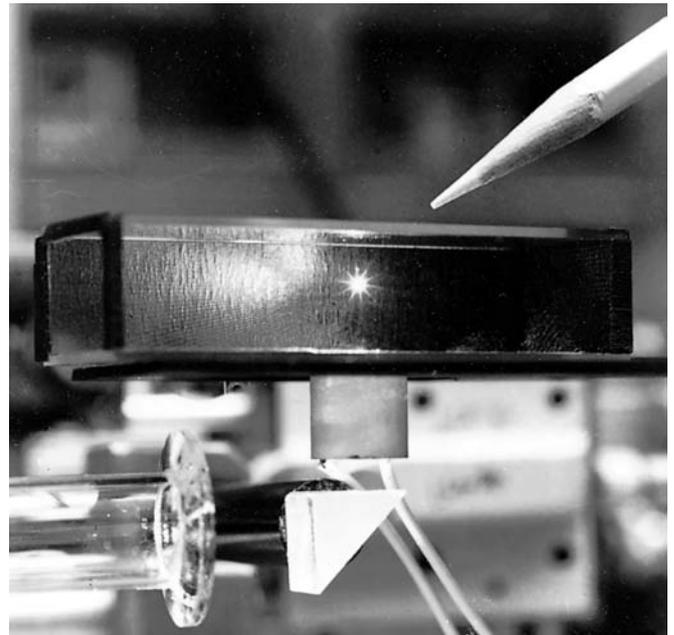
L'éclairement énergétique du Soleil en incidence normale sur une surface en dehors de l'atmosphère de la Terre est d'environ $1\,400\text{ W/m}^2$. Si la surface est parfaitement absorbante, la pression résultante est de $4,7 \times 10^{-6}\text{ N/m}^2$, à comparer avec la pression atmosphérique qui est d'environ 10^5 N/m^2 . La pression de radiation exercée par le Soleil est donc faible mais, malgré tout, responsable d'une force d'à peu près 10 tonnes sur la planète entière. Même à la surface du Soleil, la pression de radiation est plutôt faible (problème 3.31). Comme on peut s'y attendre, elle devient plus importante à l'intérieur d'étoiles plus massives, où elle joue même un rôle significatif en soutenant l'étoile contre la gravité. Même si la pression de radiation du Soleil est modeste, elle produit, cependant, des effets appréciables à long terme. Si l'on avait négligé la pression de radiation solaire exercée sur la sonde Viking pendant son voyage, elle aurait manqué Mars d'à peu près 15 000 km. En fait, les calculs montrent qu'il serait même possible d'utiliser la pression de la lumière du Soleil pour propulser un véhicule dans l'espace entre les planètes du système solaire*. Des vaisseaux comportant d'immenses voiles réfléchissantes vogueront peut-être un jour, poussés par la pression solaire, sur le vaste océan que constitue l'espace.

La pression exercée par la lumière fut mesurée dès 1901 par l'expérimentateur russe Pyotr Nikolaievich Lebedev

(1866-1912) et, de manière indépendante, par les physiciens américains Ernest Fox Nichols (1869-1924) et Gordon Ferrie Hull (1870-1956). Leurs performances sont dignes de respect si l'on considère les sources de lumière disponibles à l'époque. De nos jours, grâce aux lasers, cette tâche est devenue beaucoup plus facile. La lumière laser peut être effectivement focalisée sur une surface dont le rayon est de l'ordre de la longueur d'onde. La pression de radiation qui en résulte est appréciable même avec un laser de quelques watts. Il est d'ailleurs devenu habituel d'utiliser ce phénomène pour toutes sortes d'applications, comme la séparation des isotopes, l'accélération de particules, le refroidissement et la capture d'atomes (p. 70) et même la lévitation optique de petits objets.

La lumière peut également transporter de la quantité de mouvement angulaire, mais ces questions seront abordées ultérieurement (p. 344).

.....
*En termes de force propulsive, le flux de particules chargées appelé le « vent solaire » est 1 000 à 100 000 fois plus efficace que la lumière du Soleil.



Cette petite tache étoilée est une minuscule (environ deux millièmes de centimètre de diamètre) sphère de verre transparente en lévitation sur un faisceau laser de 250 mW. (Photo Bell Laboratories.)

3.4 Rayonnement

Un rayonnement électromagnétique peut se produire à des fréquences ou à des longueurs d'ondes très différentes, bien que dans le vide, tous se déplacent à la même vitesse. Malgré le fait que l'on distingue les différentes régions du spectre, avec des noms tels qu'ondes radios, micro-ondes, infrarouge etc., il n'existe qu'une seule entité, une seule essence d'onde électromagnétique. Les équations de Maxwell sont d'ailleurs indépendantes de la longueur d'onde et suggèrent donc que ces diverses appellations d'ondes ne font pas intervenir des différences fondamentales. Par conséquent, il est raisonnable de chercher un mécanisme d'émission commun à toutes les radiations électromagnétiques. Ce que l'on découvre alors, est que les divers types de rayonnements semblent avoir une origine commune et qu'ils sont tous associés à des *charges en mouvement non uniforme*. Bien entendu, on ne considère ici que des ondes électromagnétiques et les charges sont précisément à l'origine des champs EM. Il n'y a donc finalement pas de surprise à cela.

Une charge stationnaire crée un champ \vec{E} constant, mais pas de champ \vec{B} . Elle ne produit donc pas de rayonnement (d'ailleurs, d'où viendrait l'énergie, si elle en produisait ?). Une charge en mouvement uniforme crée un champ \vec{E} et un champ \vec{B} , mais n'émet pas non plus de rayonnement. En effet, si l'on se déplaçait avec la charge, le courant disparaîtrait, de même que \vec{B} . Du fait que le mouvement uniforme est relatif, on se retrouverait donc dans le cas précédent. Ce raisonnement semble tout à fait raisonnable puisqu'il n'y aurait aucune logique à ce que la charge cesse d'émettre simplement parce que l'on a commencé à se déplacer avec elle. Ce sont finalement les charges en mouvement non uniforme qui émettent un rayonnement. Du point de vue photonique, cela est renforcé par la conviction que les interactions fondamentales entre matière et rayonnement se font entre les photons et les charges.

On sait, de manière générale, que les charges libres (celles qui ne sont pas liées à un atome) émettent un rayonnement électromagnétique lorsqu'elles sont accélérées. Ce résultat est valable que les charges soient accélérées dans un accélérateur linéaire, qu'elles aient une trajectoire circulaire dans un cyclotron ou, tout simplement, qu'elles oscillent sur une antenne de radio. **Si une charge se déplace non uniformément, elle émet un rayonnement.** Une particule libre chargée peut spontanément absorber ou émettre un photon. Un nombre croissant de composants, du laser à électron libre (1977) au générateur de rayonnement d'un synchrotron, utilise ce mécanisme au niveau pratique.

3.4.1 Charges accélérées linéairement

Considérons une charge se déplaçant à une vitesse constante. Celle-ci exerce donc un champ électrique radial et un champ magnétique circulaire. Or, bien qu'en tout point de l'espace le champ \vec{E} varie d'un instant à l'autre, sa valeur peut être déterminée, à tout moment, en considérant que les lignes de champ se déplacent également, fixées par rapport à la charge. Ainsi, le champ n'est jamais indépendant de la charge et il n'y a pas de rayonnement.

On peut représenter le champ électrique d'une charge au repos comme sur la figure 3.26, par une distribution radiale uniforme de lignes de champ rectilignes. Pour une charge de vitesse \vec{v} constante, les lignes de champ sont toujours radiales et rectilignes, mais elles ne sont plus distribuées uniformément. Cette non-uniformité devient évidente à grande vitesse, et elle est en général négligeable lorsque $v \ll c$.

Par contre, la figure 3.27 présente les lignes de champ associées à un électron se dirigeant vers la droite avec une accélération constante. Les points O_1 , O_2 , O_3 , et O_4 représentent la position de l'électron après des intervalles de temps égaux. Les lignes de champ sont maintenant incurvées de manière significative. De même, la figure 3.28 représente le champ d'un électron à un instant t_2 arbitraire. Jusqu'à $t = 0$ la particule a été toujours au repos au point O . La charge a ensuite été uniformément accélérée jusqu'à l'instant t_1 , où elle a atteint une vitesse v , maintenue constante par la suite. On peut donc anticiper que, d'une façon ou d'une autre, les lignes de champ autour de l'électron reflètent le fait qu'il a subi une accélération. On peut aussi prévoir que cette « information » se propage à la vitesse c . Si par exemple, $t_2 = 10^{-8}$ s, aucun point à

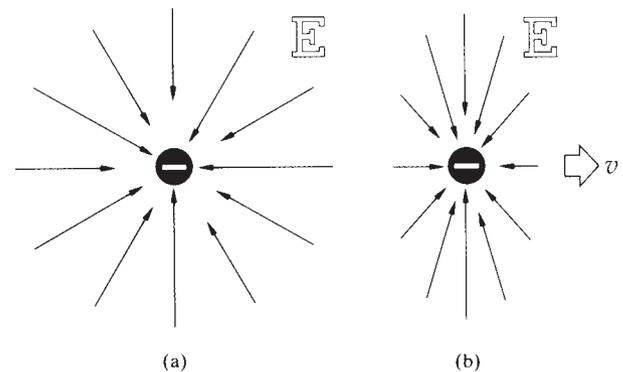


Figure 3.26 (a) Champ électrique d'un électron stationnaire. (b) Champ électrique d'un électron en mouvement.

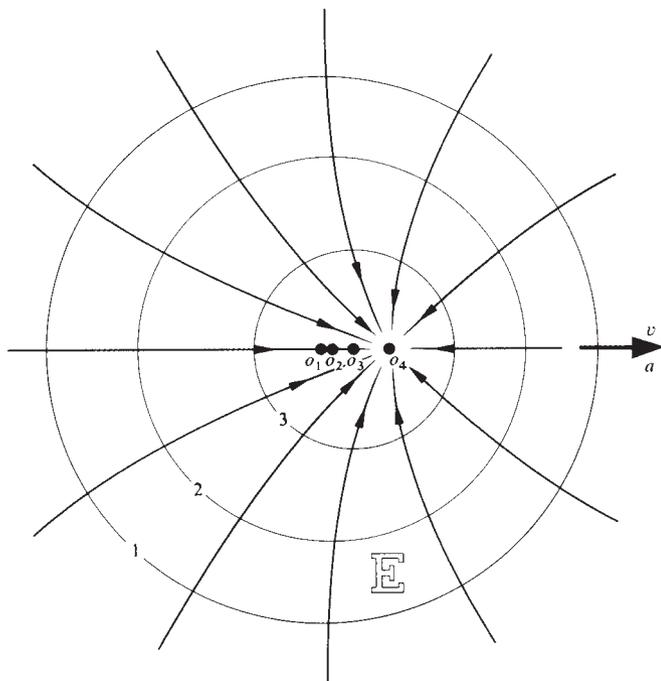


Figure 3.27 Champ électrique d'un électron uniformément accéléré.

plus de 3 m de O ne serait *conscient* du fait que la charge a été déplacée. Toutes les lignes de cette région seraient uniformes, droites et centrées en O , comme si la charge y était encore. À $t = t_2$, l'électron est au point O_2 et se déplace à une vitesse v constante. Au voisinage de O_2 , les lignes du champ doivent donc ressembler à celles de la figure 3.26b. En fait, la loi de Gauss requiert que les lignes situées en dehors de la sphère de rayon ct_2 soient connectées à celles qui sont à l'intérieur de la sphère de rayon $c(t_2 - t_1)$, étant donné qu'il n'y a pas de charges entre elles. Il est donc évident que, pendant l'intervalle où la particule a accéléré, les lignes de champ ont été déformées et un coude est apparu. La forme exacte des lignes dans la région du coude n'est pas de grand intérêt ici. Ce qui est significatif, c'est qu'il existe maintenant une *composante transversale* du champ électrique \vec{E}_T , qui se propage vers l'extérieur comme une impulsion. En tout point de l'espace, le champ électrique transversal sera une fonction du temps et sera accompagné par un champ magnétique.

Il est intéressant de constater que la composante radiale du champ électrique évolue comme $1/r^2$, alors que la composante transversale est en $1/r$. Loin de la charge, seule la composante

\vec{E}_T de l'impulsion sera donc significative. \vec{E}_T est désigné, en physique, sous le nom de *champ de radiation**. Pour une charge positive lente ($v \ll c$), les champs de radiation électrique et magnétique peuvent être considérés comme proportionnels respectivement à $\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{a})$ et à $(\vec{a} \times \vec{r})$, où \vec{a} est l'accélération. Pour une charge négative, on obtient un résultat opposé, comme le montre la figure 3.29. On remarquera que l'éclairement est fonction de θ et que $I(0) = I(180^\circ) = 0$ alors que $I(90^\circ) = I(270^\circ)$ est un maximum. **L'énergie est donc principalement rayonnée dans la direction perpendiculaire à l'accélération qui l'a provoquée.**

L'énergie rayonnée est fournie à la charge par un agent externe. Celui-ci est responsable de la force accélératrice qui, à son tour, produit le travail sur la charge.

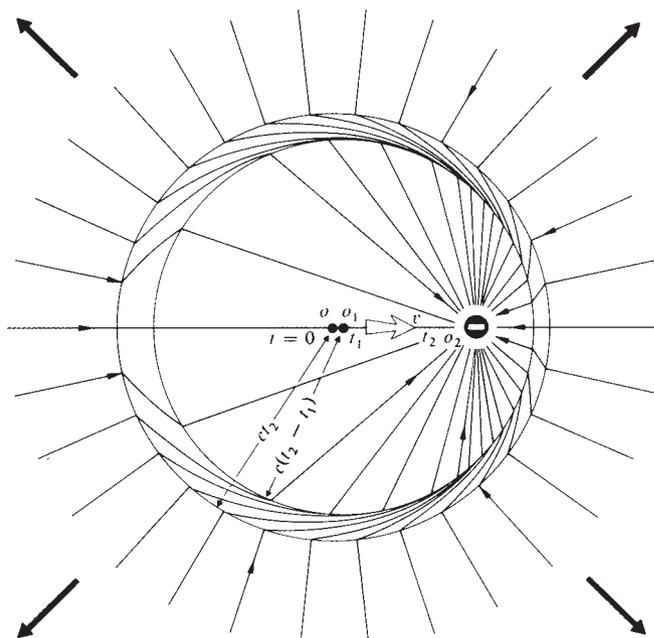


Figure 3.28 Coude dans les lignes du champ \vec{E} .

*On peut trouver les détails de ce calcul utilisant la méthode de J. J. Thomson pour analyser le coude dans J. R. Tessman and J. T. Finell, Jr., « Electric Field of an Accelerating Charge », *Am. J. Phys.* **35**, 523 (1967). Pour une référence plus générale sur le rayonnement, voir, par exemple, Marion and Heald, *Classical Electromagnetic Radiation*, Chapter 7.

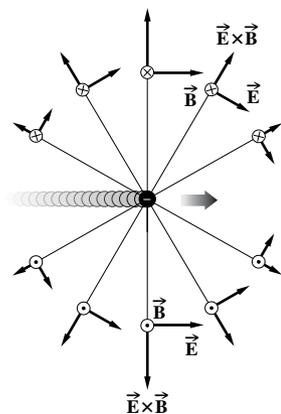
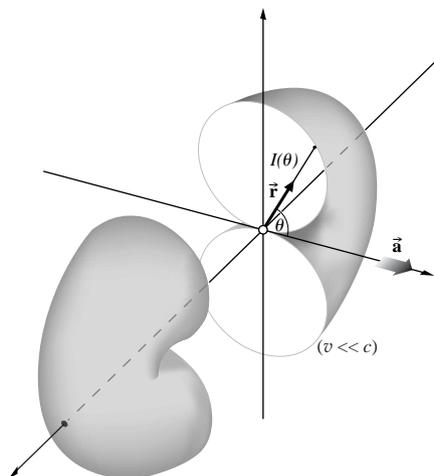


Figure 3.29 Le profil toroidal de rayonnement d'une charge linéairement accélérée (séparé pour la vue en coupe).

3.4.2 Rayonnement synchrotron

Une particule libre chargée, qui se déplace le long d'une trajectoire courbe, subit une accélération et produit donc un rayonnement. Ce phénomène constitue une source de rayonnement efficace, de façon naturelle ou en laboratoire. C'est justement ce mécanisme qu'utilise le synchrotron, générateur de rayonnement pour la recherche, qui a été développé dans les années 1970. Son principe consiste à mettre en mouvement des particules chargées le long d'un large circuit circulaire. Celles-ci sont en général des électrons ou des positrons, que l'on soumet à un champ magnétique permettant de contrôler parfaitement leur vitesse. La fréquence de l'orbite détermine la fréquence fondamentale de

l'émission (qui contient également plusieurs harmoniques). Celle-ci est continûment variable et ainsi adaptable à l'application désirée. Notons que ces charges doivent circuler en paquets, une boucle de courant uniforme ne rayonnant pas.

Une particule chargée, subissant une rotation lente sur une orbite circulaire, a un diagramme de rayonnement en anneau, similaire à celui représenté à la figure 3.29. De même que précédemment, la distribution du rayonnement est symétrique par rapport à \vec{a} , qui est, dans le cas présent, l'accélération centripète orientée vers le centre de l'orbite circulaire de la charge. Cette fois encore, l'énergie est rayonnée majoritairement *dans la direction perpendiculaire à celle de l'accélération qui l'a provoquée*. Au fur et à mesure que l'on augmente la vitesse, un observateur immobile dans le laboratoire pourra « voir » le lobe arrière diminuer, tandis que le lobe avant s'allongera dans la direction du mouvement. Pour des vitesses approchant c , le faisceau de particule (qui a un diamètre en général comparable à celui d'une aiguille) rayonne essentiellement le long d'un cône étroit orienté suivant la tangente à l'orbite, dans la direction instantanée de \vec{v} (figure 3.30). De plus, pour $v \approx c$, le rayonnement sera fortement polarisé dans le plan du mouvement.

Ce « phare », qui fait généralement moins d'un millimètre de diamètre, balaye l'orbite pendant que les particules décrivent des cercles dans la machine. On pourrait comparer avec les phares d'une voiture qui roulerait sur un circuit circulaire. À chaque révolution, le faisceau passe momentanément ($< \frac{1}{2}$ ns) devant l'une des fenêtres de l'appareil. Comme on le verra ultérieurement (p. 328), un signal de courte durée comprendra une large gamme de fréquences. Le résultat est une source extrêmement intense de rayonnement, à impulsions rapides, réglable sur une large gamme de fréquences, de l'infrarouge aux rayons X en passant par la lumière visible. Lorsqu'on utilise des aimants pour extraire les électrons en

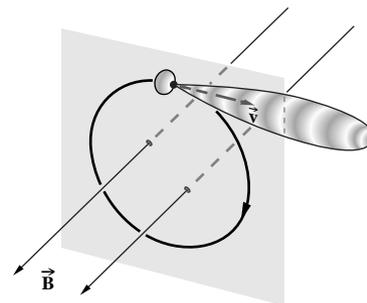


Figure 3.30 Profil du rayonnement pour une charge en orbite circulaire.

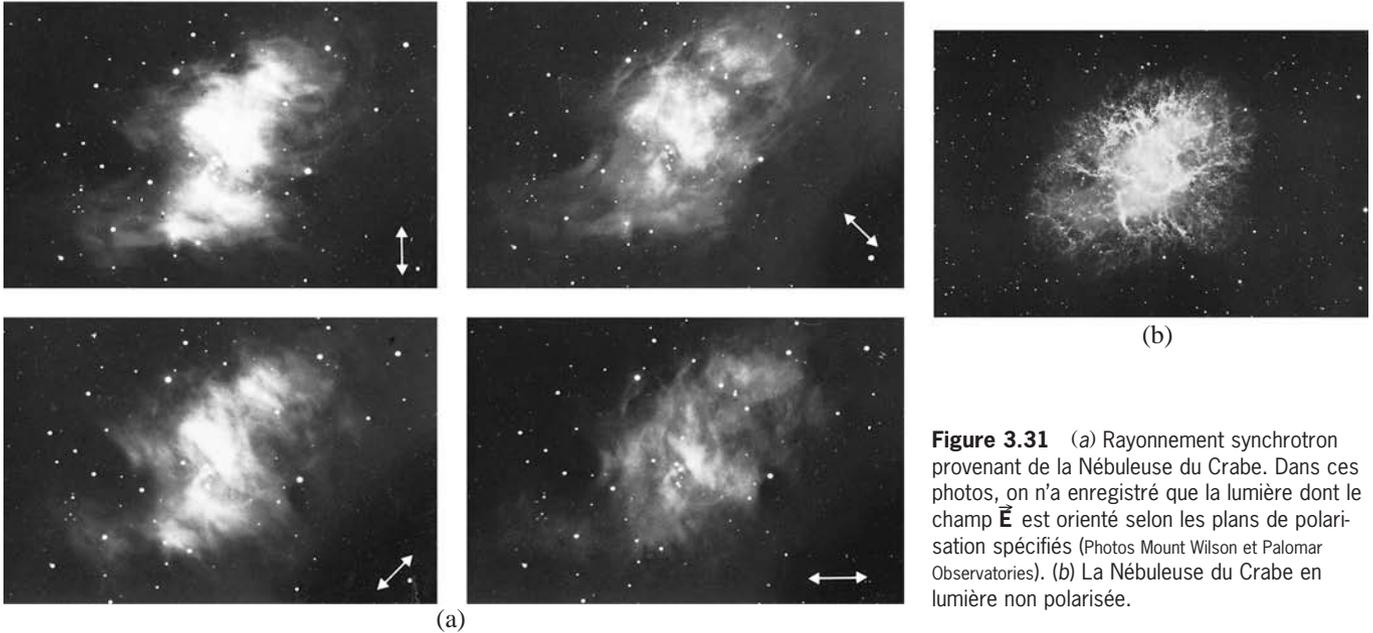


Figure 3.31 (a) Rayonnement synchrotron provenant de la Nébuleuse du Crabe. Dans ces photos, on n'a enregistré que la lumière dont le champ \vec{E} est orienté selon les plans de polarisation spécifiés (Photos Mount Wilson et Palomar Observatories). (b) La Nébuleuse du Crabe en lumière non polarisée.

dehors de leur orbite, des éclats de rayons X d'une intensité formidable peuvent être créés. Ces faisceaux sont des centaines de milliers de fois plus puissants que des rayons X que l'on emploie, par exemple, en dentisterie (à peu près une fraction de Watt) et peuvent facilement percer un trou de la taille d'un doigt dans une plaque de plomb de 3 mm d'épaisseur !

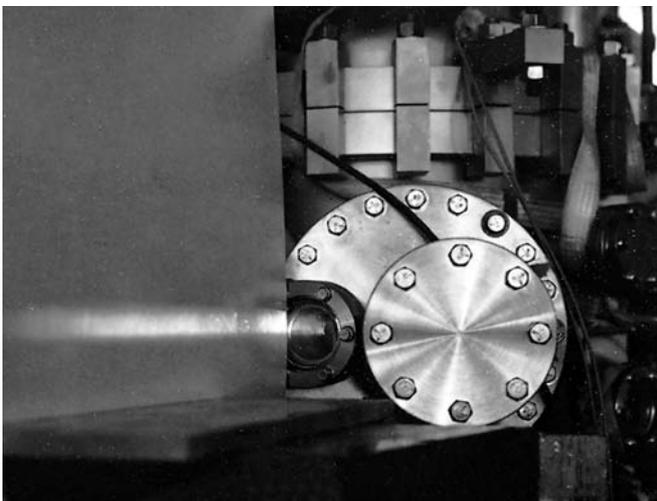
Bien que cette technique ait été utilisée dès 1947 pour produire de la lumière dans un synchrotron à électrons, des décennies ont été nécessaires pour comprendre que ce qui apparaissait comme une déperdition d'énergie pour les physiciens de l'accélérateur pouvait constituer un moyen de recherche très performant (voir photo).

Dans le domaine de l'astronomie, on peut s'attendre à ce qu'il existe certaines régions de l'espace qui subissent des champs magnétiques. Soumises à ces champs, des particules chargées peuvent être mises en mouvement en orbite circulaire ou elliptique. Si leurs vitesses sont assez grandes, elles émettent alors un rayonnement synchrotron. La figure 3.31 représente cinq photographies de la Nébuleuse du Crabe*. Le

*On pense que la Nébuleuse du Crabe est constituée de débris provenant de l'explosion d'une étoile. D'après sa vitesse d'expansion, les astronomes ont calculé que le cataclysme avait dû avoir lieu en 1050 apr. J.-C. Cette date est corroborée par de vieux manuscrits chinois (provenant des chroniques de l'Observatoire de Beijing) qui mentionnent l'apparition d'une étoile extrêmement brillante, dans la même partie du ciel, en 1054.

« Dans la première année de la période Chihha, à la cinquième lune, le jour après Chichou [i.e. le 4 juillet 1054], une étoile très brillante est apparue... Après plus d'une année, elle est progressivement devenue invisible. »

Il n'y a pas de doute que la Nébuleuse du Crabe soit un reste de cette supernova.



Le premier faisceau de « lumière » du National Synchrotron Light Source (1982), émis par son anneau de stockage ultraviolet.

spectre du rayonnement émanant de cette nébuleuse s'étend des fréquences radio à l'ultraviolet extrême. En considérant que la source est constituée de charges piégées, on peut anticiper de forts effets de polarisation. Ceux-ci sont évidents dans les quatre premières photos, prises au travers d'un filtre polarisant. La direction du vecteur champ électrique est indiquée pour chaque image. Puisque, pour le rayonnement du synchrotron, le champ \vec{E} émis est polarisé dans le plan de l'orbite, on peut donc conclure que chaque photographie correspond à une orientation particulière du champ magnétique uniforme, normale à l'orbite et à \vec{E} .

Il est probable que la majorité des ondes radio basses fréquences parvenant à la Terre proviennent du rayonnement synchrotron. En 1960, les astronomes ont utilisé ces émissions à haute longueur d'onde pour identifier une classe d'objets appelés quasars. En 1955, ils ont également découvert des impulsions d'ondes radio polarisées en provenance de Jupiter.

Leur origine est maintenant attribuée à des électrons piégés dans les ceintures de radiation entourant la planète.

3.4.3 Rayonnement du dipôle électrique

Le mécanisme produisant des ondes électromagnétiques le plus simple à visualiser est le dipôle électrique. Celui-ci consiste en deux charges, l'une positive et l'autre négative, oscillant linéairement. Malgré cette apparente simplicité, cet arrangement est, sans aucun doute, le plus important de tous.

La lumière visible et le rayonnement ultraviolet proviennent d'un réarrangement des électrons *périphériques*, c'est-à-dire les plus extérieurs et les plus faiblement liés, des atomes et des molécules. En fait, il découle de l'analyse quantique que c'est le moment du dipôle électrique de l'atome qui est la source principale de ces rayonnements. Le rayonnement de la

matière, bien qu'étant un processus quantique, peut se comprendre grâce au modèle classique du dipôle électrique oscillant. Ce mécanisme est donc indispensable pour comprendre comment les atomes, les molécules et même les noyaux émettent et absorbent les ondes électromagnétiques. Considérons, de fait, la figure 3.32, qui schématise la distribution du champ électrique dans la région d'un dipôle électrique. Dans cette configuration, une charge négative oscille linéairement suivant un mouvement harmonique simple autour d'une charge stationnaire positive égale. Si la fréquence angulaire de l'oscillation est ω , le moment du dipôle dépendant du temps $\mu(t)$ s'écrit, sous forme scalaire :

$$\mu = \mu_0 \cos \omega t \quad (3.55)$$

Notons que $\mu(t)$ pourrait représenter le moment collectif de la distribution de charge oscillante à l'échelle atomique ou même un courant oscillant le long d'une antenne linéaire de télévision.

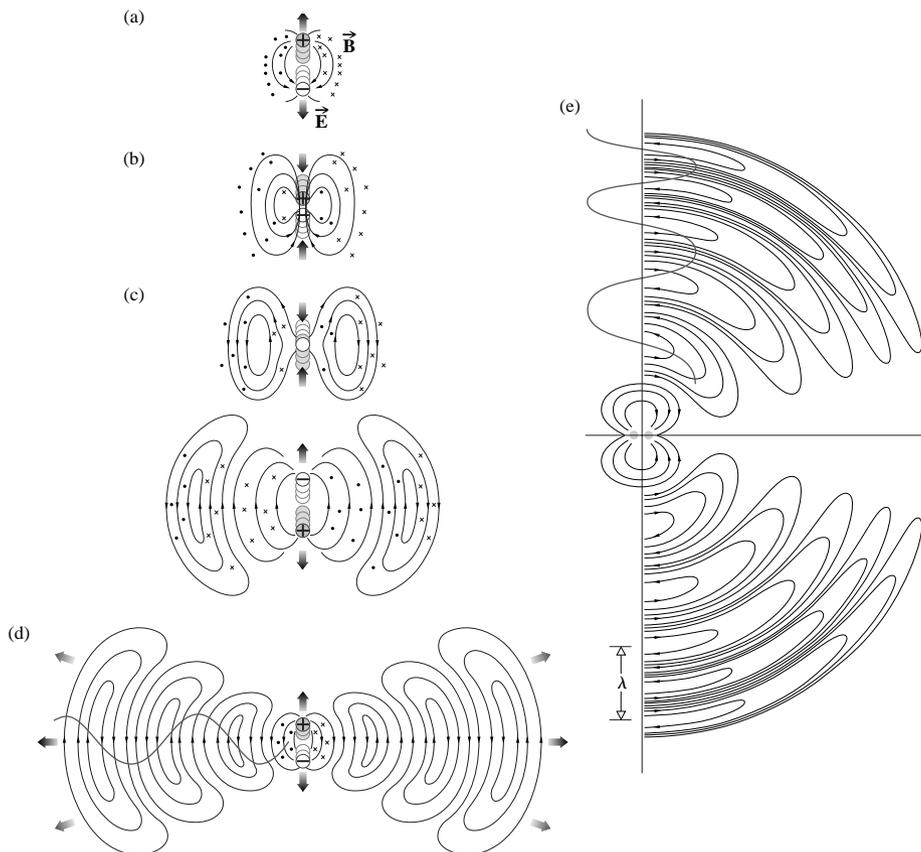


Figure 3.32 Le champ \vec{E} d'un dipôle électrique oscillant.

À $t = 0$, $\mu = \mu_0 = qd$, où d est la séparation initiale maximale entre les centres des deux charges (figure 3.32a). Le moment du dipôle est un vecteur dans la direction allant de $-q$ à $+q$. La figure montre une succession de lignes de champ lorsque la distance entre charges, et donc le moment du dipôle, tendent vers zéro et changent finalement de direction. Lorsque les charges se croisent, $\mu = 0$ et les lignes de champ se referment sur elles-mêmes.

À proximité de l'atome, le champ \vec{E} a la forme d'un dipôle électrique statique. Un peu plus loin, dans la région où les boucles se referment, il n'y a pas de longueur d'onde spécifique. Une analyse détaillée montre que le champ électrique est composé de cinq termes différents et que les choses sont assez compliquées. Loin du dipôle, dans ce qu'on appelle le *champ lointain*, la configuration du champ est beaucoup plus simple. Dans cette zone, la longueur d'onde est fixée ; \vec{E} et \vec{B} sont transverses, mutuellement perpendiculaires et en phase. Plus particulièrement :

$$E = \frac{\mu_0 k^2 \sin \theta \cos(kr - \omega t)}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.56)$$

et $B = E/c$, alors que les champs sont orientés comme sur la figure 3.33. Le vecteur de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$ « pointe » toujours vers l'extérieur de la zone d'onde. Là, les lignes du champ \vec{B} sont des cercles concentriques par rapport à l'axe du dipôle et dans un plan qui lui est perpendiculaire. Ce résultat n'est pas surprenant, puisqu'on peut considérer que \vec{B} naît de la variation temporelle du courant de l'oscillateur.

L'éclairement (la source rayonnant radialement) calculé avec l'équation (3.44) est donnée par :

$$I(\theta, r) = \frac{\mu_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3 \epsilon_0} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \quad (3.57)$$

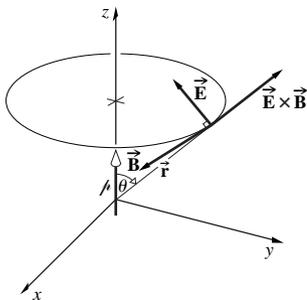


Figure 3.33 Orientations des champs pour un dipôle électrique oscillant.

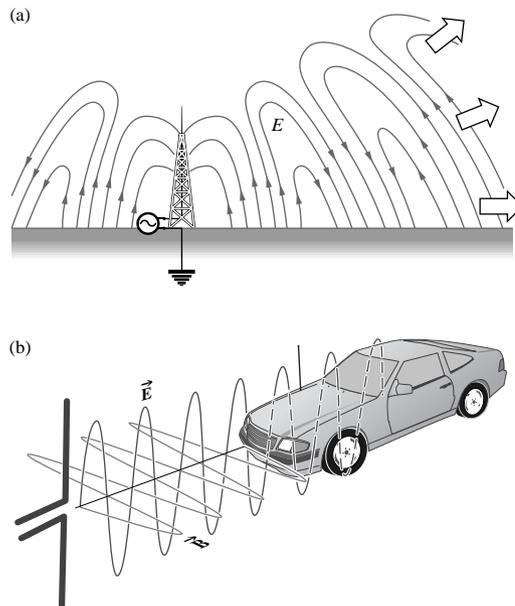


Figure 3.34 (a) Ondes électromagnétiques émises par une tour de transmission. (b) Les automobiles ont souvent des antennes individuelles, de pratiquement un mètre, placées verticalement. Le champ électrique oscillant vertical d'une onde radio induit une différence de potentiel sur la longueur de l'antenne, qui constitue le signal de réception.

Il est inversement proportionnel au carré de la distance à la source, et sa distribution angulaire est toroïdale, comme sur la figure 3.29. L'axe le long duquel l'accélération a lieu est l'axe de symétrie de la radiation. Notons également la dépendance de l'éclairement en ω^4 , *plus la fréquence est haute, plus le rayonnement est fort*. On reviendra sur ce résultat important lorsqu'on étudiera les phénomènes de diffusion.

Il n'est pas difficile de relier un générateur de courant alternatif à deux conducteurs et d'envoyer des courants d'électrons libres du haut vers le bas de cette « antenne » de transmission. La figure 3.34a montre cet arrangement sous la forme d'une de ses applications la plus répandue, une simple tour de radio AM standard. Une telle antenne est optimisée lorsque sa hauteur correspond à la longueur d'onde transmise, ou, plus exactement, égale à $\frac{1}{2}\lambda$. L'onde émise est alors rayonnée par le dipôle en synchronisme avec le courant oscillant qui la produit. Signalons que les ondes AM ont malheureusement des longueurs d'onde de quelques centaines de mètres. Pour des raisons d'encombrement, l'antenne montrée sur la figure est à moitié enterrée, ce qui permet de réduire la construction. Sa

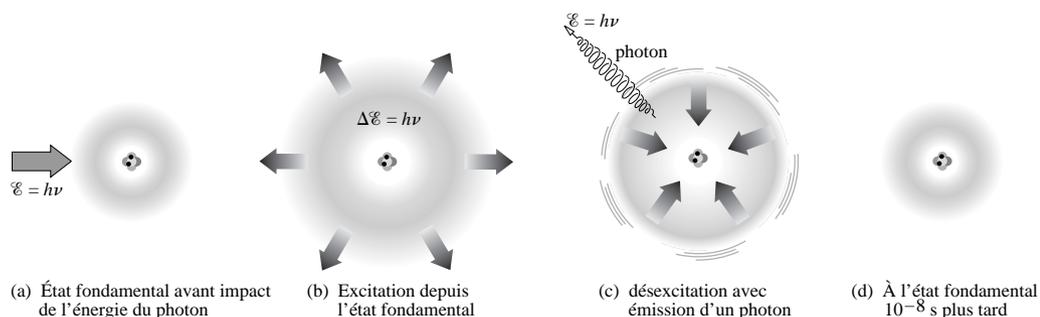


Figure 3.35 Excitation d'un atome. (a) L'atome reçoit de l'énergie sous forme de quanta $h\nu$. (b) Puisque cette énergie correspond à celle requise pour atteindre un état excité, l'atome l'absorbe et atteint un niveau plus élevé. (c) Avec l'émission d'un photon, l'atome se désexcite et (d) revient dans son état fondamental en environ 10^{-8} s.

hauteur apparente n'est alors que d'un quart de longueur d'onde. Signalons, de plus, que le fait d'utiliser la Terre crée une *onde de sol* qui longe la surface de la planète, justement là où se trouvent la plupart des gens possédant des radios ! En fait, une station commerciale couvre habituellement une distance de 35 km à 150 km.

3.4.4 Émission de lumière par les atomes

Le mécanisme le plus important, à l'origine de l'émission et de l'absorption naturelle d'un rayonnement (en particulier, dans le cas de la lumière), est certainement constitué par les *charges liées*, c'est-à-dire les électrons contenus dans les atomes. Ces particules négatives qui entourent le noyau positif de chaque atome constituent une sorte de nuage dense chargé. La grande majorité des propriétés chimiques et optiques de la matière ordinaire est déterminée par les électrons périphériques des atomes ou électrons de valence. Le reste du nuage électronique est en général formé de couches « fermées », fortement liées aux noyaux. Ces couches fermées ou pleines contiennent un nombre caractéristique de paires d'électrons. Même si l'on ne comprend pas tout ce qui se passe en interne lors de l'émission, il semble acquis que la lumière est émise pendant des réajustements dans la distribution des charges extérieures du nuage d'électrons. Ce mécanisme est finalement la source de lumière prédominante dans l'univers.

En général, un atome possède un cortège d'électrons disposés selon une configuration stable, correspondant à la distribution d'énergie la plus basse, ou au plus bas *niveau d'énergie*. Lorsque chaque électron est dans son niveau énergétique le plus bas possible, on dit que l'atome se trouve dans son **état fondamental**. Il peut y rester indéfiniment tant qu'on ne le dérange pas, c'est-à-dire si l'on ne lui communique pas

d'énergie. Par contre, tout mécanisme qui confère de l'énergie à un atome lui fait quitter son état fondamental. Ce peut être, par exemple, une collision avec un autre atome, un électron ou un photon. Or, un atome (noyau + nuage électronique) ne peut exister que dans certaines configurations ou *états* qui correspondent à des niveaux d'énergie bien spécifiques. En plus de l'état fondamental, les autres états situés à des niveaux d'énergie supérieurs constituent **les états excités** ; ceux-ci sont caractérisés par des configurations spécifiques et des niveaux énergétiques bien définis. Lorsqu'un ou plusieurs électrons occupent un niveau d'énergie plus élevé que l'état fondamental, on dit que l'atome est **excité**, situation intrinsèquement instable et temporaire.

Aux basses températures, les atomes ont tendance à se trouver dans leur état fondamental. Par contre, si la température est augmentée, un nombre croissant d'entre eux devient excité du fait des collisions atomiques engendrées par l'*agitation thermique*. Ce type de mécanisme est indicatif d'une classe d'excitations relativement douces, lampes à décharge, flamme, étincelle, etc., qui n'excitent que les électrons de valence les plus extérieurs et non appariés. Nous allons nous intéresser à ceux-ci en premier, car ils sont responsables de l'émission de la lumière visible, infrarouge proche et ultraviolette.

Lorsque suffisamment d'énergie, quelle qu'en soit la cause, est communiquée à un atome (typiquement, aux électrons de valence), celui-ci peut réagir en passant soudainement d'un niveau bas à un niveau plus élevé (figure 3.35). Les électrons excités effectuent une transition très rapide, un **saut quantique**, entre leur état fondamental (correspondant à une configuration orbitale) et l'un des états excités, *quantifiés*, qui est autorisé par son échelle énergétique et qui correspond à une autre configuration orbitale. **La quantité d'énergie gagnée dans le processus est égale à la différence d'énergie entre l'état initial et l'état final. Or, comme ces états sont**

spécifiques et bien définis, la quantité d'énergie qui peut être absorbée par un électron (et finalement un atome) est « quantifiée », (i.e. limitée à certaines valeurs). Cet état d'excitation atomique est un phénomène de résonance de courte durée. En général, après 10^{-8} s ou 10^{-9} s, l'atome se désexcite spontanément et retourne à un niveau énergétique inférieur (souvent l'état fondamental), en perdant l'énergie d'excitation au cours du processus. Ce réajustement d'énergie peut s'effectuer sous la forme d'émission de lumière ou par conversion en énergie thermique, par collisions interatomiques avec le milieu (en particulier, dans les matériaux denses). Comme on le verra ultérieurement, ce mécanisme résulte du phénomène d'absorption de lumière à la fréquence de résonance et de la transmission ou de la réflexion des fréquences résiduelles. Dans le visible, il est responsable de la coloration des objets.

Si la transition atomique s'accompagne d'émission (comme dans le cas de la désexcitation d'un gaz raréfié), *l'énergie du photon émis correspond exactement à la diminution quantifiée d'énergie de l'atome*. Par la relation $\Delta\mathcal{E} = h\nu$, cette désexcitation se fait à une fréquence particulière, qui est associée à la fois au photon émis et à la transition atomique entre les deux états énergétiques concernés. Cette fréquence est appelée **fréquence de résonance** et représente l'une de celles auxquelles l'atome absorbe ou émet très efficacement de l'énergie (avec une probabilité qui lui est propre). Lors de la transition d'un électron, l'atome rayonne donc spontanément un quantum d'énergie.

Bien que ce qui se passe pendant cette transition atomique de 10^{-8} s soit loin d'être clair, il est nécessaire d'imaginer l'électron en orbite faisant sa transition par le biais d'une oscillation graduellement amortie à la fréquence de résonance spécifique. La lumière émise peut être vue de façon semi-classique comme étant émise sous la forme d'une courte impulsion directionnelle, ou **train d'ondes**, durant moins de 10^{-8} s. Ce modèle est d'ailleurs en accord avec certaines observations expérimentales (paragraphe 7.4.2 et figure 7.36). Il est, d'autre part, utile d'associer intimement par la pensée cette impulsion électromagnétique au photon. En un sens, l'impulsion est la représentation semi-classique de la nature ondulatoire du photon. Ces deux notions ne sont cependant pas complètement équivalentes. Le train d'ondes électromagnétiques est un concept classique qui décrit très bien la propagation et la distribution spatiale de la lumière. Cependant, son énergie n'est pas quantifiée alors que c'est justement l'une des caractéristiques essentielles du photon. Ainsi, lorsque l'on considère des paquets de photons, il faut garder en tête que cette idée décrit plus que la simple impulsion oscillatoire classique d'une onde électromagnétique. La notion

de train d'onde est introduite ici, afin de pouvoir discuter de la fréquence de la lumière. Ce point constitue peut-être le problème central du modèle *naïf* du photon. En effet, qu'est ce qui traduit sa fréquence ?

Les spectres d'émission d'atomes seuls ou de gaz à basse pression (dont les atomes n'ont pas d'interactions notables) sont constitués de « raies » très fines, correspondant aux fréquences caractéristiques des atomes. On observe toujours un élargissement de la fréquence dû aux mouvements atomiques, aux collisions, etc. Le spectre qu'émet un atome n'est donc jamais parfaitement monochromatique. En général, les transitions atomiques d'un niveau à un autre sont cependant caractérisées par l'émission d'une bande de fréquences bien définies. Par contre, les spectres de solides ou de liquides, pour lesquels les atomes sont en interaction les uns avec les autres, comportent des bandes de fréquences élargies. Lorsque deux atomes se rapprochent l'un de l'autre, leurs niveaux énergétiques respectifs se décalent légèrement, du fait de leurs interactions. Les nombreuses interactions entre les atomes d'un solide engendrent un très grand nombre de tels décalages, ce qui élargit alors les niveaux originaux en bandes quasiment continues. Le résultat est que de tels matériaux émettent et absorbent sur de larges bandes de fréquences.

Refroidissement optique

La quantité de mouvement linéaire transportée par les photons peut être transférée à des atomes ou à des ions en mouvement, ce qui entraîne des changements drastiques de leur trajectoire. Ainsi, après un cycle d'environ dix mille absorptions et émissions consécutives, un atome, dont la vitesse initiale est à l'origine de 700 m/s, peut être ralenti jusqu'à une vitesse pratiquement nulle. Comme généralement la température est proportionnelle à l'énergie cinétique classique moyenne des particules, ce processus est, de fait, appelé **refroidissement optique** ou **refroidissement laser**. Grâce à cet effet, on peut atteindre des températures proches du microkelvin. Le refroidissement laser est à présent à la base d'une grande variété d'applications, incluant l'horloge atomique, l'interféromètre à atomes et la focalisation de faisceaux atomiques. Ces différents éléments nous permettent de rassembler les idées des paragraphes 3.3.4 et 3.4.4 de façon pratique.

La figure 3.36 décrit un faisceau d'atomes, de masse m , de vitesse \vec{v} et entrant en choc frontal avec un faisceau laser dont les photons possèdent un vecteur de propagation \vec{k}_L . La fréquence ν_L du laser a été choisie de manière à être légèrement

inférieure à la fréquence de résonance ν_0 des atomes. À cause de son mouvement, chacun de ces atomes « voit » un photon incident avec une fréquence décalée vers le haut par effet Doppler* d'une quantité $|\vec{k}_L \cdot \vec{v}|/2\pi = \nu_L v/c$. Lorsque la fréquence du laser est ajustée de telle sorte que $\nu_0 = \nu_L(1 + v/c)$, les collisions avec les photons font donc résonner les atomes. Au cours de ce processus, chaque photon transfère sa quantité de mouvement $\hbar\vec{k}_L$ à l'atome qui l'absorbe (p. 62). Ce dernier subit, en conséquence, une réduction de vitesse d'une quantité Δv où $m\Delta v = \hbar k_L$.

Le nuage d'atomes n'étant pas très dense, chaque atome excité peut retomber dans son état fondamental avec émission spontanée d'un photon d'énergie $h\nu_0$. L'émission se fait dans une direction aléatoire, et bien que l'atome recule localement, la quantité de mouvement moyenne qu'il regagne sur des milliers de cycles tend à être nulle. La variation de quantité de mouvement de l'atome par cycle d'absorption-émission de photons est donc $\hbar\vec{k}_L$, ce qui fait que l'atome ralentit. Au cours de chaque cycle (comme peut le voir un observateur immobile dans le laboratoire) l'atome absorbe donc un photon d'énergie $h\nu_L$, puis émet un photon d'énergie $h\nu_0$. Il perd donc, au cours du processus, une quantité d'énergie cinétique correspondant à $h\nu_L v/c$, qui est proportionnelle au décalage Doppler.

Au contraire, un atome qui se déplace dans la direction opposée, s'éloignant donc de la source de lumière, voit des photons de fréquence $\nu_L(1 - v/c)$ assez éloignée de ν_0 tel qu'il n'y a que peu ou pas d'absorption ; il en est de même pour le gain en quantité de mouvement.

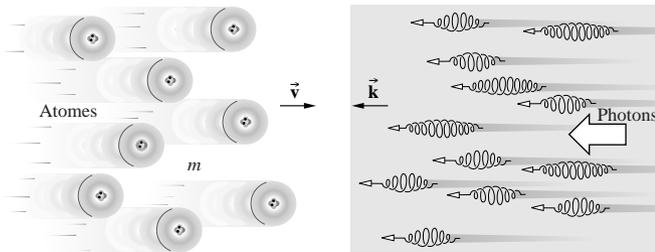


Figure 3.36 Un courant d'atomes entrant en collision avec un faisceau laser dans le procédé dit de refroidissement laser.

* Soit un observateur se déplaçant à v_0 vers une source émettant des ondes de vitesse v à la fréquence ν_s . Du fait de l'effet Doppler, il observe une fréquence $\nu_o = \nu_s(v + v_0)/v$. Pour plus de précisions, consulter n'importe quel ouvrage d'introduction à la physique, par exemple E. Hecht, *Physics: Calculus*, Sect. 11.11.

Notons que la pression de radiation dépend de la fréquence et que les atomes subissent une force dépendant de la vitesse via l'effet Doppler. Cela veut dire que ν_0 et ν_L doivent garder la même relation lorsque v diminue. Il y a plusieurs façons ingénieuses d'accomplir cela.

3.5 La lumière dans la matière

L'étude du comportement des matériaux diélectriques ou non conducteurs soumis à des champs électromagnétiques est d'un intérêt tout particulier en optique. En effet, celle-ci fait souvent intervenir des diélectriques transparents, comme des lentilles, des prismes, des films, etc., sans oublier l'air ambiant.

La présence d'un diélectrique homogène isotrope dans une région dénuée de champs a pour effet de changer ϵ_0 en ϵ et μ_0 en μ dans les équations de Maxwell. La vitesse de phase dans le milieu devient alors :

$$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu} \quad (3.58)$$

Le rapport des vitesses d'une onde électromagnétique dans le vide et dans la matière constitue l'**indice de réfraction absolu** n :

$$n \equiv \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \quad (3.59)$$

En termes de permittivité et perméabilité relatives du milieu, n devient donc :

$$n = \sqrt{K_E K_M} \quad (3.60)$$

Il existe des matériaux magnétiques qui sont transparents aux infrarouges et aux micro-ondes. Cependant, notre principal intérêt concerne les matériaux transparents dans le visible, et ceux-ci sont principalement « non magnétiques ». En effet, K_M ne diffère en général de 1 que de 10^{-4} au plus (par exemple, pour le diamant, $K_M = 1 - 2,2 \times 10^{-5}$). En fixant $K_M = 1$ dans la formule de n , on obtient ce que l'on appelle la *relation de Maxwell* :

$$n \approx \sqrt{K_E} \quad (3.61)$$

où K_E représente la *constante diélectrique statique*. Comme le montre le tableau 3.2, cette relation n'est valable que pour quelques gaz simples. Il se pose un problème du fait que K_E et donc n dépendent de la fréquence. La dépendance de n par rapport à la longueur d'onde (ou à la couleur) de la lumière

constitue, en effet, le phénomène bien connu de **dispersion**. Celui-ci se produit au niveau microscopique, et les équations de Maxwell ne le prennent alors pas en compte. La dispersion fut mise en évidence il y a plus de trois cents ans par Isaac Newton qui utilisa un prisme pour disperser les composantes colorées de la lumière blanche. Ce phénomène était déjà bien connu, à défaut d'être bien compris.

Diffusion et absorption de la lumière

Quelle est la raison physique de la dépendance de n par rapport à la fréquence ? On peut trouver la réponse à cette question en examinant l'interaction entre une onde électromagnétique et les atomes d'un matériau diélectrique. Un atome peut réagir à la lumière incidente de deux façons différentes selon la valeur de la fréquence de la lumière (ou de l'énergie de ses photons $\mathcal{E} = h\nu$). Généralement, l'atome « diffuse » la lumière et la redirige sans pour autant l'altérer. Par contre, si l'énergie du

photon incident correspond à celle de l'un des états excités de l'atome, ce dernier absorbe la lumière par un saut quantique vers ce niveau plus élevé. Pour des gaz ordinaires à des pressions élevées (10^2 Pa ou plus), pour les solides et les liquides, il est très probable que cette énergie d'excitation soit rapidement transférée sous la forme d'énergie cinétique ou thermique (collisions, mouvements atomiques aléatoires) avant qu'un photon puisse être émis. Ce processus assez courant (la capture d'un photon et sa conversion en énergie thermique) est connu depuis longtemps sous le nom « d'absorption ». À l'heure actuelle, on emploie ce terme pour décrire uniquement l'aspect « capture », sans référence à ce qui arrive d'un point de vue énergétique. En conséquence, on emploiera plutôt le terme d'**absorption dissipative**. En fait, tout milieu matériel participe à l'absorption dissipative, à une fréquence ou à une autre.

À la différence du processus d'excitation précédent, la **diffusion non résonante** se produit lorsque la fréquence du rayonnement incident est inférieure à la fréquence de résonance du matériau. Afin de mieux comprendre ce phénomène, imaginons un atome au repos, dans son état fondamental et supposons qu'il entre en interaction avec un photon dont l'énergie est trop faible pour provoquer une transition vers l'un des états excités. Malgré cela, on suppose que le champ électromagnétique de la lumière peut faire osciller le nuage électronique. Ainsi, il n'y a pas de transition atomique résultante. Les atomes restent dans leur état fondamental pendant que le nuage entre en vibration par rapport au noyau positif. Finalement, le système constitue un dipôle oscillant et commence *immédiatement* à rayonner à cette fréquence. La lumière diffusée résultante consiste alors en un photon, émis dans une direction aléatoire et transportant la même quantité d'énergie que le photon incident. On dit alors que **le phénomène de diffusion est élastique**. Dans les faits, l'atome réagit comme un petit oscillateur dipolaire. Ce modèle fut d'ailleurs utilisé, en 1878, par le physicien néerlandais Hendrik Antoon Lorentz pour étendre les théories de Maxwell, de façon classique, au domaine atomique. Si la lumière incidente n'est pas polarisée, les oscillateurs atomiques diffusent donc dans des directions aléatoires.

Lorsqu'un atome est soumis à un rayonnement lumineux, le processus d'excitation et d'émission spontanée se répète rapidement. Avec une durée d'émission de l'ordre de 10^{-8} s, un atome peut émettre plus de 10^8 photons par seconde, dans le cas où il y a assez d'énergie pour le réexciter en permanence. Les atomes ont une forte tendance à entrer en interaction avec la lumière résonante (ils ont une large *section efficace en absorption*). Cela signifie que la saturation, configuration dans

Tableau 3.2 Relation de Maxwell

Gaz à 0°C et 1 atm		
Substance	$\sqrt{K_E}$	n
Air	1,000294	1,000293
Hélium	1,000034	1,000036
Hydrogène	1,000131	1,000132
Dioxyde de carbone	1,00049	1,00045
Liquides à 20 °C		
Substance	$\sqrt{K_E}$	n
Benzène	1,51	1,501
Eau	8,96	1,333
Éthanol	5,08	1,361
Tétrachlorure de carbone	4,63	1,461
Bisulfure de Carbone	5,04	1,628
Solides à température ambiante		
Substance	$\sqrt{K_E}$	n
Diamant	4,06	2,419
Ambre	1,6	1,55
Silice fondue	1,94	1,458
Chlorure de sodium	2,37	1,50

Les valeurs de K_E correspondent aux fréquences les plus basses, dans certains cas aussi basses que 60 Hz, alors que n est mesuré à environ $0,5 \times 10^{15}$ Hz. On utilise la raie D du sodium ($\lambda = 589,29$ nm).

laquelle les atomes d'un gaz à basse pression sont constamment émis et réexcités, se produit pour une valeur de l'éclairement assez modeste ($\approx 10^2 \text{ W/m}^2$). Il n'est donc pas difficile de faire émettre des atomes à un rythme de 100 millions de photons par seconde.

Dans le cas où un milieu est éclairé par un faisceau de lumière quelconque, on peut généralement considérer que chaque atome se comporte comme s'il était la « source » d'un très grand nombre de photons (diffusés soit de façon élastique, soit de façon résonante) dans toutes les directions, ce qui fait tout de suite penser au modèle de l'onde sphérique classique. Ainsi, *on peut considérer un atome comme une source ponctuelle d'ondes électromagnétiques sphériques (même si cette vision est simpliste)*, tout en gardant en mémoire l'avertissement d'Einstein « l'émission sous forme d'ondes sphériques n'existe pas ».

Lorsqu'on éclaire un matériau sans résonance dans le visible, il se produit de la diffusion élastique qui confère à chaque atome impliqué un rôle de minuscule source d'ondes sphériques. Pratiquement, retenons que plus la fréquence du faisceau incident est proche de la résonance atomique du matériau, plus l'interaction est forte et (pour les matériaux denses) plus l'énergie est absorbée de façon dissipative. C'est précisément ce mécanisme d'absorption sélective (paragraphe 4.9) qui est à l'origine de l'apparence colorée des objets. Il est responsable de la couleur des cheveux, de la peau, des habits, des feuilles, des fruits, de la peinture, etc.

3.5.1 Dispersion

La dispersion correspond au phénomène par lequel l'indice de réfraction d'un milieu dépend de la fréquence. Tous les milieux matériels sont dispersifs ; seul le vide ne l'est pas.

La théorie de Maxwell considère les milieux matériels comme étant continus et représente leurs réponses électriques et magnétiques à des champs \vec{E} et \vec{B} appliqués par l'intermédiaire des constantes ϵ et μ . Par conséquent, K_E et K_M sont aussi des constantes, et n est donc, de façon irréaliste, indépendant de la fréquence. Pour un traitement théorique de la dispersion, il est donc nécessaire de prendre en compte la nature atomique de la matière pour en extraire un aspect qui dépende de la fréquence. Suivant en cela Lorentz, on admettra que la moyenne des contributions d'un grand nombre d'atomes peut représenter le comportement d'un milieu diélectrique isotrope.

Lorsqu'un diélectrique est soumis à un champ électrique, la distribution interne des charges est modifiée. Cet effet

provoque la création de moments dipolaires qui contribuent, à leur tour, au champ interne total. D'une façon plus simple, le champ externe sépare donc les charges positives et négatives du milieu (chaque paire formant un dipôle) qui contribuent alors à créer une composante additionnelle du champ. Le moment dipolaire par unité de volume résultant (densité volumique de moment dipolaire) est appelé **polarisation électrique**, \vec{P} . Pour la majorité des matériaux, \vec{P} est proportionnel à \vec{E} , selon :

$$(\epsilon - \epsilon_0)\vec{E} = \vec{P} \quad (3.62)$$

La redistribution des charges et l'effet de polarisation en résultant peuvent se produire suivant différents mécanismes. Certaines molécules ont, par exemple, un moment dipolaire permanent du fait d'une répartition inégale des électrons de valence. Elles constituent alors ce que l'on appelle des *molécules polaires*. La molécule d'eau, non linéaire, en est un exemple typique (figure 3.37). Chaque liaison hydrogène-oxygène est polaire, de telle manière que l'extrémité H soit positive par rapport à l'extrémité O. En l'absence de champ externe, l'agitation thermique fait que ces dipôles moléculaires sont orientés aléatoirement. Avec l'introduction d'un champ électrique, les dipôles s'alignent et le diélectrique prend globalement une certaine **polarisation**, orientable avec \vec{E} . Dans le cas de molécules et d'atomes non polaires, le mécanisme est un peu différent. L'application d'un champ déplace le nuage d'électrons rapport au noyau, ce qui produit un moment dipolaire. En plus de ce phénomène de **polarisation électronique**, il existe un autre processus qui ne concerne que les molécules, par exemple, les cristaux ioniques de NaCl. En présence d'un champ électrique, les ions positifs et négatifs subissent un décalage les uns par rapport aux autres. Des moments dipolaires sont donc induits et provoquent la **polarisation atomique** ou **ionique**.

Si le diélectrique est éclairé par une onde électromagnétique monochromatique, la structure interne de ses charges subit des forces et/ou des couples de forces, variables dans le temps et proportionnelles à la composante du champ électrique de l'onde*. Dans le cas des fluides, qui sont des diélectriques polaires, les molécules subissent des rotations rapides, s'alignant avec le champ $\vec{E}(t)$. Cependant, ces molécules sont

*Les forces provenant de la composante magnétique du champ sont de la forme $\vec{F}_M = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$, ce qui est à comparer avec celles, $\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}$ de la composante électrique. Cependant, $v \ll c$ et, d'après l'équation 3.30, il s'ensuit donc que \vec{F}_M est généralement négligeable.

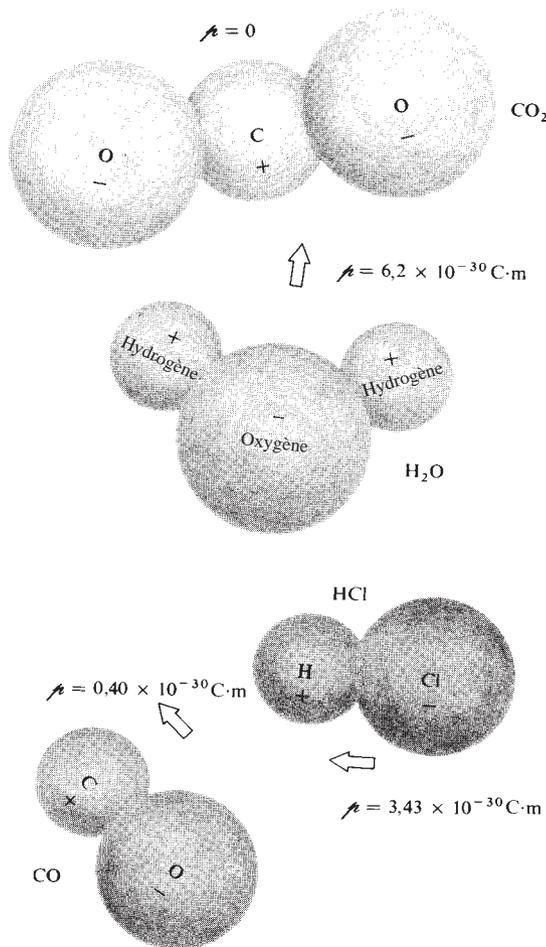


Figure 3.37 Quatre sortes de molécules polaires et leurs moments dipolaires correspondants.

relativement larges et possèdent des moments d'inertie appréciables. Pour des hautes fréquences, les molécules polaires sont donc incapables de suivre les variations du champ. Leurs contributions à \vec{P} diminuent en conséquence, et K_E chute de façon remarquable. Ainsi, la permittivité relative de l'eau, qui est de l'ordre de 80 jusqu'à 10^{10} Hz, chute assez rapidement au-delà.

Par contre, les électrons ont peu d'inertie et peuvent continuer à suivre les variations du champ. Ils contribuent ainsi à $K_E(\omega)$, même pour les fréquences optiques (5×10^{14} Hz). Ainsi, la dépendance de n en fonction de ω est gouvernée par l'effet des différents mécanismes de polarisation électrique contribuant à la fréquence en question. Sachant cela, il est possible de calculer une expression analytique pour $n(\omega)$, qui

rende compte de ce qui se passe dans le milieu au niveau atomique.

Le nuage électronique de l'atome est lié au noyau positif par une force d'attraction électrique qui le maintient dans une sorte de configuration d'équilibre. Sans en savoir plus sur le détail des interactions atomiques internes, on peut anticiper, comme pour d'autres systèmes mécaniques stables qui ne sont pas totalement déséquilibrés par de petites perturbations, qu'il doit exister une force de rappel, F , qui remet le système en équilibre. Pour de très petits déplacements x autour de l'équilibre (où $F = 0$), on peut aussi s'attendre raisonnablement à ce que la force soit linéaire en x . En d'autres termes, la représentation de $F(x)$ en fonction de x doit être une droite, coupant l'abscisse au point d'équilibre ($x = 0$). Ainsi, pour un petit déplacement, on supposera que la force de rappel est de la forme $F = -k_E x$, où k_E est une sorte de constante élastique, comme celle d'un ressort. Après avoir été momentanément perturbé (de quelque façon que ce soit), un électron lié de cette manière oscille donc autour de sa position d'équilibre avec une **fréquence naturelle** ou de **résonance** donnée par $\omega_0 = \sqrt{k_E/m_e}$ où m_e représente sa masse. C'est la fréquence d'oscillation d'un système libre.

On peut finalement considérer un milieu matériel comme l'assemblage, dans le vide, d'un grand nombre d'atomes polarisables, très petits (par rapport à la longueur d'onde de la lumière) et proches de leurs voisins. Lorsqu'une onde lumineuse arrive sur un tel milieu, chaque atome se comporte comme un **oscillateur forcé** classique, excité par le champ électrique de l'onde $E(t)$, variable dans le temps (ici, dans la direction x). La figure 3.38b est une représentation mécanique d'un tel oscillateur dans un milieu isotrope, où la couche électronique négative est rattachée à un noyau positif stationnaire par des ressorts identiques. En fait, même sous la lumière directe du Soleil, l'amplitude de l'oscillation reste inférieure à 10^{-17} m. La force (F_E) exercée sur un électron de charge q_e par le champ $E(t)$ d'une onde harmonique de pulsation ω , est de la forme :

$$F_E = q_e E(t) = q_e E_0 \cos \omega t \quad (3.63)$$

Notons que, si la force créée par le champ est dans une direction, la force de rappel s'exerce dans la direction opposée, ce qui explique le signe moins. La seconde loi de Newton fournit l'équation du mouvement ; la somme des forces est égale au produit de la masse par l'accélération :

$$q_e E_0 \cos \omega t - m_e \omega_0^2 x = m_e \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (3.64)$$

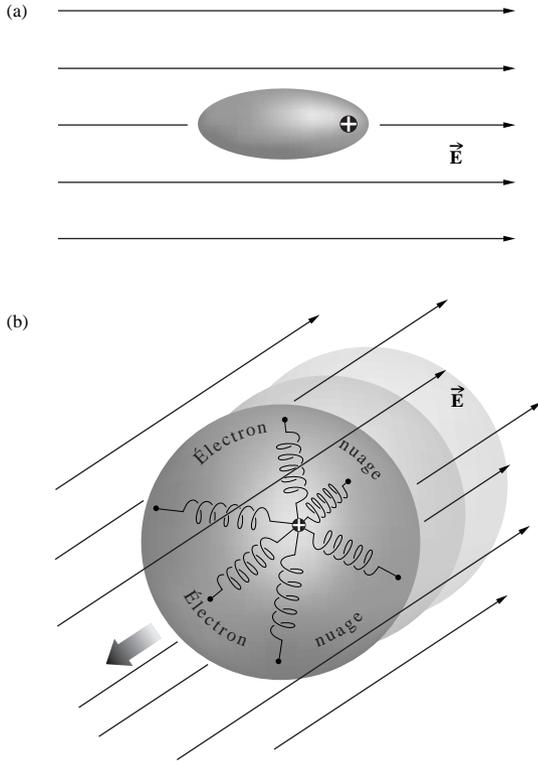


Figure 3.38 (a) Distorsion du nuage électronique en réponse à l'application d'un champ \vec{E} . (b) Modèle de l'oscillateur mécanique dans le cas d'un milieu isotrope. Tous les ressorts sont identiques et l'oscillateur peut vibrer de façon similaire dans toutes les directions.

Le premier terme, à gauche du signe =, est la force appliquée alors que le second est la force de rappel opposée. Pour satisfaire cette expression, x doit être une fonction dont la dérivée seconde ne diffère pas trop. De plus, on peut anticiper que l'électron oscillera à la même fréquence que $E(t)$. On peut ainsi « deviner » une forme de la solution :

$$x(t) = x_0 \cos \omega t$$

et la substituer dans l'équation pour évaluer l'amplitude x_0 . De cette façon, on trouve que :

$$x(t) = \frac{q_e/m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0 \cos \omega t \quad (3.65)$$

ou bien
$$x(t) = \frac{q_e/m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2)} E(t) \quad (3.66)$$

Cette expression représente le déplacement relatif entre le nuage électronique négatif et le noyau positif. Traditionnellement, on considère que q_e est positif et l'on parle de déplacement de l'oscillateur. Sans force appliquée (pas d'onde incidente), l'oscillateur vibre à sa *pulsation de résonance* ω_0 . En présence d'un champ de pulsation inférieure à ω_0 , $E(t)$ et $x(t)$ ont le même signe, ce qui signifie que l'oscillateur peut suivre la force appliquée (être en phase avec elle). Cependant, lorsque $\omega > \omega_0$, le déplacement $x(t)$ est en opposition de phase avec la force instantanée $q_e E(t)$, de même que l'oscillateur. Rappelons que l'on parle ici de dipôles oscillants où, pour $\omega_0 > \omega$, le mouvement relatif de la charge positive est une vibration dans la direction du champ appliqué. Au-dessus de la résonance, la charge positive est en opposition de phase avec le champ et l'on dit que le dipôle est en retard de π rad.

Le moment dipolaire est égal à la charge q_e multipliée par son déplacement. S'il y a N électrons par unité de volume, la polarisation électrique, ou densité de moment dipolaire, est donc :

$$P = Nq_e x \quad (3.67)$$

Donc :

$$P = \frac{q_e^2 N E / m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.68)$$

Et d'après l'équation (3.62)

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{P(t)}{E(t)} = \epsilon_0 + \frac{q_e^2 N / m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.69)$$

En utilisant le fait que $n^2 = K_E = \epsilon / \epsilon_0$, on arrive à une expression de n en fonction de ω , appelée **équation de dispersion** :

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (3.70)$$

Pour des fréquences de plus en plus grandes par rapport à la fréquence de résonance, $(\omega_0^2 - \omega^2) < 0$. Dans ce cas, l'oscillateur est pratiquement en opposition de phase par rapport à la force appliquée. La polarisation électrique résultante est donc aussi en opposition de phase par rapport au champ électrique appliqué. Ainsi, la constante diélectrique et l'indice de réfraction sont tous deux inférieurs à 1. Au contraire, pour des fréquences de plus en plus basses par rapport à la fréquence de résonance, $(\omega_0^2 - \omega^2) > 0$. Dans ce cas, la polarisation est pratiquement en phase avec le champ électrique appliqué. La constante diélectrique et l'indice de réfraction correspondant sont alors tous deux plus grands que 1. Cette sorte de comportement, qui ne représente en fait qu'une partie de ce qui se

pas, est, malgré tout, généralement observée dans toutes sortes de matériaux.

On peut vérifier l'utilité de cette analyse en usinant le matériau à étudier sous la forme d'un prisme dispersif (p. 195). Écrivons d'abord l'équation (3.70), comme dans le problème 3.53 :

$$(n^2 - 1)^{-1} = -C\lambda^{-2} + C\lambda_0^{-2}$$

où, puisque $\omega = 2\pi c/\lambda$, la constante multiplicative est donnée par $C = 4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_e / Nq_e^2$. La figure 3.39 représente ainsi un graphe de $(n^2 - 1)^{-1}$ en fonction de λ^{-2} en utilisant des données expérimentales. Un prisme en *crown* a été éclairé par les diverses longueurs d'ondes d'un tube à décharge à hélium. On a mesuré l'indice de réfraction à chaque longueur d'onde (tableau 3.3). La courbe résultante est bien une ligne droite (d'équation générale $y = mx + b$). Sa pente est égale à $-C$ et elle coupe l'axe des ordonnées à $C\lambda_0^{-2}$. Il s'ensuit donc que la fréquence de résonance est $2,95 \times 10^{15}$ Hz, dans l'ultraviolet comme prévu.

En règle générale, les matériaux subissent plusieurs transitions pour passer de $n > 1$ à $n < 1$, lorsqu'on fait croître la fréquence du faisceau lumineux. Cela veut dire qu'un matériau peut avoir plusieurs fréquences de résonance au lieu d'une seule. Il semble raisonnable de généraliser le problème en supposant qu'il y a N molécules par unité de volume, contenant chacune f_j oscillateurs de pulsations naturelles ω_{0j} , où $j = 1, 2, 3, \dots$. Dans ce cas :

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \left(\frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} \right) \quad (3.71)$$

C'est essentiellement le même résultat obtenu avec un traitement quantique, sauf que certains des termes doivent être réinterprétés. Ainsi, les quantités ω_{0j} deviennent alors les *pulsations caractéristiques* auxquelles un atome peut absorber et émettre de l'énergie. Les termes f_j , qui doivent satisfaire la condition $\sum_j f_j = 1$, sont des coefficients appelés *forces de l'oscillateur*, qui traduisent la contribution de chacun des modes. Comme ils représentent aussi la probabilité d'une transition atomique, les termes f_j sont également appelés *probabilités de transition*.

Les termes f_j peuvent d'ailleurs avoir la même interprétation du point de vue classique, puisque la condition d'accord avec les données expérimentales exige qu'ils soient inférieurs à 1. C'est évidemment contraire à la définition des f_j qui a permis d'obtenir l'équation (3.71). On suppose alors qu'une molécule a un grand nombre de modes d'oscillation, mais que chacun de ces modes a une fréquence naturelle et une force distinctes.

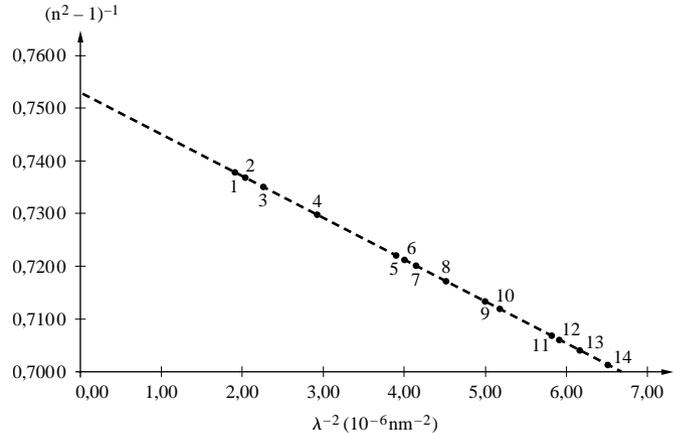


Figure 3.39 Représentation graphique de $(n^2 - 1)^{-1}$ en fonction de λ^{-2} pour les valeurs indiquées au tableau 3.3. Voir N. Gauthier, *Phys. Teach.*, **25**, 502 (1987).

Notons que, lorsque ω est égal à l'une ou l'autre des pulsations caractéristiques, n est discontinu, ce qui est contraire aux observations. Ce résultat provient du fait qu'on a négligé le terme d'amortissement, qui aurait dû apparaître dans le

Tableau 3.3 Dispersion du verre *Crown*. Les longueurs d'onde sont celles d'un tube à décharge He. Valeurs expérimentales d'indices

	Longueur d'onde λ (nm)	Indice de réfraction n
1.	728,135	1,534 6
2.	706,519 706,570	1,535 2
3.	667,815	1,536 29
4.	587,562 587,587	1,539 54
5.	504,774	1,544 17
6.	501,567	1,544 73
7.	492,193	1,545 28
8.	471,314	1,546 24
9.	447,148	1,549 43
10.	438,793	1,550 26
11.	414,376	1,553 74
12.	412,086	1,554 02
13.	402,619	1,555 30
14.	388,865	1,557 67

dénominateur de la somme. Cet amortissement peut être attribué à l'énergie perdue lorsque l'oscillateur forcé rayonne à nouveau. Dans les solides, les liquides et les gaz à haute pression ($\approx 10^3$ atm), les distances interatomiques sont globalement 10 fois moindres que dans un gaz à température et à pression normales. Les atomes et les molécules, très proches les uns des autres, sont alors sujets à de fortes interactions et à une force de « friction » résultante. Son effet est un amortissement des oscillateurs et une dissipation de leur énergie à l'intérieur du matériau sous forme de « chaleur » (mouvement moléculaire aléatoire).

Si l'on inclut une force d'amortissement proportionnelle à la vitesse (de forme $m_e \gamma dx/dt$) dans l'équation du mouvement, l'équation de dispersion (3.71) devient :

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega} \quad (3.72)$$

Bien que cette expression soit satisfaisante pour des milieux raréfiés tels que les gaz, on doit surmonter une autre complication si l'on veut l'appliquer à des milieux denses, où chaque atome entre effectivement en interaction avec le champ électrique local dans lequel il est immergé. À la différence des atomes isolés qui ont été décrits plus haut, ceux d'un matériau dense subissent le champ induit créé par leurs semblables. En conséquence, un atome « perçoit », en plus du champ électrique appliqué $E(t)$, un autre champ*, à savoir $P(t)/3\epsilon_0$. Sans plus entrer dans les détails, on peut montrer qu'alors :

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Nq_e^2}{3\epsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega} \quad (3.73)$$

Jusqu'à maintenant, on a considéré presque exclusivement le cas des électrons oscillateurs. Cependant, le même raisonnement aurait pu être mené pour les ions liés à des sites atomiques fixes. Dans ce cas, la masse m_e de l'électron devrait être remplacée par celle de l'ion, considérablement plus grande. De fait, bien que la polarisation électronique soit importante sur tout le spectre optique, les contributions de la polarisation ionique n'affectent n de façon significative que dans les régions de résonance ($\omega_{0j} = \omega$).

Les conséquences d'un indice de réfraction complexe seront considérées au paragraphe 4.8. Pour l'instant, nous

limitons notre discussion à des situations où l'absorption est négligeable (i.e. $\omega_{0j}^2 - \omega^2 \gg \gamma_j \omega$) et où n est réel, de sorte que :

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Nq_e^2}{3\epsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} \quad (3.74)$$

Les fréquences caractéristiques des matériaux transparents, incolores, sont situées en dehors du visible (ce qui explique pourquoi ils sont incolores et transparents). Les verres ont, en particulier, des fréquences naturelles effectives dans l'ultraviolet, où ils sont donc opaques. Par comparaison, dans les cas où $\omega_{0j}^2 \gg \omega^2$, ω^2 peut être négligé dans l'équation (3.74), ce qui donne un indice de réfraction à peu près constant sur cette gamme de fréquences. Par exemple, les fréquences caractéristiques importantes pour les verres correspondent à des longueurs d'ondes d'à peu près 100 nm. Le milieu de la bande visible est à environ cinq fois cette valeur et là, $\omega_{0j}^2 \gg \omega^2$. Notons également que, lorsque ω augmente vers ω_{0j} , $(\omega_{0j}^2 - \omega^2)$ diminue. Ainsi, n augmente graduellement avec la fréquence, comme on peut le voir clairement sur la figure 3.40. Cet effet porte le nom de **dispersion normale**. Dans l'ultraviolet, lorsque ω approche d'une résonance, les oscillateurs résonnent de plus en plus, ce qui s'accompagne d'un amortissement et d'une forte absorption de l'énergie de l'onde incidente. Lorsque $\omega_{0j} = \omega$ dans l'équation (3.73), le terme d'amortissement devient prédominant. Les régions

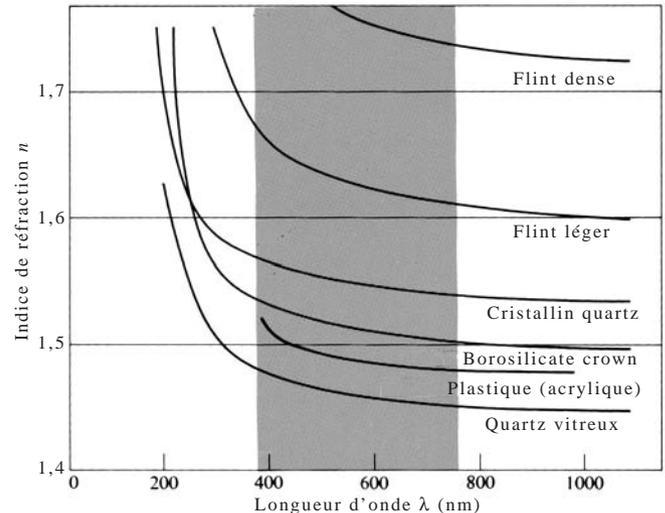


Figure 3.40 Dépendance de l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde pour divers matériaux.

*Ce résultat, qui s'applique à un milieu isotrope figure dans pratiquement tous les textes sur la théorie électromagnétique.

étroites centrées sur les différentes ω_{0j} de la figure 3.41 constituent ce qu'on appelle des **bandes d'absorption**. Dans ces zones, $dn/d\omega$ est négatif et l'on parle de **dispersion anormale**. Lorsque de la lumière passe au travers d'un prisme de verre, la composante bleue « voit » un indice de réfraction plus élevé que la rouge et subit donc une déviation plus importante (paragraphe 5.5.1). Par contre, lorsque l'on utilise une cellule prismatique pour liquides contenant un colorant dont une bande d'absorption est dans le visible, le spectre est altéré de façon notable (problème 3.50). Toute substance possède des bandes d'absorption quelque part dans le spectre, si bien que le terme *dispersion anormale*, émanant des connaissances de la fin du XIX^e siècle, est fort mal choisi.

Comme on l'a vu, les atomes d'une molécule peuvent également vibrer autour de leurs positions d'équilibre. Mais les noyaux étant lourds, leurs fréquences d'oscillation naturelles sont basses et correspondent à l'infrarouge. Les molécules comme celles d'H₂O et de CO₂ présentent des résonances à la fois dans l'infrarouge et dans l'ultraviolet. Lorsque de l'eau est piégée dans un morceau de verre au cours de sa fabrication, la présence de ces oscillateurs moléculaires provoque une bande d'absorption dans l'infrarouge. La présence d'oxydes peut aussi introduire de l'absorption du verre dans l'infrarouge. La figure 3.42 indique les courbes de $n(\omega)$ (de l'ultraviolet à l'infrarouge) pour plusieurs cristaux optiques importants. On notera la croissance des indices dans l'UV et leur décroissance dans l'IR. Aux fréquences, encore plus basses, des ondes radio, le verre est de nouveau transparent. En comparaison, un vitrail a clairement une résonance dans le visible où il absorbe une bande particulière de fréquences et transmet la couleur complémentaire.

En conclusion, retenons que si la fréquence du faisceau incident est supérieure à n'importe lequel des termes ω_{0j} , alors $n^2 < 1$ et $n < 1$. Une telle situation peut se produire, par exemple, si l'on envoie un faisceau de rayons X sur une

plaque en verre. Cette expérience conduit à un résultat étonnant, puisqu'il mène à $v > c$, en contradiction avec la théorie de la relativité restreinte. Ce comportement sera reconsidéré, lorsque l'on discutera de la notion de vitesse de groupe (paragraphe 7.6).

On peut donc retenir que dans le visible, la polarisation électronique est le mécanisme qui détermine $n(\omega)$. De façon classique, on imagine des oscillateurs à électrons vibrant à la fréquence de l'onde incidente. Lorsque la fréquence de l'onde diffère notablement de la fréquence caractéristique ou naturelle, les oscillations sont faibles et il y a peu d'absorption dissipative. Par contre, à la résonance, l'amplitude des oscillations augmente et le champ effectue une quantité plus importante de travail sur les charges. L'énergie électromagnétique qui est prélevée à l'onde est convertie en énergie mécanique et dissipée thermiquement dans le milieu. On parle alors de *pic ou de bande d'absorption*. Le matériau, bien qu'essentiellement transparent pour les autres fréquences, devient alors relativement opaque aux composantes du rayonnement incident correspondant à ses fréquences caractéristiques (voir photo).

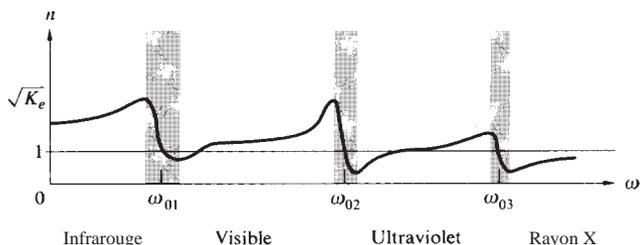


Figure 3.41 Indice de réfraction en fonction de la fréquence.

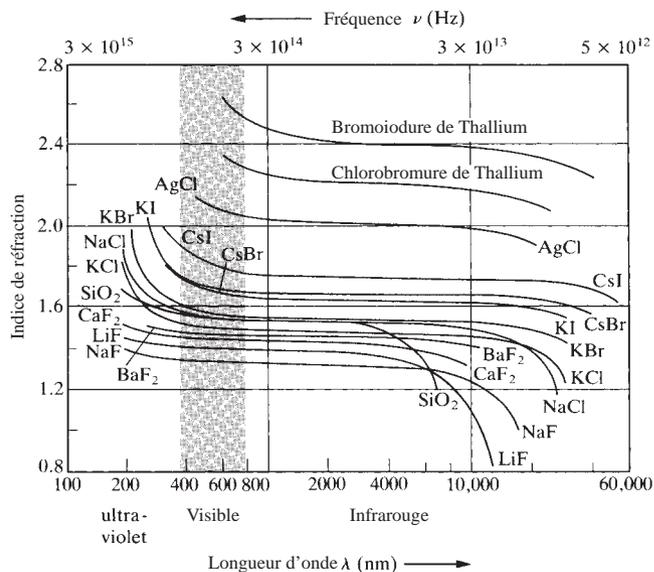


Figure 3.42 Indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde et de la fréquence pour différents cristaux optiques importants. (Adapté de données publiées par The Harshaw Chemical Co.)

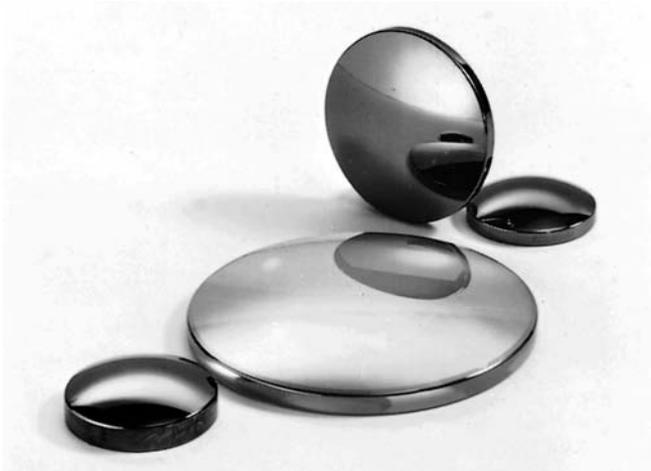
3.6 Le spectre électromagnétique du photon

Lorsque Maxwell publia, en 1867, la première version de sa théorie électromagnétique, la gamme de fréquences connues ne s'étendait que de l'infrarouge à l'ultraviolet, en passant par le visible. Bien que cette région soit d'une importance majeure pour l'optique, elle ne représente qu'une infime portion du vaste spectre électromagnétique (figure 3.43). Ce paragraphe énumère les principaux domaines (qui parfois se recoupent) du spectre électromagnétique.

3.6.1 Ondes radio

En 1887, huit ans après la mort de Maxwell, Heinrich Hertz, alors professeur de physique à la *Technische Hochschule* de Karlsruhe, en Allemagne, réussit à produire et à détecter des ondes électromagnétiques*. Son émetteur consistait principalement en un éclateur à décharge (sorte de dipôle électrique oscillant). Comme antenne réceptrice, il utilisait un fil en

*David Huges fut peut-être le premier à accomplir véritablement cet exploit. Néanmoins, ses expériences de 1879 ne furent pas publiées et restèrent inconnues pendant des années.



Quelques lentilles faites en ZnSe, CdTe, GaAs, et Ge. Ces semi-conducteurs sont particulièrement utiles dans l'IR (2 μm à 30 μm), où ils sont hautement transparents, bien qu'ils soient relativement opaques dans le visible. (Photo Two-Six Incorporated.)

boucle ouverte terminé par un bouton de laiton à une extrémité et par une pointe fine de cuivre à l'autre. Une petite étincelle visible entre ces deux extrémités marquait la détection d'une onde électromagnétique incidente. Hertz focalisa le rayonnement, en détermina la polarisation, il le fit se réfléchir, se réfracter et interférer, créant ainsi des ondes stationnaires. Il mesura même sa longueur d'onde (un mètre près). Comme il le dit lui-même :

« J'ai réussi à produire plusieurs rayonnements électriques et à les utiliser dans les expériences élémentaires habituellement menées dans le visible et l'infrarouge... Nous pourrions même aller jusqu'à les qualifier de rayons de lumière de très grande longueur d'onde. Les expériences décrites me semblent, quoi qu'il en soit, éminemment adaptées pour clarifier le doute régnant sur la nature de la lumière, l'infrarouge et les ondes électromagnétiques. »

Les ondes découvertes par Hertz sont celles qui sont à présent qualifiées d'*ondes radio* (ou *radiofréquence*). Elles s'étendent de quelques hertzs à environ 10^9 Hz (correspondant à des longueurs d'onde de quelques kilomètres à 0,3 m environ). Ces ondes sont en général émises par une grande diversité de circuits électriques. Par exemple, le courant alternatif à 60 Hz des lignes à haute tension rayonne avec une longueur d'onde de 5×10^6 m. Il n'y a pas de limite maximale à la longueur d'onde théorique des ondes radio. En effet, on a détecté, sur Terre, des ondes de plus de 28 millions de kilomètres de long provenant de l'espace intersidéral. Pratiquement, les plus hautes fréquences de la bande sont utilisées pour les diffusions de radio et de télévision.

À 1 MHz (10^6 Hz), un photon de fréquence radio possède une énergie de $6,62 \times 10^{-28}$ J ou 4×10^{-9} eV, ce qui est très faible. La structure corpusculaire du rayonnement radio est souvent peu évidente, et seul un transfert régulier d'énergie est apparent.

3.6.2 Micro-ondes

La gamme des micro-ondes s'étend d'environ 10^9 Hz à environ 3×10^{11} Hz. Les longueurs d'ondes correspondantes sont donc comprises entre 30 cm et 1 mm. De leur côté, les rayonnements capables de pénétrer l'atmosphère terrestre vont de moins de 1 cm jusqu'à presque 30 m. Les micro-ondes sont d'un intérêt tout particulier pour les communications entre véhicules dans l'espace, ainsi que pour la radioastronomie. Plus spécifiquement, les atomes d'hydrogène neutre, répartis

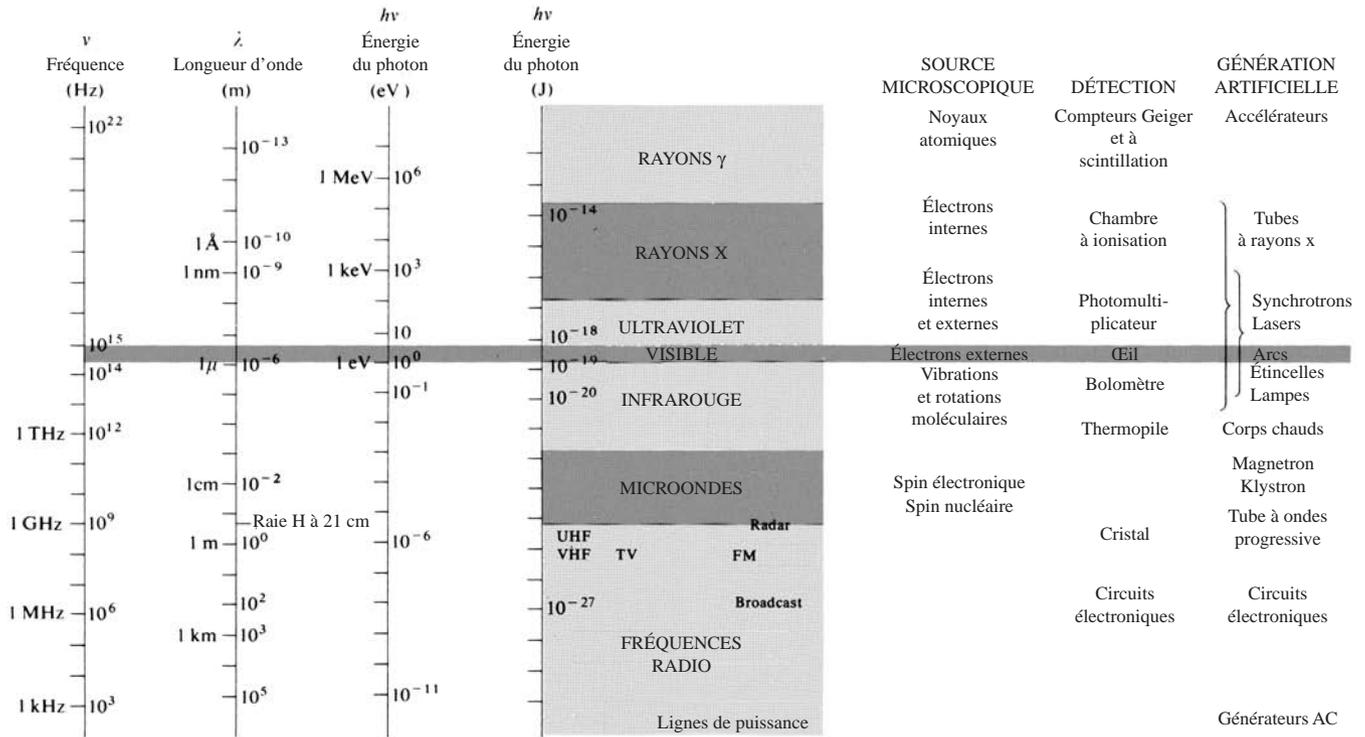


Figure 3.43 Spectre électromagnétique

un peu partout dans l'espace, émettent des micro-ondes à 21 cm (1 420 MHz). Bon nombre d'informations sur la structure de notre galaxie, et des autres, ont été récoltées grâce à cette émission.

Les molécules peuvent absorber et émettre de l'énergie par une modification en vibration ou en rotation de leurs mouvements ou des atomes qui les composent. Une fois encore, l'énergie associée à ces deux formes de mouvements est quantifiée et les molécules possèdent donc des niveaux d'énergie rotationnels et vibrationnels, en plus de ceux dus à leurs électrons. Seules les molécules polaires peuvent subir des forces, par l'intermédiaire du champ \vec{E} d'une onde électromagnétique incidente. Celui-ci les force à s'aligner et elles peuvent alors absorber un photon et effectuer une transition rotationnelle vers un état excité. Vu que les molécules les plus massives ne sont pas capables d'être déplacées facilement, on peut anticiper qu'elles possèdent des fréquences de résonance rotationnelle basses (depuis l'IR lointain, à 0,1mm, aux micro-ondes, à 1 cm). Si l'on soumet, par exemple, des molécules d'eau, qui sont polaires (figure 3.37), à une onde électromagnétique, elles

se mettent à tourner en essayant de rester en alignement avec le champ alternatif \vec{E} . Ce phénomène est particulièrement vigoureux aux fréquences rotationnelles. Par conséquent, les molécules d'eau absorbent très efficacement le rayonnement micro-onde ou les fréquences proches. Le four micro-ondes (12,2 cm, 2,45 GHz) constitue une application évidente de ce phénomène. De leur côté, les molécules non polaires, comme le dioxyde de carbone, l'hydrogène, l'azote, l'oxygène ou le méthane, ne peuvent pas effectuer des transitions rotationnelles en absorbant des photons.

À l'heure actuelle, les micro-ondes sont utilisées dans de nombreux domaines, de la transmission des conversations téléphoniques à la cuisine (décongélation, cuisson), du guidage des avions, à la chasse aux chauffards (par radar), en passant par l'étude des origines de l'univers, les télécommandes de portes de garage, la photographie de la surface de la planète... Elles sont aussi utiles pour l'étude de l'optique physique en permettant des montages expérimentaux de dimensions acceptables.

Les photons micro-ondes de basses fréquences ont une énergie faible et l'on peut s'attendre à ce qu'ils soient



Antenne micro-onde au sommet de la Tour Eiffel à Paris. (Photo E.H.)

uniquement créés par des circuits électriques. Cette sorte d'émissions peut cependant être la conséquence de transitions atomiques, si les niveaux impliqués sont proches. L'état fondamental apparent de l'atome de césium est un bon exemple. Il s'agit d'une paire de niveaux peu espacés et les transitions de l'un à l'autre font intervenir une énergie de seulement $4,14 \times 10^{-5}$ eV. L'émission micro-onde résultante a une fréquence de $9,192\,631\,77 \times 10^9$ Hz. C'est ce principe qu'utilisent les fameuses horloges au césium qui représentent dorénavant le standard pour les unités de fréquence et de temps.

La bande de radiation entre les micro-ondes et l'infrarouge (de 50 GHz à 10 THz) est souvent appelée *rayonnement* -

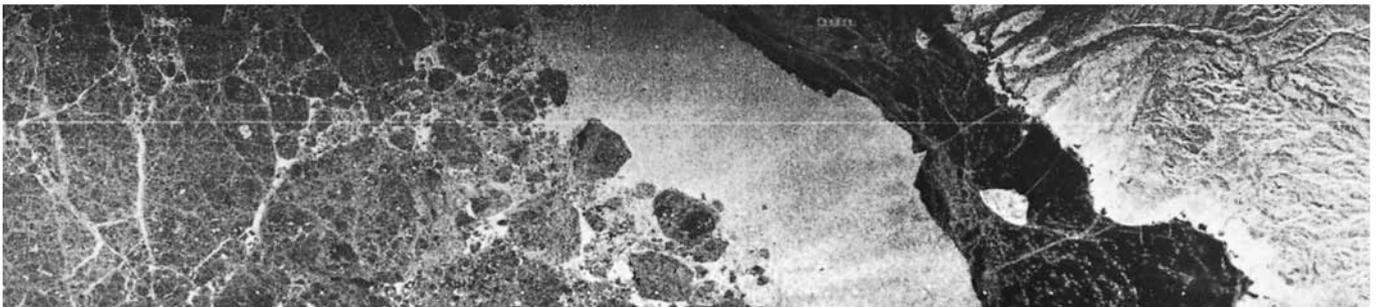


Une photo de barre chocolatée prise en utilisant des rayons T. Les noisettes, qui étaient cachées derrière le chocolat, deviennent visibles par réfraction. (Photo V. Rudd, Picometrix, Inc.)

terahertz ou *rayons-T*. Ils ne sont pas absorbés par la plupart des matériaux secs non polaires, comme le plastique, le papier ou la graisse ; l'eau absorbe les rayons-T. En outre, ils sont réfléchis par les métaux du fait de leurs électrons libres. En conséquence, ils peuvent être utilisés pour imager des structures internes, invisibles par d'autres moyens (voir photo).

3.6.3 L'infrarouge

La région infrarouge, qui s'étend approximativement de 3×10^{11} Hz à 4×10^{14} Hz, fut découverte par le célèbre astronome Sir William Herschel (1738-1822) en 1800.



Cette photographie de 30 km sur 120 km a été prise par le satellite Seasat à 800 km au-dessus du nord-est du Canada. L'aspect général est assez étrange car c'est en fait une image radar ou micro-onde. La région plissée, sur la droite, est le Canada. La petite masse claire en forme de coquillage est l'île de Banks, prise par les nouvelles glaces de l'année (bande noire). Adjacente à cette zone, est l'eau non gelée, qui apparaît grise et lisse. La partie tachetée gris foncé sur la gauche est la banquise. Les nuages n'apparaissent pas, car le radar peut voir au travers d'eux.

Comme son nom l'indique, cette bande de radiation électromagnétique vient immédiatement après la lumière rouge. L'infrarouge ou IR est également divisé en quatre régions : les *infrarouges proches*, immédiatement après le visible (780-3 000 nm) ; les *infrarouges intermédiaires* (3 000-6 000 nm) ; les *infrarouges lointains* (6 000-15 000 nm) et les *infrarouges extrêmes* (15 000 nm-1 mm). Cela constitue bien sûr une division assez libre et la nomenclature n'est pas universelle. Le rayonnement aux grandes longueurs d'ondes peut provenir soit d'oscillateurs micro-ondes, soit de sources incandescentes (i.e. des oscillateurs moléculaires). En effet, tout matériau rayonne et absorbe dans l'infrarouge par agitation thermique des molécules qui le constituent.

Les molécules d'un milieu dont la température est supérieure au zéro absolu (-273 °C) rayonnent dans l'infrarouge, même très faiblement (paragraphe 13.1.1). D'un autre côté, l'infrarouge est généreusement émis en spectre continu par les corps chauds, comme les chauffages électriques, les braises, et n'importe quel objet « chaud ». À peu près la moitié de l'énergie électromagnétique du Soleil est dans l'infrarouge, et une ampoule normale rayonne beaucoup plus d'infrarouge que de visible. Comme toutes les créatures au sang chaud, nous sommes également des émetteurs d'infrarouges. Le corps humain rayonne dans l'infrarouge de manière assez faible, de $3\text{ }\mu\text{m}$ jusqu'aux IR extrêmes, avec un pic au voisinage de $10\text{ }\mu\text{m}$. Cette émission est exploitée dans les lunettes de vision nocturne ainsi que par certains serpents sensibles à la chaleur (crotales, vipères, boas constrictors...) qui ont tendance à se nourrir la nuit.

En plus de sa rotation, une molécule peut vibrer de plusieurs manières, selon que ses atomes vibrent dans des directions diverses, les uns par rapport aux autres. Pour cela, la molécule n'a pas besoin être polaire. Même un système linéaire comme le CO_2 possède trois modes vibrationnels

élémentaires et de nombreux niveaux d'énergie, chacun pouvant être excité par les photons. Les spectres d'émission et d'absorption vibrationnelles associés sont, en règle générale, dans l'IR (de $1\text{ }\mu\text{m}$ à $100\text{ }\mu\text{m}$). La plupart des molécules possèdent à la fois des résonances rotationnelles et vibrationnelles dans l'IR. Elles constituent, de fait, de bons absorbeurs (il suffit de mettre simplement son visage au Soleil pour ressentir l'accumulation d'énergie thermique...). C'est d'ailleurs pour cela que les infrarouges sont souvent appelés, de manière impropres, les « ondes de chaleur ».

Le rayonnement infrarouge peut être mesuré avec des détecteurs qui captent la chaleur générée par absorption sur une surface noircie. Il existe, par exemple, des détecteurs à thermocouples, pneumatiques (cellules de Golay), pyroélectriques et bolométriques, dont la variation de température est traduite par une variation de voltage, de volume de gaz, de polarisation électrique et de résistance. Le détecteur peut être couplé à un système de balayage, afin de produire une image infrarouge similaire à une image de télévision (voir photo). Ce procédé porte le nom de *thermographie*. Il est utile pour le diagnostic de toutes sortes de problèmes, allant des transformateurs défectueux aux gens fiévreux. Il existe également des films photographiques sensibles aux infrarouges proches ($< 1\text{ }300\text{ nm}$). De même, les ingénieurs ont mis au point des satellites d'observation IR tournés vers la Terre (satellites espions surveillant les lancements de missiles, satellites civils pour la surveillance de l'agriculture...) ou vers l'espace (satellites de recherche astronomique). Il existe également des missiles à guidage IR, des lasers IR ou des télescopes IR scrutant le ciel.

De petites différences dans la température des objets et de leur environnement provoquent une émission IR caractéristique, est exploitée dans de nombreuses applications allant de la détection de tumeur du cerveau ou de cancer du sein à celle de cambrioleurs. D'autre part, citons le cas du laser CO_2 , qui constitue une source continue très efficace, à des niveaux appréciables, de 100 W ou plus. Il est, ainsi, couramment utilisé dans l'industrie, en particulier pour le découpage de précision et le traitement par la chaleur. Ses émissions dans l'IR extrême ($18,3\text{ }\mu\text{m} - 23\text{ }\mu\text{m}$) sont facilement absorbées par les tissus humains, faisant du faisceau laser CO_2 , un scalpel efficace, cautérisant en même temps qu'il coupe.

3.6.4 La lumière visible

La lumière visible est le rayonnement électromagnétique correspondant à l'étroite bande de fréquences situées entre $3,84 \times 10^{14}\text{ Hz}$ et environ $7,69 \times 10^{14}\text{ Hz}$ (soit entre $0,38\text{ }\mu\text{m}$



Thermographie de l'auteur. Noter que la barbe est plus froide que le reste du visage. On peut aussi voir à quel point le front s'est découvert depuis la première édition de l'ouvrage ! (Photo E.H.)



Un bras observé dans la bande s'étendant de 468,5 nm (visible) à 827,3 nm (IR proche). Ce procédé a de nombreuses applications biomédicales, dont la détection pré-maturée du cancer de la peau.

et 0,78 μm , voir tableau 3.4). Elle est généralement produite par un réarrangement des électrons extérieurs des atomes et des molécules (n'oublions pas le rayonnement synchrotron qui est un mécanisme différent)*.

Dans un matériau incandescent, un filament de métal chaud et brillant ou le Soleil, les électrons sont accélérés aléatoirement et subissent des collisions fréquentes. Il en résulte une émission à spectre large, appelée **rayonnement thermique**, qui constitue une source majeure de lumière. Par contre, si l'on remplit un tube avec un gaz et qu'on y fait passer une décharge électrique, les atomes qui le constituent deviennent excités et se mettent à rayonner. La lumière émise est caractéristique des niveaux d'énergie particuliers des atomes en question. Elle est composée d'une série de *bandes* de fréquences, ou *raies d'émission*, bien définies. Un tel dispositif porte le nom de *tube*

*Il n'y a pas de besoin de définir la lumière en termes de physiologie humaine. Au contraire, de nombreux éléments indiquent que cela n'est pas judicieux. Voir par exemple T. J. Wang, « Visual Response of the Human Eye to X Radiation ». *Am. J. Phys.* **35**, 779 (1967).

TABLEAU 3.4 Fréquences approximatives et gamme de longueurs d'onde dans le vide pour les différentes couleurs

Couleur	λ_0 (nm)	ν (THz)*
Rouge	780–622	384–482
Orange	622–597	482–503
Jaune	597–577	503–520
Vert	577–492	520–610
Bleu	492–455	610–659
Violet	455–390	659–769

*1 térahertz (THz) = 10^{12} Hz, 1 nanomètre (nm) = 10^{-9} m.

à *décharge gazeuse*. Lorsque le gaz est l'isotope krypton 86, les raies sont particulièrement étroites (spin nucléaire zéro, et donc pas de structure hyperfine). La raie orange rouge du Kr86, dont la longueur d'onde dans le vide est 605,780 210 5 nm, a une largeur de seulement 0,000 47 nm, c'est-à-dire, à peu près, 400 MHz. Celle-ci a d'ailleurs servi, jusqu'en 1983, de référence internationale de longueur (avec le postulat que 1 650 763,73 longueurs d'onde représentent une longueur d'un mètre).

C'est le grand Newton qui, le premier, comprit que la **lumière blanche** est en fait un mélange de toutes les couleurs du spectre visible, grâce aux expériences qu'il réalisa avec des prismes. Il comprit que le prisme ne créait pas les couleurs en altérant la lumière blanche, comme on l'avait pensé pendant des siècles, mais qu'il séparait simplement la lumière en ses

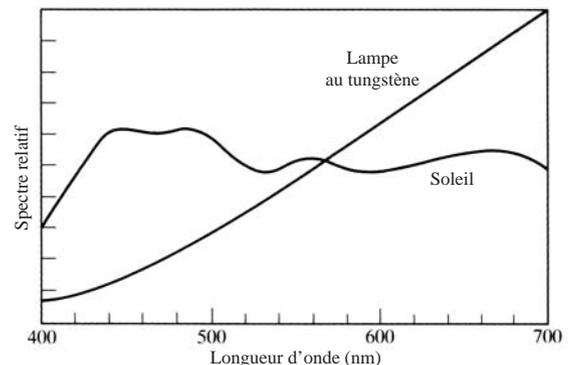


Figure 3.44 Spectres de la lumière solaire et d'une lampe à tungstène.

couleurs constituantes. Sans surprise, le concept même de *blancheur* semble dépendre de notre perception du spectre de la lumière du jour, sur Terre, une distribution spectrale qui s'estompe plus rapidement dans le violet que dans le rouge (figure 3.44). La vision humaine perçoit comme blanc un large mélange de fréquences, dont la répartition spectrale est généralement uniforme. C'est ce que l'on veut dire lorsque l'on parle de « lumière blanche », mélange de différentes distributions de couleurs, sans que l'une prédomine. Néanmoins, plusieurs distributions différentes apparaîtront plus ou moins blanches. On sait qu'une feuille de papier est blanche, qu'on la regarde sous une lumière incandescente (lampe) ou sous la lumière du Soleil. Cependant, ces blancs sont assez différents. En fait, il y a beaucoup de paires de faisceaux de lumière colorés (par exemple le 656 nm rouge et le 492 nm cyan) qui produiront la sensation de blancheur et l'œil ne peut pas toujours distinguer les unes des autres. L'œil ne peut pas analyser la lumière et ses composantes harmoniques de la même façon que l'oreille pour le son (paragraphe 7.3).

Les couleurs sont avant tout des réponses physiologiques et psychologiques humaines subjectives, face à des rayonnements de longueurs d'onde différentes, qui vont de 0,78 μm dans le rouge à 0,38 μm dans le violet, en passant par l'orange, le jaune, le vert et le bleu (tableau 3.4). La couleur n'est donc pas une propriété de la lumière. Elle constitue plutôt une manifestation du système électrochimique sensoriel composé des yeux, des nerfs et du cerveau. Pour être plus précis, on ne devrait donc pas dire « lumière jaune », mais plutôt « lumière qui semble jaune ». De manière remarquable, plusieurs mélanges de longueurs d'onde peuvent provoquer la même impression de couleur. Un faisceau de lumière rouge mélangé à un faisceau de lumière verte provoque ainsi une sensation de *lumière jaune*, même si aucune fréquence jaune n'est réellement présente. Apparemment, l'œil et le cerveau font la moyenne des données reçues et « voient » jaune (paragraphe 4.9). C'est d'ailleurs grâce à cela qu'un poste de télévision peut fonctionner avec seulement trois composantes : rouge, verte et bleue (système RVB).

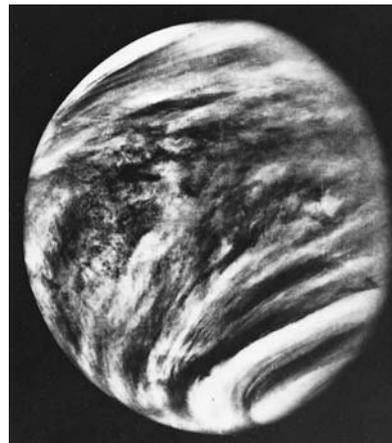
Dans le rayonnement du Soleil, avec un éclairement de 10^{21} photons/ $\text{m}^2\cdot\text{s}$, on peut généralement s'attendre à ce que la nature quantique du transport d'énergie soit masquée. Cependant, comme les photons du visible ont assez d'énergie pour produire des effets distincts de manière individuelle, la granularité devient évidente dans les faisceaux très faibles. Les recherches sur la vision humaine montrent que l'œil peut détecter jusqu'à environ une dizaine de photons, voire même un seul.

3.6.5 L'ultraviolet

Découvert par le physicien allemand Johann Wilhelm Ritter (1776-1810), l'ultraviolet est adjacent au visible. Il se situe approximativement entre 8×10^{14} Hz et $3,4 \times 10^{16}$ Hz. Les énergies des photons vont donc globalement de 3,2 eV à 100 eV. Les rayons ultraviolets, ou UV, du Soleil ont suffisamment d'énergie pour ioniser les atomes dans la haute atmosphère, créant l'ionosphère. Les énergies de ces photons sont du même ordre de grandeur que celles de nombreuses réactions chimiques et les rayons ultraviolets peuvent donc servir à déclencher ces réactions. Heureusement, la couche d'ozone (O_3) de l'atmosphère absorbe un flux solaire UV, ce qui serait sinon fatal. À des longueurs d'onde de moins de 290 nm, les UV sont germicides (ils tuent les micro-organismes). L'aspect granulaire du rayonnement devient de plus en plus évident lorsque la fréquence augmente.

Les humains ne peuvent pas voir les UV, car la cornée de l'œil les absorbe, en particulier aux très courtes longueurs d'ondes. Par contre, une personne qui a subi une ablation chirurgicale de la cornée peut en voir une partie ($\lambda > 300$ nm). En plus des insectes, comme les abeilles, certaines autres créatures sont visuellement sensibles aux UV. Les pigeons sont par exemple capables de reconnaître des formes illuminées par les UV. Ils emploient d'ailleurs probablement cette technique pour naviguer par rapport au Soleil même lorsque le ciel est couvert.

Un atome émet un photon UV lorsqu'un de ses électrons passe dans un état fortement excité. Par exemple, l'électron le plus périphérique de l'atome de sodium peut être élevé à des niveaux d'énergie de plus en plus hauts. Si l'énergie appliquée



Photographie de Vénus prise dans l'ultraviolet par la sonde *Mariner 10*.

dépasse 5,1 eV, l'électron est finalement arraché et l'atome est alors *ionisé*. Si, par la suite, l'ion se recombine avec un électron libre, ce dernier redescend rapidement dans son état fondamental, probablement par une série de sauts provoquant chacun l'émission d'un photon. Il est cependant possible que l'électron ne fasse qu'un seul long saut vers l'état fondamental, émettant ainsi un unique photon UV, à 5,1 eV. Des UV encore plus énergétiques peuvent également être engendrés par excitation des électrons des couches intérieures, plus fortement liés.

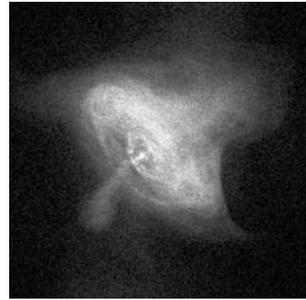
Les électrons de valence non appariés d'atomes isolés peuvent être une source importante de lumière colorée. Mais, lorsque ces mêmes atomes se combinent pour former des molécules ou des solides, les électrons de valence s'apparient dans le processus de création de la liaison chimique. Ainsi, les électrons deviennent souvent plus fortement liés et leurs états excités moléculaires sont plus hauts dans l'UV. Les molécules de l'atmosphère, comme N_2 , O_2 , CO_2 , et H_2O présentent d'ailleurs toutes ce type de résonance électronique caractéristique dans l'UV.

De nos jours, il existe, dans le commerce, des films photographiques ainsi que des microscopes, des télescopes, des sources synchrotron ou des lasers qui peuvent respectivement détecter ou émettre des ultraviolets.

3.6.6 Les rayons X

Les rayons X furent découverts par accident, en 1895, par le physicien allemand Wilhelm Conrad Röntgen (1845-1923). S'étendant en fréquence d'environ $2,4 \times 10^{16}$ Hz à 5×10^{19} Hz, ils ont des longueurs d'ondes extrêmement courtes, typiquement plus petites que les dimensions d'un atome. De fait, les énergies de leurs photons (100 eV à 0,2 MeV) sont assez grandes pour que des quanta de rayons X entrent individuellement en interaction avec la matière, de façon corpusculaire, presque comme des balles de fusil. Un des mécanismes les plus pratiques pour produire des rayons X est la décélération rapide de particules chargées à grande vitesse. L'émission large fréquence de rayons X qui en résulte porte le nom de *bremsstrahlung* (mot allemand signifiant « radiation par freinage »). Elle se produit donc lorsqu'un faisceau d'électrons énergétiques est lancé sur une cible matérielle, comme une plaque de cuivre. Les collisions avec les noyaux de Cu produisent des déflexions du faisceau d'électrons qui émettent, à leur tour, des rayons X.

En plus de cela, les atomes de la cible peuvent être ionisés pendant le bombardement. Si un électron des couches basses,



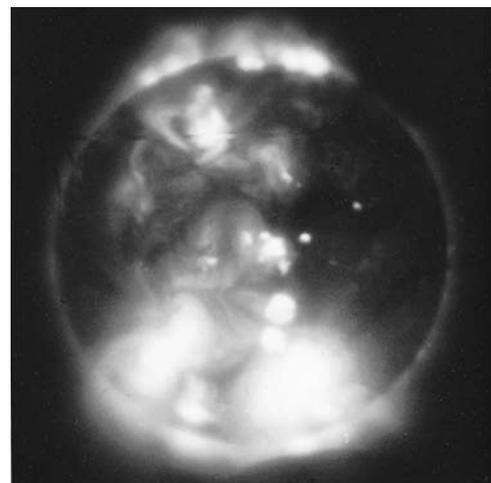
Cette image très détaillée de la Nébuleuse du Crabe (voir p. 66) a été prise récemment dans les rayons X avec le télescope spatial américain Chandra X Ray. L'image révèle les localisations des particules les plus énergétiques du pulsar.



Une image optique de la Nébuleuse du Crabe. La lumière qui forme cette image provient de particules d'énergie intermédiaire. Les filaments sont dus aux gaz chauds qui peuvent avoir des températures de dizaines de milliers de degrés.

fortement lié au noyau, est arraché, l'atome émet des rayons X pendant que le nuage d'électrons retourne dans son état fondamental. Les émissions quantifiées résultantes sont spécifiques de l'atome cible. Ce rayonnement *caractéristique* est aussi très utile pour révéler la structure des niveaux d'énergie des atomes étudiés.

Les films de radiographie médicale ne produisent généralement rien de plus que de simples ombres, plutôt que des images



Une des premières photographies en rayons X du Soleil, prise en mars 1970. La couronne de la Lune est visible dans le coin en bas à droite. (Photo Dr. G. Vaiana et NASA.)

photographiques proprement dites. Il n'a jamais été possible de fabriquer des lentilles à rayons X qui soient utilisables. Cependant, les méthodes modernes de focalisation, à base de miroirs (paragraphe 5.4), ont ouvert une nouvelle ère pour l'imagerie à rayons X. Celles-ci permettent de créer des images détaillées de toutes sortes d'objets, comme le Soleil (voir photo), les lointains pulsars et les trous noirs, des objets célestes à des températures de plusieurs millions de degrés qui émettent de façon prépondérante dans les rayons X. Des télescopes à rayons X en orbite offrent dorénavant de nouveaux moyens d'investigation de l'univers (voir photo). Il existe également des microscopes à rayons X, des réseaux de diffraction pour rayons X, des interféromètres ; et la recherche continue sur l'holographie à rayons X. En 1984, aux États-Unis, un groupe du *Lawrence Livermore National Laboratory* a réussi à produire une radiation laser à une longueur d'onde de 20,6 nm. Bien que cette valeur se situe plutôt dans l'ultraviolet extrême (XUV), elle est assez proche de la région des rayons X mous. Le premier laser aux rayons X a, ainsi, vu le jour.

3.6.7 Les rayons gamma

Les rayons gamma sont les radiations électromagnétiques qui possèdent les plus hautes énergies (de 10^4 eV à environ 10^{19} eV) et les plus courtes longueurs d'onde. Ils sont émis par des particules subissant des transitions à l'intérieur du noyau atomique. Un seul photon de rayons gamma transporte telle-ment d'énergie qu'il peut être détecté sans difficulté. Toutefois, sa longueur d'onde est si petite qu'il est difficile d'observer ses propriétés ondulatoires.

Ainsi se termine ce panorama général, qui est passé du comportement ondulatoire des fréquences-radio à celui corpusculaire, des rayons gamma. Quelque part, non loin du centre (logarithmique) du spectre, se situe la gamme de fréquences de la lumière visible. Comme pour toute autre radiation électromagnétique, son énergie est quantifiée, mais plus qu'ailleurs, ce que l'on « voit » dépend vraiment de comment on « regarde ».

3.7 La théorie quantique des champs

Une particule chargée exerce des forces sur d'autres particules chargées. Elle crée un ensemble d'interactions électromagnétiques autour d'elle, qui s'étend dans l'espace. Ce point de vue physique mène tout droit au concept du champ électrique, qui

est une représentation de la manière dont les interactions électromagnétiques se révèlent à l'échelle macroscopique. Le champ électrique statique est en pratique une conception spatiale résumant les interactions entre charges. Grâce aux travaux de Faraday, on a élargi la notion de champ, en réalisant qu'une charge met en place un champ \vec{E} dans l'espace et qu'une autre charge, placée dans ce champ, réagit directement avec lui et inversement. Ce qui n'était au départ qu'un outil pour cartographier la distribution des forces (quelle qu'en fût la cause) est donc devenu une entité à part entière, un champ, capable d'exercer des forces par lui-même. La situation décrite reste simple, même si plusieurs questions viennent à l'esprit. Le champ statique \vec{E} a-t-il une réalité physique de par lui-même ? Si oui, remplit-il l'espace d'énergie, et comment ? Y a-t-il une circulation de quoi que ce soit ? Comment le champ produit-il une force sur une charge ? Son influence est-elle instantanée ?

Une fois la réalité du champ électrique établie, les physiciens commencèrent à imaginer les perturbations de ce milieu qui semblait embrasser tout l'espace : *la lumière était donc une onde électromagnétique dans un champ électromagnétique*. Bien qu'il soit assez facile d'envisager une onde qui traverse un champ existant (p. 64), il n'est pas aussi évident de conceptualiser une impulsion isolée, lancée dans l'espace, comme celle de la figure 3.45. Il n'y a effectivement pas de champ statique qui occupe l'espace à l'avant de l'impulsion. Si l'impulsion avance dans le champ électromagnétique, elle

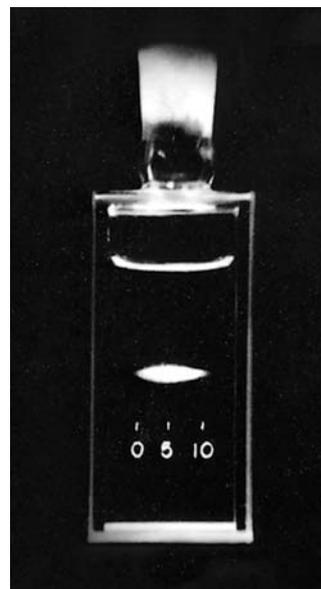


Figure 3.45 Une impulsion ultracourte de lumière dans le vert provenant d'un laser dopé au néodyme. Cette impulsion est passée au travers d'une cellule à eau dont la paroi était graduée en millimètres. Durant cette exposition de 10 picosecondes, l'impulsion s'est déplacée d'environ 2,2 mm. (Photo Bell Laboratories.)

doit d'abord créer ce champ elle-même au cours de sa progression ! Ce concept n'est pas impossible à imaginer, mais il n'est certainement pas représentatif de ce que l'on appellerait une onde classique. Pour toute onde traditionnelle, un milieu en équilibre est le point de départ fondamental. Il existe en tout point, avant et après le passage de l'onde. Cette idée d'onde électromagnétique, si puissante d'un point de vue mathématique, n'est donc pas si intuitive de manière conceptuelle.

Dès 1905, Einstein considérait déjà les équations de la théorie électromagnétique classique comme rien de plus que des descriptions des valeurs moyennes des quantités considérées. Dans une lettre à Planck, il s'exprime : « Pour moi, il paraît absurde que l'énergie soit distribuée de façon continue dans l'espace sans que l'on suppose l'existence d'un éther... Bien que la représentation de Faraday ait été utile au développement de l'électrodynamique, il ne s'ensuit pas, selon moi,... que cette vue doit être maintenue dans ses moindres détails ». La théorie classique était en adéquation avec les mesures effectuées, mais elle ne tenait pas compte de la structure corpusculaire du phénomène à petite échelle. Utilisant des arguments tirés de la thermodynamique, Einstein proposa que les champs électrique et magnétique devaient être quantifiés et non continus. Après tout, la théorie classique était bien née des dizaines d'années avant que l'électron ne soit découvert. Si la charge (la source fondamentale de l'électromagnétique) était quantifiée, la théorie ne devrait-elle pas le refléter ?

Aujourd'hui, la physique est guidée par la mécanique quantique, une théorie hautement mathématique qui, bien qu'extrêmement puissante pour l'obtention et la prédiction des résultats, reste très abstraite. La mécanique quantique est une théorie révolutionnaire. En particulier, la sous-discipline qui traite des microparticules et de leurs interactions, la *théorie quantique des champs* (Quantum Field Theory), est sous ses diverses formes la plus fondamentale et indéniablement la plus couronnée de succès des théories physiques. Les quanta de lumière sont en parfaite adéquation avec cette théorie, du fait de la quantification du champ électromagnétique. Son principe général est que toutes les particules sont originaires de leurs propres champs individuels. **Le champ constitue ainsi une sorte de matrice originelle.** Ainsi l'électron est le quantum du champ électronique, le proton est le quantum du champ protonique, et ainsi de suite.

À l'heure actuelle, il existe deux philosophies distinctes dans la théorie quantique des champs. L'une est centrée sur le champ, tandis que l'autre est centrée sur la particule. Dans le premier point de vue, *les champs sont les entités fondamentales et les particules ne sont que les quanta des champs.* Dans

le second point de vue, *les particules sont les entités fondamentales et les champs ne sont que les états cohérents macroscopiques des particules.* La tradition des champs remonte aux physiciens L. de Broglie (1923), E. Schrödinger, P. Jordan et W. Pauli dont les travaux ont posé les fondements de la variante de la mécanique quantique souvent appelée *mécanique ondulatoire*. La tradition des particules commença avec les travaux de W. Heisenberg, bien que son guide spirituel ait été P. A. M. Dirac avec sa théorie de la paire électron-positron. La branche de la théorie quantique des champs dédiée au traitement quantique relativiste de l'interaction électromagnétique est appelée *électrodynamique quantique* (notée QED pour le terme anglais *Quantum Electrodynamics*), et comprend des raisonnements centrés aussi bien sur le champ que sur la particule. Quelques-unes des idées de base de l'électrodynamique quantique ont été rendues accessibles par R. Feynman, et dans la mesure où leur contribution concerne l'Optique, on les explorera plus loin dans l'ouvrage (p. 142).

Grâce à la théorie quantique des champs, les physiciens actuels pensent que tous les champs sont quantifiés et que chacune des quatre forces fondamentales (gravitationnelle, électromagnétique, interactions forte et faible) est contrôlée par une sorte de particule de champ. Ces *bosons messagers* sont continuellement absorbés et émis par les particules matérielles en interaction (électrons, protons, etc.). C'est cet échange qui *constitue* l'interaction. La particule qui intervient pour le champ électrique est le **photon virtuel**. Ce messenger sans masse voyage à la vitesse de la lumière et transporte de l'énergie et de la quantité de mouvement. Lorsque deux électrons se repoussent, c'est en émettant et en absorbant des photons virtuels et en transférant ainsi la quantité de mouvement de l'un à l'autre. Ce transfert est d'ailleurs une mesure de l'action de la force. Les particules messagères de la force électromagnétique sont appelées photons *virtuels* car ils sont enchaînés à l'interaction. Les photons virtuels ne peuvent jamais s'échapper pour être détectés directement par des instruments, aussi déroutant que cela soit philosophiquement et aussi difficile que cela rende la preuve de leur existence. Les photons virtuels (par opposition aux photons réels) n'existent, en effet, que comme moyens d'interaction. Ce sont des créatures théoriques dont le statut métaphysique reste à déterminer*.

Au plan macroscopique, les particules messagères peuvent se manifester sous la forme d'un champ continu, aussi longtemps

.....

*Pour ces questions, voir H. R. Brown and R. Harré, *Philosophical Foundations of Quantum Field Theory*.

qu'elles peuvent se regrouper en très grand nombre. Les particules fondamentales ont un moment angulaire intrinsèque, ou *spin* qui détermine les caractéristiques de ces regroupements. La théorie quantique annonce que le comportement du champ désiré ne peut se manifester que si les forces sont gérées par des particules messagères ayant des moments angulaires égaux à des multiples entiers de $h/2\pi$ (i.e. $0, h/2\pi, 2h/2\pi, 3h/2\pi \dots$). Le moment angulaire du photon virtuel est $1(h/2\pi)$; c'est une

particule de spin 1. La classe d'interactions extrêmement importante caractérisée par des messagers de spin 1 est connue sous le nom de **forces de jauge**. De fait, la force électromagnétique est le modèle pour toutes ces forces de jauge. Aujourd'hui, la magie de l'action à distance est expliquée via le non moins mystérieux phénomène d'échange de particules virtuelles. Mais on possède dorénavant une puissante théorie mathématique pour décrire ou prévoir les résultats de la physique.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Les solutions complètes des exercices (excepté ceux ayant un astérisque) figurent à la fin de l'ouvrage.

3.1 Soit une onde électromagnétique donnée (en unités SI) par les expressions $E_x = 0$, $E_y = 2 \cos[2\pi \times 10^{14}(t - x/c) + \pi/2]$, et $E_z = 0$.

- (a) Déterminer la fréquence, la longueur d'onde, la direction de propagation, l'amplitude, l'angle de phase initial et la polarisation de cette onde.
 (b) Écrire une expression pour la densité de flux magnétique par unité de surface.

3.2 Écrire une expression pour les champs \vec{E} et \vec{B} qui constituent une onde plane harmonique se propageant dans la direction $+z$. L'onde est polarisée linéairement et son plan de vibration est à 45° par rapport au plan yz .

3.3* En considérant l'équation (3.30), montrer que l'expression :

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$$

est correcte si elle s'applique à une onde plane pour laquelle la direction du champ électrique est constante.

3.4* Soit une onde électromagnétique dont le champ \vec{E} est suivant la direction y . Montrer que l'équation (3.27) :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

appliquée à l'onde harmonique \vec{B}

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t) \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \cos(kx - \omega t)$$

conduit au fait que :

$$E_0 = cB_0$$

en accord avec l'équation (3.30).

3.5* Soit une onde électromagnétique décrite (en unités SI) par l'expression suivante :

$$\vec{E} = (-3\hat{i} + 3\sqrt{3}\hat{j})(10^4 \text{ V/m})e^{i[\frac{1}{2}(\sqrt{5}x + 2y)\pi \times 10^7 - 9,42 \times 10^{15}t]}$$

Déterminer (a) la direction le long de laquelle le champ électrique oscille, (b) la valeur scalaire de l'amplitude du champ électrique, (c) la direction de propagation de l'onde, (d) le nombre d'onde et la longueur d'onde, (e) la fréquence et la pulsation, et (f) la vitesse.

3.6 Soit une onde électromagnétique se propageant dans la direction x positive dont le champ électrique est donné par :

$$\vec{E} = E_0 \hat{j} \sin \frac{\pi z}{z_0} \cos(kx - \omega t)$$

(a) Décrire qualitativement cette onde. (b) Déterminer une expression pour k . (c) Déterminer la vitesse de phase de l'onde.

3.7* Soit une onde EM harmonique, de longueur d'onde 550 nm, se propageant dans le vide dans la direction y , avec un champ électrique dans la direction z . (a) Quelle est la fréquence de cette onde ? (b) Déterminer ω et k . (c) Si le champ électrique a une amplitude de 600 V/m, quelle est l'amplitude du champ magnétique ? (d) Étant donné que $E(t)$ et $B(t)$ sont nuls à $x = 0$ et $t = 0$, écrire une expression appropriée pour chacun d'eux. Donner les unités correspondantes pour tous les paramètres demandés.

3.8* Déterminer l'énergie nécessaire pour charger un condensateur à plaques parallèles, en transférant la charge d'une plaque à l'autre. Considérer pour cela que l'énergie est contenue dans le champ entre les deux plaques et calculer la densité volumique d'énergie, u_E , de cette région, c'est-à-dire l'équation (3.31). Astuce : comme le champ électrique augmente pendant le processus, intégrer ou utiliser sa valeur moyenne $E/2$.

3.9* À partir de l'équation (3.32), démontrer que les densités d'énergie des champs électrique et magnétique sont égales ($u_E = u_B$) pour une onde électromagnétique.

3.10 La moyenne temporelle d'une fonction $f(t)$ sur un intervalle T est donnée par :

$$\langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t') dt'$$

où t' est une variable d'intégration. Si $\tau = 2\pi/\omega$ est la période d'une fonction harmonique, montrer que \vec{r}

$$\langle \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

et

$$\langle \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle = 0$$

lorsque $T = \tau$ et lorsque $T \gg \tau$.

3.11* Montrer qu'une formulation plus générale du problème précédent entraîne que :

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2} [1 + \text{sinc } \omega T \cos 2\omega t]$$

pour n'importe quel intervalle T .

3.12* À partir du problème précédent, démontrer que :

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2} [1 - \text{sinc } \omega T \cos 2\omega t]$$

pour n'importe quel intervalle T .

3.13* Démontrer que l'éclairement d'une onde EM harmonique est donné par :

$$I = \frac{1}{2c\mu_0} E_0^2$$

Déterminer alors l'éclairement dû à une onde plane dont le champ a une amplitude de 15 V/m.

3.14* Une ampoule électrique libère un flux énergétique de 20 W (la plupart dans l'IR). En la considérant comme un point source, calculer l'éclairement qu'elle fournit à 1 m de distance.

3.15* Soit une onde électromagnétique polarisée linéairement, se propageant dans le vide dans la direction $+x$ avec un plan de vibration dans le plan xy . Étant donné que sa fréquence est 10 Mhz et que son amplitude est $E_0 = 0,08$ V/m,

- Déterminer la période et la longueur d'onde de cette onde.
- Écrire une expression pour $E(t)$ et $B(t)$.
- Déterminer l'éclairement énergétique, $\langle S \rangle$, de cette onde.

3.16* En moyenne, la puissance émise par le Soleil est $3,9 \times 10^{26}$ W. Déterminer l'amplitude moyenne du champ électrique dû à ce rayonnement à la limite de l'atmosphère terrestre ($1,5 \times 10^{11}$ m du Soleil).

3.17 Soit une onde électromagnétique, d'amplitude scalaire 10 V/m, se propageant le long d'une ligne, dans le plan xy , à 45° de l'axe x , xy étant le plan de vibration. En considérant que k_x et k_y sont tous deux positifs, écrire une expression vectorielle décrivant l'onde. Calculer l'éclairement, sachant que l'onde se propage dans le vide.

3.18 Des impulsions d'UV de 2 ns sont émises par un faisceau laser de 2,5 mm de diamètre. Étant donné que chaque impulsion transporte une énergie de 6 J, déterminer (a) la longueur spatiale de chaque train d'onde et (b) l'énergie moyenne par unité de volume pour chaque impulsion.

3.19* Un laser produit des impulsions de 10^{-12} s dans le vide. Étant donné que l'éclairement est 10^{20} W/m², déterminer l'amplitude du champ électrique du faisceau.

3.20 Un laser de 1 mW produit un faisceau de 2 mm de diamètre. En considérant que la divergence du faisceau est négligeable, calculer la densité d'énergie dans le faisceau par unité de volume.

3.21* Un nuage de sauterelles avec une densité volumique de 100 insectes par mètre cube se déplace vers le nord à raison de 6 m/min. Quelle est la densité du flux de sauterelles par unité de surface, i.e. combien de sauterelles traverse une surface de 1 m \approx perpendiculaire à leur direction de propagation en 1 seconde ?

3.22 Un individu se tient sur le chemin d'ondes planes émises par une antenne de fréquence de 100 MHz et avec un éclairement de $19,88 \times 10^{-2}$ W/m². Calculer l'éclairement photonique, c'est-à-dire le nombre de photons par unité de temps et par unité de surface. Combien de photons, en moyenne, se trouvent dans un mètre cube de cette région ?

3.23* Déterminer le nombre de photons qui seraient émis par seconde par une ampoule jaune de 100 W, si l'on considérait que tout ce flux est à 550 nm. En fait, pour une lampe de 100 W ordinaire, seule une faible fraction (2,5 % de la puissance totale) est émise dans le visible.

3.24 Une ampoule de flash de 3 V et de 0,25 A convertit environ 1 % de la puissance électrique en lumière ($\lambda \approx 550$ nm). Si le faisceau a une section de 10 cm \approx et qu'il est approximativement cylindrique,

- Combien de photons sont émis par seconde ?
- Combien de photons occupent chaque mètre du faisceau ?
- Quel est l'éclairement dans le faisceau à la sortie de l'ampoule ?

3.25* Un point source isotrope quasi monochromatique émet un flux de 100 W. Quel est l'éclairement à une distance de 1 m. Quelles sont les amplitudes des champs \vec{E} et \vec{B} à ce point ?

3.26 En utilisant des arguments énergétiques, montrer que l'amplitude d'une onde cylindrique doit être inversement proportionnelle à \sqrt{r} . Tracer un diagramme rendant compte de la situation.

3.27* Quelle est la quantité de mouvement d'un photon X de fréquence 10^{19} Hz ?

3.28 Soit une onde électromagnétique incidente sur un électron. Il est facile de montrer cinématiquement que la moyenne de la variation du vecteur quantité de mouvement \vec{p} de l'électron par rapport au temps est proportionnelle à la valeur moyenne du taux de variation temporelle du travail, W , effectué par l'onde. En particulier,

$$\left\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{c} \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle \hat{i}$$

À partir de là, montrer que si cette variation de quantité de mouvement est transmise à un matériau parfaitement absorbant, la pression est donnée par l'équation (3.51).

3.29* Déterminer une expression de la pression de radiation lorsqu'un faisceau de lumière sous incidence normale est totalement réfléchi. Généraliser ce résultat dans le cas d'une incidence oblique, avec un angle θ par rapport à la normale.

3.30 Un écran parfaitement absorbant reçoit 300 W de lumière pendant 10 s. Calculer la quantité de mouvement linéaire totale transférée à l'écran.

3.31 Pour la lumière solaire arrivant à la limite de l'atmosphère terrestre (à $1,5 \times 10^{11}$ m du Soleil), la valeur moyenne du vecteur de Poynting est d'environ $1,4 \text{ kW/m}^2$.

(a) Calculer la pression de radiation moyenne exercée sur un réflecteur métallique placé face au Soleil.

(b) Donner une approximation de la pression de radiation moyenne à la surface du Soleil, de diamètre égal à $1,4 \times 10^9$ m.

3.32* Une surface est placée perpendiculairement à un faisceau d'éclairement (I) constant. Si le facteur d'absorption de la surface est α , montrer que la pression exercée sur la surface est donnée par :

$$\mathcal{P} = (2 - \alpha)I/c$$

3.33* Un faisceau de lumière d'éclairement $2,00 \times 10^6 \text{ W/m}^2$ arrive sous incidence normale sur une surface réfléchissant 70 % et absorbant 30 %. Calculer la pression de radiation résultante sur cette surface.

3.34 Quelle force, en moyenne, s'exerce sur la paroi plane ($40 \text{ m} \times 50 \text{ m}$) et très réfléchissante d'une station spatiale en orbite autour de la Terre, et faisant face au Soleil ?

3.35 Une antenne radar parabolique de 2 m de diamètre transmet des impulsions de 200 kW crête. Si elle fonctionne à une fréquence de 500 impulsions par seconde, chacune durant $2 \mu\text{s}$, déterminer la force de réaction moyenne sur l'antenne.

3.36 Soit un astronaute muni d'une torche lumineuse de 10 W (avec une alimentation inépuisable) flottant dans le vide. Combien de temps lui faudra-t-il pour atteindre la vitesse de 10 m/s en utilisant uniquement le rayonnement comme moyen de propulsion ? L'astronaute a une masse totale de 100 kg.

3.37 Soit la charge en mouvement uniforme représentée à la figure 3.26b. Dessiner une sphère autour de celle-ci et montrer, avec le vecteur de Poynting, que la charge n'émet pas de rayonnement.

3.38* Une onde lumineuse plane, harmonique et linéairement polarisée possède un champ électrique d'amplitude :

$$E_z = E_0 \cos \pi 10^{15} \left(t - \frac{x}{0,65c} \right)$$

lorsqu'elle traverse une pièce de verre. Déterminer :

(a) La fréquence de la lumière.

(b) Sa longueur d'onde.

(c) L'indice de réfraction du verre.

3.39* Quelle est la vitesse de la lumière dans le diamant si son indice de réfraction est 2,42 ?

3.40* Une onde lumineuse possède, dans le vide, une longueur d'onde de 540 nm. Quelle est sa valeur dans l'eau, d'indice $n = 1,33$?

3.41* Déterminer l'indice de réfraction d'un matériau dans lequel la vitesse de la lumière est 10 % plus faible que dans le vide.

3.42 Si la vitesse de la lumière (la vitesse de phase) est de $1,245 \times 10^8 \text{ m/s}$ dans la Fabulite (SrTiO_3), quel est l'indice de réfraction de ce matériau ?

3.43* Quelle distance parcourt la lumière jaune dans l'eau ($n = 1,33$) en 1 s ?

3.44* Une onde de 500 nm de longueur d'onde dans le vide entre dans une lame de verre d'indice 1,60 et s'y propage perpendiculairement à ses faces. Combien de longueurs d'onde occupent le matériau si son épaisseur est de 1 cm ?

3.45* De la lumière jaune provenant d'une lampe à sodium ($\lambda_0 = 589 \text{ nm}$) traverse une cuve remplie de glycérine (indice 1,47)

de 20 m de long en un temps t_1 . Par ailleurs, la même lumière traverse une cuve remplie de bisulfure de carbone (indice 1,63) en un temps t_2 . Déterminer la valeur $t_2 - t_1$.

3.46* Une onde lumineuse se propage d'un point A vers un point B dans le vide. On introduit sur son chemin une lame de verre à faces parallèles d'indice 1,50 et d'épaisseur $L = 1$ mm. La valeur de la longueur d'onde est 500 nm dans le vide. Combien de longueurs d'onde sont comprises entre A et B sans et avec la lame de verre ? Quel est le déphasage introduit lorsque l'on intercale la lame de verre ?

3.47 Pour les basses fréquences, la permittivité relative de l'eau varie de 88 à 0 °C à 55,33 à 100 °C. Expliquer ce comportement. Sur la même gamme de température, l'indice de réfraction ($\lambda = 589,3$ nm) varie entre 1,33 et 1,32. Expliquer pourquoi la variation relative de n est plus petite que la variation relative de K_E correspondante.

3.48 Montrer que, pour des substances de faibles densités comme les gaz, qui ont une seule fréquence de résonance ω_0 , l'indice de réfraction est donné par :

$$n \approx 1 + \frac{Nq_e^2}{2\epsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

3.49* Dans le chapitre suivant, nous verrons qu'une substance réfléchit un rayonnement d'autant mieux que son indice diffère de celui du milieu dans lequel elle se trouve [équation (4.47)].

- La constante diélectrique de la glace mesurée aux fréquences micro-ondes est d'environ 1, alors qu'elle est environ 80 fois plus grande pour de l'eau liquide. Expliquer ce résultat.
- Comment se fait-il qu'un faisceau radar traverse facilement de la glace mais qu'il est considérablement réfléchi lorsqu'il rencontre une averse ?

3.50 La fuchsine est un puissant colorant (aniline) rouge profond, lorsqu'elle est en solution d'alcool. Elle apparaît rouge car elle absorbe la composante verte du spectre (comme on pourrait s'y attendre, les facettes des cristaux de fuchsine réfléchissent très bien le vert). Considérons un prisme de verre creux rempli d'une telle solution. Quel spectre obtiendrait-on avec un faisceau incident de lumière blanche ? Une anomalie de dispersion fut observée pour la première fois par Fox Talbot en 1840 et cet effet fut baptisé en 1862 par Le Roux. Mais son travail fut oublié avant d'être redécouvert, huit ans plus tard, par C. Christiansen.

3.51* Vérifier l'homogénéité des unités des deux termes de l'équation (3.71).

3.52 La fréquence de résonance du verre au plomb se situe dans l'UV très proche, alors que celle de la silice fondue est dans l'UV lointain.

Utiliser l'équation de dispersion pour tracer une représentation rapide de n en fonction de ω dans le visible pour chacun de ces matériaux.

3.53* Montrer que l'équation (3.70) peut être réécrite sous la forme :

$$(n^2 - 1)^{-1} = -C\lambda^{-2} + C\lambda_0^{-2}$$

où $C = 4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_e / Nq_e^2$.

3.54 Augustin Louis Cauchy (1789-1857) détermina empiriquement une équation pour $n(\lambda)$ pour les matériaux transparents dans le visible. Son expression est un développement en série de la forme :

$$n = C_1 + C_2/\lambda^2 + C_3/\lambda^4 + \dots$$

où les C_s sont des constantes. D'après la figure 3.41, que représente physiquement le paramètre C_1 ?

3.55 En se référant au problème précédent, on comprend qu'entre chaque paire de bandes d'absorption, il existe une région pour laquelle l'équation de Cauchy (avec un nouvel ensemble de constantes) fonctionne bien. Examiner la figure 3.41 : que peut-on dire des différentes valeurs de C_1 , lorsque ω diminue le long du spectre ? En ne gardant que les deux premiers termes du développement, utiliser la figure 3.40 pour déterminer approximativement les valeurs de C_1 et de C_2 pour du verre Crown au borosilicate, dans le visible.

3.56* Le cristal de quartz possède des indices de réfraction respectifs de 1,557 à 410 nm et de 1,547 à 550 nm. En utilisant uniquement les deux premiers termes de l'équation de Cauchy, calculer C_1 et C_2 et déterminer l'indice de réfraction du quartz à 610 nm.

3.57* En 1871, Sellmeier aboutit à l'équation :

$$n^2 = 1 + \sum_j \frac{A_j \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{0j}^2}$$

où les termes A_j sont des constantes et chaque λ_{0j} est la longueur d'onde dans le vide associée à la fréquence naturelle ν_{0j} telle que $\lambda_{0j}\nu_{0j} = c$. Cette formulation représente une amélioration pratique considérable par rapport à l'équation de Cauchy. Montrer que, lorsque $\lambda \gg \lambda_{0j}$, l'équation de Cauchy est une approximation de l'équation de Sellmeier. Astuce : écrire l'expression ci-dessus en ne gardant que le premier terme de la somme ; le développer en séries binomiales ; prendre la racine carrée de n^2 et développer à nouveau.

3.58* Pour qu'un photon ultraviolet dissocie l'atome d'oxygène et les atomes de carbone constituant la molécule de dioxyde de carbone, il doit fournir 11 eV d'énergie. Quelle est la fréquence minimale du rayonnement correspondant ?

4 | La propagation de la lumière

4.1 Introduction

Nous allons nous intéresser aux phénomènes de *transmission* (p. 99), de *réflexion* (p. 102), et de *réfraction* (p. 107) en suivant une double approche : la première reprend les notions générales d'ondes et de rayons (p. 110), et la deuxième s'appuie sur la théorie électromagnétique (p. 117). Ensuite, nous présenterons une analyse simplifiée de l'électrodynamique quantique (QED), pour une interprétation moderne de ces phénomènes (p. 144).

La plupart des étudiants ont reçu un enseignement introductif sur les phénomènes de propagation, et ils ont sans doute trouvé les lois de la réflexion et de la réfraction simples et évidentes. C'est probablement à cause d'une approche macroscopique qui rend l'analyse superficielle. Par exemple, le phénomène de la réflexion, qui a l'air aussi simple que le rebond de la lumière sur une surface, fait intervenir de manière merveilleusement subtile le comportement coordonné d'innombrables atomes. En fait, plus on étudie ces phénomènes et plus ils présentent de nouveaux défis. Quoi qu'il en soit, on doit se poser plusieurs questions : comment la lumière se déplace dans la matière ? Que lui arrive-t-il alors ? Pourquoi semble-t-il que la lumière voyage à une vitesse différente de c , alors que les photons ne peuvent exister qu'à c ?

On peut se représenter l'interaction de la lumière et de la matière comme un événement coopératif qui apparaît quand des photons interagissent avec des matrices d'atomes en suspension (via des champs électromagnétiques) dans le vide. Les détails de cette interaction déterminent pourquoi le ciel est bleu, le sang rouge, pourquoi notre cornée est transparente et notre main opaque, pourquoi la neige est blanche mais pas la pluie, etc. Le cœur du chapitre repose sur le phénomène de **diffusion**, en particulier l'absorption et la réémission des radiations EM par des électrons des atomes et des molécules.

Les processus de transmission, de réflexion, et de réfraction sont des manifestations macroscopiques de la diffusion aux niveaux subatomiques.

Nous allons commencer notre analyse par l'étude de la propagation de la lumière à travers les milieux homogènes.

4.2 Diffusion de Rayleigh

Imaginons un faisceau de lumière spectralement étendu se propageant dans l'espace. Lors de sa progression, le faisceau diverge un peu mais il garde son énergie à la vitesse c . Il n'y a pas de diffusion, et l'on ne peut pas voir le faisceau des côtés. La lumière ne se fatigue pas et le faisceau ne diminue en aucune sorte. Lorsqu'en 1987, on observa l'explosion d'une étoile d'une galaxie proche à $1,7 \times 10^5$ années-lumière de la Terre, sa lumière avait mis 170 000 années pour nous parvenir.

Les photons sont hors du temps.

Maintenant, supposons qu'on rajoute de l'air dans le vide – quelques molécules d'azote, d'oxygène, et ainsi de suite. Ces molécules ne résonnent pas dans le visible, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent pas atteindre un état excité par absorption d'un quantum de lumière, et elles sont transparentes. En fait, une molécule se comporte comme un petit oscillateur susceptible de vibrer lors de l'impact d'un photon. Immédiatement après sa mise en vibration, elle réémet de la lumière. Sitôt un photon absorbé, un autre photon de même fréquence est immédiatement émis ; la lumière est *diffusée élastiquement*. Les molécules sont orientées de manière aléatoire, et les photons sont diffusés dans toutes les directions (figure 4.1). Même quand il y a peu de lumière, le nombre de photons est immense, et tout se passe comme si les molécules diffusaient des ondelettes sphériques classiques (figure 4.2).

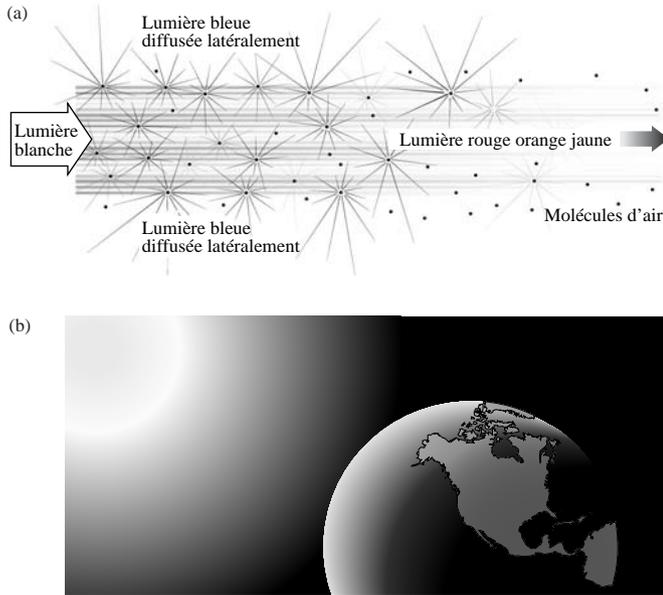


Figure 4.1 (a) Lumière du Soleil traversant une région peu dense de molécules d'air. La lumière diffusée latéralement est surtout bleue, c'est pourquoi on voit le ciel bleu. On voit la lumière non diffusée, riche en rouge, uniquement lorsque le Soleil est bas, au lever ou au coucher du Soleil. (b) Les rayons solaires atteignent la Terre jusqu'à 18° au-dessous de l'horizon à cause de la diffusion atmosphérique. C'est seulement après cette période crépusculaire que la lumière du Soleil atteint l'obscurité complète.

Malgré tout, comme le processus de diffusion reste assez faible et que la densité des molécules de gaz est ténue, le faisceau sera peu atténué sauf s'il traverse un gigantesque volume d'air.

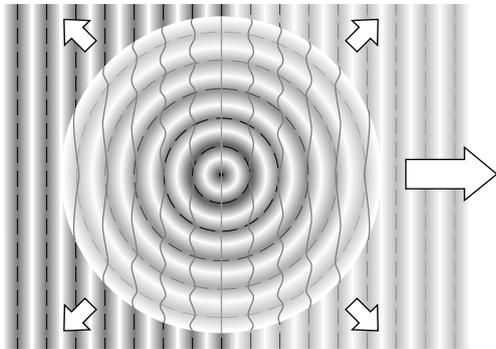


Figure 4.2 Une onde plane incidente en provenance de la gauche traverse un atome qui diffuse des ondelettes secondaires dans toutes les directions.

L'amplitude de ces vibrations, et donc celle de la lumière diffusée, augmente avec la fréquence car toutes les molécules ont leur fréquence de résonance électronique dans l'UV. Plus la fréquence excitatrice est proche de la résonance, plus forte sera la réponse. Ainsi le violet est fortement diffusé, le bleu aussi, mais à un moindre degré, tout comme le vert mais encore moins, le jaune, et ainsi de suite. Le faisceau traversant le gaz sera plus riche dans le rouge en sortie, alors que la lumière diffusée sera plus riche dans le bleu (la lumière du Soleil contenant peu de violet au démarrage). Cela explique en partie pourquoi le ciel est bleu.

Bien avant l'avènement de la mécanique quantique, Lord Rayleigh (1871) analysa la diffusion de la lumière du Soleil en termes d'oscillateurs moléculaires. En s'appuyant simplement sur une analyse dimensionnelle (voir problème 4.1), il conclut que l'intensité de la lumière diffusée devait être proportionnelle $1/\lambda^4$ et donc croître avec ν^4 . Avant cela, il était répandu d'expliquer le bleu du ciel par la diffusion de la lumière par de minuscules particules de poussière. Depuis, la diffusion par des particules bien inférieures à la longueur d'onde (i.e. plus petites qu'environ $\lambda/15$) est connue sous le nom de diffusion de Rayleigh. Les atomes et les molécules ordinaires jouent ce rôle car ils font quelques dixièmes de nanomètre de diamètre, alors que la lumière a une longueur d'onde d'environ 500 nm. La couleur bleue des yeux humains, des plumes du geai bleu et des fesses du babouin s'expliquent par la diffusion de Rayleigh. En fait la diffusion est responsable de presque tout le bleu du règne animal, d'une partie du vert et même de certains pourpres. Plus précisément, c'est la diffusion sur les cellules alvéolaires des plumes du geai qui les rend bleues, alors que le vert du perroquet est un mélange de jaune résultant d'une absorption préférentielle (p. 140) et de bleu par diffusion.

Comme on va le voir un peu plus loin, une substance dense et uniforme est un mauvais diffuseur, la basse atmosphère terrestre en étant une illustration. Si le bleu était fortement diffusé au niveau de la mer, une montagne éloignée apparaîtrait rougeâtre, mais ce n'est pas ce qu'on observe. Même aux altitudes intermédiaires de l'atmosphère, la densité est suffisante pour éliminer la diffusion de Rayleigh ; quelque chose d'autre doit alors contribuer à la couleur bleue du ciel. En fait, les mouvements thermiques de l'air provoquent des *fluctuations locales et rapides de densité*, qui concentrent de façon aléatoire et momentanée les molécules dans des espaces réduits, et celles-ci tendent à rayonner dans une même direction. M. Smoluchowski (1908) et A. Einstein (1910) ont jeté, indépendamment l'un de l'autre, les bases de la théorie de la diffusion dues à ces fluctuations. La diffusion dans des milieux



Sans atmosphère pour diffuser la lumière du Soleil, le ciel lunaire est d'un noir sinistre.

inhomogènes est d'intérêt dès lors que la lumière voyage sur de grandes distances, comme dans la fibre optique des câbles de communication (p. 206).

La lumière en provenance du Soleil arrive dans l'atmosphère suivant une direction quasi commune à tous les rayons, puis elle est diffusée par l'atmosphère dans toutes les directions. Sans atmosphère, la lumière du jour serait aussi noire que l'espace, comme le ciel de la Lune. Quand le Soleil est bas sur l'horizon, la lumière traverse une plus grande épaisseur d'air. Alors que le bleu est atténué, le rouge et le jaune se propagent pour produire les couchers de Soleil ardents qui nous sont familiers.

4.2.1 Diffusion et interférence

Dans un milieu dense, un très grand nombre d'atomes ou de molécules contribuent à propager un non moins grand nombre d'ondelettes électromagnétiques. Ces ondelettes se chevauchent et interfèrent d'une manière qu'on n'observerait pas dans un milieu ténu. Ainsi, *la diffusion latérale est d'autant plus faible que le milieu traversé par la lumière est dense*. Pour comprendre cela, on va examiner les interférences qui se produisent.

On a déjà abordé les interférences p. 21 et l'on approfondira ce thème dans les chapitres 7 et 9 ; ici, les notions de base suffisent. Rappelez-vous que les interférences sont *la superposition de deux ondes, ou plus, résultant en une perturbation, qui est la somme des contributions des ondes en recouvrement*. La figure 2.14 montre deux ondes harmoniques de même fréquence se propageant dans la même direction. Lorsqu'elles sont en phase (figure 2.14a), la résultante est la somme, point par point, de la hauteur des deux ondes. Dans ce cas extrême, on parle d'*interférences constructives*. Quand la différence de phase vaut 180° , les ondes ont tendance à s'annuler, et l'on parle d'*interférences destructives* (figure 2.14d).

La théorie de la diffusion de Rayleigh fait intervenir des molécules disposées aléatoirement dans l'espace, de sorte que les phases des ondelettes secondaires ne sont pas reliées entre elles, et donc il n'y a pas de figure d'interférence. Cette situation est celle de diffuseurs séparés par des distances d'une longueur d'onde ou plus, comme dans un gaz ténu. La figure 4.3a montre un faisceau de lumière (pour l'instant, on suppose que ce sont des ondes planes) incident sur un groupe de molécules largement espacées. Un flot continu de fronts d'onde primaires balaie les molécules qui diffusent de la lumière dans toutes les directions, en particulier dans celle de P . Comme la longueur de chaque chemin individuel vers P est très différente de λ , certaines ondelettes arrivent en P devant ou derrière d'autres ondelettes (figure 4.3b). En d'autres termes, la phase des ondelettes en P varie beaucoup (souvenez-vous que les molécules sont en mouvement, ce qui accentue cet effet). À tout moment, des ondelettes interfèrent constructivement et d'autres destructivement, et par conséquent le recouvrement aléatoire des ondelettes atténue le phénomène d'interférence. *Des diffuseurs, placés aléatoirement dans l'espace et éloignés les uns des autres, émettent des ondelettes essentiellement indépendantes les unes des autres lorsqu'ils sont excités par une onde incidente primaire. La lumière qui est diffusée sur les bords sans être gênée par les interférences poursuit sa progression en dehors du faisceau*. C'est approximativement la situation de la haute atmosphère de la Terre à 170 km d'altitude.

On voit rapidement pourquoi l'intensité de la diffusion varie en $1/\lambda^4$ en revenant au concept de dipôle (section 3.4.3). On modélise chaque molécule par un oscillateur qui vibre dès qu'il est excité par un champ. On suppose que ces oscillateurs sont indépendants les uns des autres et qu'ils rayonnent en accord avec l'équation (3.56). Les champs électriques diffusés sont essentiellement indépendants, et il n'y a pas d'interférence latérale. L'intensité en P est alors la somme algébrique des intensités diffusées par chaque molécule (p. 299). Pour un diffuseur individuel, l'intensité est donnée par l'équation (3.57), c'est-à-dire qu'elle varie en fonction de ω^4 .

L'avènement des lasers a rendu relativement aisée l'observation de la diffusion de Rayleigh dans des gaz à basse pression, et les résultats ont confirmé la théorie.

Propagation dans la direction initiale

Pour mieux comprendre pourquoi la propagation dans la direction initiale est spéciale, et pourquoi une onde progresse dans tout milieu, considérons la figure 4.4. Remarquons que, pour un point P situé vers l'avant le long de la direction initiale, tous les

chemins pris par la lumière ont à peu près la même longueur, et la diffusion les altère peu (les ondelettes arrivent en P plus ou moins en phase et interfèrent de manière constructive). La figure 4.5 fournit une description plus détaillée, qui montre la

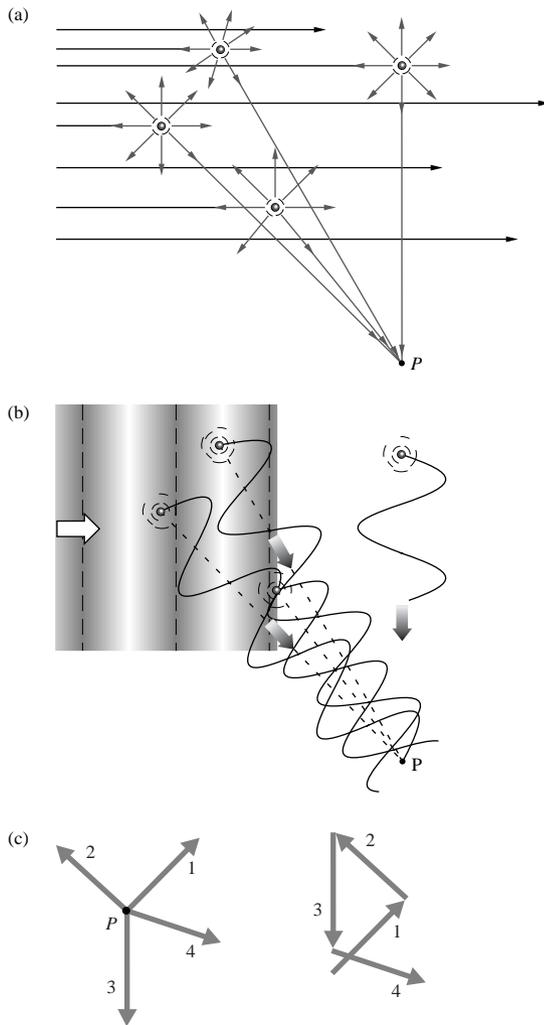


Figure 4.3 (a) Diffusion de la lumière par une distribution peu dense de molécules. (b) Les ondelettes qui arrivent en un point latéral P ont des phases totalement aléatoires et ont tendance à ne pas interférer de manière constructive. (c) La représentation par des phaseurs est assez pédagogique. En arrivant en P , les phaseurs présentent entre eux des différences de phase significatives. Leur somme vectorielle forme une spirale de sorte que la résultante demeure petite. Noter qu'en réalité, on a affaire à des millions de petits phaseurs plutôt qu'à quatre, de grande amplitude.

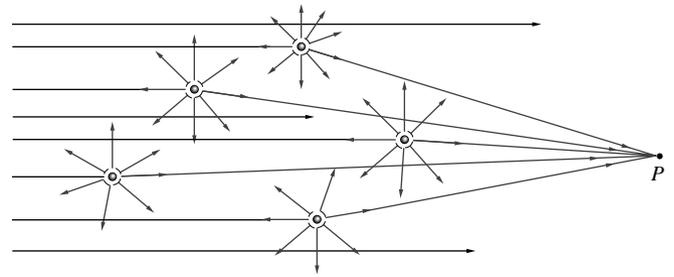


Figure 4.4 La diffusion vers l'avant change peu les chemins optiques de sorte que les ondes arrivent en P sont quasiment en phase.

séquence dans le temps de deux molécules A et B interagissant avec une onde plane primaire – un arc de cercle en trait plein représente un pic d'ondelette secondaire (maximum positif) ; un

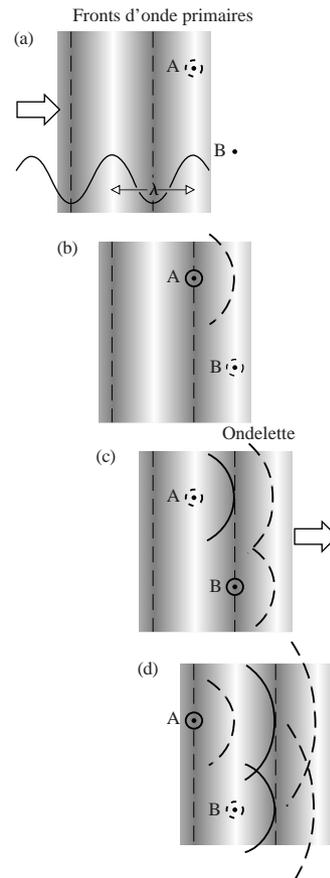


Figure 4.5 Dans la direction avant les ondelettes diffusées arrivent en phase sur des fronts d'onde plans ; creux à creux, pics à pics.

arc en pointillé correspond à un creux (maximum négatif). En (a), l'onde primaire atteint la molécule A qui diffuse une ondelette sphérique. Pour l'instant, supposons que la différence de phase avec l'onde incidente vaille 180° . A rayonne donc un champ E négatif (un creux) en réponse à l'excitation par un champ E positif (un pic). En (b), l'onde incidente frappe à son tour B, qui rayonne une ondelette en opposition de phase. En (c) et (d), on voit que les deux ondes se propagent en avant et en phase l'une avec l'autre. Ce résultat est vrai quel que soit le nombre des molécules et leur distribution. Du fait de l'asymétrie introduite par le faisceau lui-même, *toutes les ondelettes diffusées interfèrent constructivement dans la direction initiale*.

4.2.2 Transmission de la lumière dans les milieux denses

Supposons maintenant qu'on augmente fortement la quantité d'air dans la région considérée. En fait, imaginons que chaque cube d'air élémentaire, d'une longueur d'onde de côté, contient un nombre considérable de molécules, ce qu'on traduit par le concept de *milieu optiquement dense*. Ce terme provient sûrement d'expériences réalisées il y a longtemps sur les gaz, et qui indiquaient qu'une augmentation de la densité était accompagnée d'une augmentation de l'indice de réfraction qui lui était proportionnel. Dans le visible, l'atmosphère de la Terre contient environ 3 millions de molécules dans un cube de volume λ^3 . On ne peut pas supposer que les ondelettes diffusées ($\lambda \approx 500$ nm) par des sources si proches les unes des autres (≈ 3 nm) arrivent en un point quelconque P avec une phase aléatoire – il doit y avoir des interférences. Ce constat concerne également les liquides et les solides où les atomes sont 10 fois plus rapprochés et ordonnés. Dans ce cas, la lumière rencontre un milieu uniforme qui ne possède pas de discontinuités qui pourraient détruire la symétrie. Encore une fois, les ondelettes interfèrent constructivement vers l'avant, mais dans toutes les autres directions, ce sont maintenant les interférences destructives qui prédominent. *Il y a peu ou pas de lumière qui soit diffusée latéralement ou en arrière dans un milieu homogène dense.*

Pour illustrer ce phénomène, la figure 4.6 montre un faisceau qui traverse une matrice de diffuseurs proches les uns des autres. Tout le long de son parcours, des molécules sont énergisées en phase, rayonnent, puis sont réénergisées encore et encore durant le passage de la lumière. Si une molécule A rayonne une ondelette sphérique en dehors du faisceau, il y a certainement une autre molécule B, à une distance $\approx \lambda/2$, qui

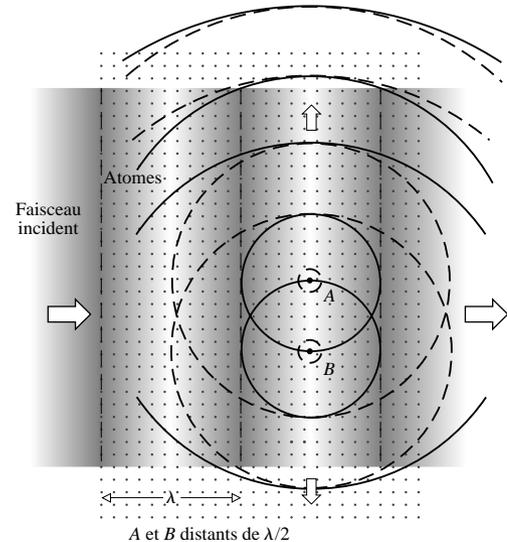


Figure 4.6 Onde plane arrivant de la gauche. Le milieu est composé de nombreux atomes proches les uns des autres. Chacun des fronts d'onde stimule les atomes A et B, distants d'une demi-longueur d'onde. Les ondelettes qu'ils émettent interfèrent destructivement. Les creux recouvrent les crêtes et s'annulent donc dans la direction perpendiculaire au faisceau. Ce processus se répète sans cesse, ce qui explique pourquoi on n'observe pas, ou peu, de diffusion latérale.

va émettre une ondelette qui va annuler celle de A, à cause de l'agencement des molécules. Ici, λ est des milliers de fois plus grand que les diffuseurs et leur espacement, de sorte qu'il est très probable qu'il y ait toujours des paires de molécules dont les ondelettes tendent à s'annuler dans n'importe quelle direction latérale. Même si le milieu n'est pas parfaitement ordonné, le champ électrique net en un point dans une direction transverse sera la somme du champ des différents diffuseurs, chacun légèrement déphasé avec le suivant, de sorte que la somme sera très faible (figure 4.7). Cela concorde avec le

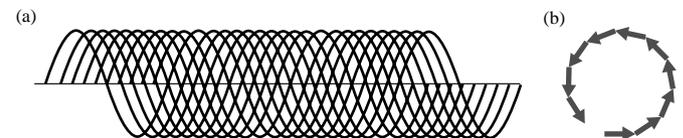


Figure 4.7 (a) Lorsqu'un grand nombre d'ondes légèrement décalées arrive en un point de l'espace, le champ E peut être aussi bien positif que négatif ; donc la perturbation résultante est nulle. (b) Les phaseurs forment un cercle, et leur résultante (qui oscille d'une façon qui dépend du nombre d'ondes) est toujours faible.

principe de conservation de l'énergie – on ne peut pas avoir d'interférences constructives dans toutes les directions. *Les interférences redistribuent l'énergie, des régions où elles sont destructives vers les régions où elles sont constructives.*

Pour résumer, on peut dire que les interférences sont d'autant plus destructives sur les côtés et vers l'arrière que le milieu éclairé est dense, uniforme, et ordonné (c'est-à-dire qu'il est plus homogène). Une plus grande partie de l'énergie sera concentrée dans la direction initiale, c'est-à-dire que le faisceau progressera sans être affaibli (figure 4.8).

Molécule par molécule, la diffusion est extrêmement faible. Pour que la moitié de son énergie soit diffusée, un faisceau dans le vert doit traverser une distance ≈ 150 km d'atmosphère

moléculaire. Comme il y a 1 000 fois plus de molécules dans du liquide que dans un même volume de gaz (à la pression atmosphérique), on observera plus de diffusion. Toutefois, un liquide se trouve dans un état plus ordonné avec des fluctuations de densité moins prononcées qu'un gaz, ce qui réduit fortement la diffusion dans les directions autres que la direction initiale. On constate bien une diffusion par unité de volume dans les liquides qui est plus forte que dans les gaz, mais le rapport est plutôt de l'ordre de 5 à 50 fois, et non de 1 000, qui est le rapport moyen entre les nombres de molécules par unité de volume. Par molécule, les liquides diffusent donc substantiellement moins que les gaz. Si l'on met quelques gouttes de lait dans une carafe d'eau et qu'on l'éclaire avec un faisceau

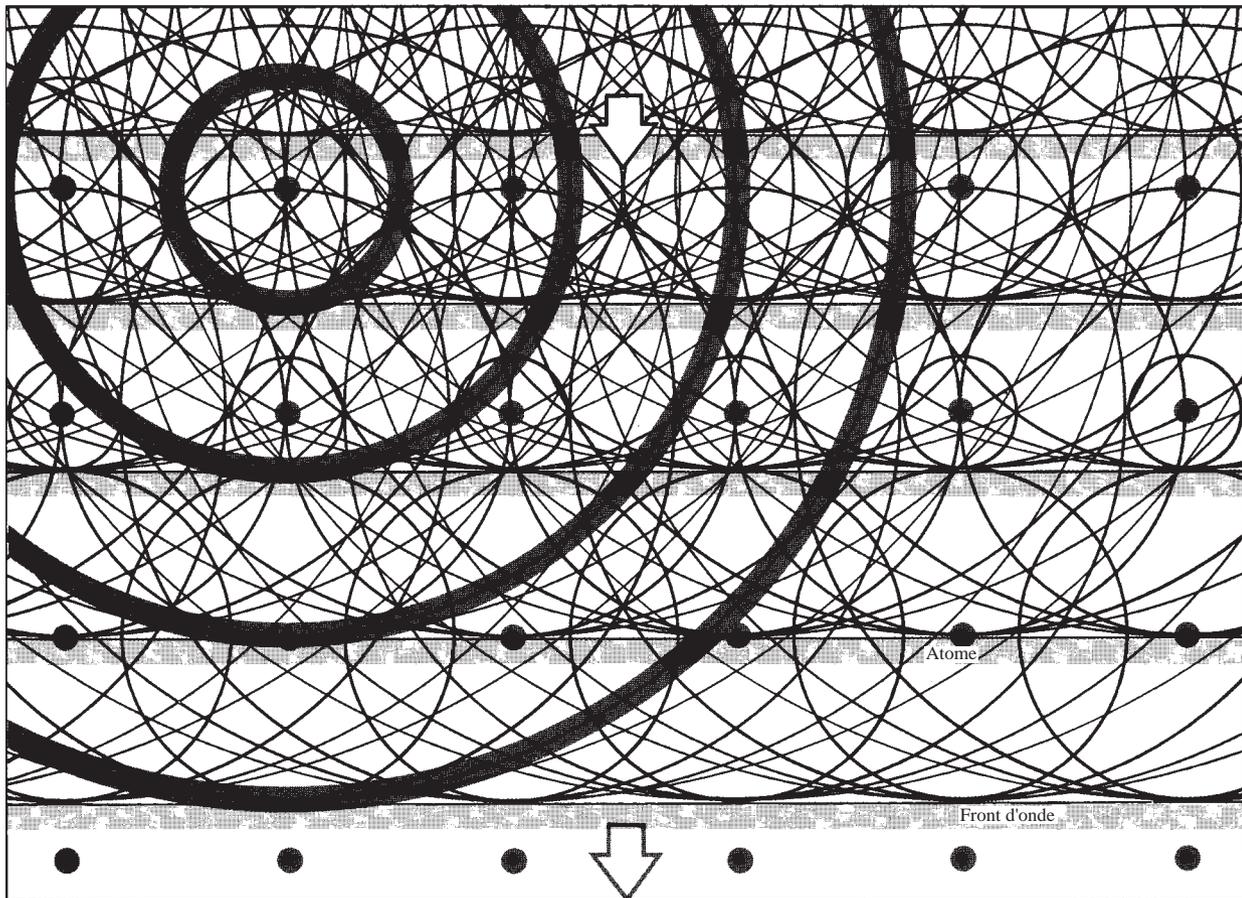


Figure 4.8 Une onde plane incidente vers le bas sur une matrice d'atomes ordonnés. Les ondelettes sont diffusées dans toutes les directions et se recroisent pour former une onde plane secondaire dans la même direction.

très lumineux, un faible halo bleu sera diffusé latéralement, tandis que le faisceau direct émergera résolument rouge.

Il se peut que des solides transparents amorphes, comme le verre ou le plastique, diffusent de la lumière latéralement, mais cet effet reste faible. Les bons cristaux, comme le quartz ou le mica, de structure parfaitement ordonnée, diffusent encore moins. Naturellement, des imperfections de toute sorte (poussières ou bulles dans les liquides, impuretés dans les solides) se comportent comme des diffuseurs et atténuent les remarques précédentes.

En 1869, John Tyndall étudia expérimentalement la diffusion par de petites particules. Il trouva qu'en augmentant la taille des particules, à partir d'une fraction de longueur d'onde, la diffusion aux plus grandes longueurs d'onde augmentait proportionnellement. Les nuages ordinaires attestent du fait que de petites gouttelettes d'eau diffusent la lumière blanche sans coloration particulière. De même en est-il des globules microscopiques de graisses et des protéines du lait.

Lorsque le nombre de molécules dans une particule est petit, elles sont proches les unes des autres et agissent à l'unisson ; leurs ondelettes interfèrent constructivement et la diffusion est forte. Lorsque la taille des particules est proche de la longueur d'onde, les atomes qui se trouvent à deux extrémités opposées ne rayonnent plus nécessairement en phase, et la diffusion diminue. Cela arrive d'abord pour les courtes longueurs d'onde (bleu), et, en fonction de l'augmentation de la taille, la diffusion augmente relativement plus à l'extrémité rouge du spectre. Une analyse théorique de la diffusion par des particules sphériques fut publiée par Gustave Mie en 1908. La diffusion de Mie dépend peu de la longueur d'onde, en fait elle en est même indépendante quand la taille des particules excède λ . La diffusion de Rayleigh constitue la limite de la diffusion de Mie lorsque la taille des diffuseurs diminue. Par temps couvert, le ciel est gris parce que les gouttelettes d'eau, dans les nuages, sont de grande dimension. Autre exemple de milieu diffusant, certains sacs en plastique blanc paraissent blanc-bleuâtre lorsqu'on les regarde par diffusion, et nettement orangés en transmission. En ce qui concerne les sacs poubelle, ils sont chargés (à 2 ou 2,5 %), pour les rendre opaques, de billes de TiO_2 transparentes ($n = 2,76$) d'à peu près 200 nm de diamètre ; ce sont elles qui sont responsables de la diffusion blanc-bleuâtre, suivant la diffusion de Mie.*

.....
* Il a récemment été observé (par chance) que des substances opaques inhomogènes, comme le lait ou la peinture blanche, peuvent réduire la vitesse de la lumière effective jusqu'à un dixième de la valeur attendue. Voir S. John, « Localization of light » *Phys. Today* **44**, 32 (1991).

4.2.3 Transmission et indice de réfraction

La transmission de la lumière à travers un milieu homogène est une répétition incessante de diffusions et de rediffusions. Chacune d'elles provoque sur le champ électrique un déphasage qui se traduit par un changement de la vitesse du faisceau transmis, par rapport à sa vitesse nominale c . Cela correspond à un indice de réfraction du milieu ($n = c/v$) qui est différent de un, même si les **photons n'existent qu'à la vitesse c** .

Pour s'en rendre compte, revenons à la figure 4.5. Rappelez-vous que les ondelettes diffusées se recombinaient en phase dans la direction initiale pour former une *onde secondaire*. D'un point de vue exclusivement empirique, on anticipe que l'onde secondaire va se recombiner avec ce qui reste de l'onde primaire pour produire la seule onde qu'on observe dans le milieu, à savoir l'**onde transmise**. *Les deux ondes électromagnétiques primaire et secondaire se propagent dans le vide à la vitesse c* , et pourtant il est tout à fait possible que l'indice de réfraction du milieu soit différent de 1. Apparemment, l'onde réfractée peut avoir une vitesse de phase inférieure, égale ou supérieure à c . La clé de cette contradiction apparente réside dans la relation de phase entre les ondes primaire et secondaire.

Le modèle classique prédit que les oscillateurs (électrons) vibrent presque en phase avec la force excitatrice (i.e. la perturbation primaire) seulement aux basses fréquences. Lorsque la fréquence augmente, les oscillateurs accusent un retard grandissant. Une étude plus fine révèle qu'à la résonance, ce retard de phase atteint 90° , augmentant par la suite jusqu'à 180° , c'est-à-dire la moitié d'une longueur d'onde aux fréquences au-dessus de la valeur caractéristique. Le problème 4.4 étudie le retard de phase d'un oscillateur amorti, et la figure 4.9 résume les résultats.

Il y a un effet supplémentaire à considérer, autre que le retard. Lorsque les ondes diffusées se recombinaient, l'onde secondaire* résultante est elle-même en retard de 90° par rapport aux oscillateurs.

L'effet combiné de ces deux mécanismes fait que, à des fréquences inférieures à la résonance, l'onde secondaire est en retard sur l'onde primaire (figure 4.10) d'une quantité comprise entre 90° et 180° , et qu'aux fréquences supérieures à la résonance, le retard est compris entre 180° et 270° approximativement. Or, un retard de $\delta \geq 180^\circ$ est équivalent à une avance de

.....
*Ce point sera éclairci une fois énoncées les prédictions de la théorie de Huygens-Fresnel dans le chapitre consacré à la diffraction. La plupart des textes sur l'électromagnétisme traitent le problème du rayonnement à partir de charges oscillantes, auquel cas le déphasage de 90° est un résultat naturel (voir le problème 4.5).

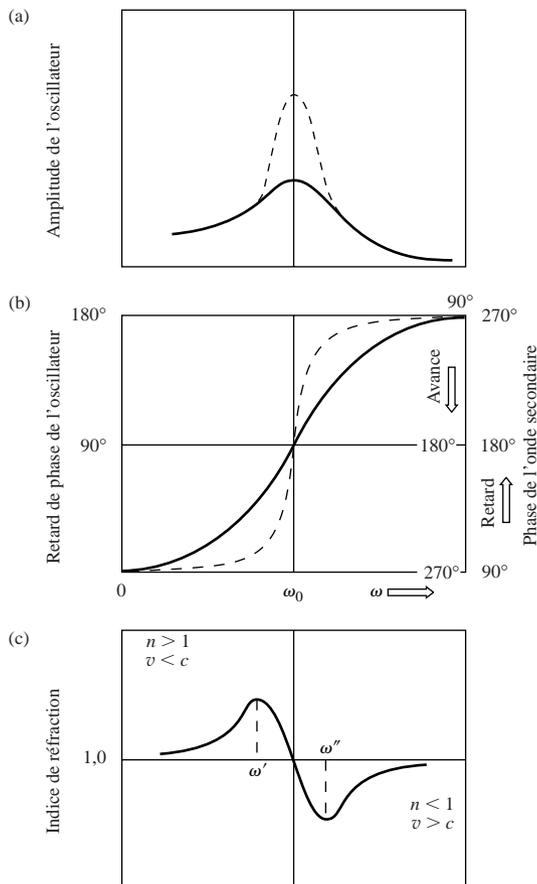


Figure 4.9 Représentation de (a) l'amplitude et (b) du déphasage en fonction de la fréquence d'excitation d'un oscillateur amorti. La courbe en pointillés représente un amortissement plus faible. L'indice de réfraction correspondant est montré dans (c).

$360^\circ - \delta$, [par exemple, $\cos(\theta - 270^\circ) = \cos(\theta + 90^\circ)$]. On peut voir ces deux aspects sur la figure 4.9b.

Dans un milieu transparent, les ondes primaire et secondaire se recombinent et la perturbation globale transmise dépend de leur amplitude et de la différence de phase entre ces deux ondes. Si l'on ne tient pas compte de son atténuation par la diffusion, l'onde primaire se propage dans le milieu comme dans l'espace libre. En revanche, l'onde qui est transmise présente un déphasage, et cette différence de phase est cruciale.

Quand l'onde secondaire est en retard (resp. en avance) sur l'onde primaire, il doit en être de même pour l'onde transmise

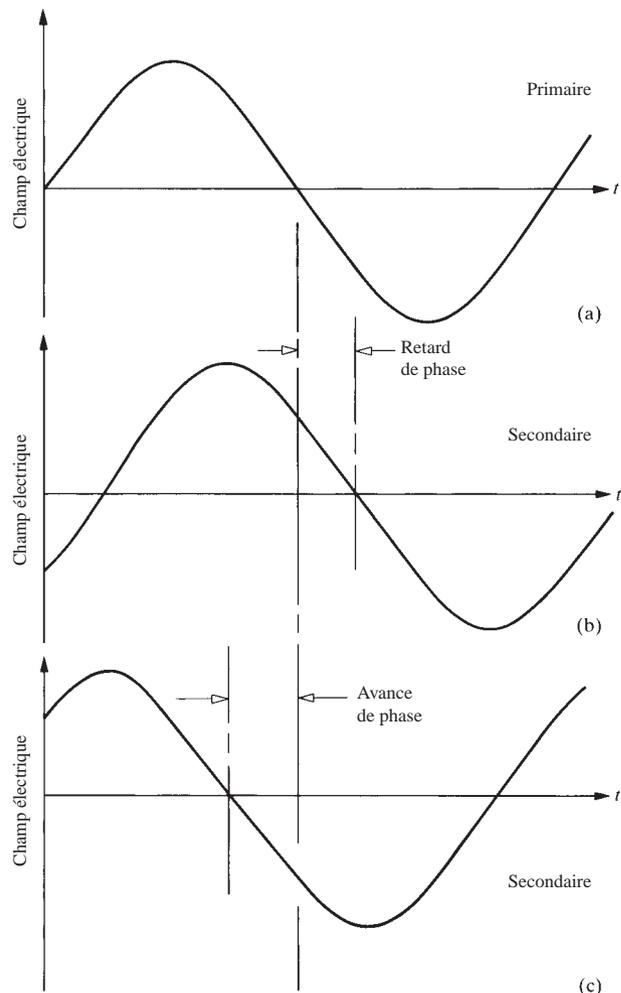


Figure 4.10 Une onde primaire (a) et deux ondes secondaires possibles. Dans (b) la secondaire est en retard sur la primaire – il lui faut plus de temps pour atteindre une valeur donnée. Dans (c) la secondaire est en avance sur la primaire.

(figure 4.11). Cette remarque qualitative suffira pour l'instant, mais on peut noter que ce déphasage doit dépendre de l'amplitude des ondes en interaction [voir l'équation (7.10)]. En dessous de ω_0 , l'onde transmise est en retard sur l'onde de l'espace libre, alors qu'au-dessus de ω_0 , elle la devance. Dans le cas particulier où $\omega = \omega_0$, l'onde secondaire est en opposition de phase avec l'onde primaire. Elle s'oppose donc à cette dernière, ce qui provoque une réduction importante dans l'amplitude de l'onde réfractée, mais n'affecte pas sa phase.

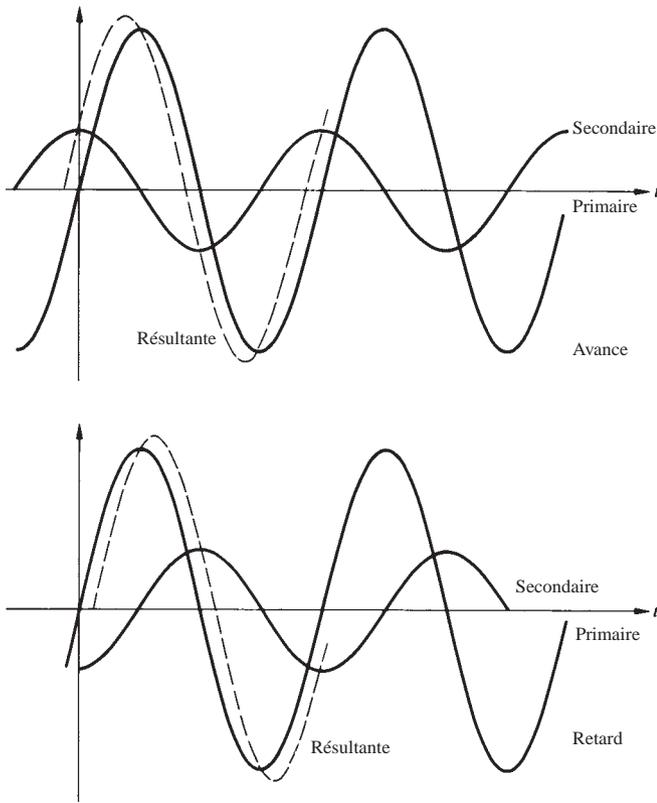


Figure 4.11 Si la secondaire est en avance sur la primaire, leur résultante l'est aussi.

Au fur et à mesure de sa propagation, l'onde transmise diffuse encore et encore. En traversant le milieu, la lumière prend progressivement du retard (ou de l'avance) de phase. Bien sûr, toute modification de la phase se traduit par une modification de la vitesse.

On va maintenant montrer qu'un décalage de phase est équivalent à une différence en vitesse de phase. Dans l'espace libre, la perturbation en un point P s'écrit :

$$E_P(t) = E_0 \cos \omega t \quad (4.1)$$

Si P est entouré d'un diélectrique, il y aura un déphasage croissant ε_P induit par la propagation de l'onde jusqu'à P . À des niveaux ordinaires d'éclairement, le milieu a un comportement linéaire et la fréquence dans le diélectrique sera la même que dans le vide, ce qui ne sera peut-être pas le cas pour la longueur d'onde et la vitesse. Cette fois, la perturbation en P s'écrit :

$$E_P(t) = E_0 \cos (\omega t - \varepsilon_P) \quad (4.2)$$

où la quantité $-\varepsilon_P$ correspond à un retard de phase. Un observateur en P verrait arriver une crête de l'onde plus tard dans le milieu que dans le vide. Si l'on imagine deux ondes parallèles de même fréquence, l'une se propageant dans le vide et l'autre dans le milieu, alors celle dans le vide passera en P un instant ε_P/ω avant l'autre. Il apparaît clairement qu'un déphasage de ε_P correspond à une réduction de la vitesse, $v < c$ et $n > 1$. De même, une avance de phase provoque une augmentation de la vitesse, $v > c$ et $n < 1$. Encore une fois, le processus de diffusion est continu, et le déphasage s'accumule tout au long de la propagation de la lumière dans le milieu. C'est-à-dire que ε est une fonction de la longueur de diélectrique traversée, si l'on veut que v soit constant (voir le problème 4.5). Dans la grande majorité des situations rencontrées en optique $v < c$ et $n > 1$; voir le tableau 4.1. Le cas des rayons X est une exception d'importance puisque $\omega > \omega_0$, $v > c$, et $n < 1$.

L'allure de $n(\omega)$, donnée sur la figure 4.9c, trouve maintenant tout son sens. À des fréquences inférieures à ω_0 , l'amplitude des

Tableau 4.1 Indices de réfraction pour différentes substances*

Air	1,000 29
Glace	1,31
Eau	1,333
Éthanol (C ₂ H ₅ OH)	1,36
Quartz fondu (SiO ₂)	1,458 4
Tétrachlorure de carbone (CCl ₄)	1,46
Térébenthine	1,472
Benzène (C ₆ H ₆)	1,501
Plexiglas	1,51
Verre en crown	1,52
Chlorure de sodium (NaCl)	1,544
Verre en flint léger	1,58
Polystyrène	1,59
Sulfure de carbone (CS ₂)	1,628
Verre en flint dense	1,66
Verre en flint lanthanum	1,80
Zircon (ZrO ₂ ·SiO ₂)	1,923
Fabulite (SrTiO ₃)	2,409
Diamant (C)	2,417
Rutile (TiO ₂)	2,907
Phosphure de gallium (GaP)	3,50

*Les valeurs données varient avec les conditions physiques : pureté, pression, etc. Elles correspondent à une longueur d'onde de 589 nm.

oscillateurs, et donc des ondes secondaires, est faible, et la phase vaut approximativement 90° . Par conséquent, l'onde réfractée est peu déphasée, et n est légèrement supérieur à 1. Au fur et à mesure que ω augmente, l'amplitude des ondes secondaires augmente, le retard de phase croît, la vitesse diminue graduellement, et $n > 1$. Quand ω est proche de ω_0 , la phase relative des ondes secondaires avoisine 180° , leur amplitude ne cessant de croître. Par conséquent, les ondes secondaires perdent leur capacité à retarder la phase de l'onde résultante. Le tournant a lieu ($\omega = \omega'$) quand le retard de phase de l'onde réfractée commence à décroître et sa vitesse à augmenter ($dn/d\omega < 0$), jusqu'à $\omega = \omega_0$, où l'amplitude de l'onde transmise est considérablement réduite (sa phase et sa vitesse ne sont néanmoins pas altérées). À cette fréquence, $n = 1$, $v = c$, et l'on se trouve au centre de la bande d'absorption.

À des pulsations très peu supérieures à ω_0 , les ondes secondaires ont une amplitude relativement importante et sont en avance par rapport à l'onde primaire ; l'onde transmise est en avance de phase par rapport à cette dernière, et sa vitesse est supérieure à c ($n < 1$). Quand ω augmente, le même scénario s'exécute à l'envers (avec une asymétrie due à la relation de dépendance en fréquence de l'amplitude des oscillateurs et de la diffusion). Aux fréquences encore supérieures, les ondes secondaires, qui ont maintenant une très faible amplitude, ont une avance de phase de près de 90° . L'onde transmise résultante est légèrement en avance de phase, et n se rapproche graduellement de 1.

Une solution rigoureuse à ce problème de propagation porte le nom de *Théorème d'extinction de Ewald-Oseen*. Bien que son formalisme mathématique soit trop compliqué (y interviennent des équations intégral-différentielles) pour être traité ici, ses résultats sont intéressants, car ils montrent que les électrons oscillateurs génèrent une onde électromagnétique qui a deux composantes. L'une d'elles est l'onde primaire qui s'éteint complètement dans le milieu ; l'autre, qui se propage dans le diélectrique à une vitesse $v = c/n$, est la seule à subsister, c'est l'onde transmise. * **Dorénavant, on se contentera de dire que la lumière se propage dans n'importe quel milieu à la vitesse $v \neq c$.**

Quel que soit le modèle de mécanique quantique utilisé, il devra associer photon et longueur d'onde. Mathématiquement, cela se traduit par la relation $p = h/\lambda$, bien que le caractère

ondulatoire n'apparaisse pas encore clairement ; néanmoins, il semble inéluctable. Et la théorie va devoir prendre acte de cette exigence. Une fois énoncée l'idée de photons associés à une longueur d'onde, le concept de phase relative émerge naturellement. Ainsi, ***l'indice de réfraction se manifeste chaque fois qu'un processus d'absorption et de réémission avance ou retarde la phase d'un photon diffusé ; même si ce dernier se propage à la vitesse c .***

4.3 Réflexion

Une onde lumineuse incidente sur la surface d'un matériau transparent, tel qu'une vitre, « voit » une vaste matrice d'atomes, proches les uns des autres, qui vont la diffuser. Souvenons-nous que l'onde peut faire ≈ 500 nm de longueur, alors que les atomes et leur espacement ($\approx 0,2$ nm) sont des milliers de fois plus petits. Dans un cas de transmission dans un milieu dense, les ondelettes diffusées s'annihilent partout sauf dans la direction initiale, et s'il n'y a pas de discontinuité. Ce n'est pas le cas à l'interface entre deux milieux différents (comme l'air et le verre). Quand un faisceau de lumière atteint une telle interface, il y a toujours de la lumière rétrodiffusée, phénomène appelé **réflexion**.

Si la transition entre les deux milieux est graduelle – c'est-à-dire si la constante diélectrique (ou l'indice de réfraction) varie d'un milieu à l'autre sur une distance d'une longueur d'onde ou plus – il y aura peu de réflexion. D'autre part, une transition sur une distance inférieure à $\lambda/4$ agit comme une discontinuité franche.

Réflexion interne et externe

Imaginons que la lumière se propage à travers un gros bloc de verre homogène (figure 4.12). Maintenant, supposons que ce bloc soit sectionné perpendiculairement à la direction du faisceau, les deux segments étant séparés comme indiqué par la figure 4.12b. Avant que le bloc ne soit découpé, aucun rayonnement ne repartait vers la gauche, puisque rien ne venait entraver la propagation du faisceau vers l'avant. Maintenant, il doit exister une onde (faisceau-I) se propageant vers la gauche, par réflexion sur la section du bloc de droite. Une zone de diffuseurs du bloc de droite est maintenant désappariée, de sorte que le rayonnement vers l'arrière ne s'annule plus. La zone d'oscillateurs qui lui était adjacente, avant la séparation, se trouve maintenant sur la face de l'autre bloc de

.....
*Pour une discussion du théorème de Ewald-Oseen, voir *Principles of Optics* de Born et Wolf, section 2.4.2 ; la lecture est ardue. Voir aussi Reali, « Reflection from dielectric materials ». *Am. J. Phys.* **50**, 1133 (1982).

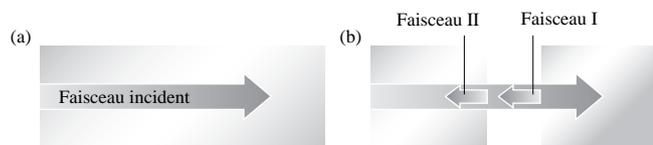


Figure 4.12 (a) Propagation d'un faisceau lumineux à travers un milieu homogène dense, tel que le verre. (b) En coupant en deux le bloc de verre, la lumière est réfléchi aux deux nouvelles interfaces. Le faisceau I subit une réflexion externe, le faisceau II une réflexion interne. En théorie, les deux faisceaux s'annulent l'un l'autre si on presse les deux blocs l'un contre l'autre.

verre. Quand ces deux zones étaient réunies, ces diffuseurs émettaient des ondes en opposition de phase qui anéantissaient le faisceau I. Maintenant, elles produisent le faisceau II. Chaque molécule diffuse de la lumière dans la direction arrière et, en principe, **chacune d'elles doit contribuer à l'onde réfléchi**. Mais en pratique c'est une fine couche ($\approx \lambda/2$ de profondeur) d'oscillateurs atomiques non appariés, proches de la surface, qui est effectivement responsable de la réflexion. Pour une interface air-verre et en incidence normale, 4 % de l'énergie du faisceau sont réfléchis (p. 97), et ce résultat reste valable quelle que soit l'épaisseur du verre.

Le faisceau I se réfléchit sur le bloc de droite, et comme la réflexion a lieu entre un milieu optiquement peu dense et un autre plus dense, on l'appelle **réflexion externe**. En d'autres termes, l'indice du premier (n_i) est inférieur à celui du second milieu de transmission (n_r). Le même phénomène se produit pour le bloc déplacé vers la gauche. Environ 4 % du faisceau-II sont réfléchis sur l'interface verre-air. Ce processus est appelé **réflexion interne**, car $n_i > n_r$. Si l'on rapproche suffisamment les deux blocs (on peut imaginer que l'espace entre les deux est une couche mince d'air, p. 433), la lumière réfléchi va diminuer jusqu'à s'éteindre complètement lorsque les deux faces sont à nouveau réunies. Cela prouve qu'il y a un **déphasage de 180° entre la lumière réfléchi interne et externe** (voir le paragraphe 4.10 pour une étude approfondie) ; on y reviendra plus tard.

Une expérience avec un miroir va nous montrer pourquoi une lumière blanche est réfléchi en lumière blanche. Mais auparavant, rappelons-nous que la couche de diffuseurs qui est responsable de la réflexion a une épaisseur d'environ $\lambda/2$ (voir la figure 4.6). Donc, la région qui participe à la réflexion est d'autant plus épaisse que la longueur d'onde est grande. Cet effet contrebalance la réduction d'efficacité (en $1/\lambda^4$) de chacun des diffuseurs de la couche quand λ augmente. La combinaison de ces deux processus aboutit au fait que **la surface**

d'un milieu transparent réfléchit également toutes les longueurs d'onde. On comprend dès lors pourquoi cette page apparaît blanche sous une lumière blanche.

4.3.1 Loi de la réflexion

La figure 4.13 montre un faisceau composé d'ondes planes incident sur la surface plane d'un milieu optiquement dense (du verre par exemple). On suppose également que le milieu environnant est le vide. Par souci de simplicité, on ne considérera dans les figures 4.14 et 4.15 que la couche superficielle de molécules à l'interface air-verre. Au fur et à mesure où il pénètre dans le milieu, le front d'onde émerge et réémerge les diffuseurs les uns après les autres ; chacun rayonne ensuite un flux de photons dans le milieu incident, sous la forme d'une ondelette sphérique. La longueur d'onde du faisceau étant bien supérieure à la séparation entre molécules, les ondelettes émises

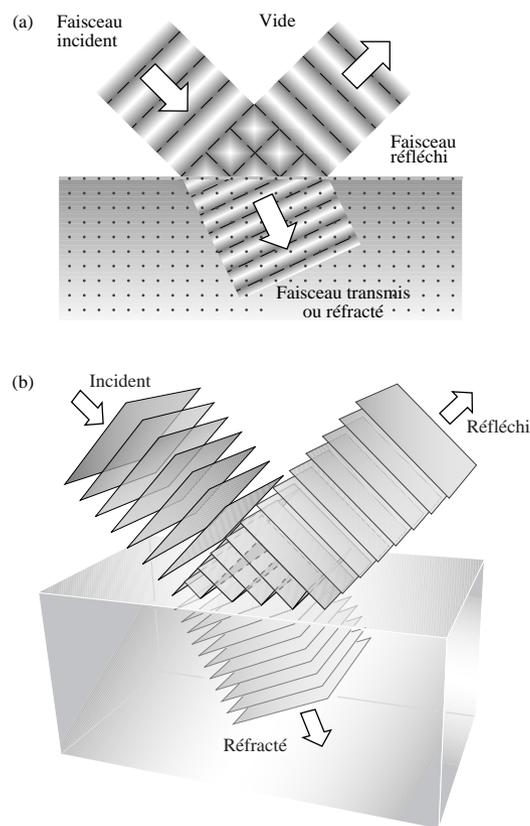


Figure 4.13 Un faisceau d'ondes planes incident sur une distribution de molécules constituant un bloc de verre ou de plastique. Une partie du faisceau est réfléchi, une autre est réfracté.

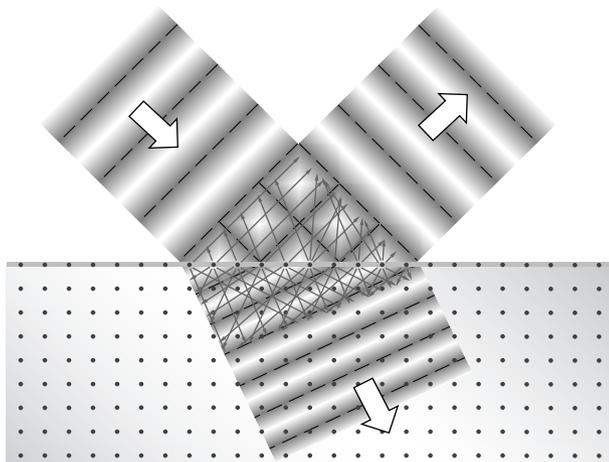


Figure 4.14 Une onde plane stimule les atomes d'une interface. Ces derniers rayonnent et rerayonnent, donnant naissance aux ondes transmises et réfléchies.

vers le milieu incident n'interfèrent constructivement que dans une seule direction pour former le faisceau *réfléchi*. Ce serait faux pour un faisceau de rayons X dont la longueur d'onde est très petite, auquel cas on constaterait plusieurs faisceaux réfléchis. Ce serait aussi faux dans le cas où la distance entre les diffuseurs serait relativement grande par rapport à λ , comme pour les réseaux de diffraction (p. 493) qui réfléchissent plusieurs faisceaux. La direction du rayon réfléchi est déterminée par la différence de phase entre les diffuseurs atomiques. Celle-ci est à son tour déterminée par l'angle que fait l'onde incidente avec la surface, c'est-à-dire l'**angle d'incidence**.

Dans la figure 4.16, \overline{AB} fait partie de l'onde incidente, alors que \overline{CD} se trouve sur l'onde réfléchi ; en effet, \overline{AB} se transforme par réflexion en \overline{CD} . Avec la figure 4.15 à l'esprit, on voit que l'ondelette émise en A arrivera en C en phase avec l'ondelette qui vient juste d'être émise en D , seulement si les distances \overline{AC} et \overline{BD} sont égales. En d'autres termes, si toutes les ondelettes émises le long de la surface se recouvrent en phase pour former une seule onde plane en réflexion, alors on doit avoir $\overline{AC} = \overline{BD}$. Les deux triangles ont en commun leur hypoténuse, c'est-à-dire :

$$\frac{\sin \theta_i}{\overline{BD}} = \frac{\sin \theta_r}{\overline{AC}}$$

Toutes les ondes se propagent dans le milieu incident à la même vitesse v_i . Il s'ensuit que l'ondelette émise en A a le

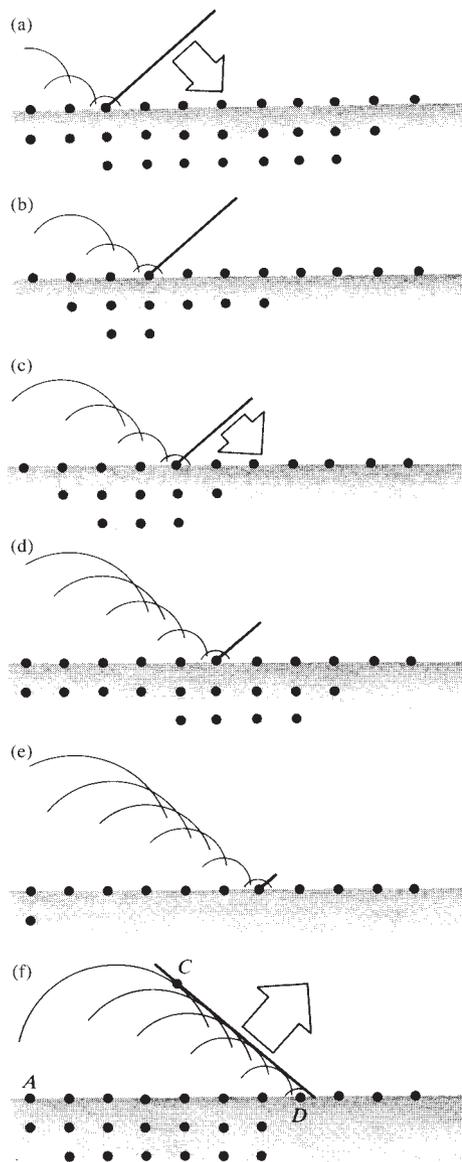


Figure 4.15 La réflexion d'une onde vue comme une conséquence de la diffraction.

temps d'atteindre le point C dans l'intervalle de temps nécessaire (Δt) au point B de l'onde pour atteindre le point D de la surface. Soit, $\overline{BD} = v_i \Delta t = \overline{AC}$, et en reprenant l'équation ci-dessus, il vient que $\sin \theta_i = \sin \theta_r$, ou encore que :

$$\theta_i = \theta_r \quad (4.3)$$

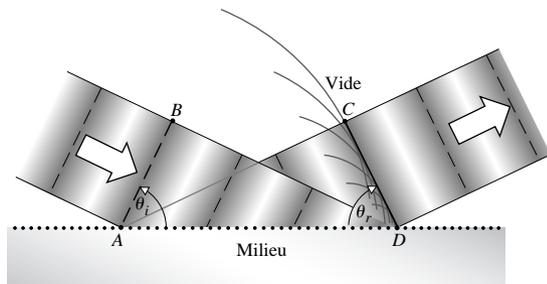


Figure 4.16 Les ondes planes viennent de la gauche et sont réfléchies vers la droite. Le front d'onde réfléchi CD est formé des ondes diffusées par les atomes sur la surface de A à D . Juste quand les ondelettes émises de A arrivent en C , les atomes en D émettent des ondes qui viennent compléter le front d'onde CD .

L'angle d'incidence est égale à l'angle de réflexion. Cette équation est la première partie de la **loi de la réflexion**. On la



Système radar moderne à balayage électronique. Le champ de toutes les petites antennes individuelles se comporte comme celui des atomes d'une surface lisse. En introduisant un déphasage adéquat entre les lignes adjacentes, l'antenne peut « voir » dans toutes les directions. Une surface réfléchissante fait subir à une onde incidente un déphasage similaire, déterminé par θ_i . (Raythéon Corp.)

rencontre pour la première fois dans le livre *Catoptrique*, qui est censé avoir été écrit par Euclide. Il énonce qu'un faisceau est en *incidence normale* quand $\theta_i = 0^\circ$, auquel cas $\theta_r = 0^\circ$ ce qui, pour un miroir, signifie que le faisceau se réfléchit sur lui-même. Il est en *incidence rasante* pour $\theta_i \approx 90^\circ$ ou $\theta_r \approx 90^\circ$.

Rayons

La représentation par des fronts d'onde peut devenir assez embrouillée, et l'on va présenter un schéma plus commode pour traduire la propagation de la lumière. Dans l'Antiquité, on représentait la lumière par des lignes droites, une notion qui s'est traduite en latin par *radii* et en français par « rayons ». **Un rayon est une droite dessinée dans l'espace pour représenter la direction du rayonnement de l'énergie.** C'est une construction purement mathématique, pas une entité physique. Dans un milieu uniforme (homogène), les rayons vont tout droit. Si le comportement du milieu est identique dans toutes les directions de l'espace (milieu isotrope), **les rayons sont perpendiculaires aux fronts d'onde**. Ainsi, pour une source ponctuelle qui émet des ondes sphériques, les rayons qui leur sont perpendiculaires, pointent radialement depuis la source. De la même manière, les rayons associés à des ondes planes sont parallèles. On se contente en général de tracer un rayon incident et le rayon réfléchi (figure 4.17a). *Tous les angles sont maintenant mesurés depuis la normale à la surface* ; θ_i et θ_r partagent la même valeur numérique que précédemment (figure 4.16).

Les Grecs connaissaient déjà la loi de la réflexion, qu'on peut vérifier en observant le comportement d'un miroir plan qu'on éclaire avec une torche, ou mieux, avec un laser de faible puissance. La deuxième partie de la loi de la réflexion postule que **le rayon incident, la normale à la surface et le rayon réfléchi sont dans le même plan**, appelé **plan d'incidence** (figure 4.17b). Essayer d'atteindre une cible par réflexion d'un pinceau lumineux sur un miroir fixe fait ressortir l'importance de cette seconde partie de la loi !

La figure 4.18a présente un faisceau de lumière incident sur une surface réfléchissante lisse (pour laquelle les irrégularités sont petites comparées à la longueur d'onde). Dans ce cas, la lumière réémise par des millions d'atomes va se recombiner pour produire un faisceau unique bien défini grâce à un processus appelé **réflexion spéculaire** (du nom latin donné au miroir, *speculum*). Tant que les crêtes et les creux sont de dimension négligeable par rapport à λ , les ondelettes diffusées seront plus ou moins en phase quand $\theta_i = \theta_r$. C'est la situation des figures 4.13, 4.15, 4.16, et 4.17. En revanche, quand les

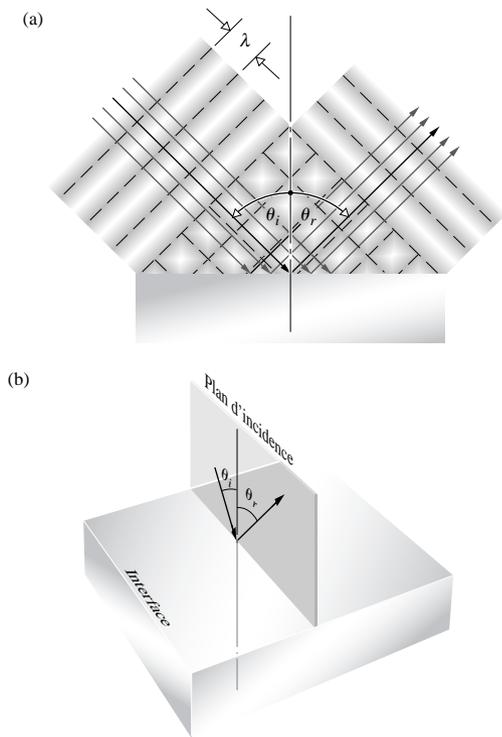


Figure 4.17 (a) L'angle d'incidence θ_i et l'angle de réflexion θ_r sont mesurés par rapport à la normale à la surface réfléchissante. (b) Les rayons incident et réfléchi définissent le *plan d'incidence*, normal à la surface réfléchissante également.

aspérités ne sont plus négligeables par rapport à λ , et bien que l'angle d'incidence et l'angle de réflexion soient égaux, les rayons vont repartir dans toutes les directions, suivant un processus de **réflexion diffuse** (voir la photo). Ces deux cas sont des extrêmes, le comportement de la plupart des surfaces se trouve quelque part entre les deux. Le procédé de fabrication du papier de cette page en fait un assez bon diffuseur, alors que la couverture de ce livre réfléchit d'une façon intermédiaire entre le spéculaire et le diffus.



Le croiseur *Aurora*, qui a joué un rôle clé durant la révolution russe (1917), amarré à St-Petersbourg. La réflexion est spéculaire là où l'eau est calme. La réflexion est diffuse et l'image se brouille dans les zones de remous.

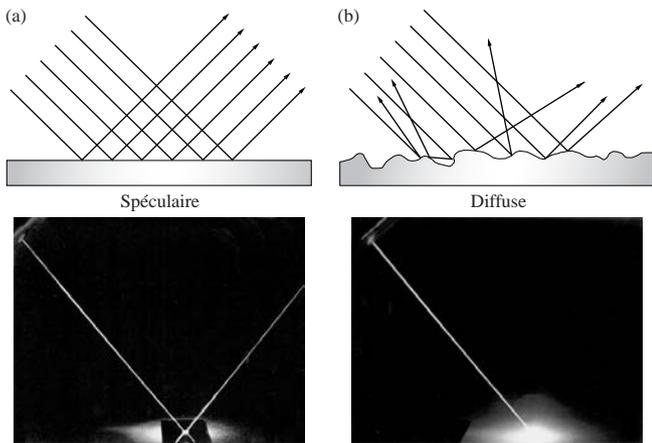
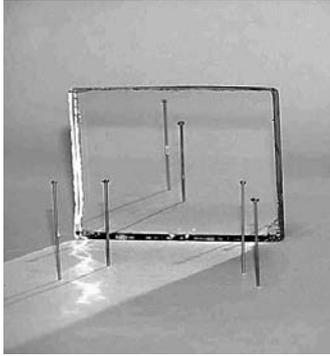


Figure 4.18 (a) Réflexion spéculaire. (b) Réflexion diffuse. (Donald Dunitz.)



Le chasseur F-117A a une très faible surface radar, c'est-à-dire qu'il réfléchit une infime portion des micro-ondes en direction de la station qui les lui a envoyées. On réalise une telle performance en construisant l'avion avec des facettes inclinées qui utilisent la loi de la réflexion pour renvoyer les ondes radar partout sauf vers l'émetteur. On veut éviter que $\theta_i = \theta_r \approx 0$.



En plaçant une paire d'épingles devant un miroir plan et en alignant leur image avec une autre paire d'épingles, on vérifie que $\theta_i = \theta_r$.
(Photo E.H.)

4.4 Réfraction

La figure 4.13 montre un faisceau incident avec un angle $\theta_i \neq 0$ sur une interface. Celle-ci constitue une inhomogénéité considérable, et les atomes qui la composent diffusent de la lumière vers l'arrière, sous forme de faisceau réfléchi, et vers l'avant, sous forme de faisceau transmis. Le phénomène par lequel les rayons incidents sont déviés de leur direction initiale est appelé **réfraction**.

Regardons le cas du faisceau transmis. Chaque molécule énergisée à l'interface rayonne des ondelettes dans le verre qui se propagent à la vitesse c . On peut se les représenter comme s'associant en une onde secondaire, qui se recombine ensuite avec la portion de l'onde primaire qui n'a pas été diffusée, pour produire l'onde transmise globale. Le processus se poursuit encore et encore tout au long de la propagation de l'onde dans le milieu de transmission.

Quoi qu'il en soit, immédiatement après l'interface, il n'y a plus qu'un seul champ résultant, qu'une seule onde résultante. On a déjà vu que cette onde transmise se propage à une vitesse effective $v_t < c$. C'est comme si les atomes de l'interface diffusaient dans le verre des « ondelettes lentes », qui se recombinaient pour former une « onde transmise lente ». On reviendra sur cette formulation du problème quand on abordera le principe de Huygens. Dans tous les cas, comme le phénomène coopératif qu'est l'onde électromagnétique transmise est plus lent que l'onde électromagnétique incidente, les fronts d'onde transmis sont réfractés (dans une direction différente de celle des fronts d'onde incidents), et le faisceau s'infléchit.

4.4.1 La loi de la réfraction

La figure 4.19 reprend là où on en était resté avec les figures 4.13 et 4.16. Elle représente plusieurs fronts d'onde au même instant. Il ne faut pas oublier qu'un front d'onde est une surface sur laquelle la phase est constante et que, dans la mesure où la phase du champ est retardée par le milieu de transmission, chaque front d'onde est comme retenu par l'arrière. Les fronts d'onde s'infléchissent donc au passage de l'interface, à cause de la différence de vitesse. Une façon alternative de comprendre la figure 4.19 est de s'imaginer qu'un front d'onde unique est photographié à des intervalles de temps successifs. Remarquons que pendant le temps Δt qu'il faut au point B du front d'onde (se propageant à la vitesse v_i) pour atteindre le point D , une portion du front d'onde dans le milieu de transmission (se propageant à la vitesse v_t) a atteint le point E . Si le verre ($n_t = 1,5$) est dans le vide ($n_i = 1$), dans l'air ($n_i = 1,000\ 3$), ou dans n'importe quel autre milieu avec $n_t > n_i$, $v_t < v_i$ et $\overline{AE} < \overline{BD}$, le front d'onde s'infléchit. Le front d'onde réfracté s'étend de E à D , faisant un angle θ_t avec l'interface. Les triangles ABD et AED de la figure 4.19 partagent la même hypoténuse (\overline{AD}) donc :

$$\frac{\sin \theta_i}{\overline{BD}} = \frac{\sin \theta_t}{\overline{AE}}$$

où $\overline{BD} = v_i \Delta t$ et $\overline{AE} = v_t \Delta t$. Il suit que :

$$\frac{\sin \theta_i}{v_i} = \frac{\sin \theta_t}{v_t}$$

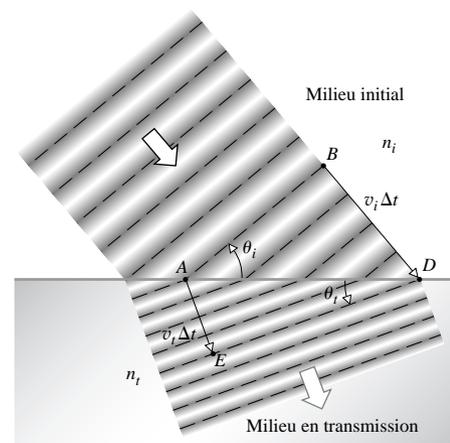


Figure 4.19 La réfraction des ondes. Les atomes situés à la surface du milieu en transmission rayonnent des ondelettes qui se combinent constructivement pour former le faisceau réfracté.

En multipliant des deux côtés par c , et comme $n_i = c/v_i$ et $n_t = c/v_t$

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t \quad (4.4)$$

Cette équation est la première partie de la **loi de la réfraction**, mieux connue sous le nom de **loi de Snell-Descartes** du nom des deux physiciens qui l'ont proposée de manière indépendante, Willebrord Snell van Royen (1591-1626) et René Descartes (1596-1650). Le raisonnement s'appuie sur la figure 4.20. Les observations montraient que la propension des rayons à s'infléchir était quantifiée par le rapport entre x_i et x_t , constant quel que soit θ_i . Cette constante fut naturellement appelée *indice de réfraction*. En d'autres termes,

$$\frac{x_i}{x_t} \equiv n_t$$

qui est un cas particulier de l'équation (4.4) dans l'air. On sait maintenant que Thomas Harriot arriva à la même conclusion avant, mais qu'il n'en fit part à personne.

Tout d'abord, les indices de réfraction furent considérés comme des constantes des milieux physiques, qui étaient mesurées expérimentalement. Plus tard, Newton redémontra la loi de Snell à partir de sa théorie corpusculaire. Il était alors évident que n était une mesure pertinente de la vitesse de la lumière. Encore plus tard, il fut établi que la loi de Snell-Descartes découlait naturellement de la théorie électromagnétique de Maxwell (p. 117).

La représentation sous forme de rayons est plus facile à exploiter (figure 4.21) que celle de la figure 4.19. On va maintenant s'attacher à expliquer pourquoi les rayons incident, réfracté et réfléchi se trouvent dans le **plan d'incidence**. En d'autres termes, les vecteurs de propagation respectifs $\hat{\mathbf{k}}_i$, $\hat{\mathbf{k}}_r$, et $\hat{\mathbf{k}}_t$ sont coplanaires (figure 4.22).

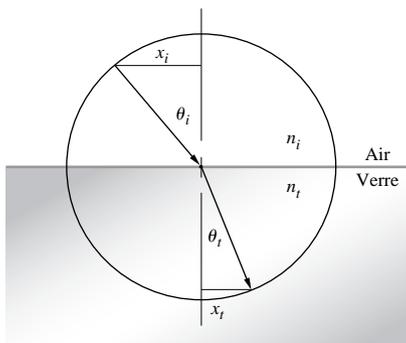


Figure 4.20 La configuration dont Descartes s'est servi pour démontrer la loi de la réfraction.

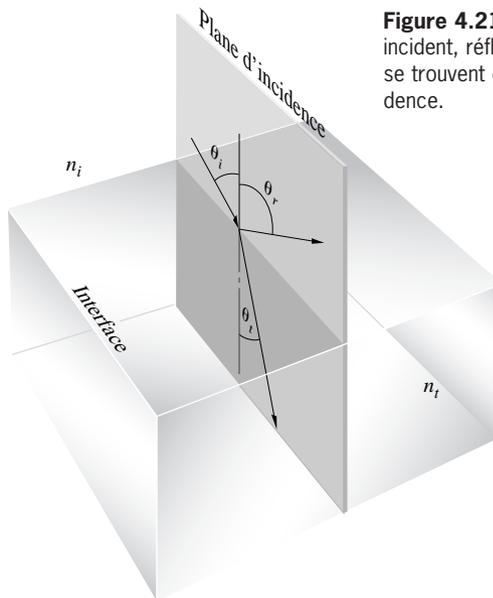


Figure 4.21 Les faisceaux incident, réfléchi et transmis se trouvent dans le plan d'incidence.

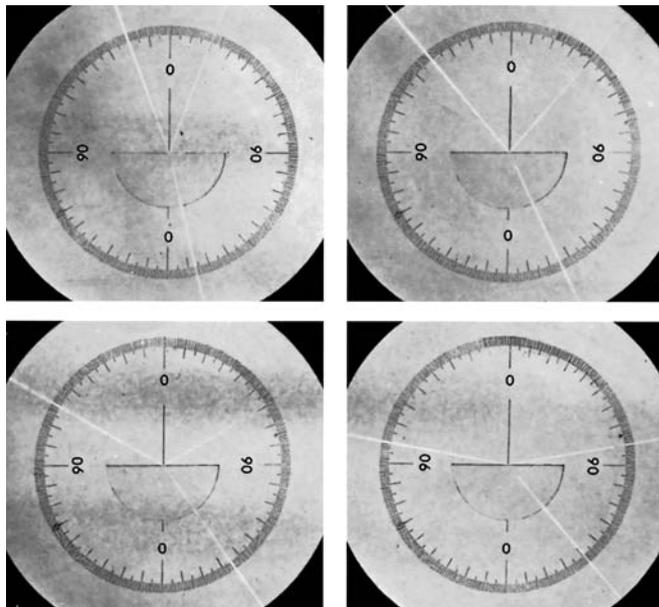


Figure 4.22 Réfraction pour différents angles d'incidence. Remarquer que la surface du bas a été taillée en forme de cercle pour que le rayon transmis lui soit toujours normal. (PSSC College Physics, D. C. Heath & Co., 1968.)

Quand $n_i < n_t$ (c'est-à-dire quand la lumière se propage initialement dans le milieu de plus faible indice), il vient que $\sin \theta_i > \sin \theta_t$, d'après la loi de Snell-Descartes et la fonction sinus étant positive entre 0° et 90° , que $\theta_i > \theta_t$. Au lieu de se propager en ligne droite, **un rayon pénétrant dans un milieu d'indice supérieur se rapproche de la normale** (figure 4.23a). Dans le cas contraire (figure 4.23b), **il s'écarte de la normale** (voir la photo). Il suffit d'inverser le sens des flèches dans le schéma pour s'en rendre compte.

On peut réécrire la loi de Snell-Descartes sous la forme

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = n_{ti} \quad (4.5)$$

où $n_{ti} \equiv n_t/n_i$ est l'**indice de réfraction** relatif des deux milieux.

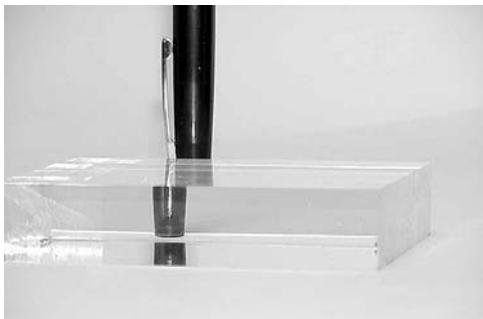
Soit $\hat{\mathbf{u}}_n$ le vecteur normal unitaire de l'interface pointant depuis le milieu incident vers le milieu de transmission (figure 4.24). Comme on demande de le prouver dans le problème 4.29, on peut entièrement rendre compte de la loi de la réfraction par l'écriture vectorielle suivante :

$$n_i(\hat{\mathbf{k}}_i \times \hat{\mathbf{u}}_n) = n_t(\hat{\mathbf{k}}_t \times \hat{\mathbf{u}}_n) \quad (4.6)$$

ou encore,

$$n_t \hat{\mathbf{k}}_t - n_i \hat{\mathbf{k}}_i = (n_t \cos \theta_t - n_i \cos \theta_i) \hat{\mathbf{u}}_n \quad (4.7)$$

La figure 4.19 illustre les trois changements importants que subit le faisceau à l'interface. (1) Il change de direction parce que la partie du front d'onde qui est déjà dans le verre ralentit,



L'image d'un stylo à travers un bloc épais de plastique transparent. Le déplacement de l'image est dû à la réfraction de la lumière par rapport à la normale de l'interface air-plastique. (Photo E.H.)

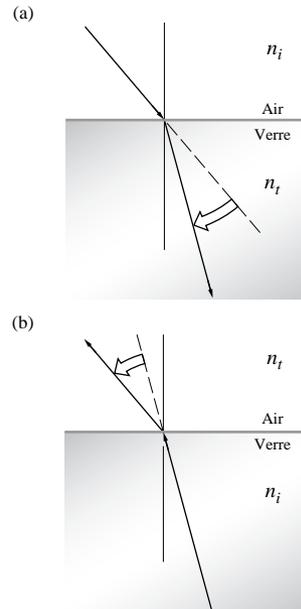


Figure 4.23 Réfraction d'un rayon à l'interface. (a) Quand un rayon entre dans un milieu d'indice de réfraction supérieur ($n_i < n_t$), il se rapproche de la normale. (b) Dans le cas contraire ($n_i > n_t$), il s'en écarte.

et la partie qui est encore dans l'air se propage plus vite, l'infléchissant vers la normale. (2) La section du faisceau est plus importante dans le milieu que dans l'air, et donc l'éclairement y est réduit. (3) La longueur d'onde décroît parce que la fréquence reste inchangée tandis que la vitesse diminue ; $\lambda = v/\nu = c/nv$ et :

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (4.8)$$

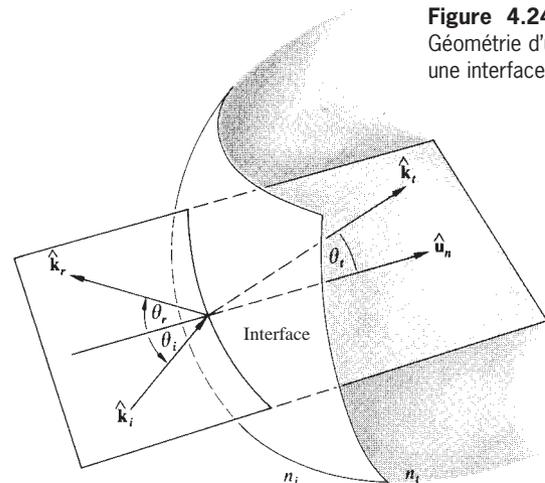


Figure 4.24 Géométrie d'un rayon à une interface.

Ce dernier point suggère que la fréquence (ou l'énergie, $\mathcal{E} = h\nu$) convient mieux que la longueur d'onde pour définir la couleur de la lumière, car la longueur d'onde dépend du milieu traversé. La couleur est cependant un phénomène psychologique (p. 137) qu'il convient de traiter avec précaution. Malgré tout, et bien que ce soit simpliste, il est utile de se souvenir que les photons bleus sont plus énergétiques que les rouges. En fait, on devrait toujours se référer aux couleurs par le biais des **longueurs d'onde dans le vide** (c'est-à-dire λ_0).

Dans toutes les situations traitées jusqu'à maintenant, on a supposé que les rayons réfléchis et réfractés avaient la même fréquence que le faisceau incident, ce qui est d'ordinaire une hypothèse satisfaisante. La lumière de fréquence ν excite les molécules dans un simple mouvement harmonique. C'est effectivement le cas quand l'amplitude de la vibration est faible, c'est-à-dire quand l'amplitude du champ électrique perturbant la molécule est faible. Le champ E qui est dû au Soleil au zénith vaut à peu près 1 000 V/m. C'est peu en comparaison du champ qui assure la cohésion d'un cristal, qui est de l'ordre de 10^{11} V/m – du même ordre de grandeur que celui qui assure la cohésion des électrons dans l'atome. On peut donc s'attendre à ce que les oscillateurs aient un simple mouvement harmonique, et donc que la fréquence reste constante – la réponse du milieu est en général linéaire. Ce n'est plus le cas quand le champ E du faisceau incident est excessivement grand, comme avec les lasers de forte puissance. Ainsi excité à la fréquence ν , le milieu peut réagir de manière non linéaire, ce qui résulte de la réfraction et la réflexion d'harmoniques (2ν , 3ν , etc.) en plus de ν . De nos



Les rayons qui viennent de la partie immergée du crayon se courbent au passage dans l'air.
(Photo E.H.)

jours, des générateurs de seconds harmoniques (p. 658) sont disponibles dans le commerce. Si l'on éclaire dans le rouge (694,3 nm) un cristal non linéaire (de dihydrogénophosphate de potassium, KDP, par exemple), on obtient un faisceau d'UV (347,15 nm) en sortie.

Notre étude amène quelques remarques particulières. On a raisonnablement supposé qu'à chaque point de l'interface de la figure 4.13 correspondait un point particulier sur les ondes incidente, réfléchie et transmise. En d'autres termes, il y a une relation de phase fixe entre les trois ondes en tous points de l'interface. Quand le front incident balaie l'interface, chacun de ses points en contact avec l'interface est aussi un point des fronts réfléchis et transmis correspondants. Cette situation, connue comme étant la **continuité du front d'onde**, sera justifiée dans la section 4.6.1. Il est intéressant de noter que Sommerfeld* a montré qu'on peut déduire les lois de la réfraction et de la réflexion (indépendamment du type d'ondes étudié) directement de la contrainte de continuité du front d'onde ; la solution du problème 4.26 en fournit la démonstration.

4.4.2 Principe de Huygens

Supposons qu'une lumière traverse un bloc de verre non uniforme comme celui de la figure 4.25 qui distorde le front d'onde Σ . Comment déterminer la nouvelle forme Σ' de ce front d'onde, ou bien à quoi ressemblera Σ' quelques instants plus tard, si l'on le laisse se propager sans obturation ?

Un premier pas vers la solution fut publié en 1690 par le physicien hollandais Christiaan Huygens sous le titre *Traité de la lumière*. C'est dans cet ouvrage qu'il énonça ce qu'on connaît maintenant comme le **principe de Huygens** :

tout point d'un front d'onde se comporte comme une source secondaire d'ondelettes, telles qu'à un instant plus tard, le front d'onde soit l'enveloppe de ces ondelettes.

Un autre point crucial est le fait que **si l'onde qui se propage à une fréquence ν , et si elle est transmise dans le milieu à une vitesse v , alors les ondelettes secondaires auront cette même fréquence et cette même vitesse**. Huygens était un scientifique brillant, et ce travail servit de base à une remarquable, quoique naïve, théorie de la diffusion. C'était un travail précurseur, et donc naturellement entaché d'imperfections ; l'une d'entre elles étant le fait qu'il n'incorporait pas le concept d'interférence et ne pouvait donc pas inclure la diffusion latérale.

*A. Sommerfeld, *Optics*, p. 151. Voir aussi J. J. Sein, *Am. J. Phys.* **50**, 180 (1982).

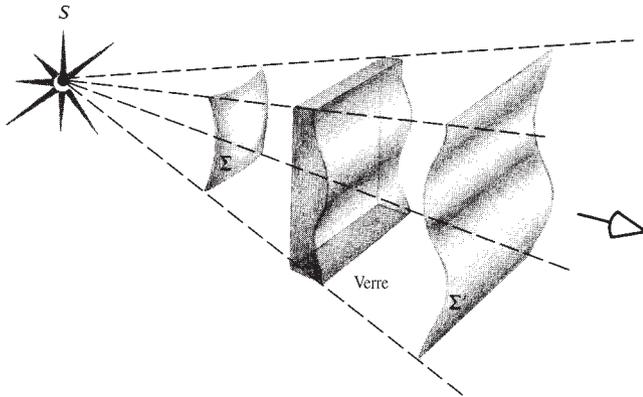


Figure 4.25 Distorsion subie par un front d'onde traversant un matériau d'épaisseur non uniforme.

De plus, l'idée que les ondelettes secondaires se propageaient à une vitesse déterminée par le milieu (et qui pouvait même être anisotrope, par exemple p. 354) était une intuition heureuse. Néanmoins, le principe de Huygens permet d'aboutir à la loi de Snell-Descartes d'une façon similaire au traitement qui a mené à l'équation (4.4). Il vaut mieux ne pas trop se soucier des détails physiques (comment rationaliser la propagation dans le vide, par exemple) et se contenter d'utiliser le principe comme un outil – une fiction très utile. Après tout, si Einstein a raison, il n'y a que des photons diffusés ; les ondelettes n'étant qu'une construction théorique.

Dans un milieu homogène, les ondelettes doivent être construites avec un rayon fini, alors que dans un milieu inhomogène, elles ont un rayon infinitésimal. La figure 4.26 précise ce point ; on y voit un front d'onde Σ , ainsi que plusieurs ondelettes secondaires qui, après un temps t , se sont propagées jusqu'à un cercle de rayon vt . L'enveloppe de ces ondelettes forme l'onde Σ' . Il est aisé de visualiser le processus en termes de vibrations mécaniques dans un milieu élastique. En fait, Huygens l'a abordé dans ces termes dans le contexte d'un milieu éthéré comme l'atteste ce commentaire :

Il faut non seulement considérer, dans l'étude de l'expansion de ces ondes, que chaque particule de matière qu'une onde traverse communique son mouvement à la particule qui lui succède, celle sur la ligne droite dessinée depuis le point lumineux, mais aussi à toutes les autres particules qui la jouxtent et qui s'opposent à son mouvement. Le résultat est qu'autour de chaque particule émerge une onde dont la particule est le centre.

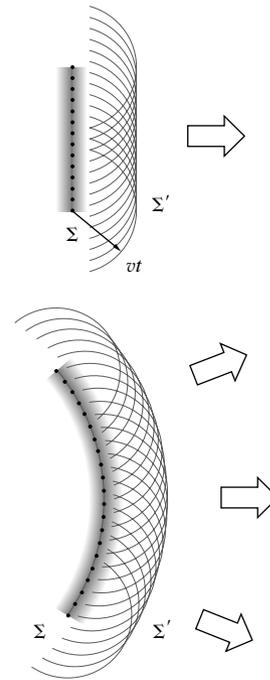


Figure 4.26 Selon le principe de Huygens, une onde se propage comme si son front d'onde était composé d'une infinité de sources ponctuelles, chacune émettant une onde sphérique.

Fresnel, dans les années 1800, a modifié mathématiquement et avec succès le principe de Huygens pour inclure le concept d'interférence. Plus tard, Kirchhoff a montré que le *principe de Huygens-Fresnel* était une conséquence directe de l'équation différentielle de l'onde [équation (2.60)]. Le besoin de reformuler le principe se manifeste dans la figure 4.26 où on a dessiné, de façon trompeuse, des ondelettes hémisphériques.* Si l'on avait représenté des sphères, il y aurait alors eu une onde en retour, qui se serait propagée vers la source ; phénomène qui n'est pas observé. Comme Fresnel et Kirchhoff ont tenu compte de cette difficulté dans leur théorie, elle ne doit pas vous troubler.

4.4.3 Rayons de lumière et congruence normale

En pratique, on peut produire des *faisceaux* très étroits ou des *rais* de lumière (par exemple un faisceau laser), et s'imaginer

*Voir E. Hecht, *Phys. Teach.* **18**, 149 (1980).

qu'un rayon est la limite inatteignable en étroitesse d'un tel faisceau. Gardez en tête que dans un milieu *isotrope* (i.e. dont les propriétés sont les mêmes dans toutes les directions de l'espace) **les rayons sont orthogonaux aux fronts d'onde**. Bien sûr, dans un tel milieu, un rayon est parallèle au vecteur de propagation \vec{k} . Comme on l'aura deviné, ce n'est plus le cas dans les milieux *anisotropes*, ce qu'on verra dans la section 8.4.1. Dans des matériaux isotropes et homogènes, les rayons sont des lignes droites puisque, par symétrie, elles ne s'infléchissent dans aucune direction privilégiée. De plus, comme la vitesse de propagation est identique dans toutes les directions dans un milieu donné, la distance entre deux fronts d'onde, mesurée le long du rayon, doit être la même partout.* Les points d'intersection d'un rayon donné avec une succession de fronts d'onde sont appelés *points correspondants*, comme les points A , A' , et A'' de la figure 4.27. Naturellement, la durée qui sépare le passage de deux fronts d'onde successifs en un point donné est identique. Si le front d'onde Σ est transformé en Σ'' après un laps de temps t'' , la distance entre points correspondants sera parcourue dans ce même temps t'' . Ce résultat reste vrai même si les fronts d'onde passent d'un milieu homogène isotrope à un autre.

Une surface orthogonale à tous les rayons lumineux forme ce qu'on appelle une **congruence normale**. Par exemple, les rayons provenant d'un point source sont perpendiculaires à la sphère centrée sur la source et par conséquent forment une congruence normale.

On peut maintenant considérer un schéma qui nous permette de suivre la progression de la lumière à travers plusieurs

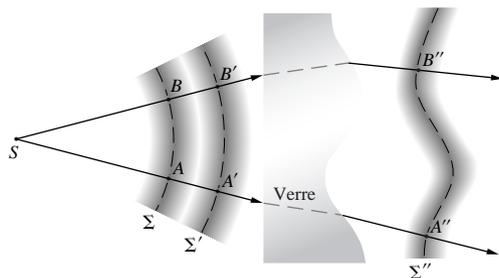


Figure 4.27 Fronts d'onde et rayons.

*Quand le matériau est inhomogène ou que plusieurs milieux sont traversés, ce sera le *chemin optique* (voir paragraphe 4.5) entre les deux fronts d'onde qui sera constant.

milieux isotropes successifs. La base de cette approche réside dans le **théorème de Malus et Dupin** (introduit en 1808 par E. Malus et modifié en 1816 par C. Dupin), selon lequel **un groupe de rayons préserve sa congruence normale quel que soit le nombre de réflexions et de réfractions qu'il subit** (comme dans la figure 4.27). Cela revient à dire que les rayons restent orthogonaux aux fronts d'onde durant toute la propagation dans le milieu isotrope. Comme vous le verrez dans le problème 4.28, ce théorème permet de retrouver la loi de la réflexion ainsi que la loi de Snell-Descartes. Il est en général plus facile de faire un tracé de rayons à travers un système optique et ensuite de reconstruire les fronts d'onde en utilisant l'idée de temps de parcours égaux entre points correspondants et l'orthogonalité des rayons avec les fronts d'onde.

4.5 Principe de Fermat

Les lois de la réflexion et de la réfraction, et la façon dont se propage la lumière, peuvent être vues sous un nouvel angle avec le **principe de Fermat**. Les idées qui vont être développées ont eu une influence formidable sur le développement de la physique et pas seulement sur celui de l'optique classique.

Héron d'Alexandrie, qui devait vivre entre 150 av. J.-C. et 250 apr. J.-C., fut le premier à proposer ce qu'on connaît maintenant comme le *principe variationnel*. Dans son étude de la réflexion, il affirme que *le chemin entrepris par la lumière entre un point S et un point P via une surface réfléchissante doit être le plus court possible*. La figure 4.28 illustre cette proposition en décrivant une source ponctuelle S qui émet un certain nombre de rayons « réfléchis » vers P. On peut supposer qu'un seul de ces chemins a une réalité physique. Si l'on dessine les rayons comme s'ils provenaient de S' (l'image de S), aucune des distances vers P ne sera modifiée (i.e. $SAP = S'AP$, $SBP = S'BP$, etc.). Bien évidemment, c'est le chemin en ligne droite S'BP, correspondant à $\theta_i = \theta_r$, qui est le plus court d'entre eux. De surcroît, le même type de raisonnement (problème 4.31) montre que les points S, B, et P doivent se trouver dans le plan d'incidence. Pendant plus de 1 500 ans, cette curieuse observation de Héron fut ignorée, jusqu'à ce que Fermat énonce en 1657 son célèbre *principe du temps minimal* qui tenait compte à la fois de la réflexion et de la réfraction. Pour aller d'un point du premier milieu à un point du second, un rayon lumineux traversant l'interface ne suit pas une ligne droite, ou *chemin spatial minimum*. Fermat reformula donc l'observation de Héron comme suit : *le chemin*

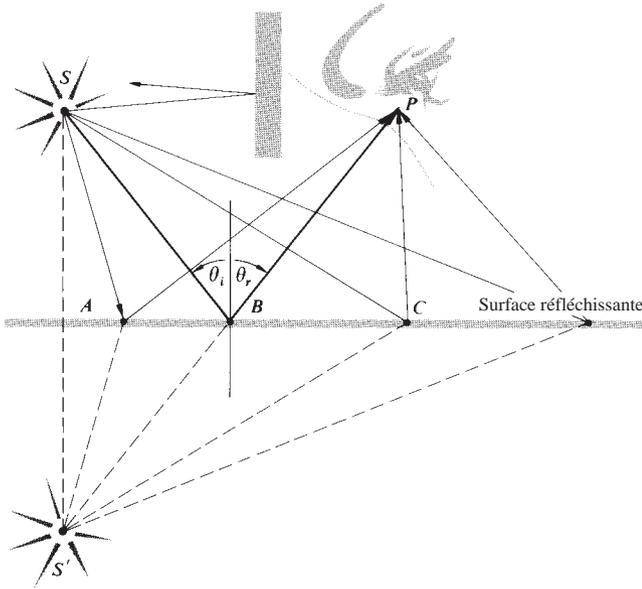


Figure 4.28 Chemin le plus court entre la source S et l'observateur en P .

qu'emprunte la lumière pour joindre deux points est celui qui est parcouru dans le minimum de temps. Cependant, comme on va le voir, la proposition énoncée telle quelle est incomplète et même légèrement erronée.

À titre d'exemple d'application du principe dans le cas de la réfraction, référons-nous à la figure 4.29 ; on cherche à minimiser t , le temps de parcours entre S et P , en fonction de

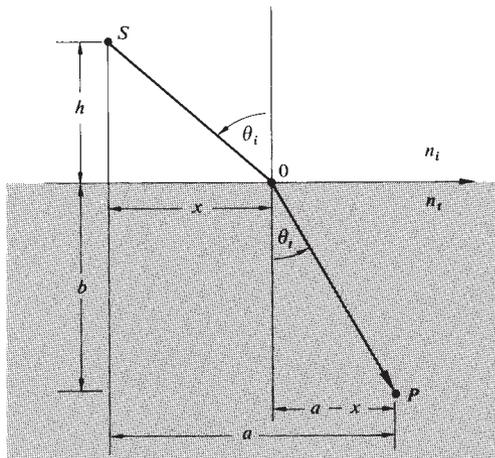


Figure 4.29 Le principe de Fermat appliqué à la réfraction.

la variable x . En d'autres termes, changer x revient à modifier O , et donc le chemin entre S et P . On suppose que le temps de parcours minimum coïncide avec le chemin de la figure 4.29. Donc

$$t = \frac{\overline{SO}}{v_i} + \frac{\overline{OP}}{v_t}$$

$$\text{ou } t = \frac{(h^2 + x^2)^{1/2}}{v_i} + \frac{[b^2 + (a - x)^2]^{1/2}}{v_t}$$

Minimiser $t(x)$ par rapport à x revient à résoudre $dt/dx = 0$, c'est-à-dire,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_i(h^2 + x^2)^{1/2}} + \frac{-(a - x)}{v_t[b^2 + (a - x)^2]^{1/2}} = 0$$

Ce qu'on peut réécrire comme :

$$\frac{\sin \theta_i}{v_i} = \frac{\sin \theta_r}{v_t}$$

qui n'est rien d'autre que la loi de Snell-Descartes (équation 4.4). Un rayon lumineux qui se propage entre S et P en un minimum de temps doit obéir à la loi de la réfraction.

Considérons un matériau stratifié composé de m couches, chacune ayant son propre indice de réfraction, comme sur la figure 4.30. Le temps de parcours entre S et P vérifie :

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \dots + \frac{s_m}{v_m}$$

$$\text{ou } t = \sum_{i=1}^m s_i/v_i$$

avec s_i et v_i la longueur du chemin et la vitesse, respectivement, associées à la $i^{\text{ème}}$ contribution. Alors :

$$t = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^m n_i s_i \quad (4.9)$$

où la somme correspond au **chemin optique (OPL)** parcouru par le rayon, qui est différent de la longueur géométrique du chemin $\sum_{i=1}^m s_i$. Dans un milieu inhomogène où n est fonction de la position, la somme devient une intégrale :

$$OPL = \int_S^P n(s) ds \quad (4.10)$$

Le chemin optique correspond à la distance dans le vide équivalente à la distance traversée (s) dans le milieu d'indice n . C'est-à-dire que les deux correspondent au même nombre de longueurs d'onde, $(OPL)/\lambda_0 = s/\lambda$, et la même variation de phase le long de la propagation de la lumière.

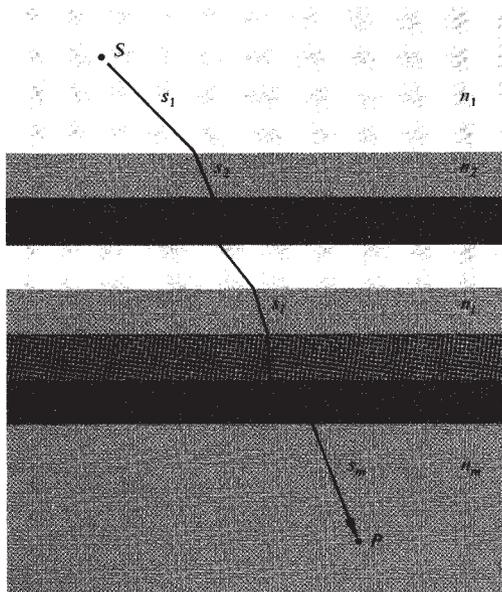


Figure 4.30 Propagation d'un rayon dans un matériau composé de plusieurs couches.

Comme $t = (OPL)/c$, on peut reformuler le principe de Fermat : *pour aller de S en P, la lumière suit le parcours correspondant au chemin optique minimum.*

Fermat et les mirages

Quand les rayons du Soleil traversent l'atmosphère inhomogène de la Terre, comme dans la figure 4.31, ils s'infléchissent de façon à traverser les régions les plus basses et les plus denses aussi vite que possible, ce qui minimise leur *OPL*. Par conséquent, il est encore possible de voir le Soleil même lorsqu'il est sous l'horizon.

De la même manière, une route qu'on observe en incidence rasante, comme dans la figure 4.32, réfléchit la lumière

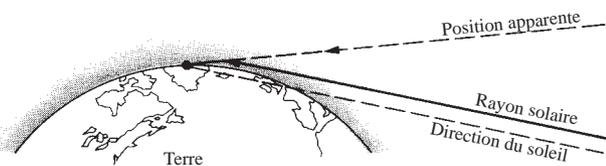


Figure 4.31 Courbure des rayons à travers un milieu inhomogène. Le Soleil semble être plus haut dans le ciel du fait de la courbure des rayons dans l'atmosphère.

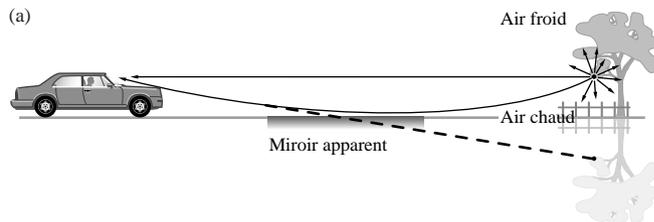


Figure 4.32 (a) En incidence rasante, les rayons semblent provenir du dessous de la route comme s'ils se réfléchissaient sur une plaque d'eau. (b) Une illustration de cet effet. (Matt Malloy et Dan Maclsaac, NAU Physics & Astronomy.)

comme si elle était recouverte d'eau. L'air environnant est plus chaud et moins dense qu'à plus haute altitude. Il a été expérimentalement établi par Gladstone et Dale que pour un gaz de densité ρ :

$$(n - 1) \propto \rho$$

Il s'ensuit d'après la loi des gaz parfaits qu'à pression fixée, comme $\rho \propto P/T$, $(n - 1) \propto 1/T$; l'indice de réfraction de l'air juste au-dessus de la route est d'autant plus faible que celle-ci est chaude.

D'après le principe de Fermat, un rayon partant de la branche de la figure 4.32a pour aller vers le bas minimise son *OPL*. Un tel rayon s'infléchit vers le haut, se propageant plus à travers les régions peu denses que s'il avait voyagé en ligne droite. Pour cela, imaginons que l'air se subdivise en une infinité de couches horizontales infinitésimales d'indice constant. Un rayon s'infléchit (via la loi de Snell-Descartes) à la traversée de chacune des couches. Bien sûr, si le rayon est émis à la verticale alors son angle d'incidence à chaque interface est faible, il va peu s'infléchir et va rapidement frapper le sol où personne ne le « verra ».

D'un autre côté, il est possible qu'un rayon émis quasiment à l'horizontale arrive sur une interface en incidence rasante (p. 122). Il serait totalement réfléchi (p. 127), débutant son ascension vers les régions plus denses.

Pour quelqu'un sur la gauche dans la figure 4.32, il semble que les rayons ainsi infléchis proviennent de la direction opposée, comme s'ils étaient réfléchis par un miroir en surface. Le mirage tend à disparaître au fur et à mesure qu'on s'en approche. Cet effet est facilement perceptible sur nos autoroutes modernes ; la seule contrainte est de regarder la route en incidence rasante car les rayons s'infléchissent très graduellement.*

On retrouve le même effet pour le son. La figure 4.33 propose une alternative pour expliquer le phénomène en termes d'ondes. Les fronts d'onde s'inclinent parce que les variations de température induisent une modification de la vitesse et donc de la longueur d'onde. (La vitesse de la lumière est proportionnelle à la racine carrée de la température.) Le chahut des vacanciers monte en altitude et disparaît, rendant l'endroit étrangement silencieux. C'est le contraire qui se produit le soir quand le sol se refroidit par rapport à l'air au-dessus, rendant particulièrement audibles les sons distants.

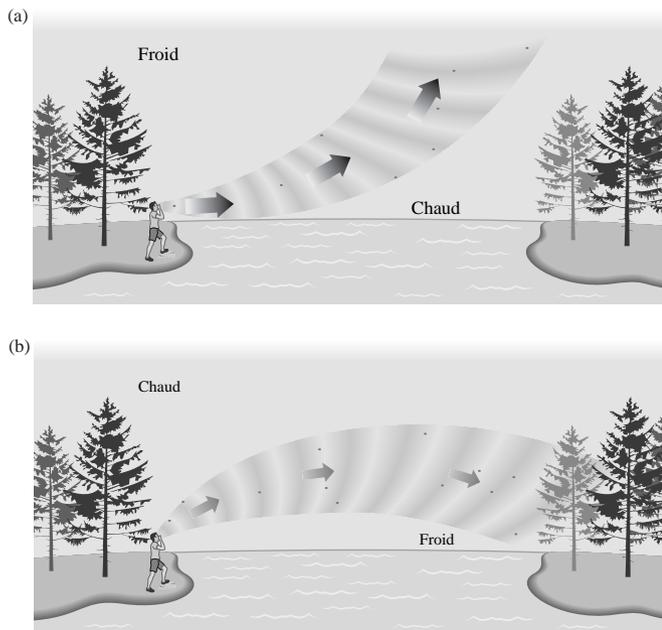


Figure 4.33 On peut comprendre l'effet de mirage par l'approche ondulatoire : la vitesse, et donc la longueur d'onde, augmentent dans les zones moins denses du milieu, ce qui déforme les fronts d'onde et donc les rayons. On observe le même phénomène avec les ondes sonores ; (a) quand l'air au sol est froid, les sons peuvent s'entendre plus loin. (b) Et quand il est chaud, les sons semblent s'évanouir.

*Voir par exemple T. Kosa et P. Palffy-Muhoray, « Mirage mirror on the wall », *Am. J. Phys.* **68** (12), 1120 (2000).

Formulation moderne du principe de Fermat

L'énoncé initial du *principe du temps minimum* de Fermat a de graves défauts et doit donc être corrigé. À cette fin, souvenez-vous qu'une fonction $f(x)$ est stationnaire lorsque $df/dx = 0$, auquel cas la fonction a un maximum \curvearrowright , minimum \curvearrowleft , ou un point d'inflexion avec une tangente horizontale \curvearrowright .

La forme moderne du principe de Fermat se lit maintenant de la façon suivante : **le trajet d'un rayon lumineux entre deux points S et P est tel que le chemin optique soit stationnaire par rapport aux variations de ce chemin.** En substance, cela veut dire que la courbe du chemin optique en fonction de x est aplatie là où la pente est proche de zéro. Le point de pente nulle correspond au chemin réellement suivi. En d'autres termes, le chemin optique pour la trajectoire réelle est égal, en première approximation, au chemin optique des chemins qui lui sont immédiatement adjacents.* Par exemple, dans la situation où le chemin optique est minimum, comme dans le cas de la réfraction figure 4.29, la courbe représentative de l'*OPL* ressemblera à celle de la figure 4.34. Une petite modification de x au voisinage de O aura peu d'effet sur l'*OPL*, mais une modification similaire de x partout ailleurs qu'en O résultera en changement substantiel d'*OPL*. Il existe donc de nombreux trajets voisins pour lesquels le temps de parcours est à peu près identique.

Supposons qu'un faisceau de lumière se propage à travers un milieu isotrope homogène (figure 4.35), de sorte qu'un rayon se rende de S en P . Les atomes du milieu sont excités par la perturbation incidente et re-rayonnent dans toutes les directions. Les ondelettes qui progressent sur des chemins au voisinage immédiat du chemin stationnaire atteindront P par des chemins qui diffèrent peu en longueur d'*OPL* (comme pour le groupe-I de la figure 4.35b). Elles vont donc arriver en phase et se renforcer mutuellement. Imaginons qu'on puisse représenter chaque ondelette par un phaseur qui accomplit un

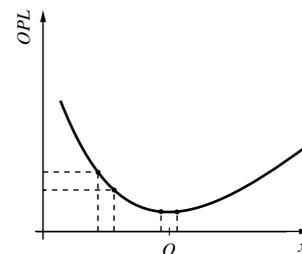


Figure 4.34 Dans la configuration de la figure 4.29 la position du point O correspond à un minimum de l'*OPL*.

*La dérivée première de l'*OPL* s'annule dans le développement en série de Taylor car le chemin est stationnaire.

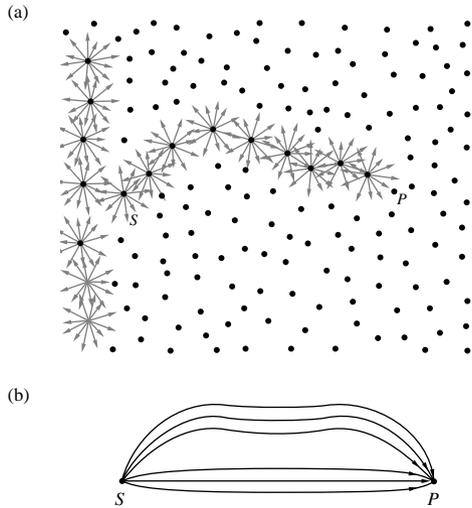


Figure 4.35 (a) La lumière peut prendre n'importe lequel des chemins entre S et P , mais elle semble n'emprunter que celui qui correspond à un OPL stationnaire. Tous les autres chemins s'annulent. (b) Par exemple, si la lumière prend les trois chemins du haut, elle arrive en P avec une phase très différente et interfère plus ou moins destructivement.

tour complet chaque fois que l'onde progresse d'une longueur d'onde (p. 25). Comme les OPL sont à peu près égaux, les phaseurs en P pointent dans la même direction, et bien qu'ils soient individuellement petits, ils se combinent pour former l'essentiel de la contribution.

Les ondelettes qui suivent des chemins éloignés du chemin stationnaire (comme ceux du groupe-II de la figure 4.35b) arriveront en P avec un déphasage appréciable et auront tendance à s'annuler. En d'autres termes, les angles entre les phaseurs seront grands ; placés les uns à la suite des autres, ils formeront une spirale qui produira une perturbation résultante faible.

On en conclut que l'énergie va se propager le long du rayon entre S et P en satisfaisant au principe de Fermat. C'est vrai aussi bien pour les ondes électromagnétiques que pour les densités de probabilité des photons (p. 143).

On peut supposer que la même logique s'applique à d'autres processus de propagation,* comme la réflexion sur un miroir plan (figure 4.28). Dans ce cas, les ondes sphériques qui quittent S balayent entièrement le miroir, et malgré tout, un observateur en P voit un point source et non pas une tache de

.....

*On y reviendra dans le chapitre sur la QED et dans les lentilles zonales dans le chapitre 10.

lumière recouvrant la surface. Seuls les rayons pour lesquels $\theta_i \approx \theta_r$ (comme pour ceux du groupe-I dans la figure 4.36) ont une longueur de *chemin optique* stationnaire ; les ondelettes associées arrivent en P en phase et se renforcent. Tous les autres rayons (par exemple, groupe-II de la figure 4.36) atteignant P auront une contribution en énergie négligeable.

Chemins optiques stationnaires

Pour voir que la longueur de *chemin optique* d'un rayon n'est pas toujours un minimum, regardons la figure 4.37, où est présenté un miroir ellipsoïdal en trois dimensions. Si la source S et l'observateur P sont aux foyers de cet ellipsoïde, alors par définition la longueur SQP sera constante, quelle que soit la position de Q sur son périmètre. Une des propriétés géométriques de l'ellipse est que $\theta_i = \theta_r$, quel que soit Q . Tous les trajets entre S et P via une réflexion seront donc égaux. Aucun d'eux n'est minimum, mais la longueur d' OPL est clairement stationnaire. Les rayons quittant S et frappant le miroir arriveront au foyer P . On peut aussi dire que l'énergie émise par S sera diffusée par les électrons de la surface du miroir de telle sorte que

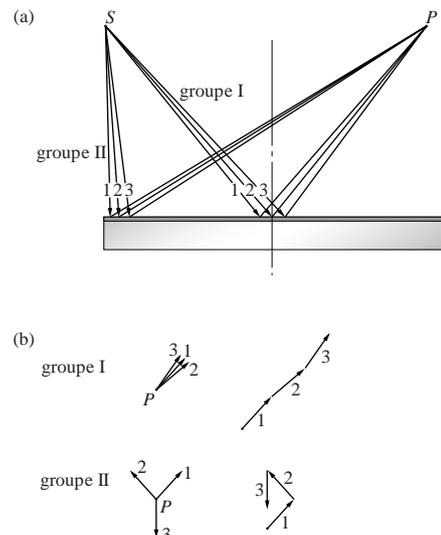


Figure 4.36 Réflexion sur un miroir plan. Seuls ceux du groupe-I pour lesquels l' OPL est stationnaire atteindront le point P plus ou moins en phase. Leurs phaseurs s'ajouteront de façon colinéaire, produisant une onde résultante d'amplitude substantielle (du vecteur 1 jusqu'au vecteur 3). Les phaseurs du groupe-II sont déphasés et s'ajoutent en tournant autour de l'origine et en donnant une résultante de faible amplitude (du vecteur 1 jusqu'au vecteur 3).

seules les ondelettes en P se renforceront. Quoiqu'il en soit, si un miroir plan était tangent à l'ellipse en Q , alors le même trajet

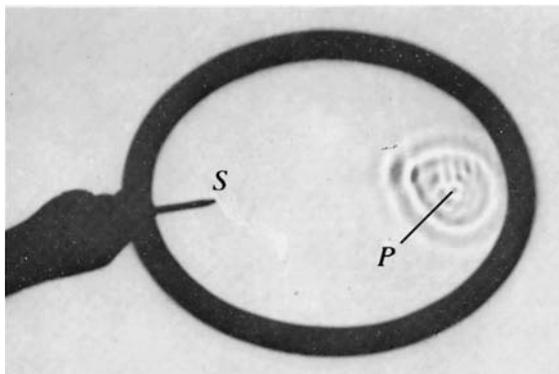
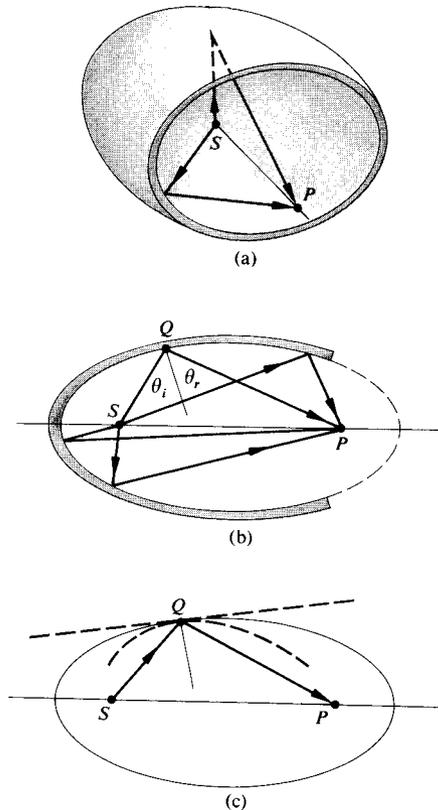


Figure 4.37 Réflexion sur une surface ellipsoïdale. Observer la réflexion d'ondes dans une casserole remplie d'eau. (PSSC College Physics, D. C. Heath & Co., 1968.)

SQP serait un minimum relatif. À un autre extrême, si la surface du miroir n'épousait pas celle de l'ellipse, comme celle en pointillés, le même rayon sur le chemin SQP serait un maximum relatif. Dans tous les cas, les rayons se propagent sur une longueur de *chemin optique* stationnaire en accord avec la reformulation du principe de Fermat. Remarquez que le principe est indifférent à la direction empruntée, de sorte qu'un rayon suivant le trajet de P en S suivra le même de S en P . C'est le très utile *principe du retour inverse de la lumière*.

Le succès de Fermat stimula de nombreux chercheurs à essayer de détrôner les lois de la mécanique de Newton par une approche variationnelle similaire. Parmi eux on trouve les travaux de Pierre de Maupertuis (1698-1759) et de Leonhard Euler qui menèrent à la mécanique de Joseph Louis Lagrange (1736-1813), et finalement au *principe de moindre action* formulé par William Rowan Hamilton (1805-1865). La similarité entre les principes de Fermat et de Hamilton est tellement frappante qu'elle joua un rôle important dans le développement de la mécanique quantique par Schrödinger. En 1942 Richard Phillips Feynman (1918-1988) montra que la mécanique quantique pouvait être abordée sous un autre angle en utilisant une approche variationnelle. L'évolution continue des principes variationnels nous ramène à l'optique via le formalisme moderne de l'optique quantique.

Le principe de Fermat n'est pas tant un outil de calcul qu'un moyen concis de penser la propagation de la lumière.

4.6 L'approche électromagnétique

Jusqu'ici on a étudié la réflexion et la réfraction à travers la théorie de la diffusion, le théorème de Malus et Dupin, et le principe de Fermat. L'approche par la théorie électromagnétique est toutefois plus puissante. À l'opposé des techniques précédentes qui restent muettes sur les éclaircissements incident, réfléchi et transmis (i.e. I_i , I_r , I_t , respectivement), la théorie électromagnétique les traite dans le cadre d'une description plus complète.

4.6.1 Ondes à une interface

Considérons une onde monochromatique incidente plane de la forme :

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \exp [i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)] \quad (4.11)$$

ou plus simplement,

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \cos (\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) \quad (4.12)$$

Supposons que \vec{E}_{0i} est constant dans le temps, c'est-à-dire que l'onde est polarisée linéairement. On verra dans le chapitre 8 qu'on peut toujours représenter n'importe quel type de lumière par deux ondes orthogonales, de sorte que notre hypothèse n'est pas restrictive. L'origine des temps $t = 0$ est arbitraire, il en est de même pour l'origine O dans l'espace où $\vec{r} = 0$. Ainsi, sans hypothèses particulières sur leurs direction, fréquence, longueur d'onde, phase ou amplitude, les ondes réfléchies et transmises s'écrivent :

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varepsilon_r) \quad (4.13)$$

et
$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \varepsilon_t) \quad (4.14)$$

Ici ε_r et ε_t sont des *termes de phase* par rapport à celle de \vec{E}_i , qu'on introduit parce que la position de l'origine n'est pas unique. La figure 4.38 montre les ondes au voisinage d'une interface plane qui sépare deux milieux diélectriques homogènes d'indices n_i et n_r .

Les lois de l'électromagnétisme (paragraphe 3.1) conduisent à poser certaines contraintes sur les champs sous la forme de *conditions à l'interface*. Plus précisément, l'une d'elles stipule que la composante du champ électrique \vec{E} tangente à l'interface doit être continue à son passage (c'est aussi le cas de \vec{H}). En d'autres termes, la composante tangentielle totale de \vec{E} ne doit pas varier d'un côté à l'autre de la surface (problème 4.37). Comme \hat{u}_n est le vecteur unitaire normal à l'interface, quelle que soit la direction du champ électrique, le produit vectoriel avec \hat{u}_n sera perpendiculaire à \hat{u}_n et donc tangent à l'interface. Donc :

$$\hat{u}_n \times \vec{E}_i + \hat{u}_n \times \vec{E}_r = \hat{u}_n \times \vec{E}_t \quad (4.15)$$

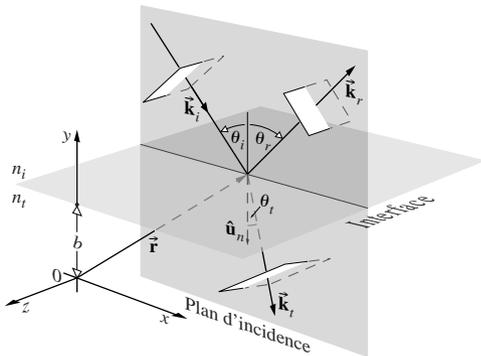


Figure 4.38 Onde plane incidente à l'interface entre deux milieux homogènes isotropes et diélectriques.

ou :

$$\begin{aligned} \hat{u}_n \times \vec{E}_{0i} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) \\ + \hat{u}_n \times \vec{E}_{0r} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varepsilon_r) \\ = \hat{u}_n \times \vec{E}_{0t} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \varepsilon_t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Cette relation doit être vraie à tout instant et en tout point de l'interface ($y = b$). Par conséquent, \vec{E}_i , \vec{E}_r , et \vec{E}_t doivent avoir la même dépendance fonctionnelle sur les variables t et r , ce qui signifie que :

$$\begin{aligned} (\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)|_{y=b} &= (\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varepsilon_r)|_{y=b} \\ &= (\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \varepsilon_t)|_{y=b} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ainsi, les cosinus de l'équation (4.16) disparaissent, et l'expression devient indépendante de t et r comme on s'y attendait. Comme cela doit être vrai à tout instant, les coefficients en t doivent être égaux :

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \quad (4.18)$$

Souvenons-nous que les électrons subissent des vibrations forcées à la fréquence de l'onde incidente et que la lumière est diffusée à la même fréquence. De plus,

$$(\vec{k}_i \cdot \vec{r})|_{y=b} = (\vec{k}_r \cdot \vec{r} + \varepsilon_r)|_{y=b} = (\vec{k}_t \cdot \vec{r} + \varepsilon_t)|_{y=b} \quad (4.19)$$

Les valeurs de ε_r et ε_t correspondent à une position donnée de O , ce qui autorise la relation à être vraie quelle que soit sa position. (Par exemple, l'origine peut être choisie telle que \vec{r} soit perpendiculaire à \vec{k}_i mais pas à \vec{k}_r ou \vec{k}_t .) Avec les deux premiers termes on a :

$$[(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}]_{y=b} = \varepsilon_r \quad (4.20)$$

D'après l'équation (2.43), cette expression dit simplement que l'extrémité du vecteur \vec{r} balaie un plan (celui de l'interface) perpendiculaire au vecteur $(\vec{k}_i - \vec{k}_r)$, ou que $(\vec{k}_i - \vec{k}_r)$ est parallèle à \hat{u}_n . Remarquez que comme les ondes incidentes et réfléchies sont dans le même milieu, $k_i = k_r$. Comme $(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \hat{u}_n = 0$, on en conclut que :

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r$$

On retrouve donc la loi de la réflexion :

$$\theta_i = \theta_r$$

De plus, comme $(\vec{k}_i - \vec{k}_r)$ est parallèle à \hat{u}_n les trois vecteurs \vec{k}_i , \vec{k}_r , et \hat{u}_n doivent être dans le même plan, qui est le plan d'incidence. D'après l'équation (4.19) :

$$[(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}]_{y=b} = \varepsilon_t \quad (4.21)$$

Donc $(\vec{k}_i - \vec{k}_r)$ est aussi normal à l'interface et \vec{k}_i , \vec{k}_r , \vec{k}_t , et \hat{u}_n sont coplanaires, comme précédemment. Les composantes tangentielles de \vec{k}_i et \vec{k}_t doivent être égales, donc :

$$k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t \quad (4.22)$$

Mais comme $\omega_i = \omega_r$, on peut multiplier des deux côtés par c/ω_i pour avoir :

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$$

qui n'est rien d'autre que la loi de Snell-Descartes. Finalement, si l'on avait choisi l'origine O sur l'interface, il est évident par les équations (4.20) et (4.21) que ε_r et ε_t auraient été nuls. Cet aménagement n'a rien de pédagogique, mais il est simple, et c'est celui qu'on utilisera dorénavant.

4.6.2 Les équations de Fresnel

On vient de trouver la relation de phase entre $\vec{E}_i(\vec{r}, t)$, $\vec{E}_r(\vec{r}, t)$, et $\vec{E}_t(\vec{r}, t)$ à l'interface. Il reste à évaluer l'interdépendance entre les amplitudes \vec{E}_{0i} , \vec{E}_{0r} , et \vec{E}_{0t} . Pour cela, prenons une onde monochromatique plane, incidente sur une surface plane séparant deux milieux isotropes. Quelle que soit la polarisation de l'onde, on peut écrire les composantes de champs \vec{E} et \vec{B} dans le repère du plan d'incidence, et les traiter séparément.

Cas 1. \vec{E} perpendiculaire au plan d'incidence. Supposons que \vec{E} et \vec{B} sont respectivement perpendiculaire et parallèle au plan d'incidence (figure 4.39). Puisque $E = vB$, on obtient

$$\hat{k} \times \vec{E} = v\vec{B} \quad (4.23)$$

et
$$\hat{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.24)$$

En exploitant la continuité de la composante tangentielle du champ- \vec{E} , on a en tout point de l'interface, et à tout instant

$$\vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0t} \quad (4.25)$$

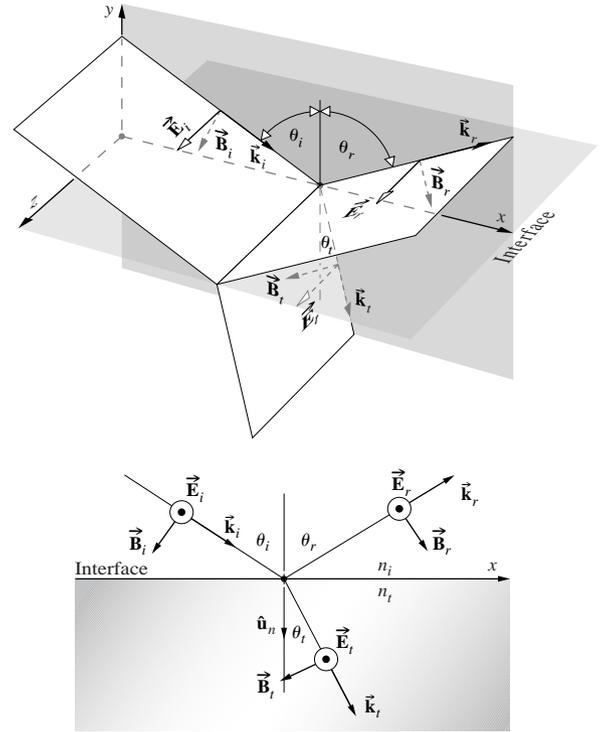


Figure 4.39 Onde incidente de champ \vec{E} normal au plan d'incidence.

On aurait dû dessiner les vecteurs de champ en $y = 0$ (i.e. sur la surface), mais on les a déplacés pour plus de clarté. On remarque que même si \vec{E}_r et \vec{E}_t doivent être normaux au plan d'incidence par symétrie, on devine qu'ils pointent dans la même direction que \vec{E}_i à l'interface. La direction des champs \vec{B} se déduit de l'équation (4.23).

Il faut exploiter une autre des conditions à l'interface pour obtenir une équation de plus. La présence de particules qui sont électriquement polarisées par l'onde a un effet bien défini sur la configuration du champ : la composante normale n'est pas continue au passage de l'interface, contrairement à la composante tangentielle de \vec{E} , et c'est la composante normale du produit $\epsilon \vec{E}$ qui est la même des deux côtés de l'interface. De la même manière, la composante normale de \vec{B} est continue, tout comme la composante tangentielle de $\mu^{-1} \vec{B}$. L'effet magnétique des deux milieux apparaît par leurs perméabilités μ_i et μ_r . Cette condition à l'interface est la plus simple à utiliser, particulièrement quand elle est appliquée à la réflexion sur

la surface d'un conducteur.* La continuité de la composante tangentielle de \vec{B}/μ s'écrit :

$$-\frac{B_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{B_r}{\mu_i} \cos \theta_r = -\frac{B_t}{\mu_t} \cos \theta_t \quad (4.26)$$

Les projections sont positives dans la direction croissante de x , de sorte que les composantes scalaires de \vec{B}_i et \vec{B}_t sont négatives. De l'équation (4.23) on tire :

$$B_i = E_i/v_i \quad (4.27)$$

$$B_r = E_r/v_r \quad (4.28)$$

et
$$B_t = E_t/v_t \quad (4.29)$$

Comme $v_i = v_r$ et $\theta_i = \theta_r$, l'équation (4.26) s'écrit :

$$\frac{1}{\mu_i v_i} (E_i - E_r) \cos \theta_i = \frac{1}{\mu_t v_t} E_t \cos \theta_t \quad (4.30)$$

En utilisant les équations (4.12), (4.13), et (4.14) et en se souvenant que les cosinus sont égaux en $y = 0$, on obtient :

$$\frac{n_i}{\mu_i} (E_{0i} - E_{0r}) \cos \theta_i = \frac{n_t}{\mu_t} E_{0t} \cos \theta_t \quad (4.31)$$

Combinée à l'équation (4.25), cette relation conduit à :

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i - \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t} \quad (4.32)$$

et
$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2 \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t} \quad (4.33)$$

L'indice \perp se réfère au cas où \vec{E} est perpendiculaire au plan d'incidence. Ces deux expressions, qui s'appliquent à n'importe quel milieu linéaire, homogène et isotrope, sont deux des **équations de Fresnel**. Dans le cas de diélectriques, $\mu_i \approx \mu_r \approx \mu_0$, et les équations se simplifient :

$$r_\perp \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \quad (4.34)$$

*Dans le souci de ne travailler qu'avec les champs \vec{E} et \vec{B} , on a éludé les équations faisant intervenir \vec{H} puisque :

$$\vec{H} = \mu^{-1} \vec{B} \quad [A1.14]$$

et

$$t_\perp \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \quad (4.35)$$

Ici r_\perp représente le **facteur de réflexion en amplitude**, et t_\perp le **facteur de transmission en amplitude**.

Cas 2. \vec{E} parallèle au plan d'incidence. On aboutit à une paire d'équations similaires quand le champ \vec{E} se trouve dans le plan d'incidence, comme dans la figure 4.40. La continuité de la composante tangentielle de \vec{E} permet d'écrire :

$$E_{0i} \cos \theta_i - E_{0r} \cos \theta_r = E_{0t} \cos \theta_t \quad (4.36)$$

De la même manière que précédemment, on déduit de la continuité de la composante tangentielle de \vec{B}/μ que :

$$\frac{1}{\mu_i v_i} E_{0i} + \frac{1}{\mu_r v_r} E_{0r} = \frac{1}{\mu_t v_t} E_{0t} \quad (4.37)$$

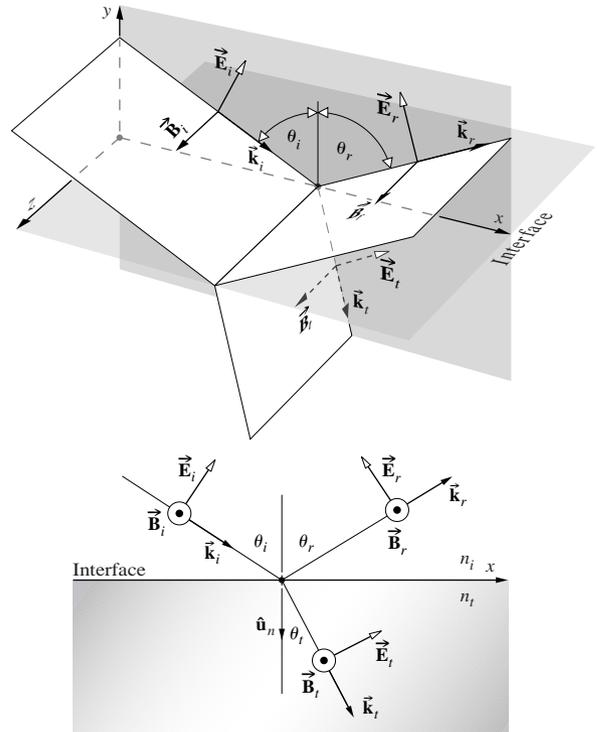


Figure 4.40 Onde incidente pour laquelle le champ \vec{E} est dans le plan d'incidence.

Puisque $\mu_i = \mu_r$ et $\theta_i = \theta_r$, on peut combiner ces formules pour obtenir deux *équations de Fresnel* additionnelles :

$$r_{\parallel} \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{\frac{n_t}{\mu_i} \cos \theta_i - \frac{n_i}{\mu_r} \cos \theta_r}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{n_t}{\mu_r} \cos \theta_r} \quad (4.38)$$

et

$$t_{\parallel} \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{2 \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{n_t}{\mu_r} \cos \theta_r} \quad (4.39)$$

Dans le cas de deux milieux diélectriques principalement « non magnétiques » (p. 71), les facteurs de réflexion et de transmission en amplitude deviennent :

$$r_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_r}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_r} \quad (4.40)$$

et

$$t_{\parallel} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_r} \quad (4.41)$$

La loi de Snell-Descartes permet une dernière simplification dans les équations de Fresnel pour un milieu diélectrique (problème 4.39) :

$$r_{\perp} = - \frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin(\theta_i + \theta_r)} \quad (4.42)$$

$$r_{\parallel} = + \frac{\tan(\theta_i - \theta_r)}{\tan(\theta_i + \theta_r)} \quad (4.43)$$

$$t_{\perp} = + \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_r}{\sin(\theta_i + \theta_r)} \quad (4.44)$$

$$t_{\parallel} = + \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_r) \cos(\theta_i - \theta_r)} \quad (4.45)$$

Il faut néanmoins prendre des précautions. Gardons à l'esprit que la direction des champs (ou plus précisément leur phase) dans les figures 4.39 et 4.40 a été choisie de manière arbitraire. Par exemple, dans la figure 4.39 on aurait pu supposer que \vec{E}_r pointait vers l'intérieur de la figure, auquel cas \vec{B}_r aurait dû être inversé. Le signe de r_{\perp} serait devenu positif, celui des autres coefficients restant inchangé. Les signes des équations (4.42) à (4.45) correspondent à un choix particulier des directions des

champs. Le signe moins de l'équation (4.42), comme on le verra par la suite, signifie simplement qu'on n'avait pas correctement deviné le sens de \vec{E}_r dans la figure 4.39. Il faut être vigilant car la littérature n'est pas standardisée ; toutes les combinaisons de signes possibles sont appelées *équations de Fresnel*.

4.6.3 Interprétation des équations de Fresnel

On s'intéresse ici aux implications physiques des équations de Fresnel. On va en particulier déterminer les facteurs de réflexion et de transmission en amplitude et en énergie. On traitera aussi les possibles variations de phase qui peuvent accompagner ces processus.

Facteurs en amplitude

Regardons brièvement la forme des facteurs de réflexion et de transmission en amplitude pour différentes valeurs de θ_i . À incidence quasi normale ($\theta_i \approx 0$) les tangentes de l'équation (4.43) sont sensiblement égales aux sinus, auquel cas :

$$[r_{\parallel}]_{\theta_i=0} = [-r_{\perp}]_{\theta_i=0} = \left[\frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin(\theta_i + \theta_r)} \right]_{\theta_i=0}$$

On va revenir dans un instant à la signification physique du signe moins. En développant les sinus et grâce à la loi de Snell-Descartes, cette expression devient :

$$[r_{\parallel}]_{\theta_i=0} = [-r_{\perp}]_{\theta_i=0} = \left[\frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_r}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_r} \right]_{\theta_i=0} \quad (4.46)$$

Quand θ_i tend vers 0, $\cos \theta_i$ et $\cos \theta_r$ tendent vers un, donc

$$[r_{\parallel}]_{\theta_i=0} = [-r_{\perp}]_{\theta_i=0} = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \quad (4.47)$$

Cette égalité des facteurs de réflexion résulte de ce que le plan d'incidence n'est plus spécifié pour $\theta_i = 0$. Par exemple, pour une incidence quasi normale sur une interface air ($n_i = 1$) verre ($n_t = 1,5$), le facteur de réflexion en amplitude vaut $\pm 0,2$. (voir le problème 4.45.)

Quand $n_t > n_i$ il découle de la loi de Snell-Descartes que $\theta_i > \theta_r$, et r_{\perp} est négatif pour toutes les valeurs de θ_i (figure 4.41). En revanche, d'après l'équation (4.43), r_{\parallel} est positif pour $\theta_i = 0$ et décroît graduellement jusqu'à devenir nul quand $(\theta_i + \theta_r) = 90^\circ$, puisque $\tan \pi/2$ tend vers l'infini. La valeur correspondante de l'angle d'incidence, noté θ_p , est appelée **angle de Brewster** (voir la section 8.6.1). Remarquez

que $r_{\parallel} \rightarrow 0$ à θ_p , en même temps que la phase change de 180° . Quand θ_i croît au-delà de θ_p , r_{\parallel} prend des valeurs de plus en plus grandes négativement, valant $-1,0$ à 90° .

Par exemple, si l'on place une lamelle de microscope sur cette feuille, et si l'on la regarde à la verticale ($\theta_i = 0$), la partie de la page sous le verre semblera plus grise que le reste du papier. Cela vient du fait que la lamelle réfléchit à chaque interface, ce qui a pour effet de diminuer la quantité de lumière reçue et réfléchi par la feuille elle-même. Maintenant, approchez la lamelle de l'œil, et regardez la feuille au travers en inclinant la lamelle pour accroître θ_i . La réflexion de la lamelle augmente et il devient plus difficile de voir au travers d'elle. Quand $\theta_i \approx 90^\circ$ la lamelle se comporte comme un miroir au fur et à mesure que les facteurs de réflexion (figure 4.41) tendent vers $-1,0$. Même une mauvaise surface (voir la photo) comme la couverture de ce livre peut agir comme un miroir en incidence rasante. Si l'on tient le livre horizontalement, au niveau des yeux, et si l'on se place devant une source de lumière brillante, on verra assez bien la source en réflexion sur la couverture. Même les rayons X se réfléchissent en incidence rasante (p. 254), ce qu'exploitent les télescopes modernes à rayons X.



En incidence rasante, les murs et le sol se comportent comme des miroirs, même si ces surfaces réfléchissent peu à $\theta_i = 0^\circ$. (Photo E.H.)

En incidence normale, les équations (4.35) et (4.41) deviennent :

$$[t_{\parallel}]_{\theta_i=0} = [t_{\perp}]_{\theta_i=0} = \frac{2n_i}{n_i + n_t} \quad (4.48)$$

On montrera dans le problème 4.50 que l'expression :

$$t_{\perp} + (-r_{\perp}) = 1 \quad (4.49)$$

est vérifiée pour tout θ_i , alors que :

$$t_{\parallel} + r_{\parallel} = 1 \quad (4.50)$$

n'est vraie qu'en incidence normale.

La précédente discussion s'est restreinte au cas de la **réflexion externe** (i.e. $n_t > n_i$). La situation inverse est la **réflexion interne**, pour laquelle le milieu incident est plus dense ($n_i > n_t$). Dans ce cas $\theta_t > \theta_i$ et, d'après l'équation (4.42), r_{\perp} est toujours positif. La figure 4.42 montre que r_{\perp} croît, de sa valeur initiale [équation (4.47)] atteinte en $\theta_i = 0$, jusqu'à la valeur $+1$ atteinte en θ_c , appelée **angle critique**. Plus spécifiquement, θ_c est la valeur de l'angle d'incidence (p. 128) pour laquelle $\theta_t = \pi/2$. De même r_{\parallel} croît d'une valeur initiale négative [équation (4.47)] atteinte en $\theta_i = 0$ jusqu'à la valeur $+1$ atteinte en $\theta_i = \theta_c$, ce qui est évident d'après l'équation de Fresnel (4.40). Encore une fois r_{\parallel} passe par zéro pour l'angle de Brewster θ'_p . On laisse dans le problème 4.66 le soin de montrer que les angles de Brewster θ'_p et θ_p de réflexion interne et externe à l'interface entre les mêmes milieux sont simplement complémentaires l'un de l'autre. On reviendra dans le paragraphe 4.7 à la réflexion interne pour montrer que r_{\perp} et r_{\parallel} sont des quantités complexes pour $\theta_i > \theta_c$.

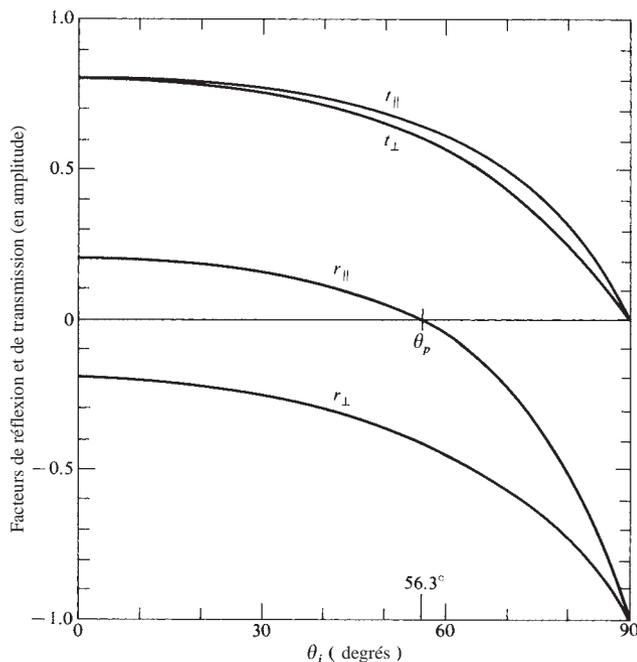


Figure 4.41 Les facteurs de la réflexion et de la transmission en amplitude en fonction de l'angle d'incidence. Ils correspondent à une réflexion externe $n_t > n_i$ sur une interface air-verre ($n_{ij} = 1,5$).

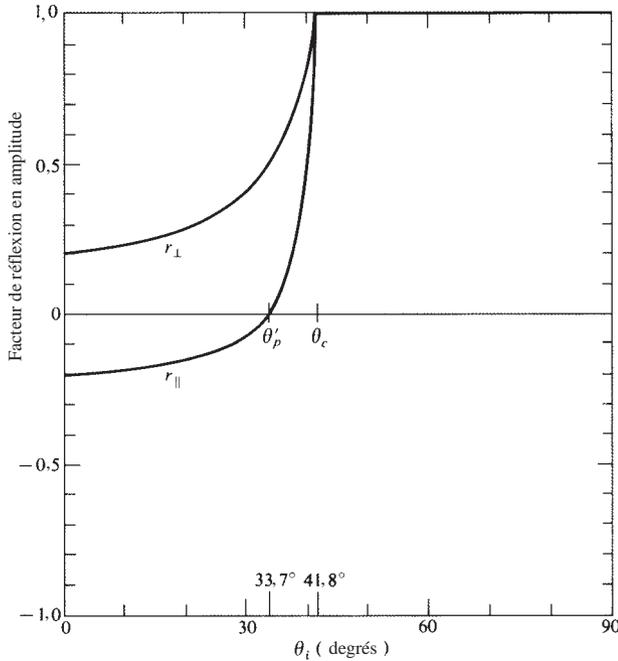


Figure 4.42 Les facteurs de la réflexion en amplitude en fonction de l'angle d'incidence. Ils correspondent à une réflexion interne $n_t < n_i$ sur une interface air-verre ($n_t = 1/1,5$).

Déphasages

Il est évident d'après l'équation (4.42) que r_{\perp} est négatif quel que soit θ_i quand $n_t > n_i$. On a fait remarquer précédemment que si l'on avait choisi le sens opposé pour $[\vec{E}_r]_{\perp}$ dans la figure 4.37, alors la première équation de Fresnel (4.42) aurait changé de signe, et r_{\perp} serait une quantité positive. Le signe de r_{\perp} dépend des orientations relatives de $[\vec{E}_{0i}]_{\perp}$ et de $[\vec{E}_{0r}]_{\perp}$. Gardez à l'esprit qu'inverser le sens de $[\vec{E}_{0r}]_{\perp}$ revient à introduire un déphasage, $\Delta\varphi_{\perp}$, de π radians dans $[\vec{E}_r]_{\perp}$. Sur l'interface, $[\vec{E}_i]_{\perp}$ et $[\vec{E}_r]_{\perp}$ seront donc antiparallèles et déphasés de π radians à cause de la valeur négative de r_{\perp} . Si les composantes sont normales au plan d'incidence, il n'y a pas de confusion possible sur le déphasage d'un champ par rapport à l'autre : s'ils sont parallèles, alors ils sont en phase, et s'ils sont antiparallèles, alors ils sont déphasés de π radians. En résumé, **la composante du champ électrique qui est normale au plan d'incidence subit une variation de phase de π radians en réflexion externe**. Quant à t_{\perp} et t_{\parallel} , ils sont toujours positifs, et $\Delta\varphi = 0$. De plus, quand $n_i > n_t$, on ne constate en réflexion

aucune variation de phase pour la composante normale, c'est-à-dire que $\Delta\varphi_{\perp} = 0$ tant que $\theta_i < \theta_c$.

Les choses sont moins évidentes dès qu'il s'agit de $[\vec{E}_i]_{\parallel}$, $[\vec{E}_r]_{\parallel}$, et $[\vec{E}_t]_{\parallel}$. Il est maintenant nécessaire de définir explicitement ce qu'on entend par des vecteurs *en phase*, puisque les vecteurs de champ sont coplanaires mais pas forcément colinéaires. Le sens des champs dans les figures 4.39 et 4.40 a été choisi de sorte que \vec{E} , \vec{B} , et \vec{k} aient la même orientation relative pour les rayons incident, réfléchi et transmis. On va s'en servir comme la condition requise pour que les champs \vec{E} soient en phase. Plus simplement, **deux champs dans le plan d'incidence sont en phase si leurs composantes y sont parallèles, et ils sont déphasés si elles sont antiparallèles**. Remarquez que quand deux champs \vec{E} sont déphasés, leurs champs \vec{B} associés le sont aussi et vice versa. Avec cette définition, il suffit de considérer les vecteurs normaux au plan d'incidence, que ce soit \vec{E} ou \vec{B} , pour déterminer la phase relative de leur champ dans le plan d'incidence. Ainsi dans la figure 4.43a, \vec{E}_i et \vec{E}_t sont en phase, et donc \vec{B}_i et \vec{B}_t le sont aussi alors que \vec{E}_i et \vec{E}_r sont déphasés, ce qui implique que \vec{B}_i et \vec{B}_r le soient aussi. De la même manière \vec{E}_i , \vec{E}_r , et \vec{E}_t sont en phase dans la figure 4.43b, tout comme \vec{B}_i , \vec{B}_r , et \vec{B}_t .

Maintenant, le facteur de réflexion en amplitude pour la composante parallèle est donné par :

$$r_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}$$

valeur qui est positive ($\Delta\varphi_{\parallel} = 0$) tant que :

$$n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t > 0$$

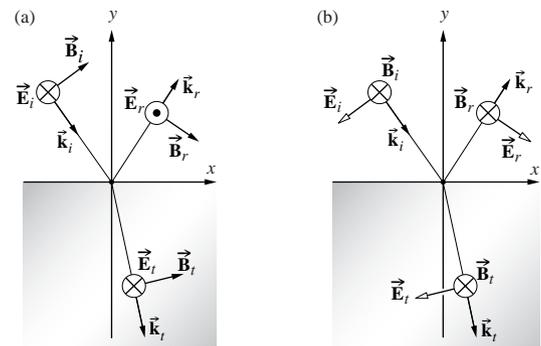


Figure 4.43 Orientations des champs et déphasages.

c'est-à-dire si :

$$\sin \theta_i \cos \theta_t - \cos \theta_i \sin \theta_t > 0$$

ou de manière équivalente :

$$\sin (\theta_i - \theta_t) \cos (\theta_i + \theta_t) > 0 \quad (4.51)$$

Ce sera le cas pour $n_i < n_t$ si :

$$(\theta_i + \theta_t) < \pi/2 \quad (4.52)$$

et pour $n_i > n_t$ quand :

$$(\theta_i + \theta_t) > \pi/2 \quad (4.53)$$

Donc quand $n_i < n_t$, $[\vec{E}_{0r}]_{\parallel}$ et $[\vec{E}_{0i}]_{\parallel}$ seront en phase ($\Delta\phi_{\parallel} = 0$) jusqu'à ce que $\theta_i = \theta_p$ et seront déphasés de π radians par la suite. La transition n'est pas discontinue puisque $[\vec{E}_{0r}]_{\parallel}$ tend vers zéro pour θ_p . En revanche, pour la réflexion interne r_{\parallel} est négatif jusqu'à θ'_p , ce qui signifie que $\Delta\phi_{\parallel} = \pi > 0$. De θ'_p à θ_c , r_{\parallel} est positif et $\Delta\phi_{\parallel} = 0$. Au-delà de θ_c , r_{\parallel} devient complexe, et $\Delta\phi_{\parallel}$ croît graduellement jusqu'à π à $\theta_i = 90^\circ$.

La figure 4.44, qui synthétise ces résultats, nous servira de fil rouge. La forme fonctionnelle de $\Delta\phi_{\parallel}$ et $\Delta\phi_{\perp}$ pour la réflexion interne dans la région où $\theta_i > \theta_c$ se trouve dans la littérature,* et les graphiques sont suffisants pour notre propos. La figure 4.44e montre le déphasage relatif entre les composantes parallèle et perpendiculaire, c'est-à-dire $\Delta\phi_{\parallel} - \Delta\phi_{\perp}$. Ce paramètre nous sera utile plus tard (par exemple, quand on considérera les effets de la polarisation). Finalement, un grand nombre des caractéristiques dont on a discuté est illustré par les figures 4.41 et 4.42 (pour une interface air-verre), et plus précisément celles des variations de phase par la figure 4.44.

On peut vérifier la plupart des conclusions précédentes avec un appareillage très simple, c'est-à-dire deux polariseurs, un morceau de verre et une petite source, telle qu'une lampe torche ou une lampe haute intensité. On place un polariseur devant la source (à 45° du plan d'incidence), pour dupliquer les conditions de la figure 4.45. Par exemple, quand $\theta_i = \theta_p$ (figure 4.45b) la lumière est stoppée par le second polariseur si son axe de transmission est parallèle au plan d'incidence. En incidence rasante, le faisceau réfléchi s'évanouit quand les axes des deux polariseurs sont perpendiculaires.

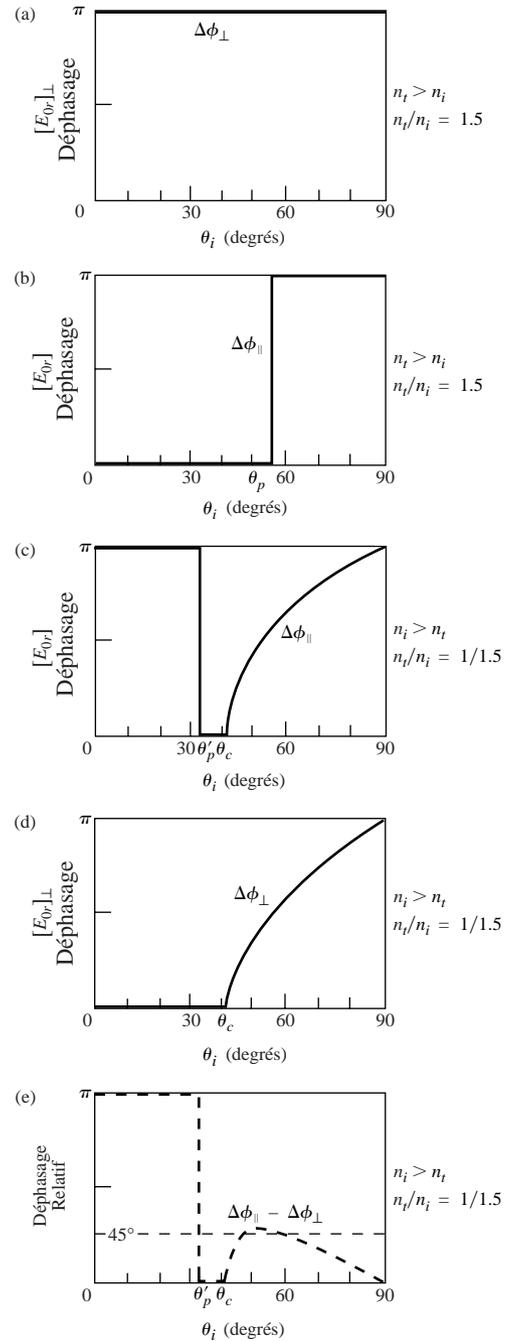


Figure 4.44 Déphasage pour les composantes parallèle et perpendiculaire de \vec{E} en réflexion interne et externe.

*Born et Wolf, *Principles of Optics*, p. 49.

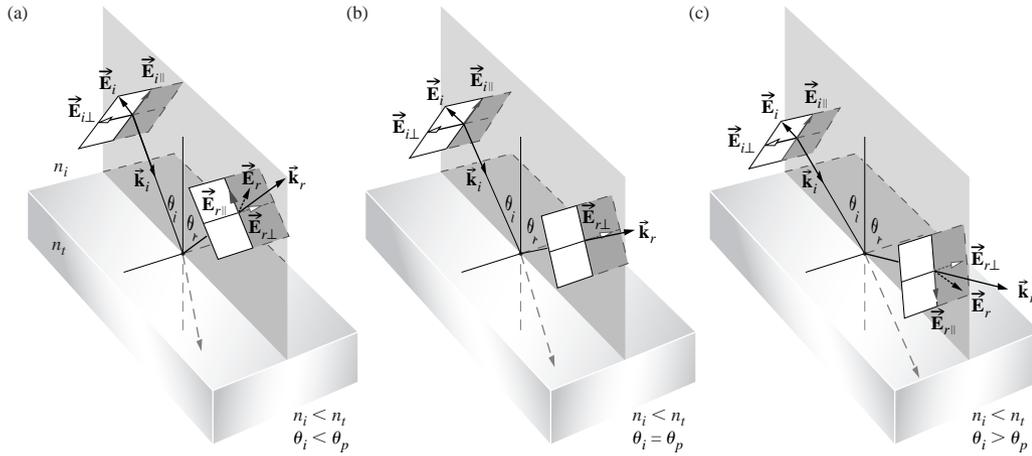


Figure 4.45 Réflexion externe du champ \vec{E} pour différents angles.

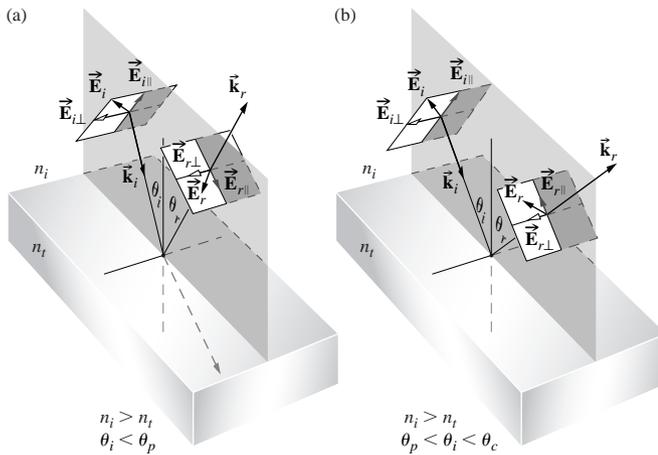


Figure 4.46 Réflexion interne du champ \vec{E} pour différents angles.

Réflexion et transmission

Considérons sur la figure 4.47 un faisceau circulaire formant un spot d'aire A sur une surface. On rappelle que le flux instantané par unité de surface, perpendiculaire au vecteur de Poynting \vec{S} , est donné dans le vide par :

$$\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \quad [3.40]$$

D'où l'éclairement (W/m^2) :

$$I = \langle S \rangle_T = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2 \quad [3.44]$$

C'est l'énergie moyenne par unité de temps qui traverse une unité d'aire normale à \vec{S} (dans un milieu isotrope \vec{S} est parallèle à \vec{k}). Soit I_i , I_r , et I_t les éclairements incident, réfléchi et transmis, respectivement (figure 4.47). L'aire de la section des faisceaux incident, réfléchi et transmis vaut respectivement $A \cos \theta_i$, $A \cos \theta_r$, et $A \cos \theta_t$. Par conséquent, le flux incident vaut $I_i A \cos \theta_i$. De la même manière, $I_r A \cos \theta_r$ est le flux dans le faisceau réfléchi et $I_t A \cos \theta_t$ est le flux transmis à travers A . On définit le **facteur de réflexion** R comme le rapport entre le flux réfléchi et le flux incident :

$$R \equiv \frac{I_r A \cos \theta_r}{I_i A \cos \theta_i} = \frac{I_r}{I_i} \quad (4.54)$$

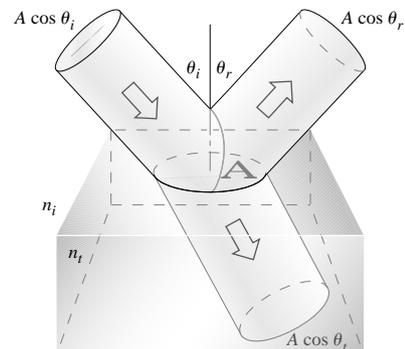


Figure 4.47 Réflexion et transmission d'un faisceau.

On définit de même le **facteur de transmission** T comme le rapport entre le flux transmis et le flux incident :

$$T \equiv \frac{I_t \cos \theta_t}{I_i \cos \theta_i} \quad (4.55)$$

Le rapport I_r/I_i vaut $(v_r \epsilon_r E_{0r}^2/2)/(v_i \epsilon_i E_{0i}^2/2)$, et comme les ondes incidentes et réfléchies sont dans le même milieu $v_r = v_i$, $\epsilon_r = \epsilon_i$, et :

$$R = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = r^2 \quad (4.56)$$

En supposant que $\mu_i = \mu_t = \mu_0$:

$$T = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)^2 = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right) t^2 \quad (4.57)$$

en utilisant le fait que $\mu_0 \epsilon_t = 1/v_t^2$ et $\mu_0 v_t \epsilon_t = n_t/c$. On remarque qu'en incidence normale, $\theta_t = \theta_i = 0$, les facteurs de transmission [équation (4.55)] et de réflexion [équation (4.54)] sont simplement le rapport entre les intensités idoines. Comme $R = r^2$, il n'est pas nécessaire de se soucier du signe de r quelle que soit la formulation utilisée, ce qui fait du facteur en réflexion une notion commode. Notons que, dans l'équation (4.57), T n'est pas simplement égal à t^2 pour deux raisons. La première vient du fait que le rapport des indices de réfraction doit intervenir car la vitesse à laquelle l'énergie se déplace diffère d'un milieu à l'autre, c'est-à-dire que $I \propto v$, d'après l'équation (3.47). La seconde vient du fait que l'aire de la section des faisceaux incident et réfracté est différente. L'énergie par unité d'aire en est affectée par l'intermédiaire du rapport des termes en cosinus.

Exprimons maintenant la conservation de l'énergie dans la configuration de la figure 4.47. L'énergie totale, par unité de temps, qui arrive sur la surface A doit être égale à celle qui en repart :

$$I_i A \cos \theta_i = I_r A \cos \theta_r + I_t A \cos \theta_t \quad (4.58)$$

En multipliant des deux côtés par c , l'expression devient

$$n_i E_{0i}^2 \cos \theta_i = n_i E_{0r}^2 \cos \theta_i + n_i E_{0t}^2 \cos \theta_t$$

$$\text{ou} \quad 1 = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 + \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right) \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)^2 \quad (4.59)$$

Ce qui s'écrit plus simplement :

$$R + T = 1 \quad (4.60)$$

s'il n'y a pas d'absorption. Avec les notations précédentes,

$$R_{\perp} = r_{\perp}^2 \quad (4.61)$$

$$R_{\parallel} = r_{\parallel}^2 \quad (4.62)$$

$$T_{\perp} = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right) t_{\perp}^2 \quad (4.63)$$

$$\text{et} \quad T_{\parallel} = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right) t_{\parallel}^2 \quad (4.64)$$

équations illustrées par la figure 4.48. On peut aussi démontrer (problème 4.71) que :

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1 \quad (4.65)$$

$$\text{et} \quad R_{\perp} + T_{\perp} = 1 \quad (4.66)$$

Quand $\theta_i = 0$, le plan d'incidence n'est plus défini, et toute distinction entre les composantes parallèles et perpendiculaires de R et T s'évanouit. Dans ce cas, les équations (4.61) à (4.64), et (4.47) à (4.48) aboutissent à :

$$R = R_{\parallel} = R_{\perp} = \left(\frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \right)^2 \quad (4.67)$$

$$\text{et} \quad T = T_{\parallel} = T_{\perp} = \frac{4n_t n_i}{(n_t + n_i)^2} \quad (4.68)$$

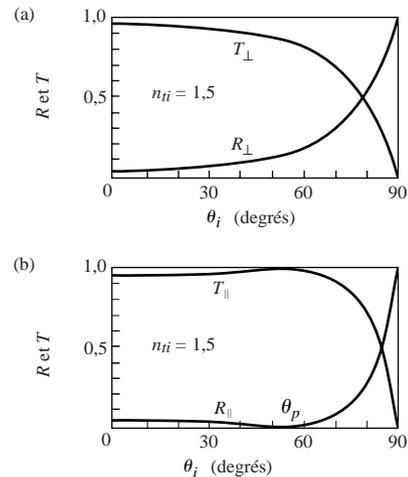


Figure 4.48 Facteurs de réflexion et de transmission en fonction de l'angle d'incidence.



En regardant une flaque d'eau (avec de la neige en train de fondre, sur la droite), on peut apercevoir en réflexion les arbres environnants. En incidence normale, l'eau réfléchit 2 % de la lumière. Quand l'angle d'incidence augmente, ici 40°, ce pourcentage augmente. (Photo E.H.)

Ainsi 4 % de la lumière en incidence normale sur une interface air-verre ($n_g = 1,5$) subira une réflexion interne si $n_i > n_t$, et externe si $n_i < n_t$ (problème 4.72). Cela est à prendre en considération tout particulièrement si l'on est amené à travailler avec des systèmes de lentilles compliqués qui comportent une dizaine voire une vingtaine d'interfaces air-verre. Il suffit de faire l'essai avec 50 lamelles de microscope (faciles à trouver dans ces quantités) empilées les unes sur les autres et de regarder au travers à 90° et vous constaterez que la lumière est largement réfléchi. L'empilage agit comme un miroir (voir la photo). Si l'on enroule en forme de cylindre un film fin de plastique plusieurs fois sur lui-même, il prendra l'aspect de métal brillant. Les nombreuses interfaces produisent beaucoup



En incidence normale, 4 % de la lumière est réfléchi à chaque interface air-verre. Ici, l'extérieur étant bien plus lumineux que l'intérieur de l'immeuble, on peut voir facilement le photographe. (Photo E.H.)



Réflexion normale sur des lamelles de microscope. On voit l'image de l'appareil qui a pris la photo. (Photo E.H.)

de réflexions *spéculaires* qui renvoient la lumière dans le milieu incident, plus ou moins comme si elle avait subi une réflexion indépendante de la fréquence. C'est d'ailleurs ce que fait une surface gris-métal, elle réfléchit de façon spéculaire sur une large bande-passante et a l'air brillante. Si la réflexion est diffuse alors la surface apparaîtra grise, voire blanche, si le facteur de réflexion est suffisamment important.

La figure 4.49 montre la variation du facteur de réflexion d'une interface unique en incidence normale, en fonction de l'indice de milieux transparents dans l'air. La figure 4.50 montre que le facteur de transmission dépend, en incidence normale, du nombre d'interfaces et de l'indice du milieu. Cela explique pourquoi on ne peut pas voir à travers un rouleau de scotch transparent, et pourquoi les différents éléments d'un périscope doivent être traités antireflet (paragraphe 9.9.2).

4.7 Réflexion totale interne

Dans la section précédente, on a vu qu'il se passe quelque chose d'intéressant en réflexion interne ($n_i > n_t$), quand θ_i est supérieur ou égal à θ_c , l'**angle critique**. On va étudier cette situation de plus près. Plaçons une source dans un milieu d'indice élevé et augmentons graduellement θ_i comme le montre la figure 4.51. On a vu précédemment (figure 4.42) que r_{\parallel} et r_{\perp} croissent avec θ_i , et que t_{\parallel} et t_{\perp} décroissent. De plus, $\theta_t > \theta_i$, puisque :

$$\sin \theta_t = \frac{n_t}{n_i} \sin \theta_i$$

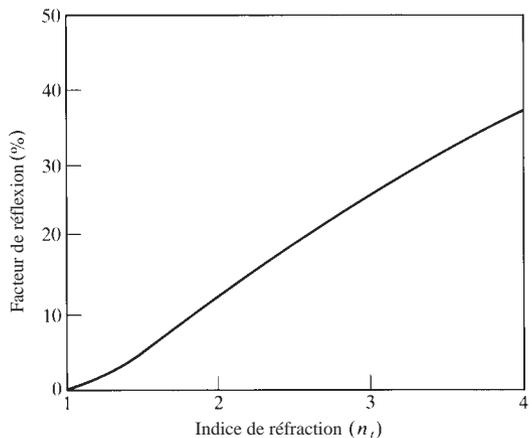


Figure 4.49 Facteur de réflexion en incidence normale dans l'air ($n_i = 1,0$) pour une seule interface.

et $n_i > n_r$, auquel cas $n_{ri} < 1$. Au fur et à mesure que θ_i augmente, le rayon transmis se rapproche de l'interface, et de plus en plus d'énergie est transférée au rayon réfléchi. Finalement, quand $\theta_i = 90^\circ$ alors $\sin \theta_r = 1$ et :

$$\sin \theta_c = n_{ri} \quad (4.69)$$

L'angle critique est la valeur particulière de θ_i pour laquelle $\theta_r = 90^\circ$. n_{ri} et θ_c sont d'autant plus petits que n_i est grand. Pour des angles d'incidence supérieurs à θ_c , toute l'énergie est réfléchié dans le milieu initial, phénomène qu'on désigne par **réflexion totale interne** (voir la photo).

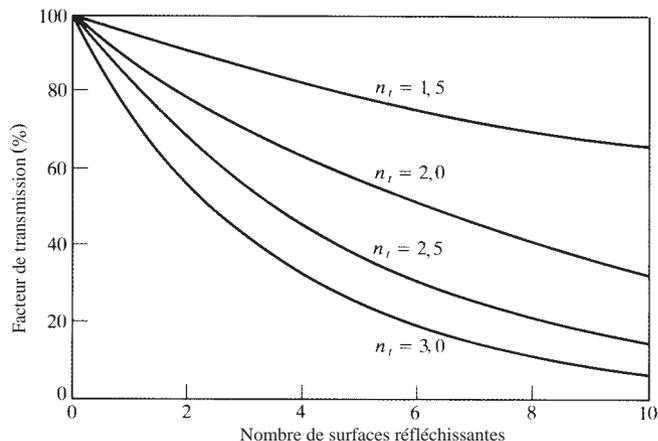


Figure 4.50 Facteur de transmission en fonction du nombre de surfaces traversées dans l'air ($n_i = 1,0$) en incidence normale.

Il est important de préciser que la transition des conditions de la figure 4.51a vers celles de la figure 4.51d n'est pas discontinue. Quand θ_i augmente, le faisceau réfléchi se renforce, alors que le faisceau transmis s'affaiblit jusqu'à s'évanouir. Le faisceau réfléchi transporte alors toute l'énergie pour $\theta_r = \theta_c$. Il est relativement simple d'observer la diminution du faisceau transmis quand θ_i augmente. Placez une lamelle de microscope sur une feuille de papier mais cette fois en bloquant la lumière réfléchié spéculairement. Pour $\theta_i \approx 0$, θ_r vaut zéro et la feuille vue à travers le verre apparaît brillante et lumineuse. Mais en bougeant la tête, autorisant θ_i (l'angle de vue de l'in-

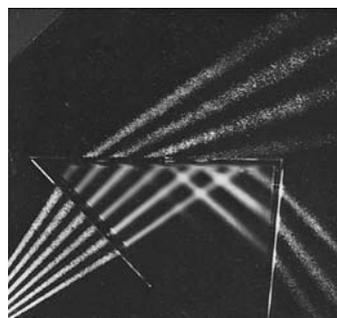
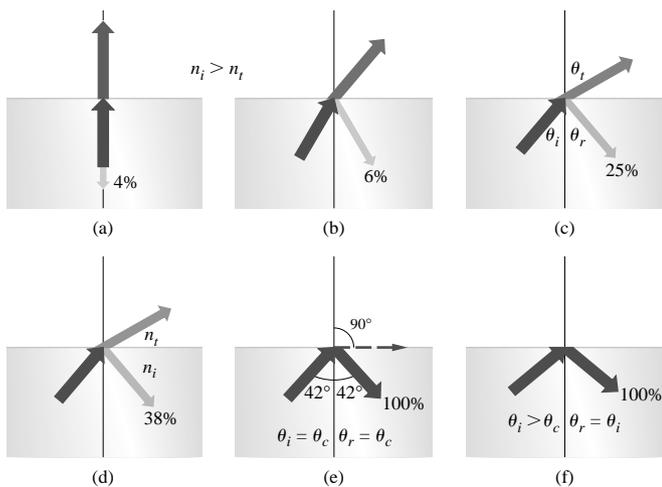


Figure 4.51 Réflexion interne et angle critique. (Educational Service, Inc.)



Noter que l'on ne peut pas voir dans l'eau les deux flammes qui sont le plus en avant, à cause d'une zone horizontale très brillante. Cela est dû à la réflexion totale interne. De même, observer, par le côté, le fond d'un verre. Si on remplit le verre d'eau, que se passe-t-il ? (Photo E.H.)

terface) à croître, la région de la feuille couverte par le verre apparaît de plus en plus sombre, ce qui veut dire que T a été drastiquement réduit.

L'angle critique pour notre interface air-verre vaut environ 42° (voir le tableau 4.2). Par conséquent, un rayon en incidence normale sur la face gauche de n'importe lequel des prismes de la figure 4.52 est tel que $\theta_i > 42^\circ$ et ce rayon subit alors une réflexion interne. C'est un moyen pratique pour obtenir 100 % de réflexion sans se soucier de la détérioration de la surface qui peut survenir avec des miroirs métalliques (voir la photo).

Voyons une autre approche de la situation via la figure 4.53 qui montre une représentation simplifiée de la diffusion par des oscillateurs atomiques. On sait que la présence d'un milieu isotrope homogène a pour effet de faire passer la vitesse de la lumière de c à v_i , et à v_r , respectivement (p. 99). L'onde résultante est la superposition d'ondelettes qui se propagent aux vitesses appropriées. Dans la figure 4.53a, une onde incidente produit l'émission successive, depuis les centres de diffusion A

Tableau 4.2 Angles critiques

n_{it}	θ_c (degrés)	θ_c (radians)	n_{it}	θ_c (degrés)	θ_c (radians)
1,30	50,2849	0,877 6	1,50	41,8103	0,729 7
1,31	49,761 2	0,868 5	1,51	41,471 8	0,723 8
1,32	49,2509	0,859 6	1,52	41,139 5	0,718 0
1,33	48,753 5	0,850 9	1,53	40,813 2	0,712 3
1,34	48,268 2	0,842 4	1,54	40,492 7	0,706 7
1,35	47,794 6	0,834 2	1,55	40,177 8	0,701 2
1,36	47,332 1	0,826 1	1,56	39,868 3	0,695 8
1,37	46,880 3	0,818 2	1,57	39,564 2	0,690 5
1,38	46,438 7	0,810 5	1,58	39,265 2	0,685 3
1,39	46,007 0	0,803 0	1,59	38,971 3	0,680 2
1,40	45,584 7	0,795 6	1,60	38,682 2	0,675 1
1,41	45,171 5	0,788 4	1,61	38,397 8	0,670 2
1,42	44,767 0	0,781 3	1,62	38,118 1	0,665 3
1,43	44,370 9	0,774 4	1,63	37,842 8	0,660 5
1,44	43,983 0	0,767 6	1,64	37,571 9	0,655 8
1,45	43,602 8	0,761 0	1,65	37,305 2	0,651 1
1,46	43,230 2	0,754 5	1,66	37,042 7	0,646 5
1,47	42,864 9	0,748 1	1,67	36,784 2	0,642 0
1,48	42,506 6	0,741 9	1,68	36,529 6	0,637 6
1,49	42,155 2	0,735 7	1,69	36,278 9	0,633 2

et B , d'ondelettes qui se recouvrent pour former l'onde transmise. On ne montre pas l'onde réfléchi qui repart, comme prévu, dans le milieu initial ($\theta_i = \theta_r$). Pendant une durée t , le front incident se propage sur une distance $v_i t = \overline{CB}$, et le front transmis sur une distance $v_r t = \overline{AD} > \overline{CB}$. Puisqu'une onde se rend de A en E pendant que l'autre se rend de C en B , et comme

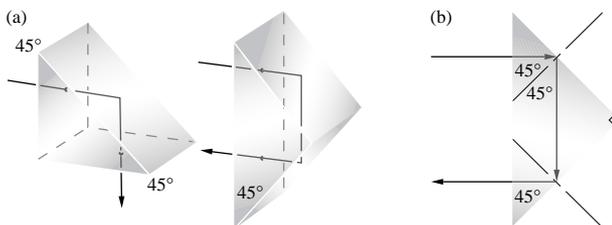


Figure 4.52 Réflexion totale interne.



Le prisme agit comme un miroir en réfléchissant une portion du crayon (les lettres inscrites sont renversées). Le phénomène responsable est la réflexion totale interne. (Photo E.H.)

elles ont la même fréquence et la même période, leur phase varie d'une même quantité. Donc la perturbation au point E doit être en phase avec celle au point B , et les deux points doivent se trouver sur le même front d'onde en transmission (voir paragraphe 4.4.2).

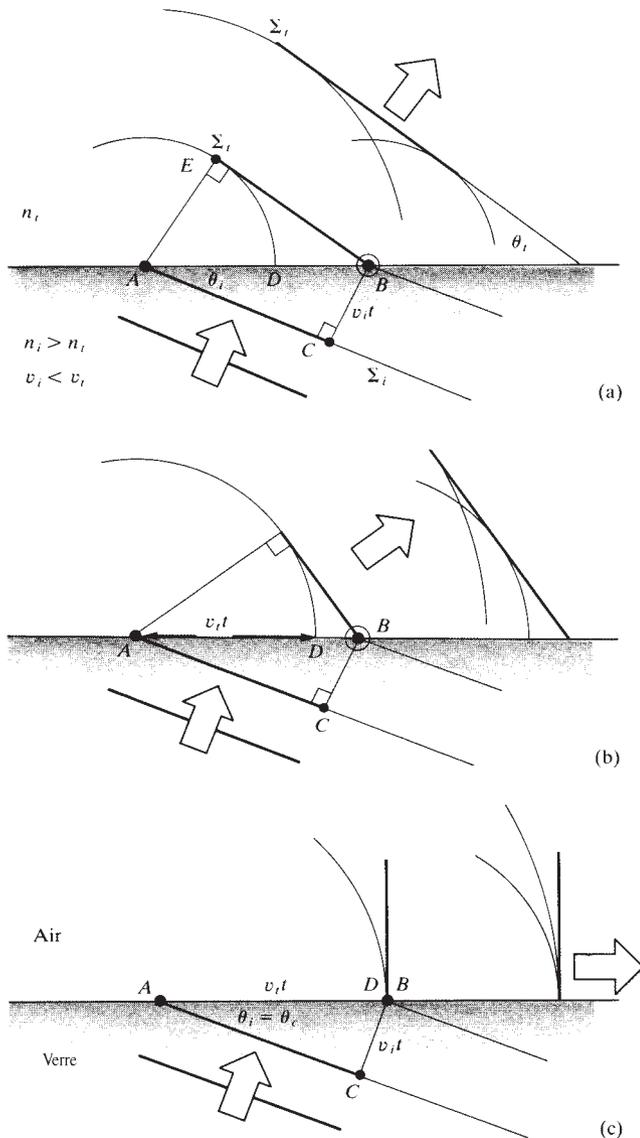


Figure 4.53 Interprétation de l'onde transmise en réflexion totale interne du point de vue de la diffusion. Ici θ_i et n_i sont maintenus constants dans les trois dessins, mais on fait décroître n_t en allant de (a) à (c), pour effet d'accroître v_t . On n'a pas représenté l'onde réfléchi ($\theta_r = \theta_i$).

On remarque que le front d'onde en transmission sera d'autant plus incliné (i.e. θ_t sera d'autant plus grand) que v_t sera grand relativement à v_i . La figure 4.53b rend compte de cette situation où n_{ti} est pris plus petit en supposant que n_t l'est aussi. Il en résulte une vitesse v_t plus grande, ce qui accroît \overline{AD} et l'angle de réfraction. Dans la figure 4.53c, $\overline{AD} = \overline{AB} = v_i t$, et les ondelettes se recouvrent en phase *seulement le long de l'interface*, $\theta_t = 90^\circ$. Dans le triangle ABC , $\sin \theta_i = v_i t / v_t t = n_t / n_i$, qui est l'équation (4.69). Pour les deux milieux donnés (i.e. pour la valeur particulière de n_{ti}), les ondelettes diffusées interfèrent constructivement dans le second milieu le long de l'interface. On appelle *onde de surface* la perturbation résultante ($\theta_t = 90^\circ$).

4.7.1 L'onde évanescente

Parce que la fréquence des rayons X est supérieure à la fréquence de résonance des atomes des milieux matériels, l'équation (3.70) suggère, et les expériences le confirment, que les indices de réfraction pour les rayons X sont inférieurs à 1,0. Pour les rayons X, la vitesse d'une onde (i.e. la vitesse de phase) dans la matière excède celle (c) dans le vide, bien que ce soit en général par moins de 1 pour 10 000, même dans les solides à très fort indice. Lorsque des rayons X se propagent dans l'air pénètrent dans un matériau tel que le verre, le faisceau s'éloigne de la normale, de très peu il est vrai. En ayant à l'esprit la réflexion interne on s'attend à ce que les rayons X subissent une **réflexion totale « externe »** quand par exemple $n_i = n_{\text{air}}$ et $n_t = n_{\text{verre}}$. Il est vrai que c'est dans ces termes qu'on en parle dans la littérature mais c'est incorrect ; comme $n_{\text{air}} > n_{\text{verre}}$ pour les rayons X alors $n_i > n_t$, et le processus reste une réflexion *interne*. Quoiqu'il en soit, comme n_t est inférieur à 1 mais en est tout proche, le rapport des indices $n_{ti} \approx 1$ et $\theta_c \approx 90^\circ$.

En 1923, A. H. Compton fit le raisonnement suivant lequel les rayons X devaient subir une réflexion « externe » en incidence rasante, même s'ils n'étaient pas réfléchis aux angles ordinaires. Avec des rayons X de 0,128 nm de longueur d'onde incidents sur du verre, il obtint 10 minutes d'arc ($0,167^\circ$) mesuré par rapport à la surface, ce qui correspond, pour le verre, à un indice de réfraction égal à 1 à $-4,2 \times 10^{-6}$ près.

On reviendra plus tard aux applications pratiques de la réflexion totale interne et « externe » (p. 209).

Si l'on suppose qu'en réflexion interne il n'y a pas d'onde transmise, alors il est impossible de satisfaire aux conditions à

l'interface avec seulement les ondes incidente et transmise – les choses ne sont pas aussi simples qu'elles paraissent. On peut reformuler les équations (4.34) et (4.40) (problème 4.75) de la façon suivante :

$$r_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - (n_{ii}^2 - \sin^2 \theta_i)^{1/2}}{\cos \theta_i + (n_{ii}^2 - \sin^2 \theta_i)^{1/2}} \quad (4.70)$$

et

$$r_{\parallel} = \frac{n_{ii}^2 \cos \theta_i - (n_{ii}^2 - \sin^2 \theta_i)^{1/2}}{n_{ii}^2 \cos \theta_i + (n_{ii}^2 - \sin^2 \theta_i)^{1/2}} \quad (4.71)$$

Comme $\sin \theta_c = n_{ii}$ quand $\theta_i > \theta_c$, $\sin \theta_i > n_{ii}$, et r_{\perp} et r_{\parallel} deviennent des quantités complexes. Malgré cela (problème 4.76), $r_{\perp} r_{\perp}^* = r_{\parallel} r_{\parallel}^* = 1$ et $R = 1$, ce qui signifie que $I_r = I_i$ et $I_t = 0$. Même si une onde transmise s'avère nécessaire, elle ne peut pas, en moyenne, transporter de l'énergie de l'autre côté de l'interface. On ne va pas faire les calculs complets, et plutôt longs, qui nous permettraient d'obtenir les expressions des champs en réflexion et en transmission, mais on peut apprécier ce qui va suivre. La fonction d'onde pour le champ électrique transmis est :

$$\vec{\mathbf{E}}_t = \vec{\mathbf{E}}_{0t} \exp i(\vec{\mathbf{k}}_t \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega t)$$

où

$$\vec{\mathbf{k}}_t \cdot \vec{\mathbf{r}} = k_{tx}x + k_{ty}y$$

car $\vec{\mathbf{k}}$ n'a pas de composante sur z . Mais :

$$k_{tx} = k_t \sin \theta_t$$

et

$$k_{ty} = k_t \cos \theta_t$$

comme le montre la figure 4.54. En utilisant la loi de Snell-Descartes,

$$k_t \cos \theta_t = \pm k_t \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{n_{ii}^2} \right)^{1/2} \quad (4.72)$$

ou, puisque le cas qui nous intéresse est $\sin \theta_i > n_{ii}$:

$$k_{ty} = \pm i k_t \left(\frac{\sin^2 \theta_i}{n_{ii}^2} - 1 \right)^{1/2} \equiv \pm i\beta$$

et

$$k_{tx} = \frac{k_t}{n_{ii}} \sin \theta_i$$

Donc :

$$\vec{\mathbf{E}}_t = \vec{\mathbf{E}}_{0t} e^{\mp \beta y} e^{i(k_{tx}x \sin \theta_i/n_{ii} - \omega t)} \quad (4.73)$$

En négligeant l'exponentielle positive, qui n'a pas de signification physique, on a une onde dont l'amplitude décroît

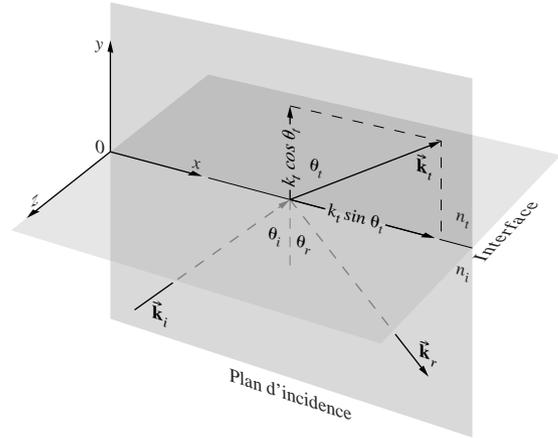


Figure 4.54 Vecteurs de propagation en réflexion interne.

exponentiellement au fur et à mesure de sa pénétration dans le milieu d'indice plus faible. La perturbation non propagative avance dans la direction x comme une onde de surface, ou **onde évanescente**. Remarquons que les fronts d'onde, ou surfaces de phase constante (parallèles au plan yz), sont perpendiculaires aux surfaces d'amplitude constante (parallèles au plan xz), et donc l'onde est *inhomogène* (p. 22). Son amplitude diminue très vite dans la direction y , jusqu'à être négligeable à quelques longueurs d'onde de distance.

Si la conservation de l'énergie vous préoccupe encore, un traitement extensif montrerait que l'énergie circule en fait de part et d'autre de l'interface, résultant en un flux net vers le second milieu de moyenne nulle. Mais il reste encore un point en suspens concernant l'énergie associée à l'onde évanescente qui se propage le long de la frontière dans le plan d'incidence. Comme cette énergie n'aurait pas pu pénétrer dans le milieu d'indice plus faible dans ces circonstances (tant que $\theta_i \geq \theta_c$), il faut trouver l'explication ailleurs. Dans des conditions expérimentales réelles, le faisceau incident a une dimension finie et diffère donc d'une onde plane. Cette différence donne naissance (via la diffraction) à une faible transmission, à travers l'interface, qui se manifeste sous la forme d'une onde évanescente.

Il est évident, d'après (c) et (d) de la figure 4.44, que les ondes incidente et réfléchi (sauf pour $\theta_i = 90^\circ$) sont en opposition de phase et ne peuvent donc pas s'annuler l'une l'autre. Il suit, d'après la continuité de la composante tangentielle de $\vec{\mathbf{E}}$, qu'il doit exister un champ vibratoire dans le milieu le moins dense, avec une composante parallèle à l'interface de pulsation ω (i.e. l'onde évanescente).

La décroissance exponentielle de l'onde de surface a été confirmée expérimentalement aux fréquences optiques.*

Prenons un faisceau de lumière qui se propage dans une lame de verre en y subissant une réflexion interne. On peut penser qu'en pressant une autre lame de verre contre la précédente, l'interface air-verre disparaît, autorisant ainsi le faisceau à se propager sans être perturbé. De plus, on s'attendrait à ce que la transition entre la réflexion totale et la libre propagation s'établisse graduellement, au fur et à mesure que la couche d'air s'amincit. Dans le même esprit, si l'on tient un verre à boire ou un prisme, on y voit ses empreintes digitales là où le verre se comporte normalement comme un miroir, du fait de la réflexion totale interne. En termes plus généraux, si l'onde évanescente peut s'étendre dans le milieu de faible indice avec une amplitude non négligeable jusqu'à une zone proche où se trouve un matériau d'indice plus élevé, l'énergie peut à nouveau se propager dans le milieu intermédiaire (de bas indice) grâce à un processus appelé **réflexion totale interne frustrée** (RTIF). L'onde évanescente, ayant traversé le gap ainsi formé, est encore assez forte pour exciter les électrons du milieu « frustrant » qui vont à leur tour générer une onde qui va altérer de manière significative la configuration du champ et permettre à l'énergie de circuler. La figure 4.55 illustre de façon schématique la RTIF : l'épaisseur des plans qui représentent les fronts d'onde diminue de l'autre côté du gap comme l'amplitude du champ. Ce processus est remarquablement similaire au phénomène quantique appelé *effet tunnel* aux innombrables applications dans la physique moderne.

La figure 4.56 montre de façon assez évidente la RTIF avec une combinaison de prismes. De plus, si l'on rend les faces hypoténuse de chaque prisme planes et parallèles, on peut les positionner de sorte que n'importe quelle fraction du flux incident soit transmise et réfléchi. Les composants qui remplissent cette fonction sont appelés des *séparateurs* de faisceau. On peut réaliser de façon assez commode des *cubes séparateurs*, en utilisant une couche mince transparente de bas indice comme cale de précision entre les deux prismes. On peut observer la RTIF dans d'autres régions du spectre électromagnétique. Il est très facile de travailler avec des micro-ondes de trois centimètres de longueur d'onde car l'onde évanescente persistera sur une distance environ 10^5 fois supérieure à celle des fréquences optiques. On peut d'ailleurs y reproduire les expériences décrites ci-dessus avec des prismes en paraffine,

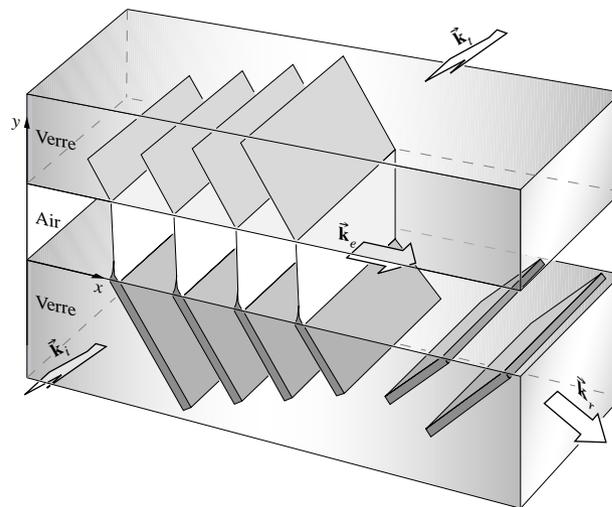


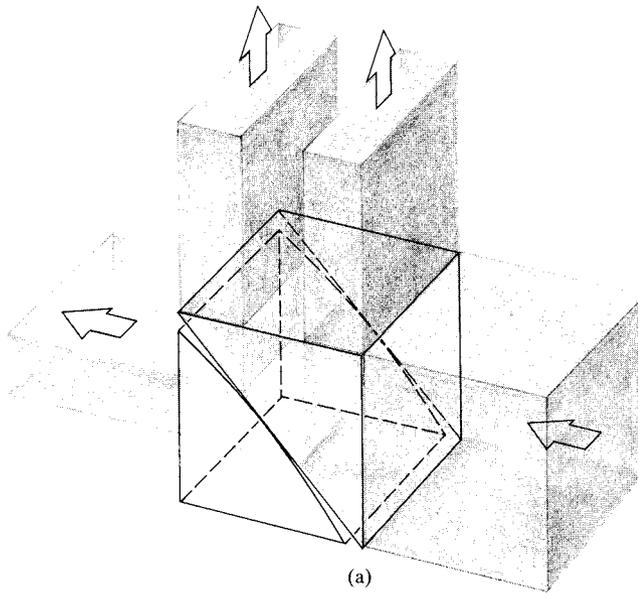
Figure 4.55 Réflexion totale interne frustrée.

ou avec des prismes creux en acrylique, remplis de kérosène ou d'huile de moteur, dont l'indice de réfraction est de l'ordre de 1,5 pour une longueur d'onde d'environ 3 cm. Il est alors facile de mesurer la décroissance du champ en fonction de y .

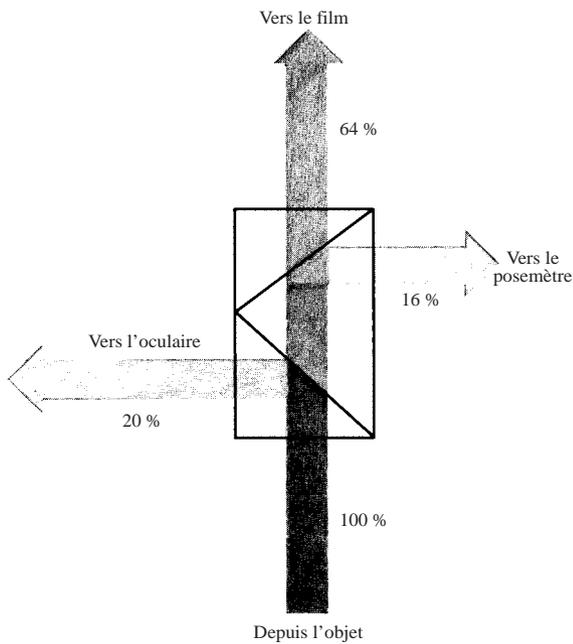
4.8 Propriétés optiques des métaux

La caractéristique principale d'un milieu conducteur est la présence de charges électriques libres (libres dans le sens où elles peuvent circuler dans le matériau). Pour des métaux, ces charges sont des électrons dont le mouvement génère le courant électrique. La densité de courant par unité de surface qui résulte de l'application d'un champ \vec{E} est reliée par l'équation (A1.15) à la conductivité σ du milieu. Il n'y a pas d'électrons libres dans un diélectrique où $\sigma = 0$, alors que pour les métaux σ est finie, non nulle. En revanche, un conducteur « parfait » aurait une conductivité infinie, ce qui revient à dire que les électrons, excités par une onde harmonique, suivent simplement les alternances du champ. Il n'y aurait pas de forces de rappel, pas de fréquences naturelles et pas d'absorption, seulement de la réémission. Dans les métaux réels, les électrons de conduction subissent des collisions à cause de l'agitation thermique ou des imperfections, et convertissent irrémédiablement de l'énergie électromagnétique en chaleur. L'absorption de lumière par un matériau dépend de sa conductivité.

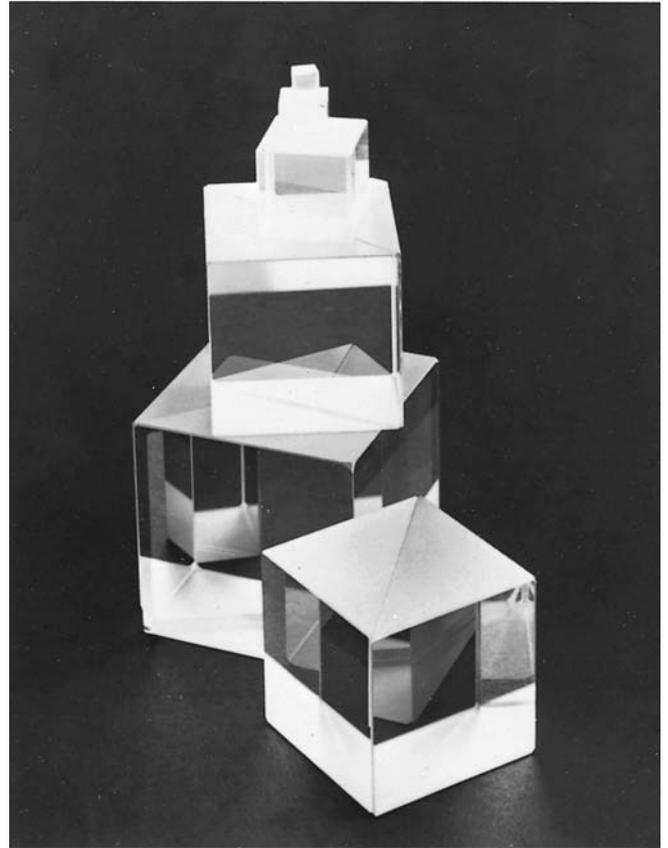
*On pourra consulter le fascinant article de K. H. Drexhage, « Monomolecular layers and light ». *Sci. Am.* **222**, 108 (1970).



(a)



(b)



(c)

Figure 4.56 (a) Un cube séparateur utilisant la RTIF. (b) Une application typique de la RTIF : montage de cubes séparateurs utilisé pour prendre des photographies à travers un microscope. (c) Cubes séparateurs. (Melles Griot.)

Ondes dans un métal

Dans un milieu continu, les équations de Maxwell permettent d'écrire :

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \quad (4.74)$$

c'est-à-dire l'équation (A1.21) en coordonnées cartésiennes. La variation de $\vec{\mathbf{E}}$ dans le temps crée une tension, le courant circule, et comme le matériau est résistif, de la lumière est convertie en énergie thermique, c'est-à-dire qu'elle est absorbée. On peut, à partir de cette équation, retrouver celle de l'onde avec atténuation si l'on exprime la permittivité comme

une quantité complexe. Cela implique que l'indice de réfraction soit complexe, ce qui revient à dire qu'il y a absorption (p. 75). Il suffit de substituer l'expression de l'indice de réfraction complexe :

$$\tilde{n} = n_R - in_I \quad (4.75)$$

(où n_R et n_I sont réels) dans la solution correspondante pour un milieu non conducteur. On pourrait aussi utiliser l'équation d'onde en choisissant des conditions aux bornes appropriées pour aboutir à une solution spécifique. Quoi qu'il en soit, il est possible de trouver une onde sinusoïdale plane comme solution applicable aux conducteurs. Pour une propagation le long de l'axe y , une telle onde s'écrit :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - ky)$$

ou comme une fonction de n ,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega(t - \tilde{n}y/c)$$

l'indice de réfraction étant complexe. En exprimant l'onde comme une exponentielle et grâce à l'équation (4.75) on obtient :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{(-\omega n_I y/c)} e^{i\omega(t - n_R y/c)} \quad (4.76)$$

ou
$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\omega n_I y/c} \cos \omega(t - n_R y/c) \quad (4.77)$$

L'onde se propage dans la direction y avec une vitesse c/n_R . Lors de la propagation dans le conducteur, son amplitude, $\vec{E}_0 \exp(-\omega n_I y/c)$, s'atténue de façon exponentielle. Comme l'intensité est proportionnelle au carré de l'amplitude, on a :

$$I(y) = I_0 e^{-\alpha y} \quad (4.78)$$

où $I_0 = I(0)$; I_0 est l'éclairement à $y = 0$, et $\alpha \equiv 2\omega n_I/c$ est le *coefficient d'absorption linéique* ou **coefficient d'atténuation linéique**. L'éclairement va chuter d'un facteur $e^{-1} = 1/2,7 \approx \frac{1}{3}$ sur une distance $y = 1/\alpha$, appelée **profondeur de pénétration** ou « **peau** ». Pour un matériau transparent, la profondeur de pénétration est grande par rapport à son épaisseur. En revanche, pour les métaux, elle est beaucoup plus petite. Par exemple, dans l'ultraviolet ($\lambda_0 \approx 100$ nm), le cuivre a une profondeur de pénétration de 0,6 nm, et de 6 nm dans l'infrarouge ($\lambda_0 \approx 10\ 000$ nm). Cela est dû à l'opacité des métaux qui néanmoins peuvent devenir partiellement transparents quand on les utilise en couches extrêmement fines. L'éclat métallique des conducteurs correspond à une haute réflectivité, du fait même

que l'onde incidente ne peut pas pénétrer dans le matériau. Il y a peu d'électrons dans le matériau qui « voient » l'onde transmise, et donc, bien qu'ils absorbent fortement, ils dissipent peu d'énergie. Au contraire, la majeure partie de l'énergie incidente se retrouve dans l'onde réfléchie. La majorité des métaux, incluant les moins courants (par exemple, sodium, potassium, césium, vanadium, niobium, gadolinium, holmium, yttrium, scandium, et osmium), ont une teinte gris argent comme l'aluminium ou l'acier. Ils réfléchissent presque toute l'énergie incidente (de 85 % à 95 %) quelle que soit la longueur d'onde.

L'équation (4.77) ressemble à l'équation (4.73) dans le sens où l'amplitude décroît de façon exponentielle. De plus, une analyse plus approfondie montrerait que les ondes transmises ne sont pas tout à fait transversales, car une des composantes du champ se confond avec la direction de propagation dans les deux cas.

La représentation d'un métal par un milieu continu fonctionne bien aux basses fréquences, c'est-à-dire dans le domaine infrarouge. On s'attend à ce que la nature granulaire de la matière soit prise en compte quand la longueur d'onde diminue. En fait, le modèle continu montre de grosses faiblesses aux fréquences optiques, ce qui a amené Hendrik Lorentz et Paul Karl Ludwig Drude (1863-1906), entre autres, à formuler le modèle atomique. Cette approche simple colle bien aux données expérimentales, mais un traitement exhaustif nécessite l'apport de la théorie quantique.

L'équation de dispersion

On peut voir un conducteur comme un ensemble d'oscillateurs forcés amortis. Certains sont des électrons libres qui ne sont pas sujets à une force de rappel, alors que d'autres sont liés aux noyaux des atomes, comme ceux des milieux diélectriques de la section 3.5.1. Les électrons de conduction sont cependant les principaux contributeurs aux propriétés optiques des métaux. On rappelle que le déplacement d'un électron en oscillation est donné par :

$$x(t) = \frac{q_e/m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2)} E(t) \quad [3.66]$$

Sans force de rappel, $\omega_0 = 0$, le déplacement a un signe opposé à celui de la force $q_e E(t)$ et ils sont donc en opposition de phase. C'est la situation inverse de celle des diélectriques transparents, pour lesquels la fréquence de résonance est au-dessus du visible et les électrons sont en phase avec la force excitatrice (figure 4.57). Les électrons libres en opposition de phase avec la lumière incidente réémettent des ondelettes, ce

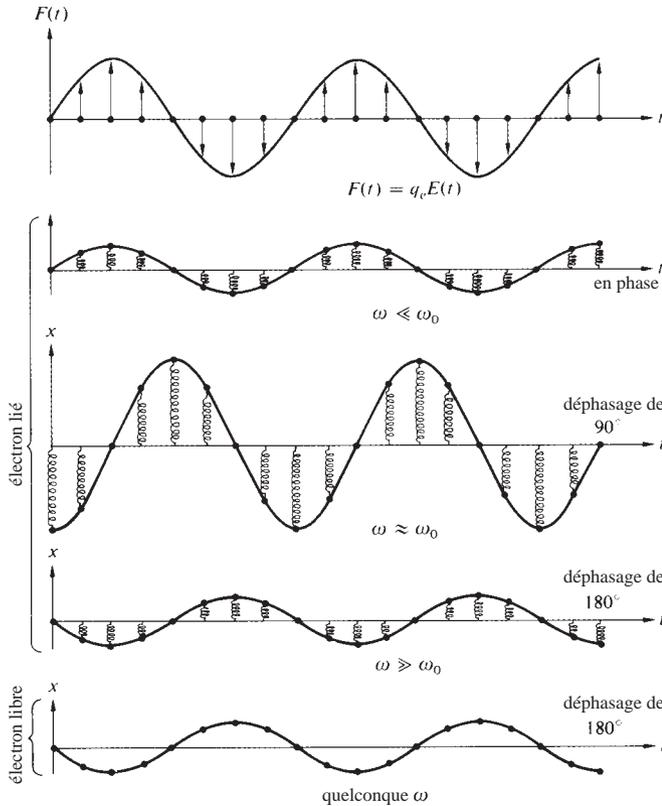


Figure 4.57 Oscillations d'électrons libres et liés.

qui annule la perturbation incidente dont l'effet est d'atténuer rapidement l'onde réfractée.

Si l'on suppose qu'un électron qui se déplace dans un conducteur est seulement soumis au champ appliqué $\vec{E}(t)$, on peut étendre l'équation de la dispersion d'un milieu à faible densité [équation (3.72)] et écrire :

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \left[\frac{f_e}{-\omega^2 + i\gamma_e \omega} + \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega} \right] \quad (4.79)$$

Le premier terme entre parenthèses est la contribution des électrons libres, où N est le nombre d'atomes par unité de volume. Chacun d'entre eux a f_e électrons de conduction qui n'ont pas de fréquence naturelle. Le second terme est dû aux électrons liés et il est identique à l'équation (3.72). Notons que si un métal a une couleur particulière, c'est parce que les atomes ont une bande d'absorption sélective due aux électrons

liés, en plus de ses caractéristiques d'absorption générales dues aux électrons libres. Souvenez-vous qu'un milieu fortement absorbant à une fréquence donnée n'absorbe pas beaucoup de lumière à cette fréquence mais *réfléchit sélectivement* à cette longueur d'onde. L'or et le cuivre sont jaune-rouge parce que n_I augmente avec la longueur d'onde, et donc les rayonnements de plus grandes valeurs de λ sont plus réfléchis. Par exemple, l'or devrait être opaque aux plus grandes longueurs d'onde du visible. Donc en lumière blanche, un papier d'or d'épaisseur inférieure à 10^{-6} m devrait transmettre de manière prédominante la lumière bleu-vert.

Quelques hypothèses simplificatrices vont nous permettre d'avoir une idée de la réponse des métaux à la lumière. Tout d'abord, pour les grandes valeurs de ω , on néglige la contribution des électrons liés et celle de γ_e , d'où :

$$n^2(\omega) = 1 - \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2} \quad (4.80)$$

Le fait de ne pas tenir compte de γ_e est justifié par le grand nombre d'oscillations que subissent les électrons entre deux collisions. Dans un métal, les électrons libres et les ions positifs agissent comme un plasma dont l'ensemble oscille à la fréquence naturelle ω_p , la **fréquence de plasma**. On montre qu'elle vaut $(Nq_e^2/\epsilon_0 m_e)^{1/2}$ donc :

$$n^2(\omega) = 1 - (\omega_p/\omega)^2 \quad (4.81)$$

La fréquence de plasma est une valeur critique en deçà de laquelle l'indice est complexe et l'onde de pénétration décroît de façon exponentielle [équation (4.77)] ; au-dessus de ω_p , n est réel, il y a peu d'absorption et le conducteur est transparent. Dans ce dernier cas, n est inférieur à 1, comme pour les diélectriques aux hautes fréquences (v peut être supérieur à c , voir p. 77). Donc on peut s'attendre à ce que les métaux soient transparents aux rayons X. Le tableau 4.3 donne les fréquences

Tableau 4.3 Longueurs d'onde critiques et fréquences de certains alcalins

Métal	λ_p (observée) nm	λ_p (calculée) nm	$\nu_p = c/\lambda_p$ (observée) Hz
Lithium (Li)	155	155	$1,94 \times 10^{15}$
Sodium (Na)	210	209	$1,43 \times 10^{15}$
Potassium (K)	315	287	$0,95 \times 10^{15}$
Rubidium (Rb)	340	322	$0,88 \times 10^{15}$

de plasma pour quelques métaux alcalins, transparents même aux ultraviolets.

L'indice de réfraction d'un métal est en général complexe, et sa propension à absorber la lumière dépend de la longueur d'onde. Ainsi, la visière des casques de la mission Apollo était recouverte d'une mince couche d'or (voir la photo), qui réfléchissait 70 % de la lumière incidente, et était donc utilisée dans des conditions de forte illumination, comme celles d'un Soleil couchant de face. Elles ont été conçues pour réduire la charge du système de refroidissement et réfléchir l'infrarouge, tout en ayant une bonne transmission dans le visible. Certaines lunettes de soleil, bon marché, traitées avec des couches minces métalliques, utilisent le même principe tout en étant vendues commercialement.

La haute atmosphère de la Terre, qui est ionisée, contient beaucoup d'électrons libres qui se comportent comme ceux des métaux. L'indice d'un tel milieu est réel et inférieur à 1 pour les fréquences supérieures à ω_p . En juillet 1965, la sonde spatiale *Mariner IV* tira parti de cet effet pour étudier l'ionosphère de Mars, à 216 millions de kilomètres de la Terre.*

Pour communiquer entre deux points éloignés sur la Terre, il serait judicieux de faire rebondir des ondes à basse fréquence sur l'ionosphère. Pour envoyer un signal sur la Lune, il faudra utiliser des ondes à haute fréquence pour lesquelles l'ionosphère est transparente.



Edwin Aldrin Jr. sur la mer de la tranquillité sur la Lune. Le photographe, Neil Armstrong, est réfléchi sur la visière revêtue d'une couche mince d'or. (NASA.)

Réflexion sur un métal

Soit une onde plane dans l'air incidente sur la surface d'un conducteur. Si l'onde est transmise en faisant un certain angle avec la normale, elle sera inhomogène, mais si la conductivité du milieu augmente, les fronts d'onde vont s'aligner avec les surfaces d'amplitude constante, c'est-à-dire que \vec{k}_r et \vec{u}_n sont colinéaires. En d'autres termes, dans un bon conducteur, l'onde transmise se propage suivant la normale à l'interface quelle que soit la valeur de θ_i .

Calculons maintenant le facteur de réflexion d'une surface métallique, $R = I_r/I_i$, en incidence normale. En prenant $n_i = 1$ et $n_t = \tilde{n}$ (i.e. l'indice complexe), on a, d'après l'équation (4.47) :

$$R = \left(\frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1} \right) \left(\frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1} \right)^* \quad (4.82)$$

et comme $\tilde{n} = n_R - in_I$,

$$R = \frac{(n_R - 1)^2 + n_I^2}{(n_R + 1)^2 + n_I^2} \quad (4.83)$$

Si la conductivité du matériau tend vers zéro, on retombe sur le cas d'un diélectrique dont l'indice est par définition réel ($n_I = 0$), et le coefficient d'atténuation, α , nul. Dans ces conditions, l'indice du milieu n_t est n_R , et la réflectivité [équation (4.83)] est identique à celle de l'équation (4.67). Si en revanche, n_I devient grand par rapport à n_R , alors R croît (problème 4.81). Dans le cas limite où \tilde{n} serait purement imaginaire, 100 % du flux serait réfléchi ($R = 1$). Remarquez que la réflectivité d'un métal peut être supérieure à celle d'un autre métal même si la valeur de n_I pour ce dernier est plus petite. Par exemple, à $\lambda_0 = 589,3$ nm les paramètres associés au sodium solide sont $n_R = 0,04$, $n_I = 2,4$, et $R = 0,9$; ceux de l'étain sont $n_R = 1,5$, $n_I = 5,3$, et $R = 0,8$; alors que pour le gallium, $n_R = 3,7$, $n_I = 5,4$, et $R = 0,7$.

Les courbes de R_{\parallel} et R_{\perp} en incidence oblique dans la figure 4.58 sont typiques des milieux absorbants. Donc, bien que R à $\theta_i = 0$ vaille 0,5 pour l'or, et presque 0,9 pour l'argent en lumière blanche, l'allure des facteurs de réflexion est similaire pour les deux métaux, et tend vers 1,0 pour $\theta_i = 90^\circ$. Comme pour les diélectriques (figure 4.48), R_{\parallel} passe par un minimum pour un angle qu'on appelle l'*angle d'incidence principal*, mais ce minimum n'est pas nul. La figure 4.59 montre le facteur de réflexion spectral en incidence normale pour quelques couches métalliques obtenues par évaporation dans des conditions idéales. On remarque que l'or transmet bien dans, et en

*R. Von Eshelman, *Sci. Am.* **220**, 78 (1969).

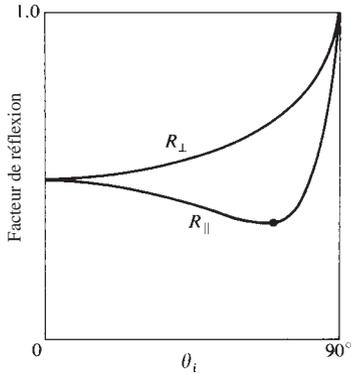


Figure 4.58 Facteur de réflexion typique d'un milieu absorbant pour un faisceau de lumière blanche linéairement polarisée.

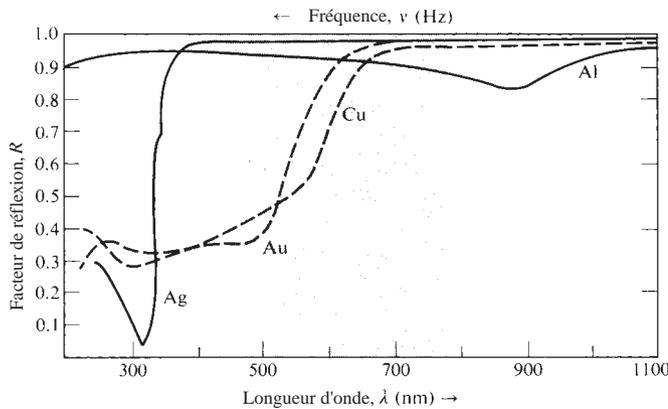


Figure 4.59 Facteur de réflexion spectral pour l'argent, l'or, le cuivre et l'aluminium.

dessous du vert, et que l'argent, très réfléchissant dans tout le visible, devient transparent dans l'ultraviolet.

Le décalage de phase à la réflexion sur un métal se manifeste sur les deux composantes du champ (i.e. parallèle et perpendiculaire au plan d'incidence). En général, il diffère de 0 et de π , à l'exception notable de $\theta_i = 90^\circ$ où, comme pour un diélectrique, les deux composantes sont déphasées de 180° à la réflexion.

4.9 Aperçus de l'interaction entre la lumière et la matière

On va maintenant examiner quelques-uns des phénomènes responsables de la myriade de couleurs qui embellit notre monde.

Comme on l'a vu (p. 83), on perçoit du blanc lorsque la lumière contient, de façon plus ou moins équilibrée, toutes les fréquences du visible. On peut imaginer que chaque point d'une source de lumière blanche, qu'elle soit naturelle ou artificielle, émet à toutes les longueurs d'onde du visible. Puisqu'on a évolué sur cette planète, il n'est pas surprenant qu'une source nous apparaisse blanche lorsque son spectre ressemble à celui du Soleil ; il en est de même pour une surface réfléchissante : un objet diffusant, et fortement réfléchissant à toutes les longueurs d'onde, paraîtra blanc si l'on l'éclaire en lumière blanche.

Bien que l'eau soit transparente, la vapeur d'eau paraît blanche comme un verre dépoli. La raison en est simple. Si la taille des gouttes est petite, mais significativement plus grande que la longueur d'onde considérée, la lumière pénétrera dans chaque goutte, sera réfléchi et/ou réfractée avant d'en sortir. Il n'y aura aucune distinction entre les différentes fréquences, de sorte que ce que verra l'observateur sera blanc (p. 83). C'est le mécanisme responsable de la blancheur des choses comme le sucre, le sel, les nuages, la neige, le talc, la peinture, et le papier, dont chaque grain est transparent.

De la même manière, un matériau rempli de petites bulles d'air apparaîtra blanc (par exemple, crème à raser ou des œufs battus en neige). On s'imagine souvent que le papier, le talc et le sucre sont constitués d'une sorte de substance blanche, mais il est aisé de mettre en défaut cette conception. Pour cela, posons un peu de matière (quelques grains de sucre ou du talc) sur une feuille de papier blanc éclairé par l'arrière : il sera assez facile de voir au travers. Pour faire de la peinture blanche, les fabricants mélangent des particules transparentes, telles que les oxydes de zinc, de titanium, ou de plomb, à un véhicule liant, également transparent, comme des acryliques ou de l'huile de lin. Bien entendu, si les particules et le liant ont le même indice de réfraction, il n'y aura pas de réflexion sur les grains. Les particules vont se fondre dans l'agrégat qui reste transparent. À présent, si les indices sont significativement différents, la réflexion se fera à toutes les longueurs d'onde (problème 4.74), et la peinture paraîtra blanche et opaque [reprendre l'équation (4.67)]. Pour obtenir une peinture colorée, il suffit d'introduire des pigments qui absorbent partout, sauf dans le domaine de longueurs d'onde d'intérêt.

En reprenant le raisonnement en sens inverse, on comprend que si l'on réduit l'indice relatif n_{ti} , les particules d'un matériau seront moins réfléchissantes, ce qui aura pour effet de diminuer la blancheur de l'objet. Par conséquent, un tissu mouillé blanc aura un aspect grisâtre, plus transparent que lorsqu'il est sec. Tout comme le talc qui perd de sa blancheur

éclatante et passe à un gris « triste » lorsqu'il est mouillé. Un morceau de tissu teint trempé dans un liquide transparent (par exemple, eau, gin ou benzène), perd son fond blanchâtre pour devenir beaucoup plus sombre, les couleurs devenant plus profondes et riches, comme celles d'une aquarelle encore humide.

Une surface diffuse en réflexion qui absorbe un peu – uniformément à travers le spectre – réfléchira moins qu'une surface blanche et apparaîtra donc gris mat. Le gris sera d'autant plus sombre que la réflexion sera faible, jusqu'à ce que toute la lumière soit absorbée, c'est-à-dire jusqu'au noir complet. Une surface, qui réfléchit de façon spéculaire 70 %, 80 %, ou plus, de la lumière, aura la teinte gris métal qui nous est familière pour les métaux typiques. Les métaux possèdent un nombre incroyable d'électrons libres (p. 133) qui diffusent la lumière de manière efficiente, indépendamment de sa fréquence, parce qu'ils ne sont pas liés aux atomes et qu'ils n'ont pas les résonances associées. De plus, leur amplitude de vibration est supérieure d'un ordre de grandeur à celle des électrons liés. La lumière incidente ne pénètre dans un métal que sur une fraction de longueur d'onde avant d'être annihilée complètement. Il n'y a pratiquement pas ou peu de lumière qui est réfractée ; presque toute l'énergie est réfléchie, le complément étant absorbé. Remarquons que la différence principale entre une surface grise et celle d'un miroir est que l'une réfléchit de façon diffuse alors que l'autre le fait de façon spéculaire.

Lorsque l'énergie d'un faisceau de lumière n'est pas uniformément répartie sur le spectre, la lumière est colorée. La figure 4.60 montre des courbes spectrales de lumières rouge, verte, et bleue. La forme de ces courbes est extrêmement variable sans que cela n'altère la perception de ces couleurs. Au début des années 1800, Thomas Young montra qu'on pouvait obtenir un grand nombre de couleurs par le mélange de trois d'entre elles, pourvu que leurs fréquences soient suffisamment espacées. Si la combinaison de ces trois couleurs permet de produire la couleur blanche, on les appelle des **couleurs primaires**. Il n'y a pas un unique jeu de couleurs primaires, et il n'est pas nécessaire qu'elles soient monochromatiques. Un jeu particulier, contenant le rouge (R), le vert (V), et le bleu (B), est le plus fréquemment utilisé. Ce sont ces trois composantes (émises par trois luminophores) qui génèrent toute la gamme des couleurs dans un téléviseur.

La figure 4.61 illustre les différentes combinaisons de ces couleurs primaires : l'addition de rouge et de bleu donne le *magenta* (M), un pourpre rougeâtre ; celle de bleu et de vert donne le *cyan* (C), le turquoise ; et, le plus surprenant, l'addition de rouge et de vert donne le *jaune* (J). La somme des trois couleurs primaires donne le blanc (Bc) :

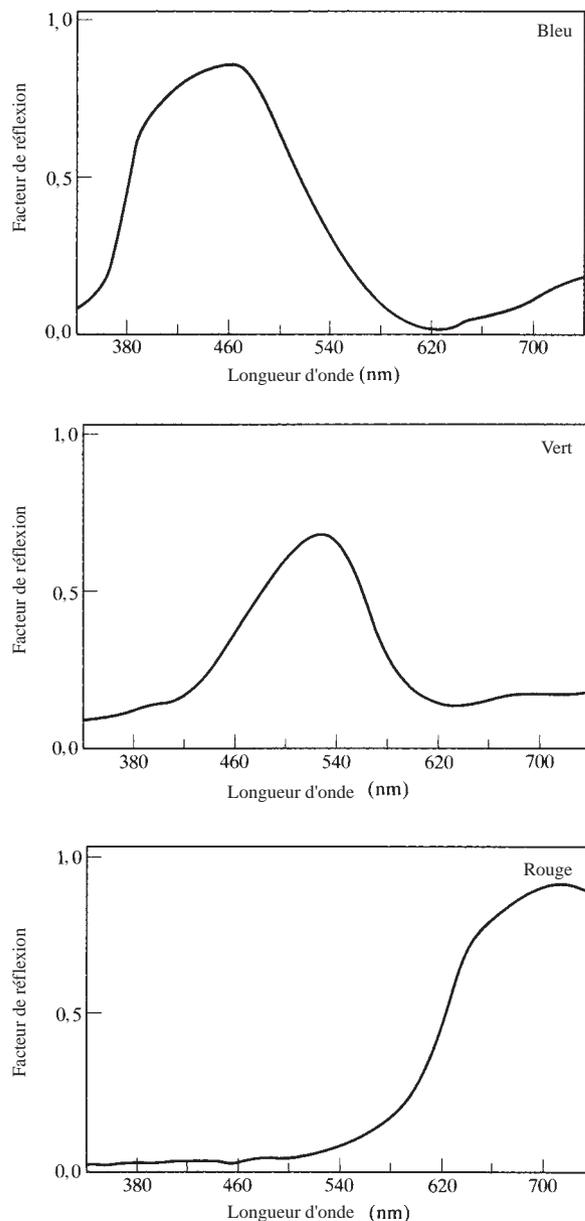


Figure 4.60 Facteurs de réflexion spectraux de pigments bleu, vert et rouge. Courbes typiques, mais il existe toutes sortes de variations possibles.

$$R + B + V = Bc$$

$$M + V = Bc, \text{ puisque } R + B = M$$

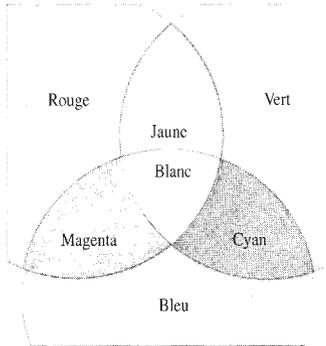


Figure 4.61 Recouvrement de trois faisceaux colorés. Une télévision en couleurs utilise ces trois couleurs primaires : rouge, vert, et bleu.

$$C + R = Bc, \text{ puisque } B + V = C$$

$$J + B = Bc, \text{ puisque } R + V = J$$

On dit que deux couleurs sont **complémentaires** si, par addition, elles donnent du blanc, situation explicitée par les trois derniers jeux d'écriture :

$$R + B + V = Bc$$

$$R + B = Bc - V = M$$

$$B + V = Bc - R = C$$

$$R + V = Bc - B = J$$

Par exemple, un filtre qui absorbe le bleu laissera passer le jaune.

Si l'on mélange du magenta et du jaune :

$$M + J = (R + B) + (R + V) = Bc + R$$

Le résultat est une combinaison de rouge et de blanc, donc du rose, ce qui soulève un autre point : on dit qu'une couleur est **saturée** lorsqu'elle ne contient pas de blanc. La figure 4.62 montre que le rose est un rouge non saturé – un rouge sur un fond blanc.

Le mécanisme responsable de la teinte rouge jaunâtre de l'or ou du cuivre est similaire, dans une certaine mesure, à celui qui rend le ciel bleu. Pour faire simple, les molécules de l'air résonnent dans l'ultraviolet, c'est-à-dire que l'amplitude des oscillations de leurs électrons sous l'action d'un champ incident croît à mesure que la fréquence de la lumière incidente se rapproche de l'ultraviolet. Elles se déséxcitent en

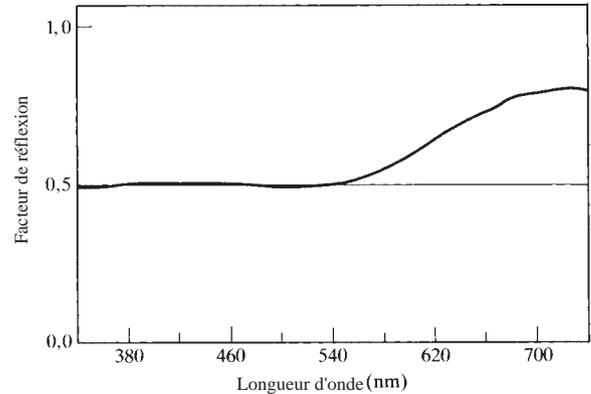


Figure 4.62 Réflexion spectrale d'un pigment rose.

réémettant beaucoup de bleu dans toutes les directions, alors que le rouge, qui lui est complémentaire, est transmis avec peu d'atténuation. C'est analogue à la réflexion ou diffusion sélective du jaune-rouge par une couche d'or et la transmission concomitante du bleu-vert.

La couleur de la plupart des substances tire son origine du phénomène d'**absorption sélective** ou **préférentielle**. Par exemple l'eau a une très légère teinte de bleu-vert car elle absorbe le rouge. Les molécules de H_2O résonnent largement dans l'infrarouge et un peu dans le visible. Cette absorption n'est pas très forte, de sorte qu'on n'observe pas de réflexion renforcée dans le rouge à la surface. Au contraire, le rouge est transmis et graduellement absorbé jusqu'à une profondeur de 30 m sous la surface de l'eau. Ce même mécanisme d'absorption sélective explique la couleur des yeux et des papillons, des oiseaux et des abeilles. En fait, la grande majorité des objets dans la nature ont une couleur qui résulte de l'absorption préférentielle par des pigments. À la différence des atomes et des molécules qui résonnent dans l'ultraviolet et l'infrarouge, il est clair que les pigments résonnent dans le visible. Les photons dans le visible ont une énergie comprise entre 1,6 eV et 3,2 eV, ce qui est trop faible pour exciter des électrons ordinaires, et trop élevé pour exciter par vibration moléculaire. Malgré tout, il y a des atomes dans lesquels les électrons de valence forment des couches incomplètes, comme l'or, et des variations dans la configuration de ces couches fournissent un mode pour une excitation à basse énergie. De plus, il y a un grand nombre de molécules organiques qui résonnent dans le visible. Ces substances, qu'elles soient naturelles ou synthétiques, sont constituées de molécules longues alternant régulièrement les liaisons simples et doubles dans ce

qu'on appelle un système conjugué. Cette structure est typique de la molécule de carotène $C_{40}H_{56}$ (figure 4.63). La couleur des caroténoïdes va du jaune au rouge, et l'on les trouve dans les carottes, les tomates, les jonquilles, les pissenlits, et les êtres humains. Les chlorophylles sont un autre groupe de pigments naturels, au détail près que leur structure est circulaire. Quoi qu'il en soit, les systèmes conjugués de cette sorte contiennent un grand nombre d'électrons mobiles particuliers, les *électrons pi*. Ces électrons ne sont pas liés à des sites d'atomes particuliers, et dans la phraséologie de la mécanique quantique, on dit que ce sont des électrons d'état de basse énergie. L'énergie nécessaire pour faire monter un électron π à un état excité est comparativement faible, et les photons du visible remplissent cette condition. On peut donc considérer la molécule comme un oscillateur ayant une fréquence de résonance dans le visible.

Les niveaux d'énergie d'un atome sont définis de manière précise, tout comme leurs niveaux de résonance. Pour les solides et les liquides, la proximité des atomes provoque un élargissement des niveaux d'énergie en de larges bandes, et la résonance va s'étaler sur un plus grand intervalle de fréquences. On attend donc d'une teinture qu'elle n'absorbe pas une petite

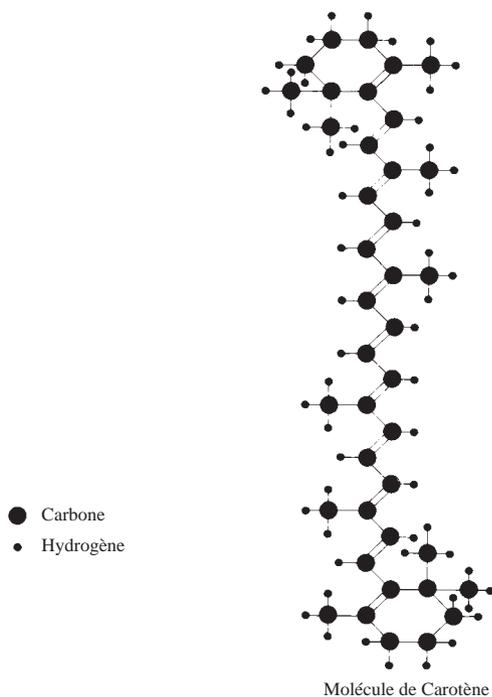


Figure 4.63 Molécule de carotène.

portion du spectre ; en fait, si elle le faisait, elle réfléchirait la plupart des fréquences et apparaîtrait presque blanche.

Prenons le cas d'un verre teinté avec une résonance dans le bleu, où il va donc fortement absorber. Si l'on regarde, par transmission dans le verre, une source de lumière blanche composée de rouge, de vert et de bleu, le verre absorbera le bleu et laissera passer le rouge et le vert, c'est-à-dire le jaune (figure 4.64). Si l'on regarde un objet bleu à travers un filtre jaune (qui laisse passer le jaune et absorbe le bleu), on le verra noir. Dans ce cas, où un filtre donne une coloration jaune en éliminant le bleu, on parle de **coloration soustractive**, et de **coloration additive**, dans le cas opposé. De façon similaire, les fibres de tissu ou de papier blanc sont presque transparentes, mais une fois teintée, chaque fibre se comporte comme un petit éclat de verre coloré. La lumière extérieure pénètre dans le papier et n'en ressort qu'après de nombreuses réflexions et réfractions dans les fibres teintées. La lumière réfléchie se trouvera colorée dans la mesure où il lui manquera la composante fréquentielle absorbée par la teinture. C'est aussi la raison pour laquelle une feuille est verte et une banane jaune.

Une bouteille d'encre bleue est bleue à la fois en réflexion et en transmission. Mais si l'on dépose de l'encre sur du verre

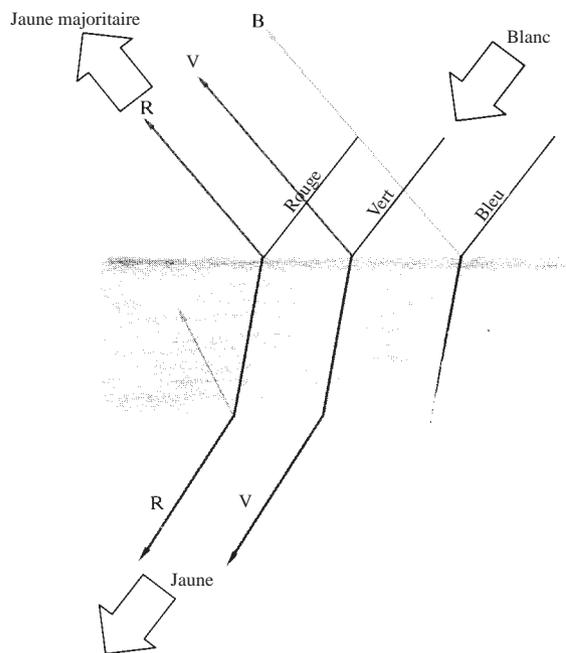


Figure 4.64 Verre coloré jaune.

et que le solvant s'évapore, quelque chose d'intéressant va se produire. Les pigments, qui sont plus concentrés, absorbent tellement bien qu'ils vont préférentiellement réfléchir la fréquence de résonance, et l'on en revient à l'idée qu'un fort absorbant (grand n_I) est un fort réémetteur. L'encre bleue-verte réfléchit du rouge et l'encre rouge-bleue réfléchit du vert. Pour tenter l'expérience, il faut faire attention à ne pas inonder l'échantillon avec de la lumière parasite lorsqu'on travaille en réflexion. Pour se faciliter la tâche, on travaillera avec un morceau de plastique noir imbibé de rouge, qui réfléchira dans le vert. Les couleurs transmises et réfléchies sont complémentaires.

On peut aussi fabriquer des couleurs (y compris le rouge, le vert et le bleu) en utilisant des filtres magenta, cyan et jaune (figure 4.65). En mélangeant des primaires soustractives ensemble, on n'obtient pas de couleur ; la lumière sera noire. Chacune supprime une région du spectre, et les regrouper toutes supprime tout le spectre.

Un objet noir l'est parce que toutes les fréquences du visible sont absorbées. Cela ne veut pas dire que rien ne s'y réfléchit puisqu'on observe une image réfléchie de l'objet noir. Si l'on mélange du rouge et du bleu, et si l'on ajoute du vert, on obtient du noir.

D'autres mécanismes que ceux qu'on vient d'évoquer permettent de générer des couleurs. Par exemple, les scarabées s'enrobent de couleurs brillantes dues à leur carapace, constituée de réseaux de diffraction. Les interférences contribuent à la coloration des taches d'huile, du nacre, des bulles de savon, des paons, et des colibris.

4.10 La réflexion et la réfraction selon Stokes

On va maintenant exposer un moyen élégant de traiter la réflexion et la transmission, moyen développé par le physicien britannique Sir George Gabriel Stokes (1819-1903). Prenons une onde d'amplitude E_{0i} incidente à l'interface de deux milieux diélectriques, comme dans la figure 4.66a. Comme on l'a vu au chapitre précédent, en prenant r et t comme fractions d'amplitude réfléchies et transmises, respectivement (où $n_i = n_1$ et $n_t = n_2$), alors $E_{0r} = rE_{0i}$ et $E_{0t} = tE_{0i}$. D'après le principe de réversibilité, la situation dépeinte par la figure 4.66b, où les rayons suivent le chemin inverse, est aussi physiquement possible, à condition cependant qu'il n'y ait pas de dissipation d'énergie. On parle d'*invariance par inversion du*

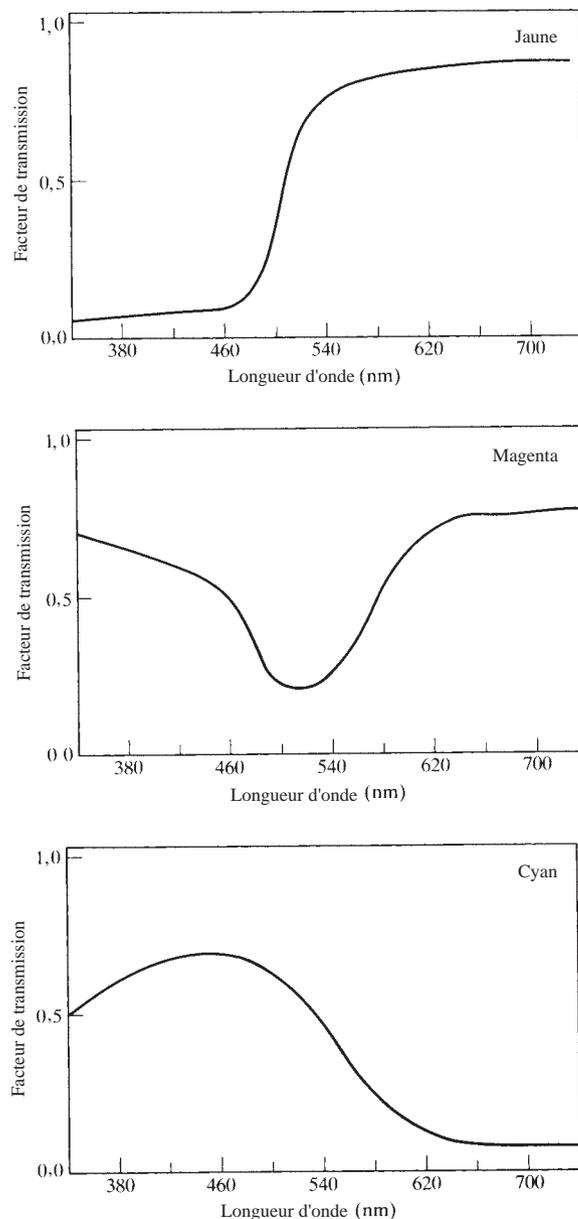


Figure 4.65 Transmissions spectrales de filtres colorés.

temps. Donc, si l'on pouvait prendre un film de l'onde qui arrive sur l'interface, de celle qui la traverse, et de celle qui la franchit, le comportement obtenu si l'on faisait défiler le film à l'envers devrait aussi être physiquement réalisable. Par conséquent, examinons la figure 4.66c, où sont présentes deux

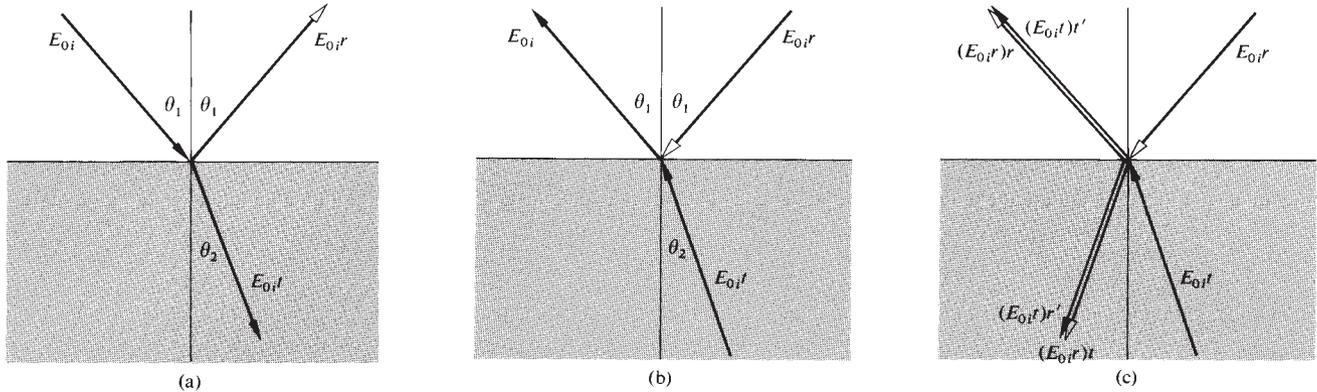


Figure 4.66 Réflexion et réfraction selon Stokes.

ondes incidentes d'amplitude $E_{0i}r$ et $E_{0i}t$. Une portion de l'onde d'amplitude $E_{0i}t$ est réfléchiée et une autre est transmise à l'interface. Posons r' et t' les facteurs de réflexion et de transmission en amplitude, respectivement, pour une onde incidente en dessous de l'interface (i.e. $n_i = n_2, n_t = n_1$). La portion réfléchiée est donc $E_{0i}tr'$, et la portion transmise s'écrit $E_{0i}tt'$. De la même manière, l'onde d'amplitude $E_{0i}r$ se divise en deux ondes d'amplitudes $E_{0i}rr$ et $E_{0i}rt$. Puisque la configuration de la figure 4.66c est identique à celle de la figure 4.66b, alors :

$$E_{0i}tt' + E_{0i}rr = E_{0i} \quad (4.84)$$

et
$$E_{0i}rt + E_{0i}tr' = 0 \quad (4.85)$$

Donc
$$tt' = 1 - r^2 \quad (4.86)$$

et
$$r' = -r \quad (4.87)$$

Les deux dernières équations sont les relations de Stokes. Il faut être prudent à ce stade et bien noter que les *coefficients en amplitude sont fonction de l'angle d'incidence*, de sorte que les relations de Stokes devraient s'écrire :

$$t(\theta_1)t'(\theta_2) = 1 - r^2(\theta_1) \quad (4.88)$$

et
$$r'(\theta_2) = -r(\theta_1) \quad (4.89)$$

où $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$. La deuxième équation indique, en vertu du signe moins, que *l'onde en réflexion interne et celle en réflexion externe sont en opposition de phase*. Il est important

de garder à l'esprit que θ_1 et θ_2 sont des angles vérifiant la loi de Snell-Descartes. Remarquez aussi qu'aucune hypothèse n'a été faite sur la valeur de n_1 relativement à celle de n_2 , de sorte que les équations (4.88) et (4.89) s'appliquent dans les deux cas. Revenons un instant sur une des équations de Fresnel :

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \quad [4.42]$$

Si un rayon arrive d'au-dessus l'interface, comme dans la figure 4.66a, et si l'on suppose que $n_2 > n_1$, on a r_{\perp} en posant $\theta_i = \theta_1$ et $\theta_t = \theta_2$ (réflexion externe), ce dernier étant calculé avec la loi de Snell-Descartes. Si l'onde incidente, avec le même angle, provient d'en dessous l'interface (réflexion interne), $\theta_i = \theta_1$ qu'on remplace dans l'équation (4.42), mais cette fois θ_t ne vaut pas θ_2 comme avant. Les valeurs de r_{\perp} en réflexion interne et externe *pour un même angle d'incidence* vont naturellement différer. Maintenant supposons, dans le cas de la réflexion interne, que $\theta_i = \theta_2$. Alors $\theta_t = \theta_1$, c'est-à-dire que la direction des rayons est inversée par rapport à la première configuration, et l'équation (4.42) conduit à :

$$r'_{\perp}(\theta_2) = -\frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}$$

Au risque de se répéter, c'est la relation opposée à celle de la réflexion externe ($\theta_i = \theta_1$), c'est-à-dire :

$$r'_{\perp}(\theta_2) = -r_{\perp}(\theta_1) \quad (4.90)$$

Souvenez-vous que l'utilisation du symbole prime sert à différencier les coefficients en amplitude selon qu'ils sont fonction

de θ_2 ou θ_1 . De la même manière, interchanger θ_i et θ_l dans l'équation (4.43) conduit à :

$$r_{||}'(\theta_2) = -r_{||}(\theta_1) \quad (4.91)$$

La figure 4.44 rend explicite l'opposition de phase entre chaque paire de composantes, mais rappelez-vous que quand $\theta_i = \theta_p$, $\theta_l = \theta_p'$ et vice versa (problème 4.78). Au-delà de $\theta_i = \theta_c$ il n'y a plus d'onde transmise, l'équation (4.89) ne s'applique plus, et l'opposition de phase cesse.

On a tendance à vouloir conclure que la phase des composantes parallèle et perpendiculaire en réflexion externe change de π radians, contrairement à la réflexion interne où aucun changement de phase n'est constaté. Cela est tout à fait incorrect, il suffit de comparer les figures 4.45a et 4.46a pour s'en convaincre.

4.11 Photons, ondes et probabilités

Beaucoup de connaissances théoriques en optique reposent sur la théorie ondulatoire. On prend pour acquis que les phénomènes ondulatoires sont réels. Par exemple, le processus de diffusion semble ne pouvoir être abordé qu'en termes d'interférences ; les particules classiques n'interfèrent tout simplement pas. Quand un faisceau se propage dans un milieu solide ou liquide, les interférences dans la direction avant sont constructives, alors que, dans la direction opposée, elles sont destructives, de sorte que presque toute l'énergie se propage dans la direction avant, ce qui soulève des questions intéressantes sur la nature des interférences. ***L'interférence est un phénomène non localisé qui ne peut pas se produire en un seul point de l'espace***, même si l'on parle souvent d'interférences en un point P . Le principe de conservation d'énergie rend prégnant le fait que si une interférence constructive a lieu en un point, le surplus d'énergie doit bien provenir de quelque part. Une interférence destructive doit donc avoir lieu en un autre endroit. ***Les interférences prennent place dans une région étendue de l'espace d'une manière qui laisse inchange l'énergie radiative totale.***

Maintenant imaginons un faisceau de lumière traversant un milieu dense, comme celui de la figure 4.6. Est-ce que les ondelettes électromagnétiques, qui transportent de l'énergie, se propagent latéralement uniquement pour interférer destructivement partout en dehors du faisceau ? Si tel est le cas, ces ondelettes s'annulent et l'énergie qu'elles transportent se retrouve inexplicablement dans le faisceau, puisqu'en fin de

compte il n'y a pas de diffusion latérale. Cela est vrai même à très grande distance et s'applique en outre à *tous* les phénomènes d'interférence (chapitre 9). Si deux ondes électromagnétiques arrivent en un point P en opposition de phase pour y interférer destructivement, « qu'en est-il de leur énergie ? » L'énergie peut être redistribuée mais elle ne peut pas disparaître. La mécanique quantique nous apprend que le phénomène d'interférence est un des mystères les plus fondamentaux de la physique.

On se souvient de l'avertissement d'Einstein qui déclara que les atomes n'émettent pas d'ondelettes : peut-être notre interprétation de la théorie classique est-elle trop littérale ? Après tout, strictement parlant, l'onde électromagnétique classique avec sa distribution d'énergie continue n'existe pas. Peut-être devrait-on utiliser les ondelettes et les figures qu'elles produisent comme une procédure théorique qui nous explique merveilleusement bien le comportement de la lumière, plutôt qu'affirmer que c'est un champ d'onde *réel*. Quoiqu'il en soit, les équations de Maxwell permettent de calculer la distribution macroscopique de l'énergie électromagnétique dans l'espace.

Poursuivant notre chemin semi-classique, considérons une distribution de lumière qui varie en fonction de l'angle θ par rapport à l'axe. Envisageons l'éclairement que produit une fente à une grande distance (p. 453), soit $I(\theta) = I(0) \text{sinc}^2\beta(\theta)$. Cette fois, on utilise comme détecteur un diaphragme suivi d'un photomultiplicateur. En déplaçant le détecteur, on peut compter le nombre de photons qui arrivent en chaque point dans un intervalle de temps donné, $N(\theta)$. En répétant l'expérience un grand nombre de fois, on trouve que sa distribution est de la même forme que celle de l'éclairement, $N(\theta) = N(0) \text{sinc}^2\beta(\theta)$, car le nombre de photons détectés est proportionnel à l'éclairement. Ce paramètre est quantifiable donc il se prête bien à l'analyse statistique, de sorte qu'on peut parler de la probabilité de détecter un photon en n'importe quel point de l'écran. Comme les variables d'espace (θ , x , y , ou z) sont continues, il est nécessaire d'introduire la **densité de probabilité**, $\varphi(\theta)$ telle que la probabilité pour qu'un photon soit détecté dans l'intervalle infinitésimal compris entre θ et $\theta + d\theta$, soit égale à $\varphi(\theta) d\theta$. Dans ce cas $\varphi(\theta) = \varphi(0) \text{sinc}^2\beta(\theta)$.

Le carré de l'amplitude du champ électrique en tout point de l'espace donne l'éclairement (mesurable directement), équivalent à la probabilité de détecter des photons en un point de l'espace. Par conséquent, on va définir une **amplitude de probabilité** dont le carré donne la densité de probabilité. Alors E_0 en P peut s'interpréter comme étant proportionnel à l'amplitude de probabilité **semi-classique** étant donné que la

probabilité de détecter un photon en un point de l'espace dépend de l'éclairement en ce point et que $I \propto E_0^2$. Cela est en accord avec la conception d'Einstein sur la lumière, que Max Born (le précurseur de l'interprétation statistique de la mécanique quantique) a décrit comme un *Gespensterfeld*, ou champ fantôme. Dans cette perspective, les ondes de ce champ révèlent comment les photons sont distribués dans l'espace, dans le sens où le carré de l'amplitude de l'onde est relié à la densité de probabilité de présence des photons. Formellement, la mécanique quantique nous dit qu'une *amplitude de probabilité est généralement complexe* et que son carré est la densité de probabilité (par exemple, la fonction d'onde de Schrödinger est une amplitude de probabilité). Ainsi, même s'il eut été raisonnable de considérer E_0 comme une amplitude de probabilité semi-classique, on ne peut pas transposer cet usage tel quel dans la théorie quantique.

Tout cela suggère cependant qu'on peut se servir du processus de diffusion, considéré en termes de probabilités, comme socle pour les calculs. Chaque ondelette diffusée devient une mesure de l'amplitude de probabilité de la lumière pour un chemin donné entre un point et un autre, et le champ électrique net en P est donné par la somme de tous ces champs diffusés arrivant en P par tous les chemins possibles. Feynman, Schwinger, Tomonaga, et Dyson mirent au point une méthodologie analogue dans leur développement de l'électrodynamique quantique. Pour faire simple, l'issue finale et observable d'un événement est la superposition de toutes les amplitudes de probabilité possibles associées à chacun de tous les moyens possibles de réaliser cet événement. En d'autres termes, chaque « chemin » suivant lequel un événement peut se produire, chaque moyen de le réaliser, est donné par la représentation mathématique abstraite qu'est l'amplitude de probabilité complexe. Chacun d'eux se combine et interfère pour produire l'amplitude de probabilité qui en résulte pour que l'événement se produise.

Ce qui suit est une version très simplifiée de cette analyse.

4.11.1 L'électrodynamique quantique (QED)

Feynman décrit sans équivoque sa vision sur la nature de la lumière :

J'insiste sur le fait que la lumière se manifeste sous la forme de particules. Il est important de savoir que la lumière se comporte comme des particules, surtout pour ceux d'entre vous qui ont probablement appris à l'école que la lumière se comporterait comme des ondes. Je vous dis que la lumière se comporte vraiment – comme des particules.

Pour lui la « lumière » est faite de particules (comme le pensait originellement Newton) ; c'est un flux de photons dont le comportement de masse est déterminé statistiquement. Par exemple, si 100 photons arrivent perpendiculairement sur un morceau de verre, en moyenne 4 vont être réfléchis par la première surface. Les 4 photons ne sont pas connus a priori, leur sélection est un mystère. En revanche, on confirme expérimentalement que 4 % de la lumière incidente est réfléchi (p. 126).

L'analyse de Feynman procède de quelques règles générales de calcul dont la justification ultime est que cela fonctionne ; ses prédictions sont très précises. (1) *L'amplitude de probabilité associée à un événement est la « somme » de toutes les amplitudes de probabilité correspondant à chacun de tous les moyens possibles de le réaliser.* (2) *Chacune de ces amplitudes de probabilité est en général une quantité complexe.* Plutôt que de combiner analytiquement toutes les amplitudes de probabilité, on utilise la représentation des phaseurs (p. 25) qui permet d'approximer le calcul de la somme et ainsi d'aboutir à l'amplitude de probabilité résultante. (3) *La probabilité d'occurrence d'un événement, considéré comme un tout, est égale à la norme au carré de l'amplitude de probabilité résultante.*

Prenons le cas de la réflexion de la figure 4.67 pour illustrer cette approche ; un point source S illumine un miroir qui réfléchit la lumière dans toutes les directions en chacun de ses points. On veut déterminer la probabilité qu'un détecteur en P détecte un photon. Ici la perspective classique, et son modèle familier d'ondelette, peut servir d'analogie pour nous guider (et probablement vous servir de coussin intellectuel si vous croyez encore aux ondes EM classiques).

Par souci de simplicité, imaginons qu'on puisse diviser le miroir en bandes de même longueur (figure 4.68a), chacune représentant un chemin possible vers P (bien entendu, chaque atome de la surface est un diffuseur donc il y a une multitude de chemins, mais ceux dessinés suffiront). Classiquement, on sait que chaque chemin entre S et P correspond au chemin d'une ondelette, et que l'amplitude (E_{0j}) et la phase de chaque ondelette en P détermineront l'amplitude résultante nette, E_0 . Le principe de Fermat (p. 112) postule que le chemin optique entre S , le miroir et P détermine la phase de chaque ondelette arrivant en P . De surcroît, plus le chemin optique est grand, plus la lumière sera étalée (via la loi en inverse carré) et plus l'amplitude de l'ondelette arrivant en P sera petite.

La figure 4.68b montre le graphique LCO ainsi que le minimum atteint pour le chemin ($S-I-P$), quand $\theta_i = \theta_r$. Une grande différence sur la LCO , comme ($S-A-P$) et ($S-B-P$) s'accompagne d'une large différence de phase et correspond à une

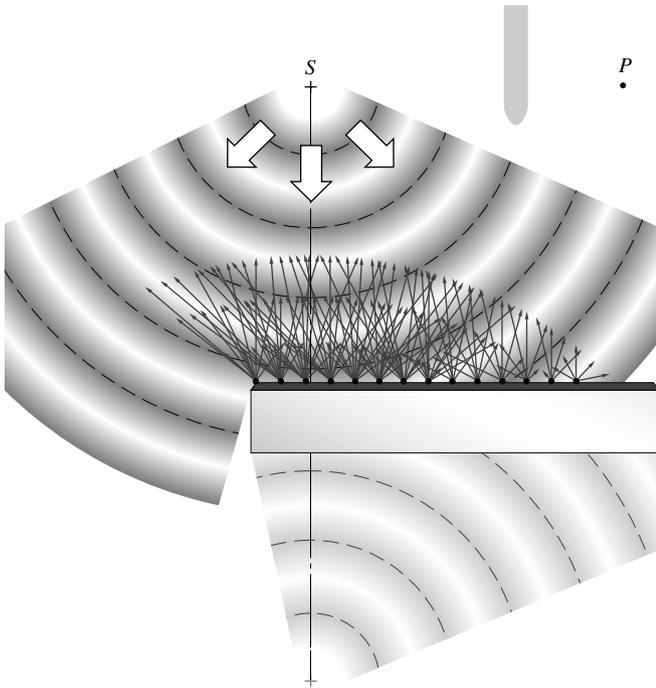


Figure 4.67 Représentation schématique de la réflexion. Une onde émise en S balaie la surface d'un miroir. Chaque atome de l'interface diffuse de la lumière dans toutes les directions vers le haut. La fraction qui arrive en P provient de tous les diffuseurs de la surface.

large rotation des phaseurs dessinés sur la figure 4.68c. De A vers B vers C jusqu'à I , le chemin optique décroît de moins en moins vite, et chaque phaseur est en avance sur le précédent d'un angle de plus en plus petit (donné par la pente de la courbe). En effet, les phaseurs à gauche de I tournent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre entre A et I . Comme la LCO atteint un minimum en I , les phaseurs à proximité sont grands et leur phase diffère peu. De I à J à K jusqu'à Q , le chemin optique croît de plus en plus vite, et chaque phaseur prend du retard sur le précédent d'un angle de plus en plus grand. En effet, les phaseurs tournent dans le sens des aiguilles d'une montre de I à Q .

La figure 4.68c montre l'amplitude résultante en P qui correspond à la longueur de la flèche. L'éclairement, I , est proportionnel au carré de l'amplitude nette du champ qui, à son tour, est une mesure de la probabilité qu'un détecteur décèle un photon en P .

On va maintenant aller au-delà de l'idée classique d'ondelettes diffusées et de champs électriques (tout en se laissant

guider par elle) et construire l'analyse de la mécanique quantique. Les photons peuvent aller de S vers le miroir puis vers P par n'importe lequel des innombrables chemins possibles. Il est raisonnable de supposer que chacun de ces chemins est une contribution au résultat final ; un chemin excessivement long qui va jusqu'à l'extrémité du miroir puis jusqu'à P , devrait contribuer très différemment d'un chemin direct. Suivant Feynman, on doit associer à chaque chemin possible une quantité complexe (pas encore spécifiée), dénommée **amplitude de probabilité quantique**. On peut représenter chaque

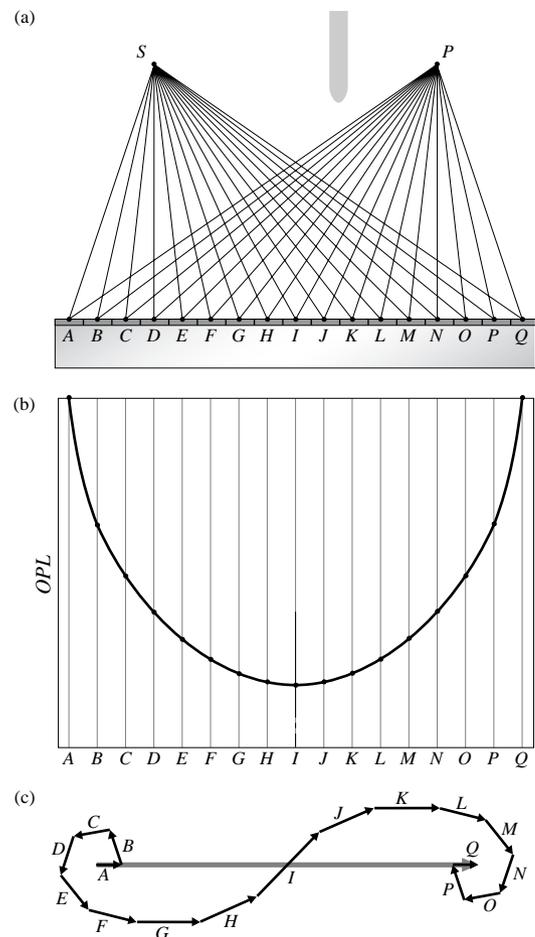


Figure 4.68 L'analyse de Feynman sur la réflexion grâce à la QED. (a) Chemins possibles pour la lumière entre S , le miroir et P . (b) L'OPL de la lumière entre S et P pour chaque chemin (c). Une amplitude de probabilité est associée à chaque chemin. Ces amplitudes s'ajoutent pour produire une amplitude nette.

amplitude de probabilité quantique par un phaseur dont l'angle est déterminé par le temps de propagation entre S , le miroir et P , et dont la norme est déterminée par le chemin optique (bien sûr, c'est ce qu'on obtient avec chacun des phaseurs de la figure 4.68c, mais il y a encore des raisons réhébilitaires qui ne permettent pas d'associer le champ- E classique à l'amplitude de probabilité quantique.) L'amplitude de probabilité quantique totale est la somme de tous les phaseurs correspondant à tous les chemins possibles, analogues au phaseur résultant de la figure 4.68c.

Précisément, **la contribution majeure à une amplitude de probabilité quantique provient du voisinage immédiat du chemin S - I - P , là où les phaseurs sont grands et en phase.** Les extrémités du miroir contribuent très peu car les phaseurs y forment une spirale (figure 4.68c). Recouvrir les extrémités du miroir aurait un effet négligeable sur la valeur de l'amplitude de probabilité résultante, et donc sur la quantité de lumière atteignant P . Gardons à l'esprit que le dessin est sommaire ; il n'y a pas seulement 17 chemins entre S et P , mais des milliards, et les phaseurs des extrémités se perdent dans les replis des spirales une infinité de fois.

La QED prédit que le miroir intervient sur toute sa longueur pour la réflexion en P de la lumière émise par un point source S , mais que le chemin le plus probable est S - I - P auquel cas $\theta_i = \theta_r$.

4.11.2 Les photons et les lois de la réflexion et de la réfraction

Supposons pour conclure que la lumière soit un flux de photons et considérons qu'un de ces quantas frappent l'interface entre deux milieux diélectriques (par exemple air et verre) avec un angle d'incidence θ_i . Ce photon est absorbé par un atome (par exemple, dans le verre), et un photon identique est immédiatement transmis à un angle θ_r . On sait que si ce photon était l'un des milliards qui constituent un faisceau laser, par exemple, il obéirait à la loi de Snell-Descartes. Pour expliquer ce comportement, il faut étudier la dynamique associée à l'odyssée de notre photon unique. D'après l'équation (3.54), $p = h/\lambda$ et sa quantité de mouvement s'écrit vectoriellement de la façon suivante :

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

où \vec{k} est le vecteur de propagation et $\hbar \equiv h/2\pi$. Par conséquent, les quantités de mouvement incidente et transmise sont $\vec{p}_i = \hbar \vec{k}_i$ et $\vec{p}_r = \hbar \vec{k}_r$ respectivement. On suppose (sans le justifier) que, tant que l'interface n'affecte pas la composante perpendiculaire de la quantité de mouvement, alors la composante parallèle demeure inchangée. La conservation de cette composante parallèle à l'interface s'écrit, pour un photon

$$p_i \sin \theta_i = p_r \sin \theta_r$$

On se trouve ici face un dilemme important : classiquement, la quantité de mouvement d'une particule matérielle dépend de sa vitesse. Quand $n_t > n_i$ il découle (d'après la loi de Snell-Descartes et l'équation ci-dessus) que $p_t > p_i$, et donc la vitesse des particules de lumière devrait s'accroître. En fait, dans sa première démonstration de la loi de la réfraction en 1637, René Descartes avait commis l'erreur de traiter la lumière comme un flux de particules qui s'accélérait en pénétrant dans un milieu d'indice plus élevé (voir l'exercice 4.10). En revanche, Thomas Young fut probablement le premier à mesurer la réduction de longueur d'onde lors d'un tel passage ($\approx 1/802$).^{*} Il en a correctement déduit que la vitesse de la lumière devait en fait diminuer : $v < c$.

Ce que vous dit la mécanique quantique est que, d'une part, la vitesse d'un photon est en fait toujours égale à c , et que d'autre part, sa quantité de mouvement dépend de sa longueur d'onde et non de sa vitesse. Donc :

$$\frac{h}{\lambda_i} \sin \theta_i = \frac{h}{\lambda_r} \sin \theta_r$$

En multipliant des deux côtés par c/v , on retrouve la loi de Snell-Descartes.

N'oubliez pas que l'analyse ci-dessus est quelque peu simpliste, mais qu'elle est intéressante d'un point de vue pédagogique.

.....
^{*}La démonstration définitive de Foucault fut faite en 1850.

EXERCICES ET PROBLÈMES

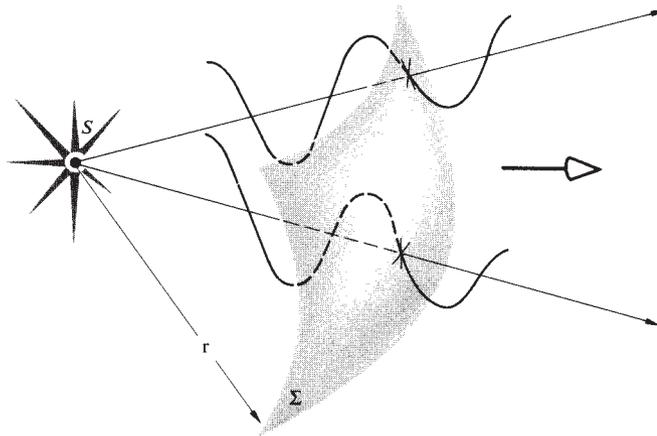
Les solutions complètes des exercices (excepté ceux ayant un astérisque) figurent à la fin de l'ouvrage.

4.1 Utiliser l'analyse dimensionnelle pour établir que la diffusion de Rayleigh varie en λ^{-4} . Soient E_{0i} et E_{0s} les amplitudes incidente et diffusée à une distance r du diffuseur. Supposons que $E_{0s} \propto E_{0i}$ et $E_{0s} \propto 1/r$. Supposer aussi, dans les limites du raisonnable, que l'amplitude diffusée est proportionnelle au volume V du diffuseur. Déterminer les unités de la constante de proportionnalité.

4.2* La lumière blanche d'un projecteur traverse un grand volume d'un mélange de gaz moléculaires ténus, principalement de l'oxygène et de l'azote. Comparer les quantités de lumière diffusées dans le jaune (580 nm) et dans le violet (400 nm).

4.3* La figure P.4.3 montre l'émission de lumière par une source ponctuelle. On y voit trois représentations de cette émission. Identifier et discutez leurs relations.

Figure P.4.3 Une portion d'onde sphérique.



4.4 L'équation d'un oscillateur amorti est :

$$m_e \ddot{x} + m_e \gamma \dot{x} + m_e \omega_0^2 x = q_e E(t)$$

(a) Expliquer la signification de chaque terme.

(b) On pose $E = E_0 e^{i\omega t}$ et $x = x_0 e^{i(\omega t - \alpha)}$, où E_0 et x_0 sont réels. Montrer que

$$x_0 = \frac{q_e E_0}{m_e} \frac{1}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]^{1/2}}$$

(c) Trouver l'expression du retard de phase α , que l'on discutera selon que $\omega \ll \omega_0$, $\omega = \omega_0$ et $\omega \gg \omega_0$.

4.5 Soit une lame de verre non absorbante d'indice n et d'épaisseur Δy , disposée entre une source S et un observateur P .

(a) L'onde sans obstruction (sans la lame) est $E_u = E_0 \exp i\omega(t - y/c)$, montrer qu'en présence de la lame, l'observateur voit l'onde

$$E_p = E_0 \exp i\omega[t - (n-1)\Delta y/c - y/c]$$

(b) Montrer que si $n \approx 1$ ou si Δy est très petit, alors

$$E_p = E_u + \frac{\omega(n-1)\Delta y}{c} E_u e^{-i\pi/2}$$

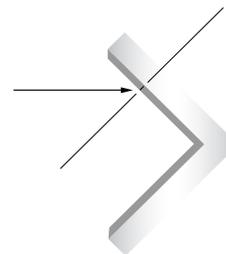
Le second terme dans le membre de droite s'interprète comme le champ dû aux oscillateurs de la lame.

4.6* Un faisceau laser très étroit est incident sur un miroir horizontal avec un angle de 58° . Le faisceau réfléchi frappe un mur à 5 m du point d'incidence sur le miroir. À quelle distance (horizontale) le mur se trouve-t-il du miroir ?

4.7* En pénétrant dans la tombe de Fred, le héros de Nod, on se trouve dans une pièce noire dont un des murs est percé d'un minuscule trou à 3 m au-dessus du sol. Une fois par an, pour l'anniversaire de Nod, un rayon de Soleil traverse ce trou, frappe un disque poli en or sur le sol à 4 m du mur et sur lequel il se réfléchit, illuminant un superbe diamant encastré dans le front de la statue de Fred à 20 m du mur. Quelle taille fait la statue ?

4.8* La figure P.4.8 montre un dièdre réflecteur de deux miroirs à 90° . Déterminer la direction du rayon émergent par rapport au rayon incident.

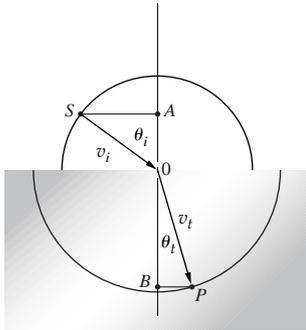
Figure P.4.8



4.9 Calculer l'angle de réfraction d'un rayon incident sur un bloc de verre en crown à 30° ($n_g = 1,52$).

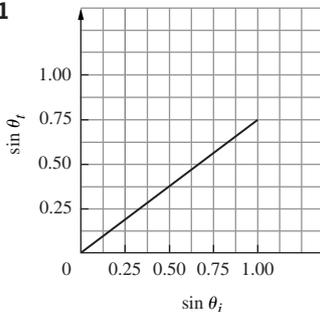
4.10* La construction de la figure P.4.10 est celle qu'employa Descartes pour formuler la loi de la réfraction. La lumière se rend de S en O dans le même temps que pour se rendre de O en P . De plus, sa quantité de mouvement transversale reste inchangée au passage de l'interface. Utiliser ces résultats pour retrouver la loi de Snell-Descartes.

Figure P.4.10



4.11* La figure P.4.11 trace la variation du sinus de l'angle de réfraction en fonction du sinus de l'angle d'incidence au passage de la lumière de l'air dans un milieu optique. Discuter l'allure de la courbe. Comment s'interprète la pente de la courbe ? Devinez le milieu dont il s'agit.

Figure P.4.11



4.12* Un rayon de lumière d'une lampe à décharge de sodium est incident sur la surface d'un diamant avec un angle de 45° . Si à cette longueur d'onde $n_d = 2,42$, calculer la déviation angulaire subie lors de la réfraction.

4.13* À l'interface entre de l'eau ($n_e = \frac{4}{3}$) et du verre ($n_v = \frac{3}{2}$), calculer l'angle de réfraction pour un faisceau incident à 45° . Inverser le sens du faisceau transmis pour montrer qu'on obtient $\theta_r = 45^\circ$ en sortie.

4.14 Un faisceau micro-onde de 12 cm de longueur d'onde frappe la surface d'un diélectrique à 45° . Si $n_{di} = \frac{4}{3}$, calculer (a) la longueur d'onde dans le milieu, et (b) l'angle θ_r .

4.15* De la lumière de longueur d'onde 600 nm dans le vide traverse un bloc de verre tel que $n_v = 1,5$. Calculer sa longueur d'onde dans le verre. Quelle couleur verrait un observateur enfermé dans le bloc (voir le tableau 3.4) ?

4.16* Un faisceau laser frappe une interface air-liquide avec un angle de 55° . Le rayon réfracté est transmis avec un angle de 40° . Que vaut l'indice de réfraction du liquide ?

4.17* Un nageur immergé émet vers la surface un faisceau lumineux qui frappe l'interface air-eau avec un angle de 35° . À quel angle le faisceau émergera-t-il dans l'air ?

4.18 Tracer θ_r en fonction de θ_i pour une interface air-verre avec $n_v = 1,5$. Discuter l'allure de la courbe.

4.19* Un faisceau laser de diamètre D dans l'air frappe un bloc de verre (n_v) avec un angle de θ_i . Quel est le diamètre du faisceau dans le verre ?

4.20* Un faisceau extrêmement étroit de lumière blanche est incident à 60° sur un bloc de verre de 10 cm d'épaisseur dans l'air. L'indice de réfraction pour le rouge vaut 1,505 et 1,545 pour le violet. Déterminer le diamètre approximatif du faisceau émergent.

4.21* Montrer qu'un objet dans une piscine apparaîtra toujours au $\frac{3}{4}$ de sa véritable profondeur.

4.22* Un faisceau laser arrive à la surface d'une lame de verre de 2 cm d'épaisseur ($n = 1,50$) avec un angle de 35° . Quelle est la longueur du chemin optique dans le verre ?

4.23* Soit un rayon incident sur une interface air-verre. Si l'indice de réfraction du verre vaut 1,70, trouver l'angle d'incidence tel que l'angle de réfraction vaille $\frac{1}{2}\theta_i$.

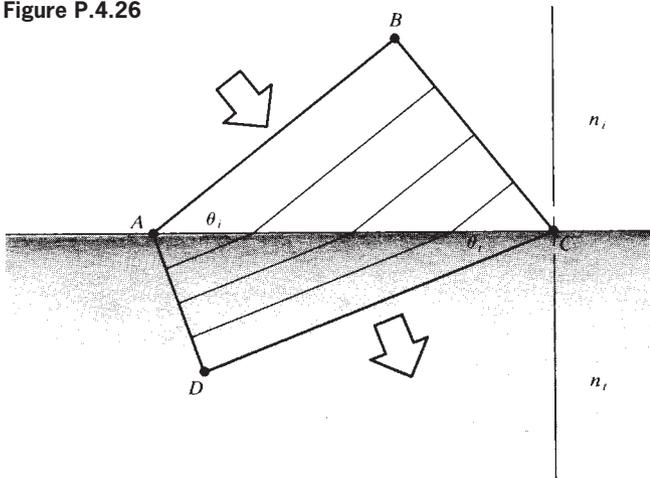
4.24* Supposer qu'on mette au point une lettre de cette page avec un appareil photographique. On recouvre ensuite cette lettre avec une lamelle de microscope de 1 mm d'épaisseur ($n = 1,55$). De quelle hauteur faut-il relever l'appareil pour garder la mise au point ?

4.25* Une pièce repose au fond d'un bassin d'eau ($n_e = 1,33$) de 1 m de profondeur. Une nappe de benzène de 20 cm d'épaisseur ($n_b = 1,50$) se trouve à la surface du bassin. Si l'on observe à la verticale vers le bas, à quelle profondeur la pièce apparaît-elle ? Faire un tracé de rayons.

4.26 Dans la figure P.4.26, les fronts d'onde dans le premier milieu se rejoignent avec ceux du second milieu tout le long de l'interface ; un concept connu sous le nom de *continuité du front d'onde*. Donner l'expression du nombre d'ondes par unité de longueur le long de l'interface en fonction de θ_i et λ_i puis en fonction de

θ_i et λ_r . En déduire la loi de Snell-Descartes. La loi de Snell-Descartes s'applique-t-elle aux ondes sonores ? Argumenter.

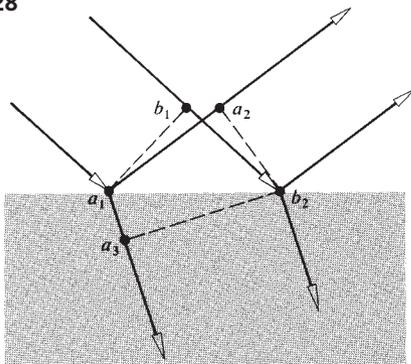
Figure P.4.26



4.27* Tout en gardant le problème précédent à l'esprit, retourner à l'équation (4.19) et reprendre le repère de la figure 4.39. Montrer que cette équation revient à projeter sur l'axe- x les vecteurs de propagation. Montrer aussi qu'elle est équivalente à la notion de continuité du front d'onde.

4.28 En reprenant l'idée d'égalité des temps de parcours entre points correspondants, et d'orthogonalité des rayons avec les fronts d'onde, en déduire la loi de la réflexion ainsi que la loi de Snell-Descartes. S'aider de la figure P.4.28.

Figure P.4.28



4.29 Grâce à loi de Snell-Descartes, prouver que l'équation vectorielle de la réfraction s'écrit :

$$n_r \hat{\mathbf{k}}_r - n_i \hat{\mathbf{k}}_i = (n_r \cos \theta_r - n_i \cos \theta_i) \hat{\mathbf{u}}_n \quad [4.7]$$

4.30 Trouver une expression vectorielle de la loi de la réflexion.

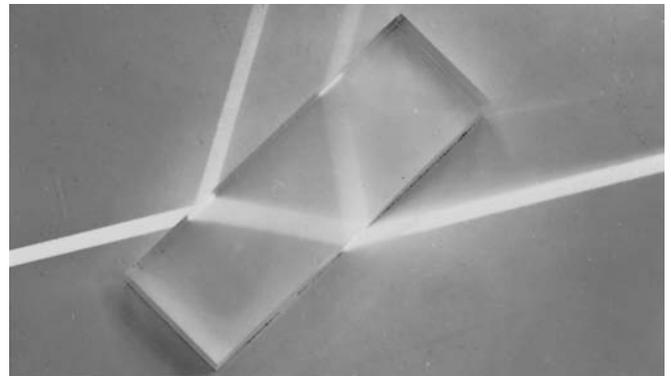
4.31 Dans le cas de la réflexion sur une surface plane, utiliser le principe de Fermat pour montrer que les rayons incident et réfléchi sont coplanaires avec la normale $\hat{\mathbf{u}}_n$ (c'est le plan d'incidence).

4.32* Retrouver la loi de la réflexion, $\theta_i = \theta_r$, en minimisant par le calcul le temps de parcours, ce qu'exige le principe de Fermat.

4.33* Selon le mathématicien Hermann Schwarz, il existe, parmi tous les triangles inscrits dans un triangle aigu, un dont le périmètre est minimal. En utilisant deux miroirs plans, un faisceau laser et le principe de Fermat, expliquer pourquoi les sommets de ce triangle inscrit sont les pieds des hauteurs issues des sommets du triangle aigu.

4.34 Montrer analytiquement qu'un faisceau traversant une lame à faces parallèles, comme dans la figure P.4.34, en ressort parallèlement à sa direction incidente. Donner l'expression du déplacement latéral que subit le faisceau. Ce résultat reste vrai même si la lame est constituée de couches de différents indices.

Figure P.4.34



4.35* Montrer que si deux rayons sont parallèles en entrant dans le système de la figure P.4.35, ils en sortent parallèles aussi.

4.36 Discuter les résultats du problème 4.34 à la lumière du principe de Fermat ; plus précisément, quel rôle joue l'indice relatif n_{21} ?

4.37 Montrer que la composante tangentielle du champ \mathbf{E} est continue au passage d'une interface même dans le cas non statique. [Indice : utiliser la figure P.4.37 et l'équation (3.5), puis faire tendre FB et CD vers zéro.]

4.38 Soit une onde linéairement polarisée dans le plan d'incidence qui frappe à 30° une lame de crown ($n_c = 1,52$) dans l'air. Calculer les facteurs de réflexion et de transmission en amplitude à l'interface. Comparer ces résultats avec la figure 4.39.

Figure P.4.35

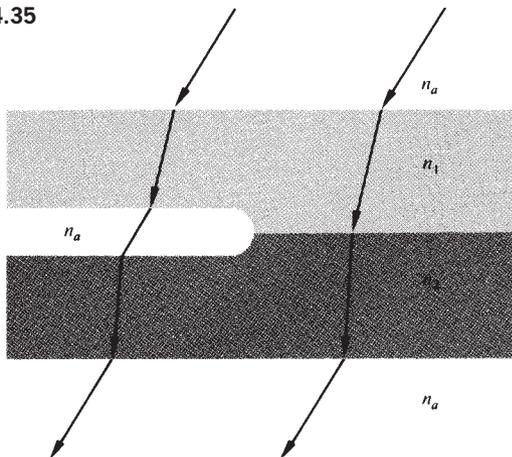
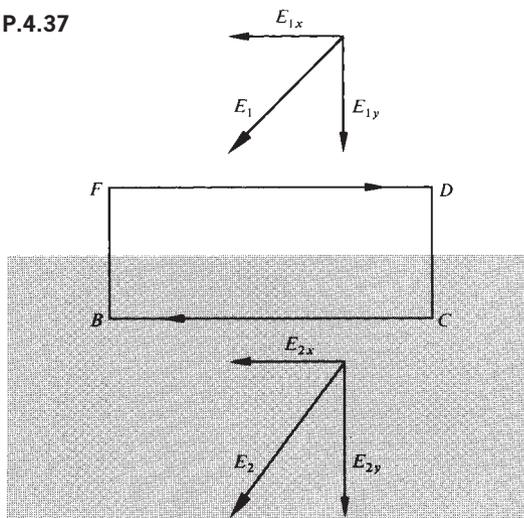


Figure P.4.37



4.39 Retrouver les équations (4.42) à (4.45) de r_{\perp} , r_{\parallel} , t_{\perp} , et t_{\parallel} .

4.40* Un faisceau de lumière dans l'air arrive sur la surface d'un morceau de plastique d'indice 1,55 avec un angle d'incidence de 20° . Le champ- E a une composante parallèle au plan d'incidence d'amplitude 10 V/m et une composante perpendiculaire d'amplitude 20 V/m . Déterminer les amplitudes correspondantes du champ réfléchi.

4.41* Un faisceau laser est incident à l'interface entre l'air et un diélectrique d'indice n . Pour des petites valeurs de θ_i , montrer que $\theta_t = \theta_i/n$. En déduire avec l'équation (4.42) qu'en incidence normale $[-r_{\perp}]_{\theta_i \approx 0} = (n-1)/(n+1)$.

4.42* De la lumière dans l'air est incidente normalement sur du verre crown d'indice de réfraction 1,522. Déterminer les facteurs de réflexion et de transmission.

4.43* Un faisceau de lumière quasi monochromatique d'éclairement 500 W/m^2 traverse perpendiculairement la surface d'un bassin rempli d'eau ($n_e = 1,333$). Déterminer l'éclairement transmis.

4.44* De la lumière quasi monochromatique dont l'éclairement est 400 W/m^2 est incidente normalement sur la cornée ($n_c = 1,376$) d'un œil humain. Si la personne nage sous l'eau ($n_e = 1,33$), déterminer l'éclairement transmis dans la cornée.

4.45* Comparer les facteurs de réflexion en amplitude d'une interface air-eau ($n_e = 4/3$) avec ceux d'une interface air-crown ($n_c = 3/2$) en incidence normale. Calculer les rapports correspondants entre l'éclairement réfléchi et l'éclairement incident.

4.46* Utiliser l'équation (4.42) et le développement limité de la fonction sinus pour établir une approximation plus fine que celle du problème 4.41, c'est-à-dire $[-r_{\perp}]_{\theta_i \approx 0} = (n-1)/(n+1)$,

$$[-r_{\perp}]_{\theta_i \approx 0} = \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \left(1 + \frac{\theta_i^2}{n} \right)$$

4.47* Prouver qu'en incidence quasi normale, l'équation :

$$[r_{\parallel}]_{\theta_i \approx 0} = \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \left(1 - \frac{\theta_i^2}{n} \right)$$

est une bonne approximation. [Indice : utiliser les résultats du problème précédent, l'équation (4.43), et le développement limité des fonctions sinus et cosinus.]

4.48* Prouver qu'à l'interface vide-diélectrique $r_{\perp} \rightarrow -1$ en incidence rasante, comme dans la figure 4.41.

4.49* Dans la figure 4.41, la courbe donnant r_{\perp} s'approche de -1 quand l'angle d'incidence tend vers 90° . Prouver, en posant α_{\perp} l'angle que la courbe fait avec la verticale pour $\theta_i = 90^\circ$, que :

$$\tan \alpha_{\perp} = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{2}$$

[Indice : montrer d'abord que $d\theta_t/d\theta_i = 0$.]

4.50 Prouver que, pour tout θ_i :

$$t_{\perp} + (-r_{\perp}) = 1 \quad [4.49]$$

à partir des conditions à l'interface, puis grâce aux équations de Fresnel.

4.51* Vérifier que :

$$t_{\perp} + (-r_{\perp}) = 1 \quad [4.49]$$

pour $\theta_i = 30^\circ$ à une interface crown-air ($n_{ii} = 1,52$).

4.52* Calculer l'angle critique au-delà duquel il y a réflexion totale interne à une interface air-verre ($n_v = 1,5$). Comparer ce résultat avec celui du problème 4.15.

4.53* En reprenant le problème 4.18, remarquez que θ_i et θ_t varient dans le même sens. Prouver que le maximum éventuel de θ_t est θ_c .

4.54* Que vaut l'angle critique pour la réflexion totale interne du diamant ? Quelle relation, si elle existe, y a-t-il entre l'angle critique et le degré de lustre d'un diamant bien taillé ?

4.55* Un faisceau de lumière subit une réflexion totale interne à la surface, avec l'air, d'un bloc de matériau transparent, pour un angle de 48° . Que vaut l'indice de réfraction du matériau ?

4.56* Un prisme, ABC , est tel que l'angle $BCA = 90^\circ$ et $CBA = 45^\circ$. Quelle est la valeur minimale de son indice de réfraction si un faisceau traversant la face AC subit une réflexion totale interne sur la face BC lorsque le prisme est dans l'air ?

4.57* Un poisson qui regarde la surface calme d'un étang voit les images du ciel, des oiseaux, et de tout ce qui est hors de l'eau, à l'intérieur d'un cône circulaire lumineux entouré d'un anneau sombre. Expliquer ce qui se passe.

4.58* Un bloc de verre d'indice 1,55 est recouvert d'une couche d'eau d'indice 1,33. Quel est l'angle critique à l'interface pour un rayon qui se propage dans le verre ?

4.59 Trouver l'expression de la vitesse d'une onde évanescente dans le cas de la réflexion interne en fonction de c , n_i , et θ_i .

4.60 Un rayon de longueur d'onde dans le vide de 600 nm, se propageant dans du verre ($n_v = 1,50$), est incident à 45° sur l'interface verre-air. Il subit alors une réflexion totale interne. Déterminer la distance dans l'air pour laquelle l'amplitude de l'onde évanescente chute d'un facteur $1/e$ par rapport à sa valeur maximale prise sur l'interface.

4.61 La figure P.4.61 montre un faisceau laser incident sur un morceau papier pour filtre mouillé, déposé sur un morceau de verre dont on veut déterminer l'indice de réfraction ; la photographie montre l'image qui en résulte, vue de la droite. Expliquer cette image et trouvez l'expression de n_i en fonction de R et d .

4.62 Soit le mirage typique associé à une distribution inhomogène d'air au-dessus d'une route chaude. Imaginer la courbure des rayons comme si c'était un problème de réflexion totale interne. Si un observateur croit voir une flaque d'eau pour un angle $\theta_i \geq 88,7^\circ$, calculer l'indice de l'air juste au-dessus de la route si au niveau de sa tête $n_a = 1,00029$.

4.63* Utiliser les équations de Fresnel pour prouver que la lumière incidente pour $\theta_p = \frac{1}{2}\pi - \theta_t$ implique que le faisceau réfléchi soit polarisé.

4.64 Montrer que $\tan \theta_p = n_t/n_i$ et calculer l'angle de Brewster dans l'air pour une lame de crown ($n_c = 1,52$).

4.65* Utiliser l'équation (4.38) pour montrer que pour deux milieux diélectriques, on a en général $\tan \theta_p = [\epsilon_t(\epsilon_i\mu_i - \epsilon_i\mu_t)/\epsilon_i(\epsilon_t\mu_t - \epsilon_i\mu_i)]^{1/2}$.

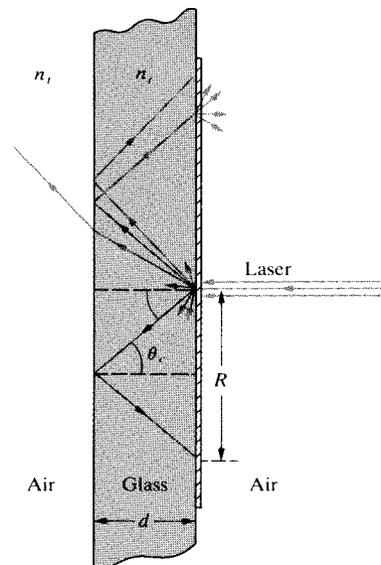
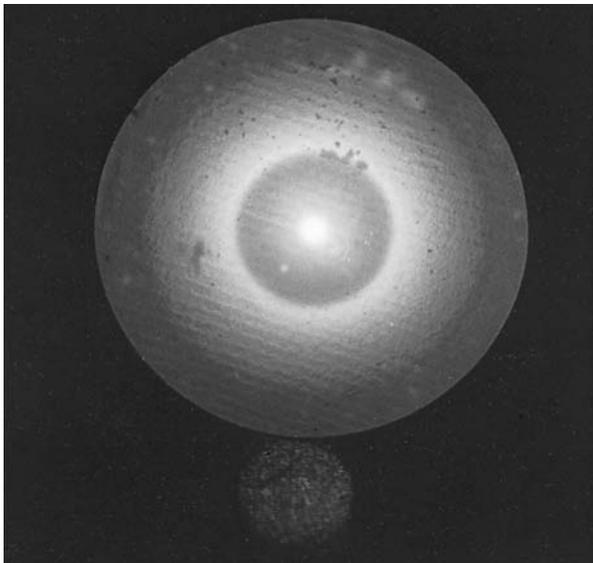


Figure P.4.61 (Photo et schéma S. Reich, Institut des sciences Weizmann, Israël.)

4.66 Montrer que les angles de polarisation pour la réflexion externe et interne sur une interface donnée sont complémentaires, c'est-à-dire que $\theta_p + \theta'_p = 90^\circ$ (voir le problème 4.64).

4.67 Il peut être utile de travailler avec l'angle azimutal γ , défini comme étant l'angle entre le plan de vibration et le plan d'incidence. Donc pour une lumière polarisée linéairement,

$$\tan \gamma_i = [E_{0i}]_{\perp} / [E_{0i}]_{\parallel} \quad (4.92)$$

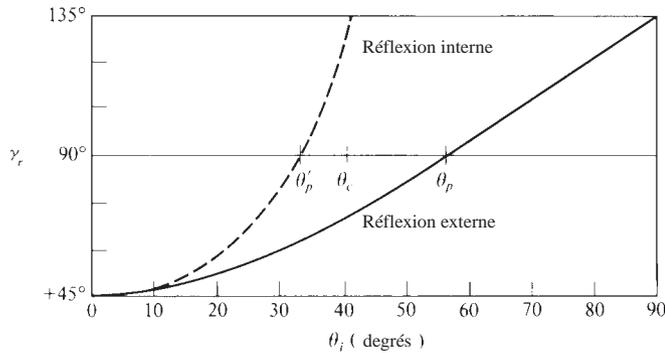
$$\tan \gamma_r = [E_{0r}]_{\perp} / [E_{0r}]_{\parallel} \quad (4.93)$$

et
$$\tan \gamma_r = [E_{0r}]_{\perp} / [E_{0r}]_{\parallel} \quad (4.94)$$

La figure P.4.67 montre la courbe de γ_r en fonction de θ_i pour les réflexions interne et externe sur une interface air-verre ($n_v = 1,51$), avec $\gamma_i = 45^\circ$. Vérifier quelques points particuliers sur les courbes et montrez que :

$$\tan \gamma_r = - \frac{\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i + \theta_t)} \tan \gamma_i \quad (4.95)$$

Figure P.4.67



4.68* En utilisant les angles azimutaux du problème 4.67, montrer que :

$$R = R_{\parallel} \cos^2 \gamma_i + R_{\perp} \sin^2 \gamma_i \quad (4.96)$$

et

$$T = T_{\parallel} \cos^2 \gamma_i + T_{\perp} \sin^2 \gamma_i \quad (4.97)$$

4.69 Tracer sur un graphique R_{\perp} et R_{\parallel} pour $n_i = 1,5$ et $n_t = 1$ (i.e., réflexion interne).

4.70 Montrer que :

$$T_{\parallel} = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_t}{\sin^2(\theta_i + \theta_t) \cos^2(\theta_i - \theta_t)} \quad (4.98)$$

et

$$T_{\perp} = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_t}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)} \quad (4.99)$$

4.71* Utiliser les résultats du problème 4.70, c'est-à-dire les équations (4.98) et (4.99), pour montrer que :

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1 \quad (4.65)$$

et

$$R_{\perp} + T_{\perp} = 1 \quad (4.66)$$

4.72 Supposons qu'on regarde une source au travers de N lamelles de microscope, tenues perpendiculairement à l'angle de visée. À travers ne serait-ce qu'une douzaine de lamelles, la source sera significativement assombrie. En supposant que l'absorption est négligeable, montrer que le facteur de transmission de l'empilement est donné par :

$$T_t = (1 - R)^{2N}$$

et évaluer T_t pour trois lamelles dans l'air.

4.73 Soit l'expression de l'éclairement obtenu dans un milieu absorbant au bout d'une distance y :

$$I(y) = I_0 e^{-\alpha y} \quad (4.78)$$

où I_0 est l'éclairement initial. On définit un facteur de transmission par unité de longueur T_1 . En incidence normale, l'équation (4.55) devient $T = I_t/I_i$, et donc quand $y = 1$, $T_1 \equiv I(1)/I_0$. Si l'épaisseur de l'empilement des lamelles du problème précédent est d , et si elles ont le facteur de transmission par unité de longueur T_1 , montrer que :

$$T_t = (1 - R)^{2N} (T_1)^d$$

4.74 Montrer, en incidence normale à l'interface entre deux diélectriques, que lorsque $n_{ii} \rightarrow 1$, $R \rightarrow 0$, et $T \rightarrow 1$. De plus, prouver que si $n_{ii} \rightarrow 1$: $R_{\parallel} \rightarrow 0$, $R_{\perp} \rightarrow 0$, $T_{\parallel} \rightarrow 1$, et $T_{\perp} \rightarrow 1$ pour tout θ_i . Lorsque les indices de réfraction des deux milieux deviennent proches, l'onde réfléchi transporte de moins en moins d'énergie. Il est évident que si $n_{ii} = 1$, il n'y a plus d'interface donc plus de réflexion.

4.75* Démontrer les expressions de r_{\perp} et r_{\parallel} données par les équations (4.70) et (4.71).

4.76 Montrer que quand $\theta_i > \theta_c$ à l'interface d'un diélectrique, r_{\parallel} et r_{\perp} sont complexes et que $r_{\perp} r_{\perp}^* = r_{\parallel} r_{\parallel}^* = 1$.

4.77 La figure P.4.77 montre les réflexions multiples subies par un rayon dans un diélectrique transparent (on donne les amplitudes des ondes résultantes). Comme dans la section 4.5, les primes marquent les angles qui sont reliés entre eux par la loi de Snell-Descartes.

(a) Compléter la figure avec les amplitudes des quatre derniers rayons.

(b) Montrer, en utilisant les équations de Fresnel, que :

$$t_{\parallel} t'_{\parallel} = T_{\parallel} \quad (4.100)$$

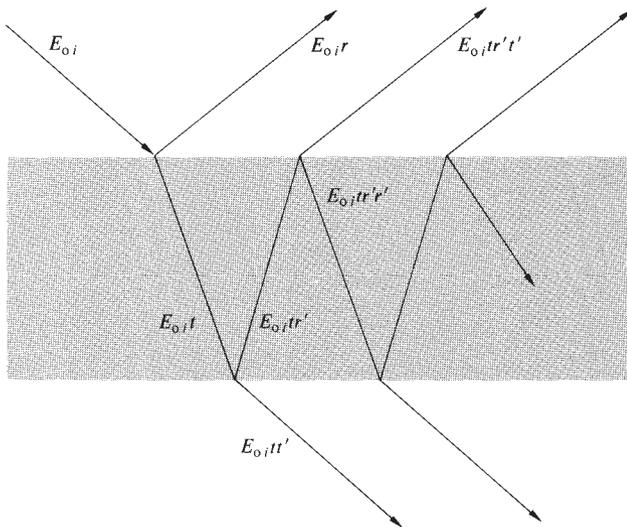
$$t_{\perp} t'_{\perp} = T_{\perp} \quad (4.101)$$

$$r_{\parallel}^2 = r'_{\parallel}{}^2 = R_{\parallel} \quad (4.102)$$

et

$$r_{\perp}^2 = r'_{\perp}{}^2 = R_{\perp} \quad (4.103)$$

Figure P.4.77

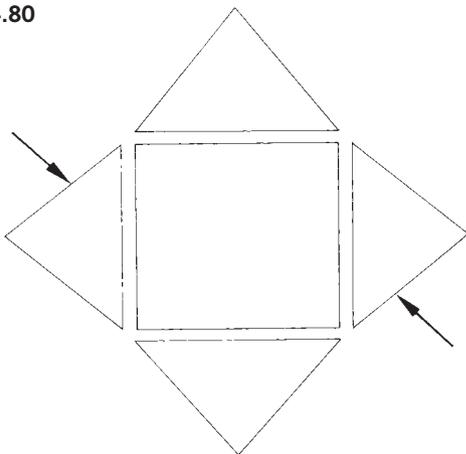


4.78* Une onde, linéairement polarisée dans le plan d'incidence, frappe l'interface de deux milieux diélectriques. Si $n_i > n_t$ et $\theta_i = \theta'_p$, il n'y a pas d'onde réfléchie, c'est-à-dire que $r'_{\parallel}(\theta'_p) = 0$. En utilisant la technique de Stokes, démontrer que $t_{\parallel}(\theta_p)t'_{\parallel}(\theta'_p) = 1$, $r_{\parallel}(\theta_p) = 0$, et $\theta_t = \theta_p$ (problème 4.66). Comparer avec l'équation (4.100).

4.79 En utilisant les équations de Fresnel, montrer que $t_{\parallel}(\theta_p)t'_{\parallel}(\theta'_p) = 1$, comme dans le problème précédent.

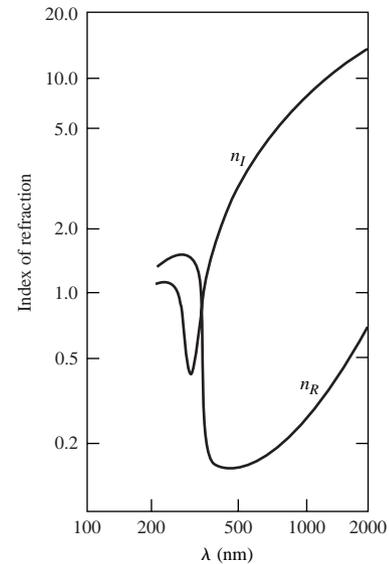
4.80 La figure P.4.80 montre un cube en verre entouré de très près par quatre prismes. Tracer les chemins suivis par les deux rayons de la figure et discuter une application possible de ce montage.

Figure P.4.80



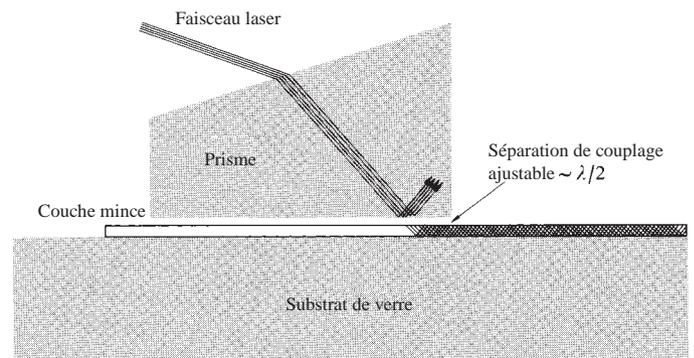
4.81 La figure P.4.81 montre les graphiques de n_I et n_R en fonction de λ pour un métal courant. Identifier ce métal en comparant ses caractéristiques avec celles déjà rencontrées dans ce chapitre et discuter ses propriétés optiques.

Figure P.4.81



4.82 La figure P.4.82 montre le schéma d'un coupleur à prisme développé par les laboratoires Bell. Il a pour objet de diriger un faisceau laser dans une couche mince (254 nm) transparente, qui sert de guide d'onde. Une de ses applications est la circuiterie laser en couches minces ; une sorte d'optique intégrée. Comment pourrait-on expliquer son fonctionnement ?

Figure P.4.82





Optique géométrique

5.1 Introduction

La surface d'un objet, qu'il soit lumineux par lui-même ou bien éclairé par une source lumineuse, peut être considérée comme un rassemblement d'un très grand nombre de points sources élémentaires. Chacune de ces sources émet des ondes sphériques et les rayons sortent donc radialement dans la direction du débit d'énergie (i.e. celle du vecteur de Poynting). Dans ce cas, on dit que les rayons « **divergent** » du point source. Au contraire, si ces ondes sphériques se concentrent en un point, les rayons sont dits « **convergent** ». Généralement, on ne prend en considération qu'une petite partie d'un front d'onde. **Un point depuis lequel une portion d'une onde sphérique diverge (ou vers lequel elle converge) est appelé le point de focalisation (ou foyer) du pinceau de rayons associé.**

Considérons à présent un point source S au voisinage d'un ensemble de surfaces réfléchissantes ou réfringentes constituant un *système optique* (figure 5.1). Rigoureusement, un seul des rayons émis par S passe par un point arbitraire de l'espace. Dans certaines conditions, il est cependant possible de considérer que ces rayons convergent en un certain point P , comme le montre la figure 5.1. L'optique formalise cette modélisation. En effet, si pour un cône de rayons provenant de S , il existe un cône de rayons correspondant passant par le point P , le système est dit **stigmatique** pour ces deux points. L'énergie contenue dans le cône (à part celle liée à des pertes accidentelles dues à la réflexion, la diffraction et l'absorption) atteint le point P , où se reproduit ainsi une **image parfaite** de S . Les systèmes stigmatiques constituent une modélisation théorique idéale. Pour les systèmes réels convenables (mais non *strictement stigmatiques*), les rayons convergent aux alentours du point P et forment non pas une image ponctuelle mais une **tache de lumière**. Même si celle-ci constitue malgré tout une image de S , ce n'en est pas une image rigoureusement parfaite.

Si le système est stigmatique pour les deux points S et P , l'optique géométrique respecte le principe de retour inverse de la lumière (p. 116) qui postule qu'un point source placé en P est imagé en S . S et P sont alors qualifiés de **points conjugués**. Pour un système optique idéal, chaque point d'un espace tridimensionnel **objet** est ainsi parfaitement (ou *stigmatiquement*) imagé dans un espace **image** correspondant.

Habituellement, la fonction d'un composant optique est de collecter puis de reconstruire une portion de front d'onde incident, très souvent pour reproduire une image d'un objet (*système à imagerie*). Notons qu'une des limites évidentes des systèmes réels est leur incapacité à recueillir toute la lumière émise par l'objet. En effet, un composant optique ne peut physiquement intercepter qu'une partie du front d'onde. En conséquence, il y aura toujours une déviation apparente par rapport à la propagation rectiligne, même dans les milieux homogènes ; les ondes sont *diffractées*. La qualité ultime d'un système optique réel est **limitée par la diffraction** (car, répétons-le, même idéalement, l'image d'un point n'est jamais un point mais une tache étalée, voir p. 482). Les effets de la diffraction deviennent d'autant moins importants que la longueur d'onde du rayonnement décroît par rapport aux dimensions physiques du système optique. Dans la limite conceptuelle où $\lambda_0 \rightarrow 0$, la propagation est rectiligne dans les milieux homogènes : c'est ce domaine idéalisé que constitue l'**optique géométrique***. Cette partie de l'optique ne considère donc pas les phénomènes liés à la nature ondulatoire de la lumière (par exemple, les interférences et la diffraction). Dans beaucoup de

.....
* En optique physique, on doit tenir compte du fait que la longueur d'onde de la lumière n'est pas nulle. On retrouve une situation analogue en mécanique : si la longueur d'onde de Broglie est très faible, on a affaire à la mécanique classique et, sinon, c'est le domaine de la mécanique quantique.

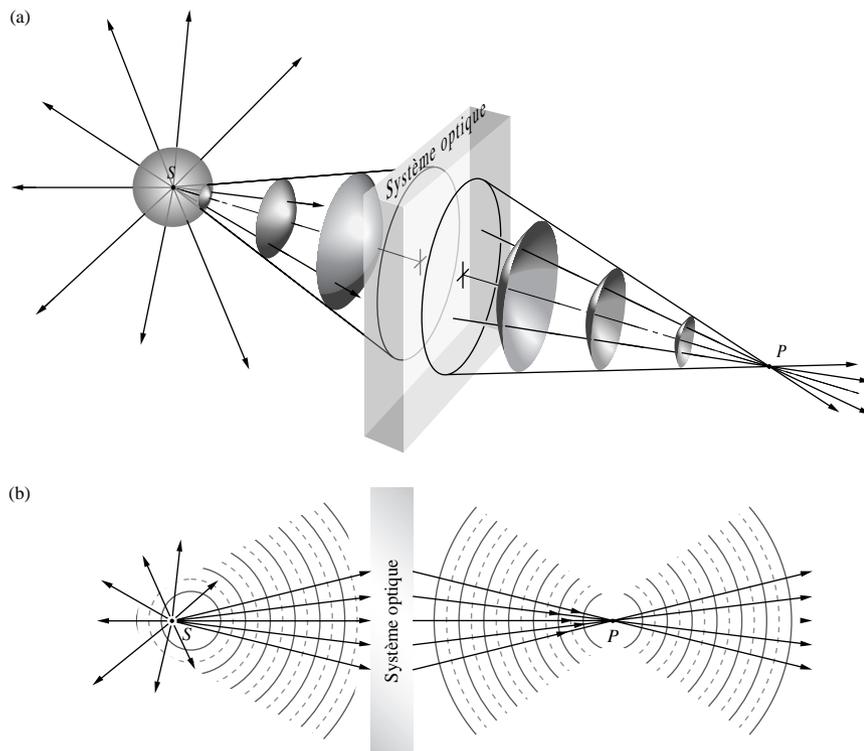


Figure 5.1 Points conjugués : (a) Un point source S émet des ondes sphériques. Un cône de rayons rencontre un système optique qui inverse les fronts d'onde, ce qui fait converger les rayons au point P . (b) Vue en coupe : les rayons divergent de S et une portion d'entre eux converge en P . Remarquons évidemment que la lumière continue son chemin si aucun obstacle (écran...) ne l'arrête en P .

situations, la simplicité du formalisme de l'optique géométrique fait plus que compenser son inexactitude. En bref, nous pourrions résumer l'objet de l'optique géométrique par la proposition suivante : *le sujet consiste ici à traiter de la manipulation contrôlée de fronts d'ondes (ou de rayons) par des surfaces réfringentes ou réfléchissantes, en négligeant les effets de la diffraction.*

5.2 Les lentilles

La lentille est sans doute le composant optique le plus communément utilisé, et cela sans même considérer que beaucoup d'entre nous regardent le monde à travers une paire de ces objets : les lunettes. Les premières lentilles furent sans doute taillées pour réaliser les *verres ardents* de l'Antiquité qui, comme leur nom l'indique, furent utilisés pour allumer des feux bien longtemps avant l'invention des allumettes. Du point de vue le plus général, une **lentille est un élément réfringent** (représentant donc une discontinuité du milieu de transmission) **qui modifie en transmission la géométrie**

d'un faisceau. Cette définition est valable dans l'UV, le visible, l'IR, les micro-ondes, les ondes radio ou même le son.

Le choix d'une lentille est déterminé par le type de changement qu'elle doit occasionner sur le front d'onde incident. Les sources de base étant des points qui émettent des ondes sphériques divergentes, il est souvent souhaitable de transformer ces ondes divergentes en un faisceau d'ondes planes. C'est ce que font les projecteurs ou les lampes torches pour éviter que le faisceau ne se disperse et ne s'affaiblisse sur son parcours. À l'inverse, il est souvent nécessaire, comme dans le cas des verres ardents ou des télescopes, de collecter des rayons parallèles et de les faire converger en un point (c'est-à-dire *focaliser* l'énergie). De plus, comme la lumière réfléchie par un objet (par exemple, le visage d'une personne) provient de milliards de points sources, une lentille qui fait converger les ondelettes divergentes de ces points est capable de former une image de cet objet (figure 5.2).

5.2.1 Surfaces asphériques

Pour bien comprendre le fonctionnement d'une lentille, imaginons que nous interposions, sur le passage d'une onde, une



Figure 5.2 Le visage d'une personne, comme tout objet vu en lumière réfléchi, est constitué d'une multitude de diffuseur.

substance transparente dans laquelle la vitesse de l'onde est différente de la vitesse initiale. La figure 5.3a représente ainsi une vue en coupe d'une onde sphérique divergente se déplaçant dans un milieu incident d'indice n_i et rencontrant l'interface courbe d'un milieu transmissif d'indice n_r . Lorsque n_r est plus grand que n_i , l'onde ralentit en entrant dans le second milieu. La partie centrale du front d'onde, qui rencontre le milieu « ralentisseur » en premier, est donc freinée brutalement. Elle se fait ainsi rattraper par les extrémités du front d'onde qui continuent à se déplacer dans le premier milieu

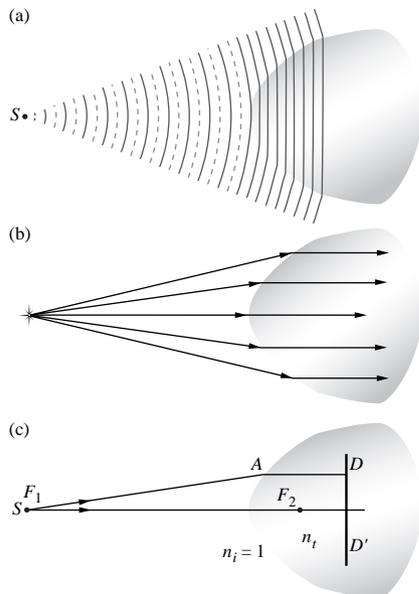


Figure 5.3 Une interface hyperbolique entre de l'air et du verre : (a) Les plans d'onde deviennent plans dans le verre. (b) Les rayons deviennent parallèles. (c) L'hyperbole est telle que, quelle que soit la position de A, le chemin optique entre S et D reste constant.

« rapide ». Si la courbure de l'interface est proprement configurée, une onde sphérique divergente peut donc devenir plane ou convergente. La figure 5.3b représente la situation précédente en termes de rayons. Dès leur entrée dans le second milieu, ceux-ci se rapprochent progressivement de la normale locale. Si la configuration de l'interface est correcte, les rayons émergent parallèles les uns aux autres.

Comment calculer la forme la plus adaptée pour l'interface ? Considérons un point quelconque A de l'interface des deux milieux (figure 5.3c). Un front d'onde est transformé en un autre, à condition que les chemins le long desquels l'énergie se propage restent « égaux », maintenant ainsi la phase du front d'onde constante (p. 28). Une petite surface sphérique de phase constante émise de S évolue donc en une surface plane en $\overline{DD'}$. Quel que soit le chemin que prend la lumière entre S et $\overline{DD'}$, il correspond toujours au même nombre de longueurs d'onde. De fait, la perturbation commence et finit en phase. Quel que soit le chemin emprunté par les rayons, de l'énergie quittant S sous la forme d'un front d'onde unique doit arriver au plan $\overline{DD'}$, avec un temps de parcours caractéristique. En d'autres termes, la somme de $\overline{F_1A}/\lambda_i$ (le nombre de longueurs d'onde pour un rayon entre F_1 et A) et de \overline{AD}/λ_r (le nombre de longueurs d'onde pour un rayon entre A et D) doit être constante quel que soit le point A appartenant à l'interface. En multipliant par λ_0 , on obtient donc :

$$n_i \overline{F_1A} + n_r \overline{AD} = \text{constante} \quad (5.1)$$

D'un point de vue mathématique, les termes de gauche sont les produits de la longueur de milieu traversé par un rayon, multipliée par l'indice de ce milieu. Ils correspondent donc au *chemin optique* OPL parcouru. Tous les chemins optiques entre S et $\overline{DD'}$ doivent donc être égaux. Par ailleurs, si l'on divise l'équation (5.1) par c, le terme de gauche équivaut alors au temps de parcours (toujours se rappeler que la vitesse est homogène au quotient d'une distance par un temps). Le terme de droite reste bien entendu constant. Considérée du point de vue du temps, l'équation (5.1) exprime alors que tous les chemins S et $\overline{DD'}$ doivent correspondre au même temps de parcours.

Considérons à nouveau la question de la forme de l'interface. Divisons l'équation (5.1) par n_i . Nous trouvons alors :

$$\overline{F_1A} + \left(\frac{n_r}{n_i}\right) \overline{AD} = \text{constante} \quad (5.2)$$

Cette expression correspond à l'équation d'une hyperbole pour laquelle l'excentricité (e), qui mesure la courbure, est donnée par $(n_r/n_i) > 1$; et donc, $e = n_r/n_i > 1$. Plus l'excentricité est grande, plus l'hyperbole est plate. De fait, plus la

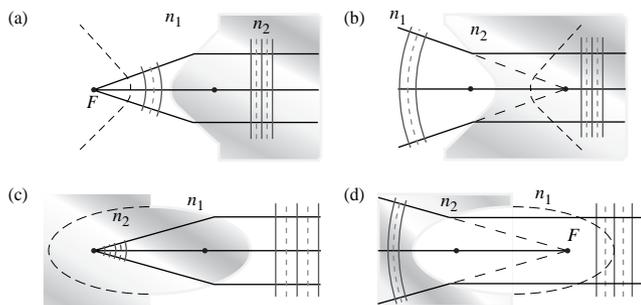


Figure 5.4 Vue en coupe de surfaces réfringentes hyperboloïdales (a) et (b), et ellipsoïdales (c) et (d) [$n_2 > n_1$].

différence d'indices entre les verres est grande, moins la surface a besoin d'être courbée. Lorsqu'un point source est situé à un point focal F_1 et que l'interface entre les deux milieux a un profil hyperbolique, les ondes planes sont transmises dans le matériau qui a l'indice le plus grand. Pour le problème 5.3, il est maladroit d'établir que pour $(n_2/n_1) < 1$, l'interface doit être ellipsoïdale. Dans chaque cas décrit dans la figure 5.4, les rayons divergent ou convergent à partir d'un ou vers un point focal F . De surcroît, du fait du principe de retour inverse de la lumière, les rayons peuvent progresser dans un sens comme dans l'autre. Si une onde plane arrive (de la droite) sur l'interface de la figure 5.4c, elle converge (vers la gauche) au foyer le plus éloigné de l'ellipsoïde.

La première personne qui suggéra d'utiliser des sections coniques pour les surfaces des lentilles fut Johannes Kepler en 1611. Néanmoins, les lois de Snell-Descartes n'étant pas encore connues, il ne fut pas en mesure de pousser son raisonnement. Une fois ces dernières établies, Descartes put développer, à l'aide de sa *Géométrie analytique* les fondements théoriques de l'optique des surfaces asphériques (1637). L'analyse présentée ici est un héritage direct de la contribution du grand savant français.

Il est devenu facile de fabriquer des lentilles dont les points objet et image sont à l'extérieur du matériau réfringent. Sur la figure 5.5a, des ondes incidentes sphériques divergentes sont transformées en ondes planes après le premier dioptre (via le mécanisme de la figure 5.4a). Ces ondes, planes à l'intérieur du verre, rencontrent la seconde face plane de la lentille et sortent donc sans altération : $\theta_i = 0$ et $\theta_t = 0$. Comme le trajet de la lumière est réversible, une onde plane provenant de la droite de la figure convergerait, elle, au point F_1 , qui est de fait un *point focal* de la lentille. Face plane en avant, notre lentille si sophistiquée pourrait ainsi très bien servir de verre ardent !

Sur la figure 5.5b, on observe que les ondes planes situées à l'intérieur de la lentille convergent vers l'axe optique en se réfractant sur la face de sortie. Ces lentilles sont plus épaisses au milieu qu'au centre et sont qualifiées de **convexes** (du latin *convexus* signifiant « arqué »). Elles infléchissent les rayons vers l'axe central et font donc converger un faisceau incident. On parle aussi de **lentilles convergentes**.

Au contraire, une lentille **concave** (du latin *concausus* signifiant « creux » – on peut d'ailleurs s'en souvenir grâce à la deuxième partie du mot : « cave ») est plus fine au milieu que sur ses bords (figure 5.5c). Une telle lentille fait alors *diverger* un faisceau incident de rayons parallèles et, plus généralement, écarte les rayons de l'axe central. On parle alors de **lentilles divergentes**. Sur la figure 5.5c, des rayons parallèles

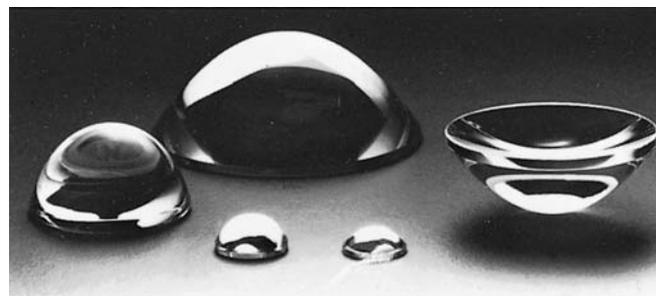
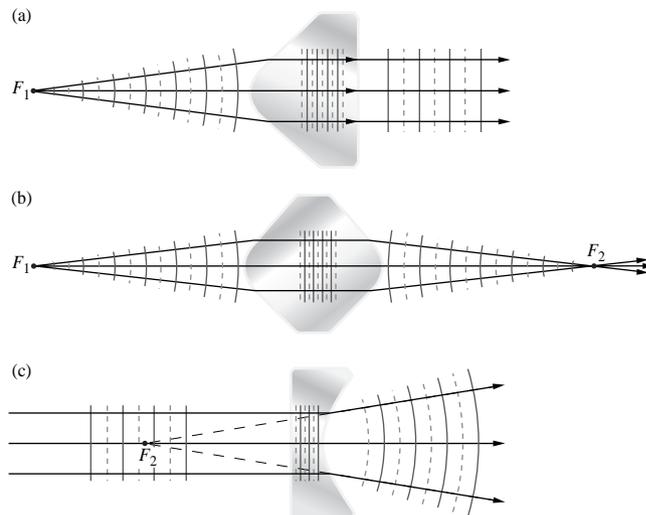


Figure 5.5 (a), (b), et (c) : Vue en coupe de plusieurs lentilles hyperboloïques. Voir le problème 5.4 pour les lentilles ellipsoïdales. (d) : photographie de quelques lentilles asphériques. (Photo Melles Griot.)

provenant de la gauche émergent en semblant provenir du point F_2 . Ce point est un point focal. **Lorsqu'un faisceau de rayons parallèles passe à travers une lentille convergente, le point vers lequel il converge** (ou bien le point duquel il diverge pour une lentille divergente...) est un **point focal**, ou **foyer** de la lentille.

Si un point source est positionné sur l'axe optique, au point F_1 devant la lentille de la figure 5.5*b*, les rayons émergents convergent au point conjugué F_2 . Si l'on place un écran en ce point, on observe une image de cette source, image qualifiée de **réelle**. Sur la figure 5.5*c*, le point source est cette fois situé à l'infini (en effet, les rayons incidents sont parallèles) et les rayons émergents de la lentille divergent. Ils semblent provenir du point F_2 . Cependant, aucune image ne pourrait apparaître sur un écran placé à cet endroit. On parle alors dans ce cas d'**image virtuelle**. C'est par exemple le cas des images formées par un miroir plan.

De tels composants optiques (lentilles et miroirs), qui comportent une ou deux surfaces ni planes ni sphériques, sont qualifiés d'*asphériques*. Bien que leur principe soit facile à comprendre et qu'ils remplissent excessivement bien certaines tâches, ils sont encore difficiles à fabriquer avec une grande précision. Cependant, lorsque les coûts sont justifiables, la précision non limitante ou pour des volumes suffisamment importants, les fabricants n'hésitent pas à les utiliser. Le premier composant asphérique à avoir été fabriqué en grande quantité (dizaines de millions) fut une lentille de l'appareil photo Kodak à disque (1982). Aujourd'hui, les lentilles asphériques sont fréquemment employées pour corriger de manière élégante les problèmes d'imagerie dans les systèmes optiques complexes. Les lunettes asphériques sont plus



Polissage d'une lentille sphérique. (Photo Optical Society of America.)

plates et plus légères que leurs équivalents sphériques. Elles sont bien adaptées aux fortes corrections. De plus, elles sont également plus esthétiques car elles ne grossissent pas les yeux de celui qui les porte.

De nouvelles générations de machines-outils contrôlées par ordinateur permettent de produire des éléments asphériques avec une précision supérieure à $0,5 \mu\text{m}$ (cela correspond encore à un facteur 10 fois plus important que la tolérance de $\lambda/4$ généralement requise pour des optiques de qualité). Après meulage, les surfaces asphériques peuvent être polies par finition magnéto-rhéologique. Ce procédé, utilisé pour évaluer et corriger le relief de la surface, repose sur le contrôle magnétique de la direction et de la pression exercée par les abrasifs sur la pièce à polir.

De nos jours, on trouve des composants asphériques en verre ou en plastique dans des instruments d'optique de toute qualité : lunettes astronomiques, projecteurs, appareils photographiques, équipements de reconnaissance, etc.

5.2.2 Réfraction sur des surfaces sphériques

Considérons deux pièces de verre, l'une avec une surface sphérique concave, l'autre avec une surface sphérique convexe, toutes les deux ayant le même rayon de courbure. Du fait des propriétés singulières de la sphère, ces deux pièces peuvent s'assembler parfaitement en tous points de leurs surfaces. Cette méthode est d'ailleurs employée pour réaliser les éléments optiques de forme sphérique. Comme on peut le voir sur la photographie, si l'on frotte de façon aléatoire un disque de verre contre un polissoir de la forme voulue, avec un abrasif entre les deux, on conçoit que la pièce de verre finit par épouser parfaitement la forme du moule d'origine. Ces pièces sont pour la plupart réalisées, par séries sur des meuleuses et des polisseuses automatiques.

Il n'est donc pas surprenant que la plupart des lentilles actuelles aient des surfaces sphériques. L'objectif de ce chapitre est de montrer comment utiliser ces surfaces pour obtenir des images d'objets étendus et à spectre large. Certaines imperfections, que l'on appelle **aberrations**, peuvent être présentes. Néanmoins, les technologies actuelles permettent de réaliser des lentilles de très haute qualité où les aberrations sont minimisées au point de pouvoir obtenir une qualité d'image à la limite physique de la diffraction.

Considérons le système représenté à la figure 5.6. Une onde émise par un point source S rencontre un dioptre sphérique de rayon R et de centre C , appelé **centre de courbure**. Le point V

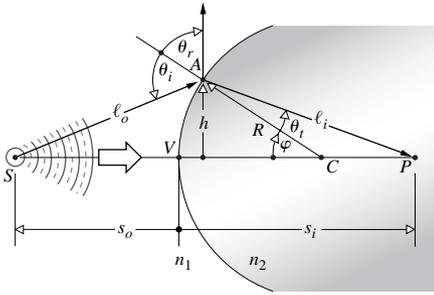


Figure 5.6
Réfraction sur une surface sphérique (points conjugués).

est le **sommet** du dioptré, la longueur VC est le **rayon de courbure** et la longueur $s_o = \overline{SV}$ est la **distance objet**. Considérons alors un rayon quelconque \overline{SA} arrivant sur le dioptré en A . Conformément aux lois de la réfraction, celui-ci est réfracté à l'interface vers la normale locale (car $n_2 > n_1$) et donc vers l'**axe optique** qu'il croise en un point P . De la même manière, tous les rayons incidents avec l'angle θ_i rencontrent l'axe optique en P (figure 5.7). On définit de fait la longueur $s_i = \overline{VP}$ comme étant la **distance image**. D'après le principe de Fermat, le chemin optique noté OPL (pour le terme anglais *Optical Path Length*) est stationnaire. De fait, sa dérivée par rapport à la variable de position est nulle. Pour le rayon en question, on a donc :

$$OPL = n_1 \ell_o + n_2 \ell_i \quad (5.3)$$

En utilisant les relations trigonométriques dans les triangles SAC et ACP , et comme $\cos \varphi = -\cos(180^\circ - \varphi)$, on obtient :

$$\ell_o = [R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R) \cos \varphi]^{1/2}$$

et
$$\ell_i = [R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R) \cos \varphi]^{1/2}$$

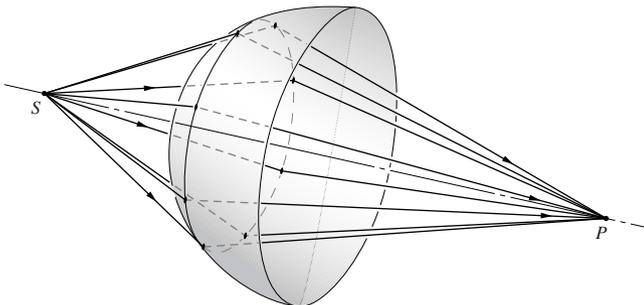


Figure 5.7 Rayons incidents sous le même angle.

Le chemin optique OPL peut alors s'écrire :

$$OPL = n_1[R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R) \cos \varphi]^{1/2} + n_2[R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R) \cos \varphi]^{1/2}$$

Tous les paramètres (s_i, s_o, R , etc.) définis dans le schéma de la page précédente sont positifs et sont à la base de *conventions de signe* qu'il est important de toujours avoir en tête (tableau 5.1). Dans la mesure où A se déplace sur une sphère, il se situe toujours à une distance fixe du centre de courbure C (i.e. R est une constante). Ici, c'est donc l'angle φ qui est la variable de position. D'après le principe de Fermat, on a donc : $d(OPL)/d\varphi = 0$ et ainsi :

$$\frac{n_1 R (s_o + R) \sin \varphi}{2 \ell_o} - \frac{n_2 R (s_i - R) \sin \varphi}{2 \ell_i} = 0 \quad (5.4)$$

Il en découle que :

$$\frac{n_1}{\ell_o} + \frac{n_2}{\ell_i} = \frac{1}{R} \left(\frac{n_2 s_i}{\ell_i} - \frac{n_1 s_o}{\ell_o} \right) \quad (5.5)$$

C'est cette relation que doivent vérifier les principaux paramètres d'un rayon allant de S à P par réfraction sur un dioptré sphérique. Bien que cette expression soit tout à fait exacte, elle reste relativement complexe. En effet, si A est déplacé en changeant φ , le nouveau rayon n'intercepte plus l'axe optique en P (voir problème 5.1 concernant l'ovale cartésien, interface pour laquelle tous les rayons convergent en P quelque soit φ). Quelques approximations mathématiques sur ℓ_o et ℓ_i permettent

Tableau 5.1 Convention de signe pour les dioptrés sphériques et les lentilles minces* (La lumière arrive de la gauche.)

s_o, f_o	+ à gauche de V
x_o	+ à gauche de F_o
s_i, f_i	+ à droite de V
x_i	+ à droite de F_i
R	+ si C est à droite de V
y_o, y_i	+ au-dessus de l'axe optique

*Ce tableau anticipe la présentation prochaine de certaines quantités non abordées jusqu'à présent.

aussi de simplifier l'équation précédente. On se souvient du développement en séries entières du cosinus et du sinus :

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \quad (5.6)$$

et

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots \quad (5.7)$$

Pour de petites valeurs de φ (i.e. A proche de V), $\cos \varphi \approx 1$. De ce fait, les expressions de ℓ_o et ℓ_i conduisent à $\ell_o \approx s_o$, $\ell_i \approx s_i$. On obtient alors la nouvelle équation :

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (5.8)$$

Ce résultat aurait également pu être obtenu en partant de la loi de Snell-Descartes plutôt que du principe de Fermat (problème 5.5). Dans ce cas, le modèle des angles petits pour lequel on peut faire l'approximation $\sin \varphi \approx \varphi$ conduit à la même équation finale. Cette approximation délimite en fait le domaine de la *théorie du premier ordre*, car seul le premier terme du développement du sinus en série entière est pris en compte. Signalons d'ailleurs que nous examinerons dans le chapitre suivant la théorie dite du *troisième ordre* (où l'on considérera donc que : $\sin \varphi \approx \varphi - \varphi^3/3!$). Les rayons qui arrivent avec un angle faible par rapport à l'axe optique (de manière à ce que φ et h soient suffisamment petits) sont appelés les **rayons paraxiaux**. Pour ceux-ci, la portion de front d'onde qui rencontre le dioptre est essentiellement sphérique. Les rayons paraxiaux issus de S forment une image parfaite centrée en P , à une distance s_i du sommet du dioptre. Notons également que l'équation (5.8) est indépendante de la position du point A dans la petite zone symétrique autour de l'axe optique, la *région paraxiale*. La description systématique de la formation des images avec cette approximation fut donnée pour la première fois par le mathématicien et physicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en 1841. De fait, on parle d'**optique de Gauss** et de **conditions de Gauss** pour désigner l'optique qui ne prend en compte que les rayons paraxiaux, (pour lesquels on peut donc appliquer la *théorie du premier ordre*). L'optique de Gauss fournit le modèle élémentaire pour décrire le comportement des lentilles ou des systèmes de lentilles usuels. Dans ces conditions, si un système optique est bien réalisé, un front d'onde sphérique incident ressortira avec un profil également proche de la sphéricité. Un système de plus en plus parfait se rapproche donc du modèle de la théorie du premier ordre. Pour un système réel, les différences avec les résultats théoriques donnés par l'analyse paraxiale donnent donc un bon moyen de mesurer la qualité optique du système.

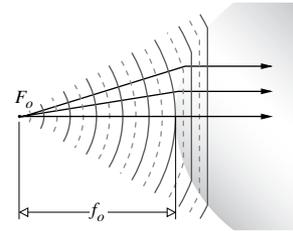


Figure 5.8 Ondes planes se propageant à travers une interface sphérique (le foyer objet).

Si le point F_o de la figure 5.8 est imagé à l'infini ($s_i = \infty$), on a :

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{\infty} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Cette distance objet particulière est définie comme étant la **distance focale objet**. On a : $s_o \equiv f_o$, donc :

$$f_o = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R \quad (5.9)$$

Le point F_o est le **foyer objet**. De la même manière, on définit le **foyer image** F_i , point de l'axe optique où l'image se forme quand la source est à l'infini ($s_o = \infty$). Dans ces conditions :

$$\frac{n_1}{\infty} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Ce dernier cas permet de définir également la **distance focale image** f_i (égale ici à s_i - figure 5.9). On a alors :

$$f_i = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R \quad (5.10)$$

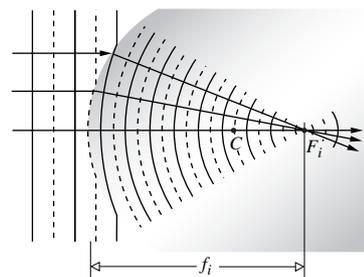


Figure 5.9 Transformation d'une onde plane en une onde sphérique par un dioptre sphérique (le foyer image).

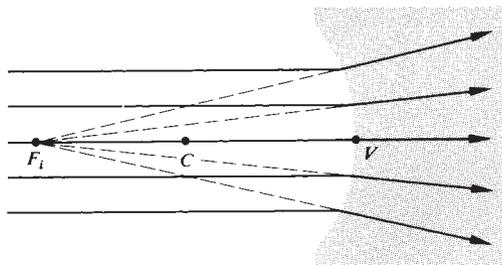
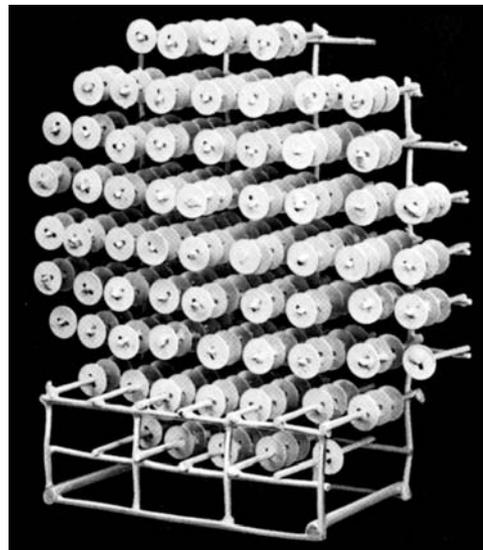


Figure 5.10 Un point image virtuel.

Rappelons-nous qu'une image est virtuelle lorsque les rayons en divergent (figure 5.10). De la même manière, un objet est virtuel lorsque les rayons convergent vers lui (figure 5.11). Dans ce cas, on remarque que l'objet virtuel se trouve à la droite du sommet du dioptré V et s_o devient une quantité négative conformément à la convention de signe adoptée pour ces problèmes (tableau 5.1). La surface étant concave, son rayon R est aussi une quantité négative, de même que la distance focale objet, ce qui est bien en adéquation avec l'équation (5.9). De la même manière, la distance image f_o se retrouve à la gauche du point V et est aussi négative.



Lentille réalisée pour des ondes radio basses fréquences. Les disques servent à réfracter ces ondes de la même manière que des rangées d'atomes réfractent la lumière. (Photo Optical Society of America.)

5.2.3 Lentilles minces

Le terme de lentille n'est pas limité à l'optique : il y a par exemple des lentilles acoustiques et des lentilles micro-ondes. Certaines sont faites de verre ou de cire et sont parfaitement reconnaissables mais d'autres peuvent avoir une apparence plus subtile (voir photo). La plupart du temps, les lentilles sont composées de deux ou plusieurs dioptrés (surfaces séparant deux ou plusieurs milieux inégalement réfringents), dont l'un

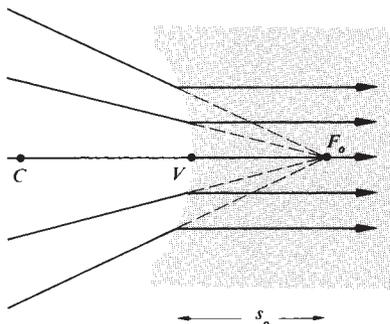


Figure 5.11 Un point objet virtuel.

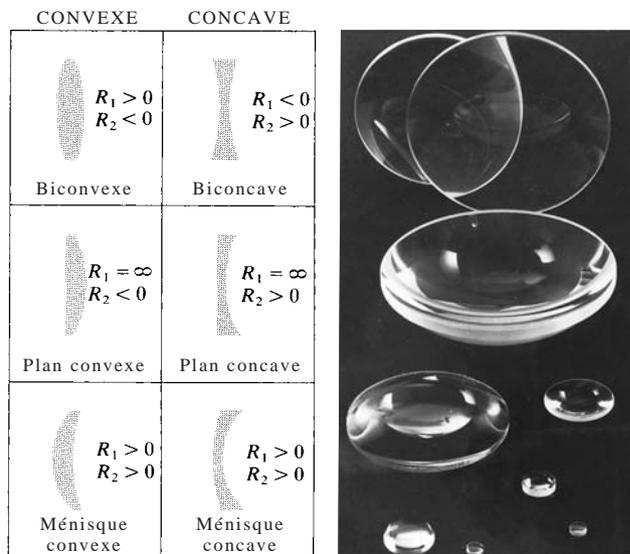


Figure 5.12 Coupes de différents types de lentilles simples réalisées avec des surfaces sphériques centrées. Par convention, on considère que la surface de gauche est n° 1 car c'est elle que la lumière rencontre en premier. Son rayon est noté R_1 . (Photo Melles Griot.)

au moins n'est pas plan. Généralement, ces surfaces sont centrées sur un axe commun (*l'axe optique*) et sont habituellement des portions de sphère. Enfin, les lentilles sont souvent recouvertes d'un revêtement diélectrique qui permet de contrôler leur transmission (paragraphe 9.9).

Plusieurs termes permettent de décrire ces lentilles. Une lentille constituée d'un seul élément (i.e. deux dioptries) est une *lentille simple*. Dans le cas contraire, c'est une *lentille composée* (faite par exemple avec deux variétés de verre différentes). Une lentille peut également être *mince* ou *épaisse* selon que l'on peut négliger ou non son épaisseur. Pour notre part, nous nous limiterons ici aux systèmes centrés (qui présentent une symétrie de révolution autour d'un axe commun) de surfaces sphériques. Avec ces restrictions, une lentille simple adopte les formes présentées à la figure 5.12.

On constate avec ce schéma que les lentilles simples **convexes** (ou **convergentes** ou **positives**) sont plus épaisses en leurs milieux que sur les bords. La partie centrale d'un front d'onde incident aurait donc plus de matière réfringente (par exemple du verre) à traverser. Dans le cas le plus général où la matière dans laquelle est faite la lentille a un indice plus élevé que le milieu environnant, la partie centrale d'un front d'onde est donc ralentie par rapport aux parties latérales. Pour un front d'onde sphérique, les parties latérales peuvent donc rattraper et dépasser la partie centrale. Une onde sphérique incidente divergente peut ainsi être transformée en onde plane ou en onde sphérique convergente si la lentille est suffisamment convergente. De la même manière, les lentilles simples **concaves** (ou **divergentes** ou **négatives**) sont plus minces au centre qu'au bord. Elles tendent donc à accélérer la partie centrale d'un front d'onde par rapport à ses côtés, donc à le faire diverger.

Équations des lentilles minces

Considérons à nouveau le problème de la réfraction d'un rayon sur un dioptré sphérique. La position respective des points conjugués S et P est donnée par l'équation :

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad [5.8]$$

$(n_2 - n_1)/R$ est une valeur fixée. De fait, si s_o est grande, la valeur de s_i est relativement petite. Si s_o diminue, s_i augmente et P s'éloigne d'autant plus du sommet du dioptré. Dans ce cas, la valeur des angles θ_i et θ_r augmente jusqu'à ce qu'on ait finalement $s_o = f_o$ et $s_i = \infty$. Pour ce point, on a : $n_1/s_o = (n_2 - n_1)/R$. Ainsi, si s_o diminue encore, s_i doit devenir négatif

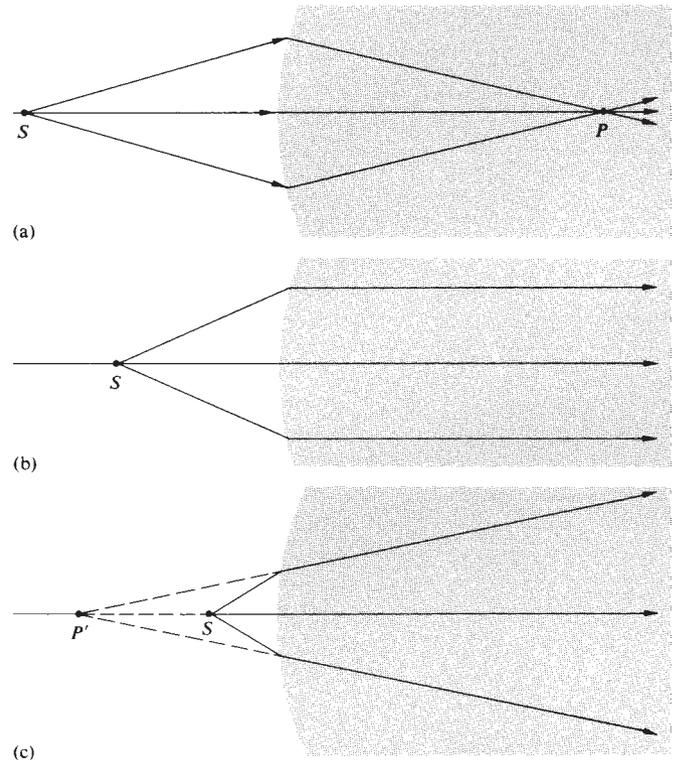


Figure 5.13 Réfraction sur un dioptré sphérique entre deux matériaux transparents.

pour respecter l'équation (5.8). L'image devient alors virtuelle (figure 5.13).

Rajoutons alors une seconde face au système décrit par la figure 5.13c. On obtient ainsi une lentille d'indice n_l entourée d'un milieu d'indice n_m , (figure 5.14) dont il s'agit de localiser les points conjugués. Cette situation n'est pas la plus générale, mais elle est la plus commune, voire la plus simple*. On sait, d'après l'équation (5.8), que les rayons paraxiaux issus du point S situé à une distance s_{o1} du sommet V_1 du premier dioptré se croisent à nouveau en un point P' , situé à une distance s_{i1} , de V_1 . On a alors :

$$\frac{n_m}{s_{o1}} + \frac{n_l}{s_{i1}} = \frac{n_l - n_m}{R_1} \quad (5.11)$$

.....

*Voir Jenkins and White, *Fundamentals of Optics*, p. 57, pour la solution à trois indices...

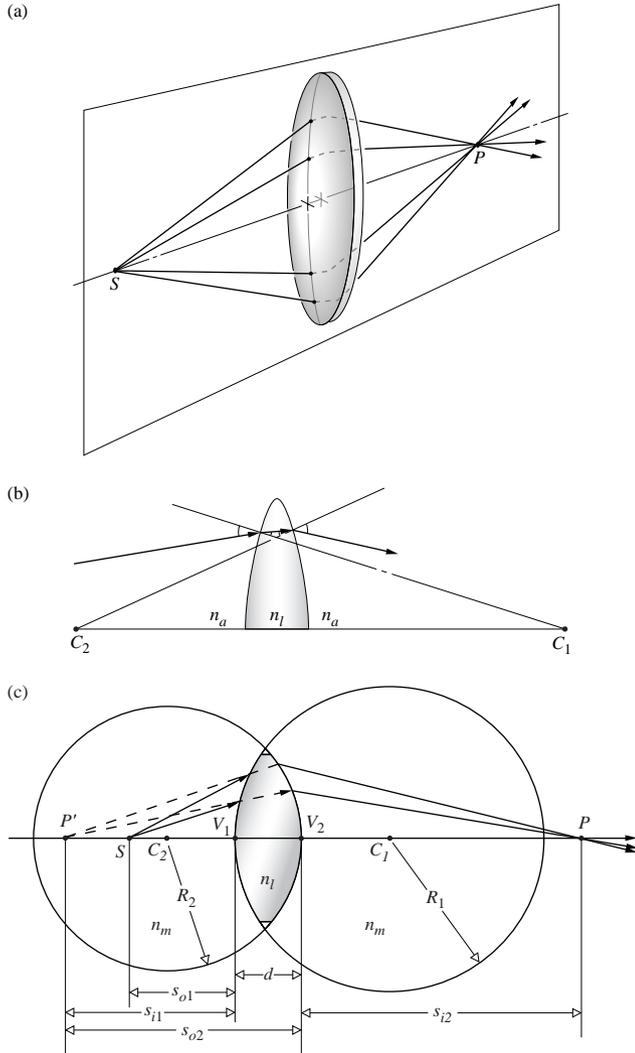


Figure 5.14 Lentille sphérique : (a) Rayons traversant une lentille dans le plan vertical. Points conjugués : (b) Réfraction sur les deux interfaces. Le rayon du cercle centré en C_1 est normal à la première surface. Lorsque le rayon lumineux pénètre dans la lentille, il se rapproche de la normale. Le rayon du cercle centré sur C_2 est également normal à la seconde surface. Mais lorsque le rayon lumineux sort du dioptre, il s'éloigne de cette normale car $n_l > n_a$, (c) Coupe géométrique du système.

De la même manière, le point P' sert de nouveau point objet pour le second dioptre. Il est situé à une distance s_{o2} du sommet V_2 de celui-ci. D'autre part, les rayons issus de P' qui arrivent sur le second dioptre, évoluent dans un milieu d'indice n_l .

De ce fait, l'espace objet pour la seconde interface (contenant donc le point P') a un indice n_l . Remarquons que les rayons issus de P' se propagent partout en ligne droite. On peut finalement écrire en valeur algébrique que :

$$|s_{o2}| = |s_{i1}| + d$$

Comme s_{o2} est sur la gauche, c'est une quantité positive et l'on a : $s_{o2} = |s_{o2}|$. En revanche, s_{i1} est aussi sur la gauche. D'après les conventions de signe, c'est cette fois une valeur négative : $-s_{i1} = |s_{i1}|$. On peut donc écrire :

$$s_{o2} = -s_{i1} + d \tag{5.12}$$

Ainsi, l'équation (5.8) appliquée à la seconde surface donne :

$$\frac{n_l}{(-s_{i1} + d)} + \frac{n_m}{s_{i2}} = \frac{n_m - n_l}{R_2} \tag{5.13}$$

Ici, $n_l > n_m$ et $R_2 < 0$; le côté droit représente donc les valeurs positives. En additionnant les équations (5.11) et (5.13), on obtient :

$$\frac{n_m}{s_{o1}} + \frac{n_m}{s_{i2}} = (n_l - n_m) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{n_l d}{(s_{i1} - d)s_{i1}} \tag{5.14}$$

Si la lentille est suffisamment fine ($d \rightarrow 0$), le dernier terme de droite est nul. Par ailleurs, on peut considérer que le milieu environnant est l'air (i.e. $n_m \approx 1$). On obtient alors l'équation des lentilles minces, aussi appelée **formule des lunetiers** :

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = (n_l - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \tag{5.15}$$

où nous avons posé $s_{o1} = s_o$ et $s_{i2} = s_i$. En effet, les points V_1 et V_2 tendent à se superposer lorsque $d \rightarrow 0$; s_o et s_i peuvent donc être mesurées soit à partir des sommets soit du centre de la lentille.

Dans le cas du dioptre sphérique (une seule interface), on se rappelle que pour s_o située à l'infini, la distance image devenait la distance focale f_i . Plus symboliquement :

$$\lim_{s_o \rightarrow \infty} s_i = f_i$$

Et de même

$$\lim_{s_i \rightarrow \infty} s_o = f_o$$

Pour une lentille mince, il est évident d'après l'équation (5.15) que $f_i = f_o$. Ainsi, on peut écrire :

$$\frac{1}{f} = (n_l - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \tag{5.16}$$

et

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \quad (5.17)$$

qui est la célèbre **relation de conjugaison des lentilles simples dans l'air** ou **relation de conjugaison de Gauss** (voir photo).

Ces expressions sont extrêmement utiles pour les problèmes courants faisant intervenir des lentilles. Calculons par exemple la focale d'une lentille plan-convexe de rayon de courbure 50 mm et d'indice 1,5. Si l'on considère que la lumière rencontre d'abord la face plane ($R_1 = \infty$, $R_2 = -50$), on a :

$$\frac{1}{f} = (1,5 - 1) \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-50} \right)$$

Si, en revanche, la lumière rencontre d'abord la face convexe : ($R_1 = +50$, $R_2 = \infty$), on a :

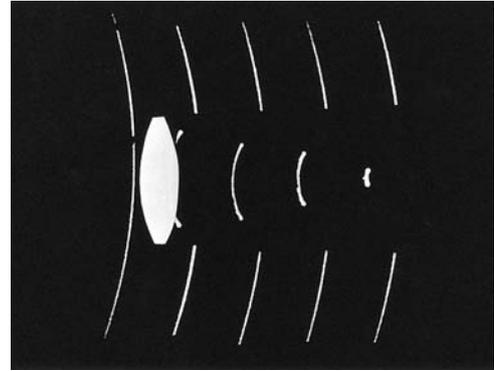
$$\frac{1}{f} = (1,5 - 1) \left(\frac{1}{+50} - \frac{1}{\infty} \right)$$

Dans les deux cas, on trouve : $f = 100$ mm. Une fois cette distance focale établie, on peut calculer la position d'une image connaissant celle de l'objet. Par exemple, pour un point objet placé à 600 mm, on obtient, d'après l'équation (5.17), un point image situé à une distance :

$$s_i = \frac{s_o f}{s_o - f} = \frac{(600)(100)}{600 - 100}$$

Donc : $s_i = 120$ mm. De même, pour un point objet situé à 200 mm, 150 mm, 100 mm et 50 mm, on obtient des distances images respectives de 200 mm, 300 mm, ∞ et -100 mm.

Il est intéressant de constater que pour $s_o = \infty$, on obtient : $s_i = f$; et plus s_o diminue, plus s_i augmente positivement jusqu'à ce que $s_o = f$. Au-delà, s_i devient négative. Vous pouvez vérifier facilement ce résultat avec une simple lentille convergente placée en face d'une petite source lumineuse, par exemple une simple ampoule de lampe. La manipulation consiste à projeter une image de la source (le filament ou la marque de l'ampoule) sur un écran (une feuille de papier convient très bien) en se positionnant le plus loin possible de cette source (pour simuler une source à l'infini). Il s'agit de distinguer une véritable image et non pas juste une tache lumineuse. Une fois cette image ajustée, la distance entre la lentille et l'écran est approximativement la distance focale f . Si l'on déplace ensuite la lentille vers l'écran, on constate alors que la distance pour laquelle on obtient une image augmente. Et plus $s_o \rightarrow f$, plus la distance à laquelle il faut positionner l'écran pour obtenir une image discernable augmente. Pour $s_o < f$, on



Exemple d'un front d'onde divergent dont une portion est rendue convergente par une lentille. La photographie montre cinq expositions, séparées chacune d'environ 100 ps (i.e. 100×10^{-12} s) d'une impulsion de 10 ps de longueur. Cette image a été réalisée en utilisant une technique holographique (N. H. Abramson).

observe plus qu'une tache lumineuse à l'endroit où le mur le plus éloigné intercepte le cône de rayons divergents : l'image est alors virtuelle.

Foyers et plans focaux

La figure 5.15 récapitule schématiquement certaines des situations décrites par l'équation (5.16). Retenons que si une lentille d'indice n_l est baignée par un milieu d'indice n_m , on a :

$$\frac{1}{f} = (n_{lm} - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (5.18)$$

On constate sur la figure 5.15 que les distances focales sont les mêmes pour les situations (a) et (b). Cela est dû au fait que d'un côté ou de l'autre, la lentille se trouve dans le même milieu. Par ailleurs, si $n_l > n_m$, il en suit que : $n_{lm} > 1$. Dans les deux cas, $R_1 > 0$ et $R_2 < 0$, ce qui fait que les deux distances focales sont positives. On a alors un objet réel pour (a) et une image réelle pour (b). Pour la situation (c), $n_l < n_m$, et f est donc négative. Pour (d) et (e), $n_{lm} > 1$ mais $R_1 < 0$, et $R_2 > 0$. Par conséquent, f est encore une fois négative et l'objet et l'image sont virtuels dans les deux cas. Pour la situation (f), $n_{lm} < 1$ entraîne que $f > 0$.

En ce qui concerne la représentation de rayons, notons qu'il est toujours pratique de tracer celui qui passe par le centre de la lentille. En effet, étant perpendiculaire aux deux surfaces, il n'est pas dévié. Examinons maintenant le cas de la figure 5.16 où un rayon paraxial désaxé sort de la lentille avec une direction

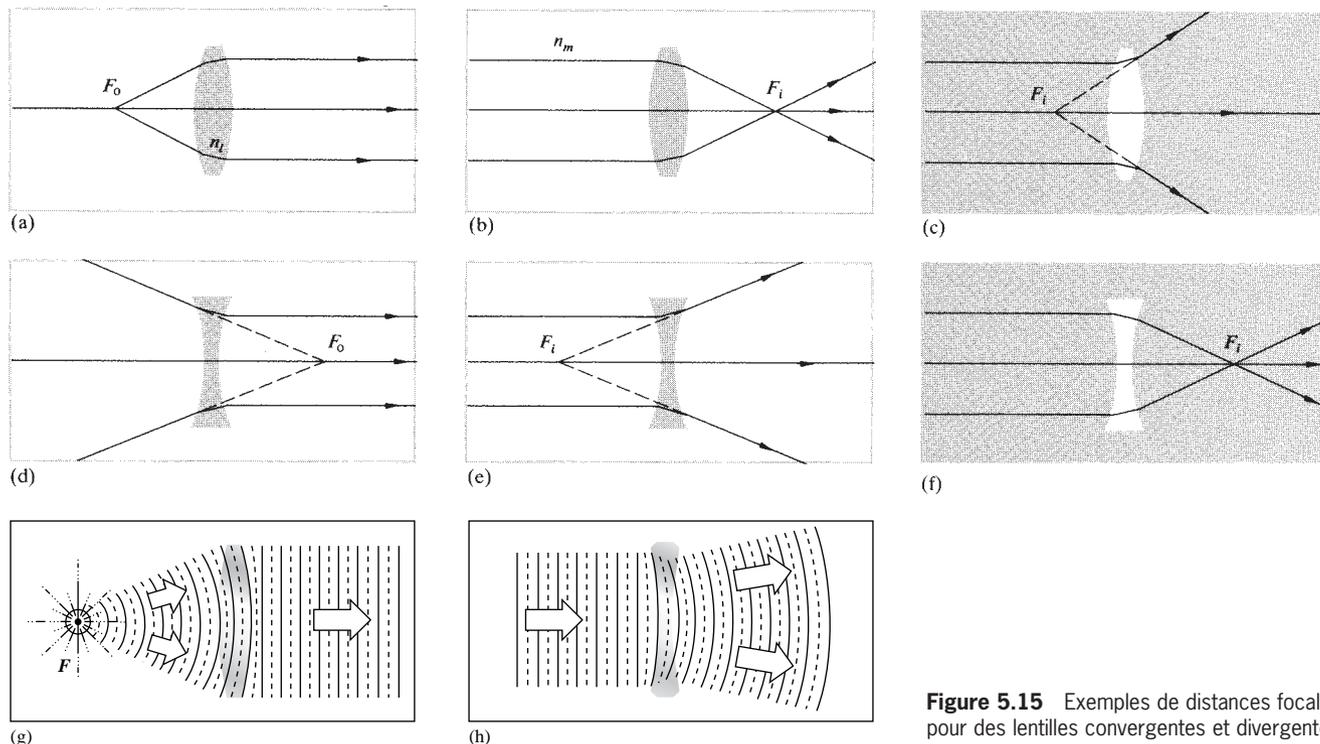


Figure 5.15 Exemples de distances focales pour des lentilles convergentes et divergentes.

parallèle au rayon incident. En fait, un tel rayon passe obligatoirement par un point particulier : le **centre optique** O de la lentille. Pour voir cela, on trace les deux plans parallèles tangents aux faces de la lentille pour deux points quelconques A et B . La tâche peut être simplifiée en choisissant, par exemple, ces deux points tels que les rayons géométriques \overline{AC}_1 et \overline{BC}_2 soient parallèles. On doit alors montrer que le rayon paraxial traversant \overline{AB} pénètre et sort de la lentille suivant la même direction. On voit en premier lieu sur le schéma que les triangles AOC_1 et BOC_2 sont similaires au sens géométrique du terme. Par conséquent, leurs côtés sont proportionnels et $|R_1|(\overline{OC}_2) = |R_2|(\overline{OC}_1)$. Or, comme les rayons sont constants, il en est de même pour la localisation de O , indépendamment de A et B . Comme nous l'avons vu précédemment (problème 4.34 et figure P.4.34), un rayon traversant un milieu compris entre deux plans parallèles (*lame à faces planes et parallèles*) est déplacé latéralement mais ne subit pas de déviation angulaire. Sa translation est proportionnelle à l'épaisseur du milieu traversé. Elle est donc nulle pour une lentille mince. **Par conséquent, les rayons passant par le centre optique O ne subissent pas de déviation.** Ils se tracent donc en ligne droite. Pour une lentille mince, on place généralement O sur l'axe optique à mi-distance des deux faces.

On se souvient qu'un faisceau de rayons paraxiaux parallèles à l'axe, qui rencontre un dioptré sphérique, vient se focaliser sur un point de l'axe optique (figure 5.10). Comme le montre la figure 5.17, cela implique que plusieurs faisceaux de ce type, contenus dans un petit cône, vont se focaliser sur un segment sphérique σ , également centré sur C . Parmi eux, les rayons normaux au dioptré, qui passent par C , ne sont pas déviés et permettent ainsi de localiser facilement les points de focalisation sur σ . Par conséquent, si le cône contenant les faisceaux est suffisamment étroit, σ peut être représenté par un plan normal à l'axe optique. Celui-ci est alors nommé le **plan focal**. Pour en revenir à notre sujet, il faut retenir ici que, dans les conditions de l'optique de Gauss (rayons paraxiaux), les lentilles focalisent tout faisceau de rayons parallèles* sur un **plan focal image** (figure 5.18).

*La propriété de focalisation de la lumière par les lentilles est connue depuis très longtemps. La plus ancienne référence bibliographique semble être la pièce d'Aristophane *Les Nuées*, datant de 423 av. J.-C. Dans celle-ci, le héros, Strepsiade se sert d'un verre pour focaliser la lumière du soleil et faire fondre la tablette de cire où figurent ses dettes de jeux !

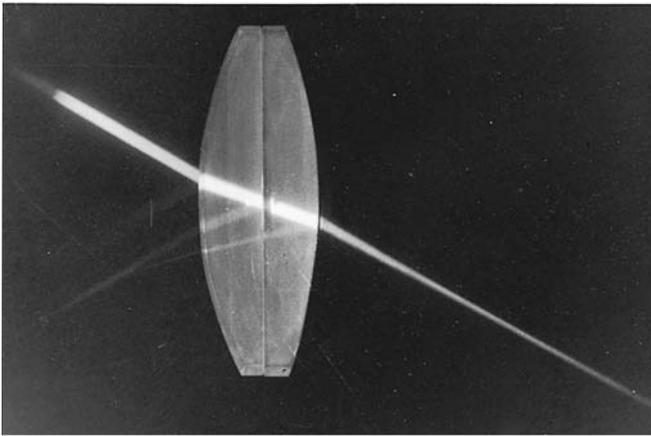
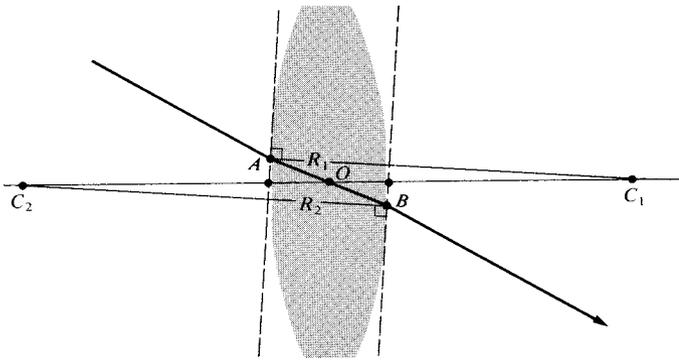


Figure 5.16 Le centre optique d'une lentille. (Photo E. H.)

Pour les représentations, chaque point de ce plan est localisable en utilisant le rayon non dévié passant par le centre optique O . De la même manière, on appelle **plan focal objet** le plan qui contient le foyer objet F_o .

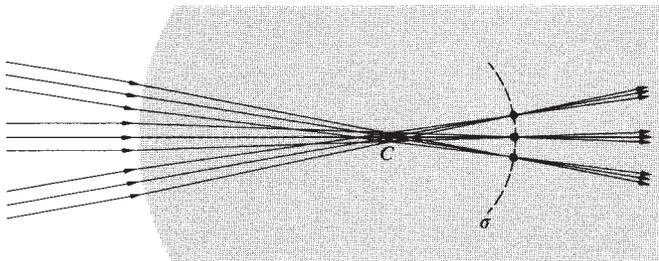


Figure 5.17 Focalisation de plusieurs pinceaux de rayons.

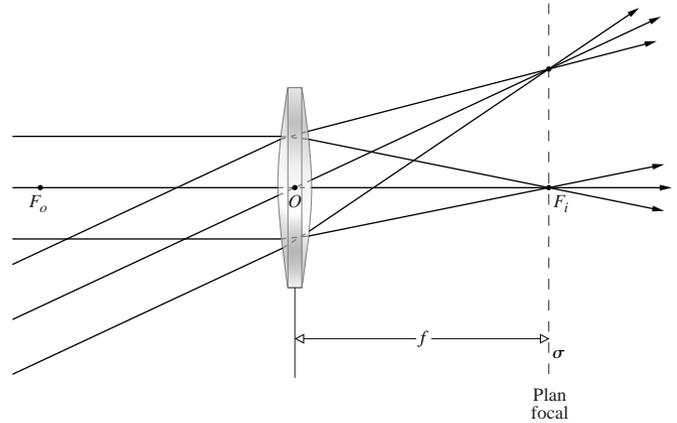


Figure 5.18 Le plan focal d'une lentille.

Images d'objets étendus

Jusqu'à présent, nous n'avons traité que le cas abstrait d'une source ponctuelle unique. On considère maintenant le cas où de tels points se superposent pour constituer un objet étendu (figure 5.2). Pour l'instant, imaginons que cet objet est une portion de sphère, σ_o , centrée sur C , comme l'indique la figure 5.19. Si σ_o est proche d'un dioptré sphérique, le point objet S a une image P virtuelle ($s_i < 0$ et P est donc à la gauche

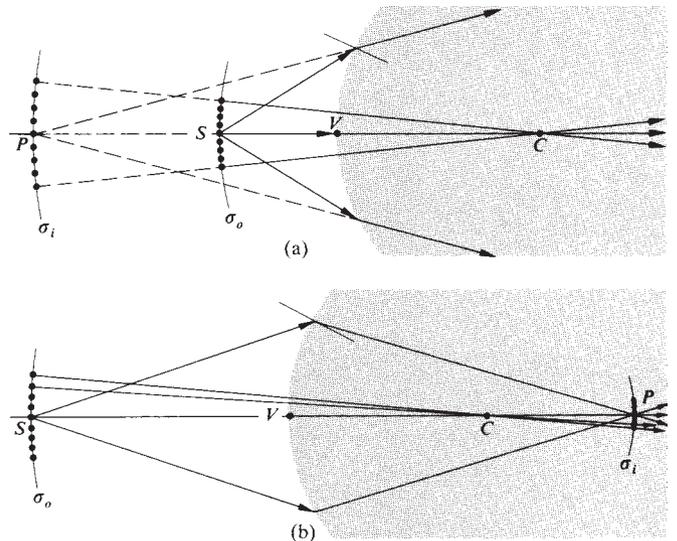


Figure 5.19 Image d'objet étendu, à distance finie.

de V). Pour un point objet plus éloigné, son image devient réelle ($s_i > 0$ et P est à la droite de V). Dans tous les cas, chaque point de l'objet σ_o a une image conjuguée σ_i qui peut être localisée également avec le rayon central non dévié. De même que précédemment, on peut considérer, dans l'approximation de Gauss, que ces surfaces sont des plans. Dans ces conditions, l'image d'un objet plan normal à l'axe optique est également un plan normal à cet axe. Remarquons par ailleurs que si σ_o est déplacé à l'infini, les rayons issus de chaque point source sont **collimatés** (parallèles) au niveau du dioptré et l'image se forme dans le **plan focal** de celui-ci (figure 5.18).

Si l'on découpe et que l'on polit la partie droite de la pièce décrite dans la figure 5.19, on peut fabriquer une lentille mince. Comme dans le cas des objets ponctuels, l'image intermédiaire (σ_i de la figure 5.19), formée par la première face de la lentille, sert d'objet pour le deuxième dioptré qui produit l'image finale. Que cette image intermédiaire soit réelle ou virtuelle, on sait alors ce qui arrive. Comme précédemment, *une lentille donne d'un objet plan normal à l'axe optique, une image plane également normale à cet axe.*

La localisation, la taille et l'orientation de cette image peuvent être déterminées simplement en utilisant le tracé des rayons. Considérons par exemple l'image correspondant à l'objet de la figure 5.20. La manipulation consiste donc à localiser les points images correspondant à chaque point de l'objet de départ. Dans les conditions de Gauss, on sait que tous les rayons partant d'un point source aboutissent à un point image unique. De ce fait, deux rayons distincts suffisent à fixer ce point. Comme on connaît la position des foyers de la lentille, trois types de rayons sont particulièrement utiles à cette tâche. Le premier (1) est le rayon non dévié passant par le centre O de la lentille. Les deux autres (rayon 2 et rayon 3) utilisent la propriété qu'un rayon passant par un foyer de la lentille en ressort parallèle à l'axe optique et vice versa. Avant toute chose, il faut donc placer les foyers de la lentille, puis tracer ces rayons particuliers pour les extrémités de l'objet. Cette méthode, inventée par l'Anglais Robert Smith dès 1738, est à appliquer chaque fois que l'on doit déterminer l'image d'un objet par une lentille.

La figure 5.21 montre bien comment *deux* quelconques rayons des trois rayons remarquables suffisent à localiser l'image d'un point de l'objet. Remarquons également que cette méthode peut encore être simplifiée en modélisant la lentille par un plan passant par son centre (figure 5.22). En fait, si l'on prolongeait un petit peu un rayon incident en avant et son rayon émergent correspondant en arrière, on se rendrait compte que ces deux rayons se rencontreraient sur ce plan.

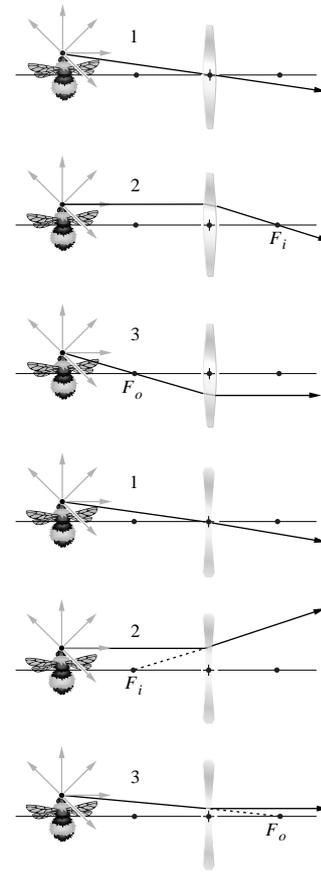


Figure 5.20 Tracé des trois rayons remarquables dans le cas d'une lentille convergente et d'une lentille divergente.

Pour les lentilles minces, la déviation totale d'un rayon (provoquée par les deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la lentille) est donc équivalente à une seule réfraction sur ce plan. Comme nous le verrons plus tard, cela revient à dire que les deux *plans principaux* d'une lentille mince coïncident.

En accord avec la convention, on compte les distances transverses au-dessus de l'axe positivement et les distances en dessous de l'axe négativement. Par exemple, dans la figure 5.22, $y_o > 0$ et $y_i < 0$. Ici, l'image est alors dite **renversée**. Si en revanche $y_i > 0$ avec $y_o > 0$, l'image est dite **redressée** ou **droite**. Remarquons également que les triangles AOF_i et $P_2P_1F_i$ sont semblables. On peut alors écrire :

$$\frac{y_o}{|y_i|} = \frac{f}{(s_i - f)} \quad (5.19)$$

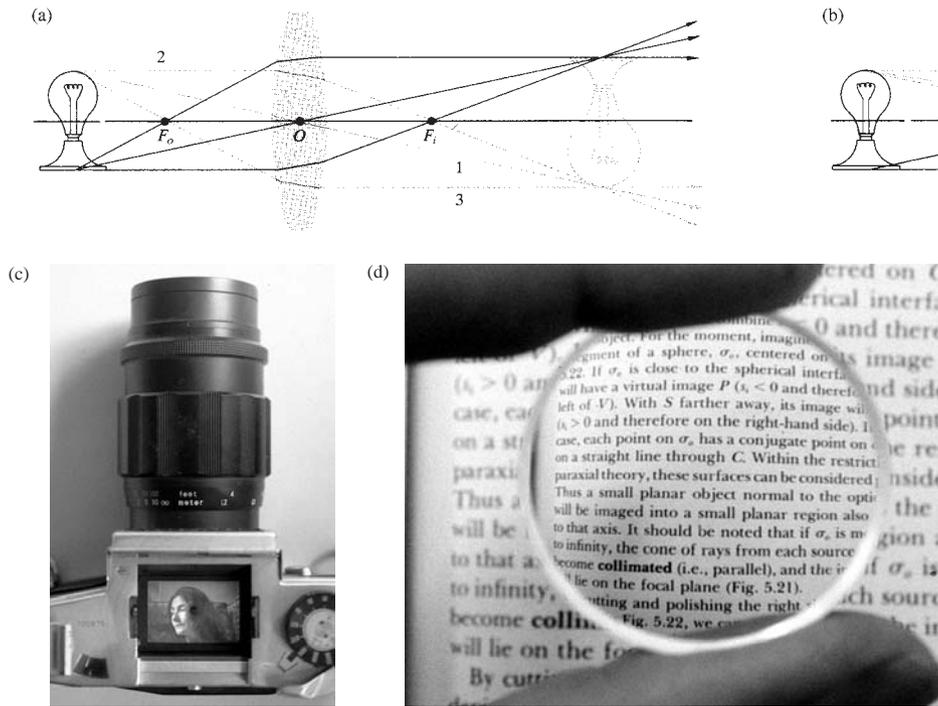


Figure 5.21 (a) Un objet réel donnant une image réelle avec une lentille convergente. (b) Un objet réel donnant une image virtuelle avec une lentille divergente. (c) Une image réelle projetée sur l'écran de visée d'un appareil photo 35 mm, à rapprocher de l'œil projetant une image sur la rétine. (d) L'image virtuelle, réduite mais droite formée par une lentille négative. (Photos E. H.)

De même, les triangles S_2S_1O et P_2P_1O sont également semblables et l'on a :

$$\frac{y_o}{|y_i|} = \frac{s_o}{s_i} \tag{5.20}$$

où toutes les quantités autres que y_i sont positives. On a donc :

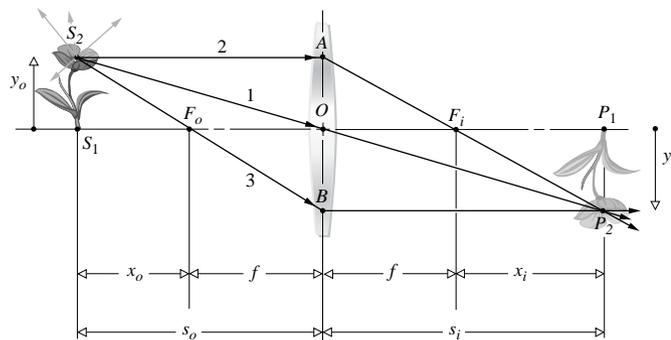


Figure 5.22 Positions relatives d'un objet et de son image formée par une lentille mince.

$$\frac{s_o}{s_i} = \frac{f}{(s_i - f)} \tag{5.21}$$

avec

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i}$$

qui est la relation de conjugaison des lentilles [équation (5.17)]. On remarque également que les triangles $S_2S_1F_o$ et BOF_o sont semblables. On a :

$$\frac{f}{(s_o - f)} = \frac{|y_i|}{y_o} \tag{5.22}$$

En utilisant les distances mesurées à partir des foyers et en combinant ces informations avec l'équation (5.19), on obtient :

$$x_o x_i = f^2 \tag{5.23}$$

Cela constitue la **relation de conjugaison de position de Newton**, mentionnée pour la première fois dans son *Opticks* dès 1704. Les signes de x_o et x_i sont déterminés par rapport aux foyers auxquels ils se réfèrent. Par convention, x_o et x_i sont

pris positifs si x_o est à la gauche de F_o , et x_i est à la droite de F_i . Il est évident d'après l'équation (5.23) que x_o et x_i ont des signes identiques, ce qui traduit que l'objet et l'image **doivent être situés des côtés opposés par rapport à leurs foyers respectifs**. Cela est une bonne chose à retenir pour tous les néophytes encore peu familiarisés avec les tracés de rayons.

On définit ici le **grandissement transversal** ou *latéral* M_T , (pour le terme anglais *transverse magnification*) comme étant le rapport entre les dimensions transverses de l'image et de l'objet :

$$M_T \equiv \frac{y_i}{y_o} \quad (5.24)$$

Ou bien, d'après l'équation (5.20) :

$$M_T = -\frac{s_i}{s_o} \quad (5.25)$$

Une valeur **positive** de M_T signifie que l'image est **droite**, alors qu'une valeur **négative** indique que l'image est **renversée** (tableau 5.2). Souvenons-nous que s_i et s_o sont des grandeurs positives pour des objets et des images réels. De ce fait, **toute image réelle formée par une seule lentille mince est renversée**. D'autre part, on a, d'après les équations (5.19) et (5.22) :

$$M_T = -\frac{x_i}{f} = -\frac{f}{x_o} \quad (5.26)$$

Cette relation constitue la **relation de conjugaison de grandissement de Newton**. Signalons que le terme grandissement peut être trompeur dans la mesure où il peut correspondre à une réduction si la taille de l'image est plus petite que celle de l'objet ($M_T < 1$). On peut également avoir le cas où $M_T = -1$: l'image et l'objet font la même taille et l'image est renversée. Cette situation particulière n'arrive que lorsque les distances objet et image sont égales et positives et l'on a d'après l'équation (5.17) : $s_o = s_i = 2f$. Cette configuration constitue le cas où l'image et l'objet sont le plus proches possible l'un de l'autre (i.e. une distance égale à $4f$; voir problème 5.15). Le tableau 5.3 résume quelques configurations possibles lorsqu'un objet réel est imagé par une lentille mince.

À ce niveau, nous pouvons donc comprendre tous les comportements d'une lentille mince, convergente ou divergente. Considérons pour cela le cas d'une lentille convergente interceptant le cône de lumière émis par un point source éloigné (figure 5.23). Si cette source est à l'infini (i.e. suffisamment

Tableau 5.2 Convention de signe pour les paramètres caractéristiques des dioptries sphériques et des lentilles minces

Quantité	Signe	
	+	-
s_o	Objet réel	Objet virtuel
s_i	Image réelle	Image virtuelle
f	Lentille convergente	Lentille divergente
y_o	Objet redressé	Objet renversé
y_i	Image redressée	Image renversée
M_T	Image redressée	Image renversée

éloignée pour qu'on considère qu'elle soit à l'infini), les rayons qui rencontrent la lentille sont parallèles (figure 5.23a) et se rejoignent au foyer F_i . Si la source S_1 est plus proche, tout en étant relativement éloignée (figure 5.23b), le cône de rayons qui atteint la lentille est étroit et les rayons arrivent avec de petits angles. Comme ces rayons sont peu divergents, la lentille est assez puissante pour les faire converger en un point P_1 . Plus on rapproche la source à gauche de la lentille, plus le point image s'éloigne de celle-ci sur la droite. Finalement, lorsque le point

Tableau 5.3 Images d'objets réels formées par des lentilles minces

Convexe				
Objet		Image		
Localisation	Type	Localisation	Orientation	Taille relative
$\infty > s_o > 2f$	Réel	$f < s_i < 2f$	Renversée	Réduite
$s_o = 2f$	Réel	$s_i = 2f$	Renversée	Même taille
$f < s_o < 2f$	Réel	$\infty > s_i > 2f$	Renversée	Agrandie
$s_o = f$		$\pm\infty$		
$s_o < f$	Virtuel	$ s_i > s_o$	Redressée	Agrandie
Concave				
Objet		Image		
Localisation	Type	Localisation	Orientation	Taille relative
Quelconque	Virtuel	$ s_i < f $, $s_o > s_i $	Redressée	Réduite

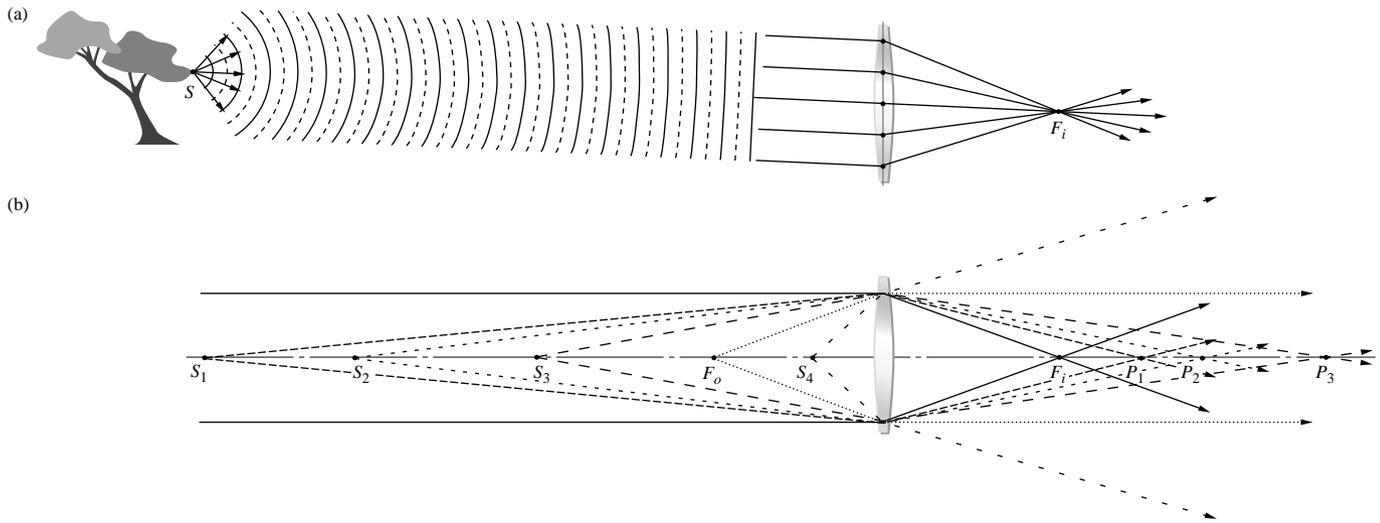


Figure 5.23 (a) Les ondes sphériques émises par une source lumineuse deviennent planes avec la distance. Les rayons des cercles initiaux deviennent de plus en plus grands pour arriver à la situation des ondes planes. À grande distance, les rayons deviennent quasiment parallèles. Une lentille qui les intercepte les fait donc converger en son foyer image. (b) Plus un point source se rapproche d'une lentille, plus les rayons qu'elle intercepte sont divergents et le point image s'éloigne de la lentille. Lorsqu'ils dépassent le foyer, les rayons sortant de la lentille divergent.

source atteint le foyer F_o , les rayons divergent trop pour que la lentille puisse les faire converger comme auparavant et ces rayons ressortent parallèles à l'axe optique. Si l'on continue à rapprocher la source de la lentille, les rayons sont tellement divergents à l'entrée de la lentille qu'ils continuent de diverger à sa sortie. Le point image devient alors virtuel : *on ne peut pas obtenir d'images réelles si l'objet n'est pas à une distance de la lentille strictement supérieure à f* .

La figure 5.24 illustre ces différents résultats. **Plus l'objet s'approche de la lentille, plus l'image s'en éloigne.** Lorsque l'objet est très éloigné, l'image (réelle, inversée et réduite : $M_T < 1$) est située à proximité immédiate du foyer, sur la droite. À mesure que l'on rapproche l'objet, l'image (toujours réelle, inversée et réduite : $M_T < 1$) s'éloigne progressivement du plan focal de la lentille et augmente en taille. Ce cas où l'objet est situé entre l'infini et $2f$ correspond en fait à la configuration qu'utilisent l'œil ou les objectifs d'appareils photographiques qui nécessitent des images réelles réduites. Signalons d'ailleurs que l'image formée par l'œil humain est renversée sur la rétine. C'est le cerveau qui retourne l'image et c'est grâce à lui que nous voyons les choses dans la bonne position.

Lorsque l'objet arrive à deux fois la distance focale, l'image (réelle et inversée) a la même taille que l'objet de

départ : $M_T = -1$. C'est la configuration usuelle qu'utilisent les photocopieuses

Si l'on rapproche encore l'objet de la lentille (entre $2f$ et f), l'image (réelle, inversée et agrandie $M_T > 1$) se déplace rapidement vers la droite tout en augmentant de taille. C'est, par exemple, la configuration des projecteurs (films ou diapositives) qui permet donc d'avoir une image réelle et agrandie. Signalons que comme l'image est de toute façon inversée, la manipulation consiste à mettre le film ou la diapositive à l'envers pour récupérer une image convenable.

Lorsque l'objet arrive au niveau du foyer de la lentille, l'image est envoyée à l'infini : les rayons émergents sont parallèles.

Si l'on rapproche encore l'objet, l'image (virtuelle, droite et agrandie : $M_T > 1$) réapparaît. C'est la configuration qu'utilise une loupe.

Il est utile de se rappeler que le rayon entrant dans la lentille parallèlement à l'axe optique fixe la hauteur de l'image réelle (figure 5.25). Comme ce rayon diverge par rapport à l'axe, la taille de l'image augmente rapidement lorsque l'objet se rapproche de F . Notons également que la transformation donnant une image à partir d'un objet n'est pas linéaire. En effet, tout l'espace objet compris entre l'infini et $2f$, à la gauche de la lentille, est compressé en un espace image compris entre f et $2f$ à

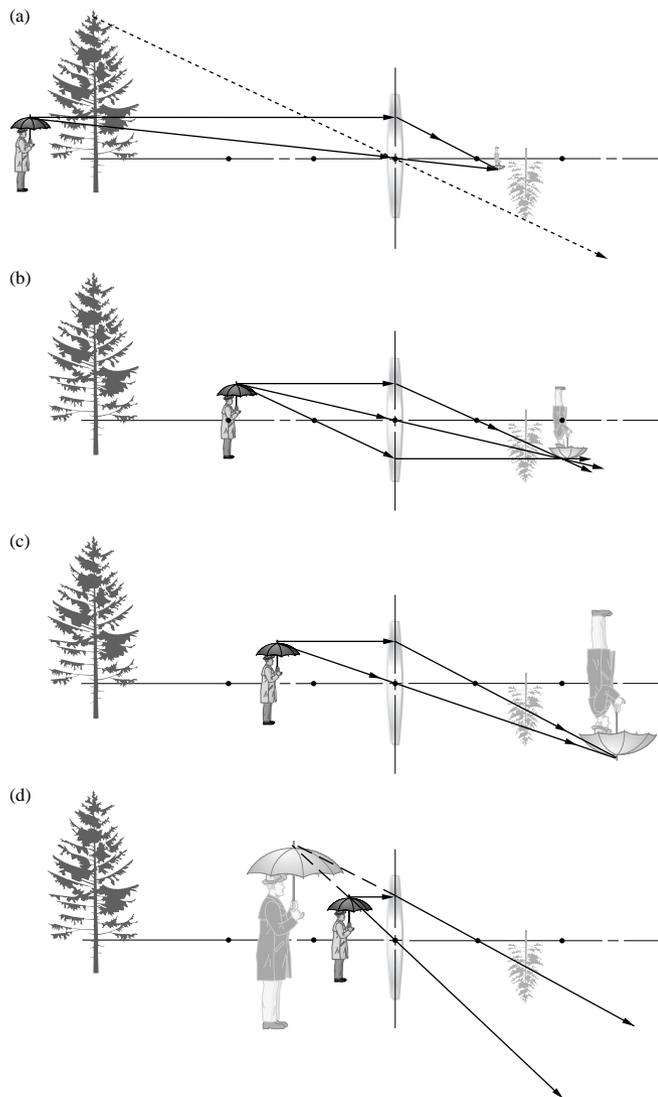


Figure 5.24 Principe de formation d'une image par une lentille mince convergente.

la droite de la lentille. D'autre part, la figure 5.25 montre que l'espace image est également distordu, dans le sens où faire avancer un objet uniformément vers la lentille a pour conséquence de modifier l'image transversalement et le long de l'axe. Les intervalles entre les images axiales augmentent bien plus rapidement que les changements en hauteur de l'image. Cet « aplatissement » relatif des distances dans l'espace image est facilement observable lorsqu'on utilise des systèmes à

longue focale. Au cinéma ou à la télévision, vous avez sans doute déjà vu cet effet dans des scènes filmées au téléobjectif. Lorsqu'un personnage éloigné court vers la caméra pendant un long moment, il ne semble pas avancer beaucoup car sa taille augmente peu, malgré tous ses efforts !

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des objets bidimensionnels. On se doute que l'image d'un objet tridimensionnel occupe une région tridimensionnelle de l'espace image. Or, de même que les grandeurs transversales, un système optique modifie également les dimensions longitudinales. On définit le **grandissement longitudinal** M_L , relatif à la direction axiale (celle de l'axe optique) par :

$$M_L \equiv \frac{dx_i}{dx_o} \quad (5.27)$$

Il représente donc le rapport entre deux longueurs axiales infinitésimales correspondantes dans l'espace image et dans l'espace objet. En différentiant l'équation (5.23), on obtient :

$$M_L = -\frac{f^2}{x_o^2} = -M_T^2 \quad (5.28)$$

Cette relation est valable pour une lentille mince dans un milieu unique (figure 5.26). On a évidemment $M_L < 0$, ce qui implique qu'un dx_o positif correspond à un dx_i négatif et vice versa. En d'autres termes, un doigt qui est pointé sur une lentille a une image qui pointe dans la direction opposée à cette lentille (figure 5.27).

Une petite expérience illustre bien le phénomène de formation des images. Projetez l'image d'une scène (arbres...) prise à travers une fenêtre sur une feuille de papier en utilisant une lentille convergente. Éloignez ensuite la feuille de papier de la lentille. On constate que la scène extérieure s'efface et que l'image de la fenêtre apparaît.

Associations de lentilles minces

Le but de cette partie n'est pas d'entrer dans le détail de la conception des systèmes optiques modernes très complexes mais d'aider à en comprendre les principes élémentaires afin de pouvoir utiliser et adapter au mieux les instruments du commerce.

Lorsque l'on doit concevoir un nouveau système optique, on commence en général par dessiner un croquis sommaire en s'appuyant sur les calculs approchés les plus simples. Les raffinements viennent ensuite en travaillant généralement sur ordinateur. Cependant, le concept simple de la lentille mince

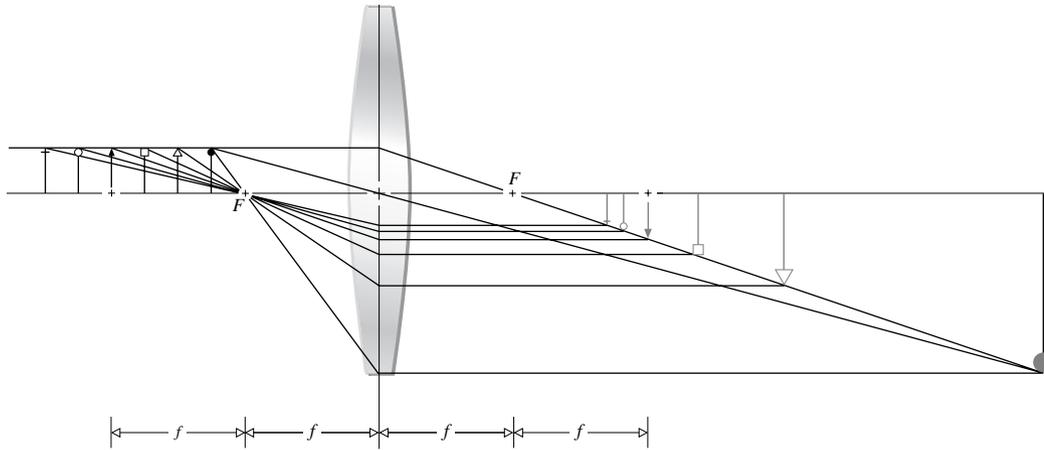


Figure 5.25 Le rayon 2 passe par le foyer objet de la lentille. Il en ressort parallèle à l'axe optique et fixe de ce fait la hauteur de l'image.

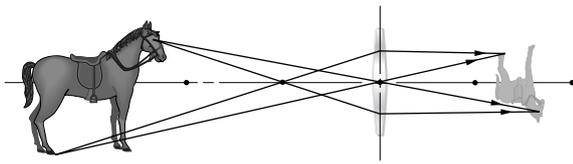


Figure 5.26 Le grandissement transversal est différent du grandissement longitudinal.

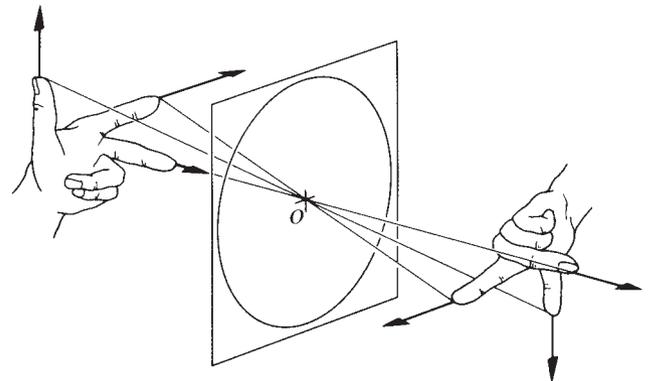


Figure 5.27 Orientation de l'image pour une lentille mince.

fournit une base des plus utiles pour les calculs préliminaires dans un grand nombre de cas.

Rappelons tout d'abord que la lentille mince reste un modèle théorique. En effet, aucune lentille n'a une épaisseur nulle. Cependant, la plupart des lentilles simples dont l'épaisseur est petite devant le diamètre peuvent être appréhendées comme telles. Presque toutes les lunettes (dont l'usage remonte au XIII^e siècle) sont de type « lentille mince ». Les lentilles de petits diamètres rentrent dans cette catégorie, pourvu que leur rayon de courbure soit suffisamment grand. Les lentilles de cette sorte ont généralement une grande distance focale en comparaison de laquelle leur épaisseur est très petite. C'est par exemple le cas des objectifs des premières lunettes d'observation du XVII^e siècle. Finalement, de nombreuses lentilles utilisées couramment peuvent être considérées comme des lentilles minces.

Nous allons maintenant exprimer les relations applicables aux associations de lentilles minces, suivant une approche simplifiée. On pourra trouver des développements plus poussés dans le chapitre suivant.

Considérons ici deux lentilles minces convergentes L_1 et L_2 séparées par une distance d , inférieure à l'une ou l'autre des deux distances focales (figure 5.28). L'image finale peut être déduite graphiquement avec la méthode suivante. Sans tenir compte de L_2 pour l'instant, construisons l'image formée exclusivement par L_1 en utilisant les rayons 2 et 3. Comme on l'a déjà vu, ils passent respectivement par les foyers objet F_{o1} et image F_{i1} de la lentille. Ces deux rayons déterminent l'extrémité de l'image intermédiaire P'_1 . De plus, comme l'objet de départ appartient à un plan parallèle à la lentille, la perpendiculaire menée depuis le bord de l'objet à l'axe optique

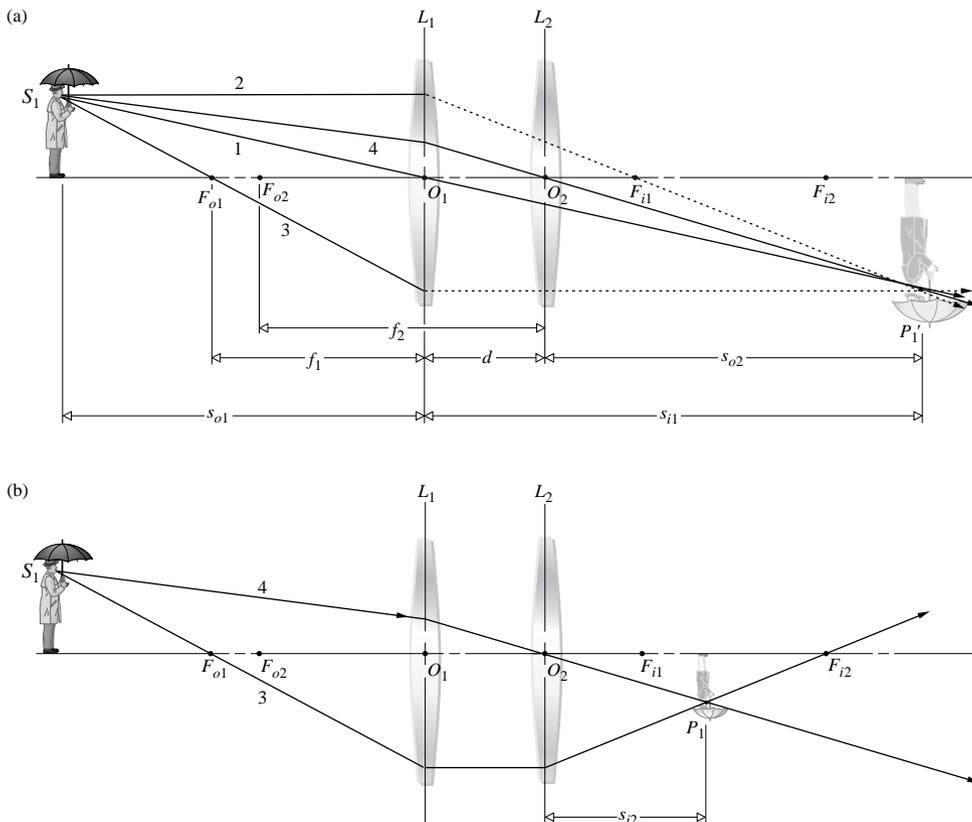


Figure 5.28 Deux lentilles minces séparées par une distance inférieure à l'une ou l'autre des deux distances focales.

détermine la localisation de la base de l'image. On trace ensuite le rayon 4 reliant le centre de la deuxième lentille O_2 à P'_1 . On prolonge ce rayon « en arrière » jusqu'à l'objet de départ. De ce fait, la prise en compte de L_2 n'a pas d'effet sur ce rayon. D'autre part, le rayon 3 arrive perpendiculaire à L_2 et passe donc par son foyer image F_{i2} . L'intersection des rayons 3 et 4 fixe en définitive la position de l'image finale. Dans le cas de la figure, celle-ci est réelle, réduite et inversée. Lorsque les deux lentilles sont proches l'une de l'autre, on voit finalement que l'insertion de L_2 revient à ajouter de la convergence ($f_2 > 0$) ou de la divergence ($f_2 < 0$) au faisceau de rayons émergent de L_1 (figure 5.29).

Un autre cas d'association de lentilles est présenté à la figure 5.30. Les deux lentilles sont cette fois espacées d'une distance supérieure à leurs distances focales. La méthode graphique est identique à celle développée dans le premier cas. On trace d'abord les rayons 2 et 3 passant respectivement par F_{i1} et F_{o1} . Ceux-ci permettent de fixer la position de l'image intermédiaire donnée par la seule lentille L_1 . On trace ensuite

le rayon 4 entre O_2 et P'_1 et l'on le prolonge à l'arrière jusqu'à S_1 . L'intersection du rayon 4, non dévié par L_2 , et du rayon 3 passant par son foyer image permet de déterminer la position de l'image finale. Elle est dans cet exemple réelle, agrandie et droite. Notons d'ailleurs que plus la focale de L_2 est grande, avec tous les autres paramètres constants, plus l'image est agrandie par rapport à l'objet de départ.

Analytiquement, on a pour L_1 :

$$\frac{1}{s_{i1}} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{s_{o1}} \quad (5.29)$$

ou bien

$$s_{i1} = \frac{s_{o1}f_1}{s_{o1} - f_1} \quad (5.30)$$

Cette grandeur est positive et l'image intermédiaire est à la droite de L_1 , lorsque $s_{o1} > f_1$ et $f_1 > 0$. D'autre part, on a pour L_2 :

$$s_{o2} = d - s_{i1} \quad (5.31)$$

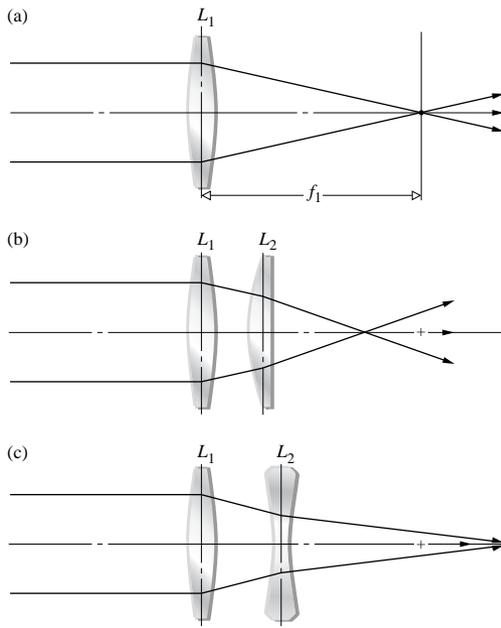


Figure 5.29 (a) Effet de l'insertion d'une deuxième lentille L_2 entre le foyer image et une lentille convergente L_1 . (b) Lorsque L_2 est positive, son insertion augmente la convergence du faisceau. (c) Dans le cas où L_2 est négative, c'est de la divergence qui est ajoutée.

donc si $d < s_{i1}$, l'objet est virtuel ($s_{o2} < 0$) et les rayons qui rencontrent L_2 sont convergents (comme dans la figure 5.28). En revanche, si $d > s_{i1}$, l'objet est réel pour L_2 et les rayons qui rencontrent L_2 sont divergents (cas de la figure 5.30). De plus, on a :

$$\frac{1}{s_{i2}} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{s_{o2}}$$

et donc

$$s_{i2} = \frac{s_{o2}f_2}{s_{o2} - f_2}$$

Avec l'équation (5.31), on obtient :

$$s_{i2} = \frac{(d - s_{i1})f_2}{(d - s_{i1} - f_2)} \quad (5.32)$$

De la même manière, on peut calculer la réponse d'un système de lentilles minces, quel que soit leur nombre. Il est néanmoins pratique d'avoir une seule expression, en tout cas pour les systèmes à deux lentilles. En substituant s_{i1} dans l'équation (5.29), on obtient aussi :

$$s_{i2} = \frac{f_2d - f_2s_{o1}f_1/(s_{o1} - f_1)}{d - f_2 - s_{o1}f_1/(s_{o1} - f_1)} \quad (5.33)$$

Dans cette expression, s_{o1} et s_{i2} sont respectivement les distances objet et image de la lentille composée. Par exemple, calculons la distance image associée à un objet placé à 50 cm de la première lentille d'un système de deux lentilles convergentes. Celles-ci ont des distances focales respectives de 30 cm et 50 cm et sont séparées par une longueur de 20 cm. En substituant directement dans l'équation (5.33), on obtient :

$$s_{i2} = \frac{50(20) - 50(50)(30)/(50 - 30)}{20 - 50 - 50(30)/(50 - 30)} = 26,2 \text{ cm}$$

L'image est donc réelle. Par ailleurs, on a vu que L_2 modifie la taille de l'image intermédiaire formée par L_1 . On montre ici que le grandissement transversal total de la lentille composée est équivalent au produit des grandissements transversaux de chaque lentille simple :

$$M_T = M_{T1}M_{T2}$$

ce qui donne finalement (problème 5.35) :

$$M_T = \frac{f_1s_{i2}}{d(s_{o1} - f_1) - s_{o1}f_1} \quad (5.34)$$

Dans l'exemple précédent :

$$M_T = \frac{30(26,2)}{20(50 - 30) - 50(30)} = -0,72$$

Et comme dans le cas de la figure 5.28, l'image est réduite et renversée.

De même que pour les lentilles simples, on peut définir des termes caractéristiques pour les systèmes de lentilles. La distance entre le sommet de la première surface d'un système optique et le foyer objet est le **tirage optique objet** du système, noté **f.f.l.** (pour le terme anglais *front focal length*). La distance entre le sommet de la dernière lentille et le foyer image du système est le **tirage optique image**, noté **b.f.l.** (pour *back focal length*). Par conséquent, si $s_{i2} \rightarrow \infty$, s_{o2} se rapproche de f_2 , avec l'équation (5.31), on constate donc que $s_{i1} \rightarrow d - f_2$. Ainsi, avec l'équation (5.29) :

$$\frac{1}{s_{o1}} \Big|_{s_{i2}=\infty} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{(d - f_2)} = \frac{d - (f_1 + f_2)}{f_1(d - f_2)}$$

Cette valeur particulière de s_{o1} est le tirage optique objet f.f.l. :

$$\text{f.f.l.} = \frac{f_1(d - f_2)}{d - (f_1 + f_2)} \quad (5.35)$$

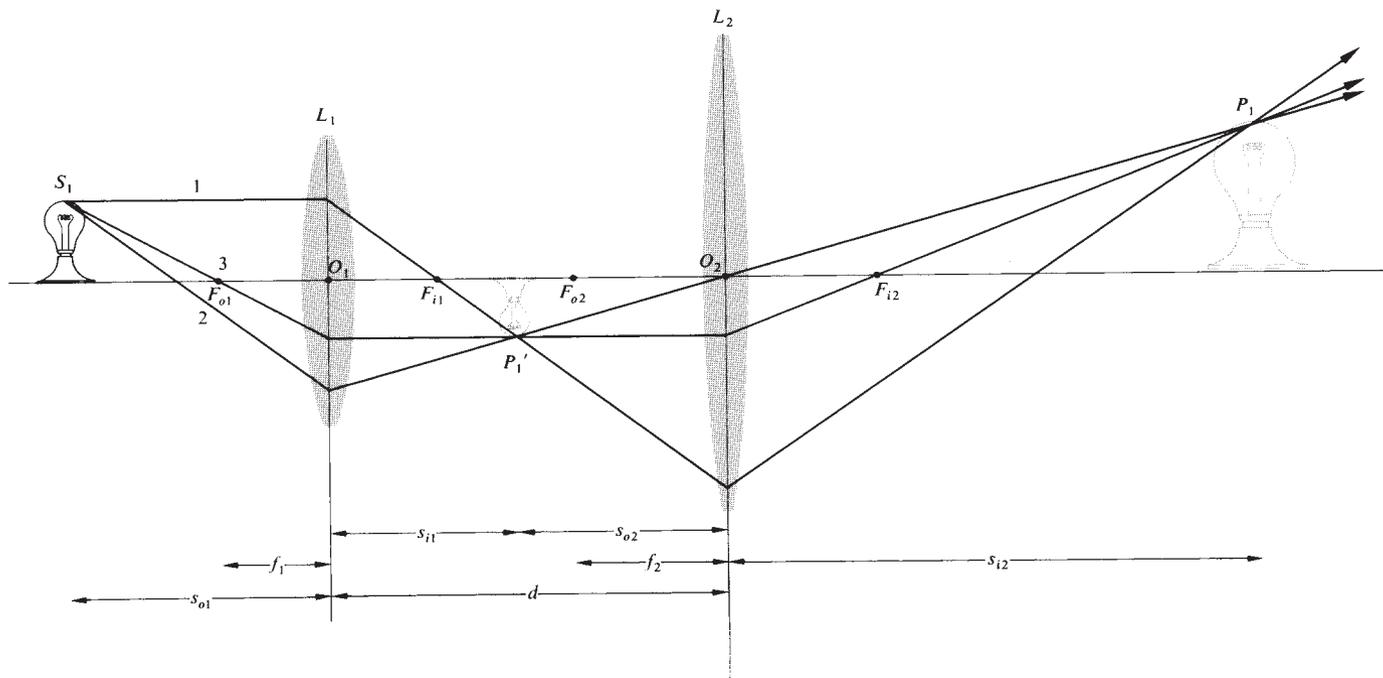


Figure 5.30 Deux lentilles séparées par une distance supérieure à la somme de leurs distances focales. Comme l'image intermédiaire est réelle, elle joue le rôle d'objet réel pour L_2 . Ainsi, le rayon passant par P_1' et par F_{o2} arrive en P_1 .

Identiquement, si l'on fait : $s_{o1} \rightarrow \infty$ dans l'équation (5.33), $(s_{o1} - f_1) \rightarrow s_{o1}$. Comme s_{i2} correspond ici au tirage optique image b.f.l., on a :

$$\text{b.f.l.} = \frac{f_2(d - f_1)}{d - (f_1 + f_2)} \quad (5.36)$$

Prenons un exemple pour voir à quoi correspondent ces valeurs numériquement. Trouvons la f.f.l. et la b.f.l. pour le système à deux lentilles minces de la figure 5.31a où $f_1 = -30$ cm et $f_2 = +20$ cm. On a alors :

$$\text{b.f.l.} = \frac{20[10 - (-30)]}{10 - (-30 + 20)} = 40 \text{ cm}$$

Et similairement f.f.l. = 15 cm. Remarquons encore que si $d = f_1 + f_2$, une onde plane entrant dans la lentille composée, par l'une ou l'autre des lentilles, en ressort également plane (problème 5.39). C'est ce qui se passe dans les systèmes télescopiques.

Notons que si $d \rightarrow 0$, les lentilles sont mises en contact. C'est le cas de nombreuses lentilles composées (dites « collées ») comme les doublets achromatiques. Dans ce cas :

$$\text{b.f.l.} = \text{f.f.l.} = \frac{f_2 f_1}{f_2 + f_1} \quad (5.37)$$

La lentille simple équivalente a alors une *distance focale effective*, f , telle que :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (5.38)$$

Cette formule est généralisable pour N lentilles minces en contact :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \dots + \frac{1}{f_N} \quad (5.39)$$

La plupart des résultats que nous venons d'établir sur les associations de lentilles minces sont vérifiables empiriquement, pour peu que l'on dispose de quelques lentilles simples.

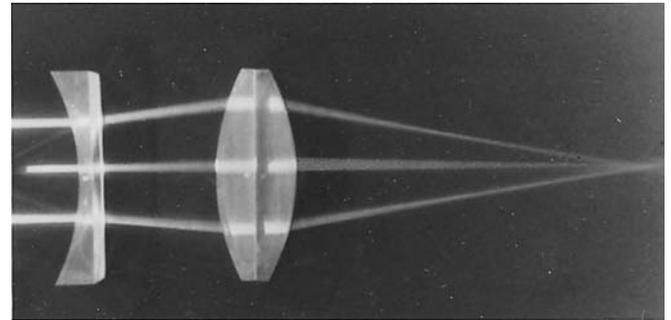
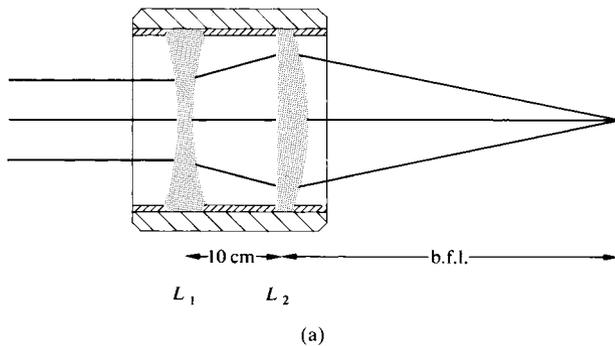


Figure 5.31 (a) Une association de deux lentilles minces, une convergente et une divergente. (b) Photographie. (Photo E.H.)

Le montage de la figure 5.28 est facile à reproduire et le protocole de l'expérience est évident. En revanche, le montage de la figure 5.30 est plus délicat. C'est pourquoi, nous en présentons ici les différentes étapes expérimentales. On choisit tout d'abord deux lentilles convergentes dont on détermine les distances focales, par exemple en faisant l'image d'une source éloignée. Ensuite, on positionne l'une des lentilles (L_2) entre une source éloignée et un écran d'observation (feuille de papier blanc) tel que celui-ci soit à une distance légèrement supérieure à la distance focale de la lentille. La manœuvre suivante est la plus délicate si l'on ne dispose pas de banc optique. On déplace l'autre lentille (L_1) vers la source en essayant de maintenir un centrage correct. Si la manipulation est correcte, on doit apercevoir une image floue de sa main tenant L_1 . On positionne ensuite les lentilles de sorte que la région correspondant à L_1 sur l'écran soit la plus lumineuse possible. On observe alors clairement sur l'écran l'image droite de l'objet (source) placé devant L_1 .

Lentilles minces et électrodynamique quantique (QED)

Au début du chapitre, nous avons trouvé les équations élémentaires des dioptries sphériques en partant du principe de Fermat. Ce choix est intéressant car il permet de raisonner en termes de chemins optiques, ce qui conduit naturellement à la théorie de l'électrodynamique quantique (QED) et au traitement que Richard Feynman en a faite. La complexité de l'électrodynamique quantique ne doit pas nous affoler. Gardons en tête que beaucoup de physiciens considèrent leurs

théories comme étant juste une machinerie conceptuelle permettant de prévoir les résultats d'expériences. Qu'une théorie soit très simple ou très sophistiquée, son but intime est toujours de « coller » à l'observation la plus élémentaire. Cela étant, examinons comment le principe de fonctionnement d'une lentille peut être rapproché de la QED. Pour cela, il s'agit d'abord de se remettre en mémoire le cas de la figure 4.68 et du miroir.

La lumière peut aller du point S au miroir pour arriver au point P par un très grand nombre de chemins possibles. Classiquement, on peut dire que les chemins optiques (OPL) sont tous distincts et correspondent à des temps de parcours différents. Dans le cadre de la QED, chaque chemin possède une probabilité propre (dont l'angle de phase est proportionnel au temps de parcours). On constate alors que les contributions les plus notables à la probabilité pour que de la lumière arrive en P , sont celles des chemins immédiatement adjacents à l'OPL minimal.

Pour une lentille, la situation est très différente. On peut diviser le composant suivant un nombre discret de segments correspondant chacun à une trajectoire possible de la lumière, donc à une certaine probabilité de passage (figure 5.32). Bien sûr, il y a des milliards de trajectoires possibles mais la division en 17 segments de la figure 5.32 est un exemple qui conserve la même logique. Chaque chemin éventuel est associé à un *phaseur d'amplitude de probabilité*. Or, comme la lentille a été conçue pour rendre égaux tous les OPL, un graphe des OPL (ou, ce qui revient au même, des temps de transit) en fonction de la position de l'impact sur la lentille est une droite. Par conséquent, un photon met le même temps pour traverser la lentille quel que soit le chemin suivi. Tous les

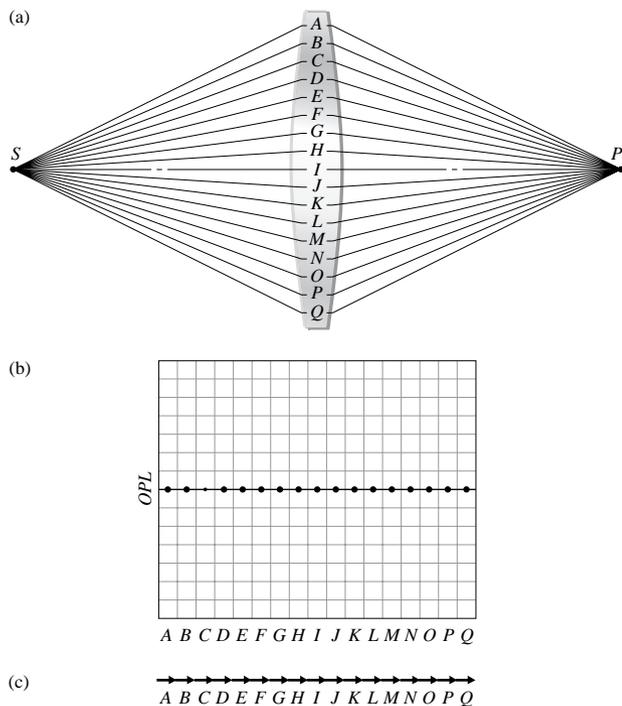


Figure 5.32 Analyse de Feynman de la lentille mince via la théorie de l'Électrodynamique quantique : (a) Trajectoires possibles entre S et P . (b) Chemin optique (OPL) pour chaque trajectoire. (c) les phaseurs des amplitudes de probabilité correspondants ; s'ajoutent tous en phase.

phaseurs (supposés de la même longueur) ont le même angle de phase. Ainsi, ils contribuent avec le même poids à la probabilité pour qu'un photon arrive en P . De plus, si l'on place ces phaseurs bout à bout, l'amplitude résultante est importante, ce qui souligne la forte probabilité pour que de la lumière atteigne le point P via la lentille (carré de l'amplitude totale). Dans la terminologie de la *QED*, **une lentille focalise la lumière car toutes les amplitudes de probabilité de ses fractions ont le même angle de phase.**

Pour les autres points, coplanaires à P et proches de l'axe optique, les angles de phase diffèrent proportionnellement. Les phaseurs placés bout à bout ne forment plus une ligne mais une spirale. Cependant, pour les points légèrement désaxés, l'addition des vecteurs tournants ne donne pas un résultat absolument nul. De ce fait, la probabilité qui en résulte diminue très rapidement mais sans discontinuité. La distribution des probabilités $I(r)$ n'est donc pas un pic infiniment haut et étroit. Elle s'incurve à la base pour donner un motif circulaire et symétrique caractéristique : la *distribution d'Airy* (voir

p. 486). Physiquement, cela signifie que la lumière ne peut être focalisée en un point infiniment petit. Elle s'étale suivant la courbe de distribution des probabilités pour former ce que l'on appelle la *tache d'Airy*.

5.3 Diaphragmes

5.3.1 Diaphragmes de champ et d'ouverture

La structure finie des lentilles fait qu'elles ne peuvent bien sûr collecter qu'une fraction de l'énergie émise par un point source. La limitation physique est déterminée par la périphérie de la lentille qui définit les rayons qui peuvent entrer dans le système et former une image. Dans cette logique, la surface de la lentille exposée à la lumière fonctionne comme une ouverture à travers laquelle l'énergie peut passer. Tout objet obscurant, comme le dispositif de maintien de la pièce optique (monture) ou un diaphragme séparé, détermine donc la quantité de lumière pouvant participer à l'image finale. Pour un système optique, l'élément de ce type est appelé le **diaphragme d'ouverture**, noté ici **A.S.** (pour le terme anglais *Aperture Stop*). C'est par exemple le cas du diaphragme à iris que l'on trouve dans les objectifs d'appareils photo reflex. Comme le montre l'exemple de la figure 5.33, des rayons possédant un fort angle d'incidence peuvent entrer dans une lentille. Bien qu'il soit toujours intéressant d'avoir le maximum de luminosité sur l'image, donc de lumière pénétrant dans le

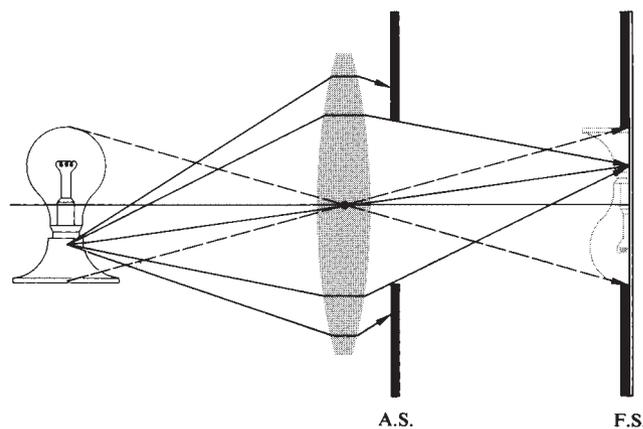


Figure 5.33 Diaphragme d'ouverture (A.S.) et diaphragme de champ (F.S.).

système, de tels rayons peuvent néanmoins nuire à la qualité de l'image. En effet, n'oublions pas que les qualités optimales d'un système s'obtiennent dans les conditions de l'optique paraxiale (optique de Gauss), donc pour des rayons possédant de faibles angles d'incidence. C'est pour cela qu'il est parfois intéressant de disposer d'un élément à part, délimitant les rayons arrivant sur une lentille. Signalons cependant qu'un système optique, simple ou composé, a toujours un diaphragme d'ouverture, que ce soit une monture de lentille ou un diaphragme indépendant. Insistons aussi sur le fait que pour un système composé de plusieurs lentilles, il y a plusieurs diaphragmes (par exemple les montures des lentilles) mais il n'y a qu'un seul diaphragme d'ouverture pour tout le système. De la même manière, l'élément qui limite la taille de l'image dans le plan d'observation est appelé le **diaphragme de champ**, noté ici **F.S.** (pour le terme anglais *Field Stop*). Celui-ci détermine le champ que peut voir l'instrument. Dans un appareil photo argentique, cette limitation du plan image est assurée naturellement par les bords du film. Si le diaphragme d'ouverture contrôle le nombre de rayons qui atteignent le point image d'un point objet qui est vu par le système, c'est le diaphragme de champ qui sélectionne les points qui sont vus ou non. Tout objet situé en dehors du champ de l'appareil (i.e. la zone délimitée par le diaphragme de champ) ne peut donc être imagé par le système. Finalement, on peut dire que le diaphragme d'ouverture limite l'angle d'ouverture du faisceau provenant de l'objet et contrôle donc la luminosité de l'image. Plus il est ouvert, plus l'énergie lumineuse pénétrant dans le système est grande. En revanche, le diaphragme de champ contrôle l'angle de champ du système, donc l'extension de la zone pouvant être imagée. Augmenter le champ permet au système d'observer des zones plus importantes en périphérie. C'est d'ailleurs le principe des objectifs panoramiques ou « grand angle ».

5.3.2 Pupille d'entrée et pupille de sortie

La notion de pupille représente un autre concept important pour déterminer si un rayon peut traverser tout le système optique. La pupille est simplement l'image du diaphragme d'ouverture. Il faut en revanche préciser ici dans quel espace on se place pour cette définition. La **pupille d'entrée** d'un système optique est **l'image du diaphragme d'ouverture vue depuis le point sur l'axe de l'objet au travers des éléments optiques qui précèdent le diaphragme** (s'il y en a). S'il n'y a pas de lentilles entre l'objet et le diaphragme d'ouverture, c'est ce dernier qui constitue la pupille d'entrée du système. Pour

illustrer ce point, examinons la figure 5.34 représentant une lentille dont le diaphragme d'ouverture est à la sortie. Cette lentille fait du diaphragme d'ouverture une image L virtuelle (tableau 5.3) et agrandie. Celle-ci peut être localisée en traçant quelques rayons partant des bords du diaphragme d'ouverture, de la manière habituelle. De la même manière, on définit la **pupille de sortie** d'un système comme étant **l'image du diaphragme d'ouverture vue depuis le point sur l'axe de l'image au travers des éléments optiques situés à la suite du diaphragme** (s'il y en a). Sur la figure 5.34, il n'y a pas de lentilles à la suite du diaphragme d'ouverture et celui-ci est donc la pupille de sortie. La notion de pupille est intéressante car elle détermine pratiquement le cône de lumière (faisceau) qui entre dans le système (déterminé par le point source et les bords de la pupille d'entrée) et celui qui sort du système (déterminé par le point image et les bords de la pupille de sortie). Tout rayon partant du point source et extérieur à ces deux cônes ne peut atteindre son point image conjugué.

Pour utiliser une lunette d'observation en guise d'objectif photographique, on doit lui adjoindre un diaphragme d'ouverture externe, afin de contrôler l'exposition. C'est la configuration que présente par exemple la figure 5.35 pour laquelle la disposition des pupilles est évidente. Ces deux figures font apparaître un rayon dénommé **rayon principal**. Le rayon principal désigne *un rayon issu d'un point objet hors axe qui passe par le centre du diaphragme d'ouverture*. Il pénètre alors dans le système optique en passant par le centre E_{np} de la pupille d'entrée et sort du système par le centre E_{xp} de la pupille de

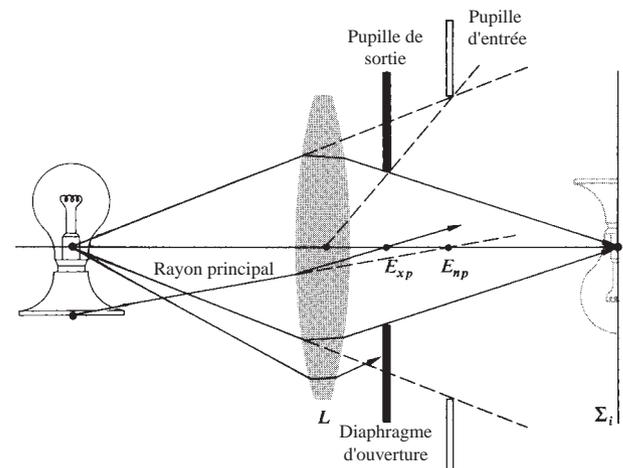


Figure 5.34 Pupille d'entrée et pupille de sortie.

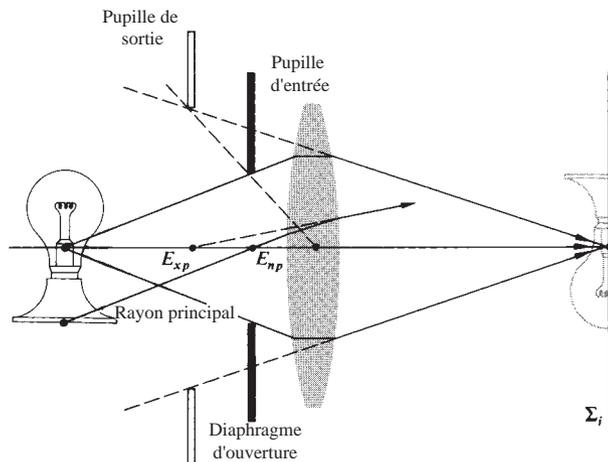


Figure 5.35 Exemple où le diaphragme d'ouverture est situé devant l'optique.

sortie. Le rayon principal constitue ainsi le rayon central du cône des rayons utiles issus de ce point. La notion de rayon principal est importante lorsque l'on veut corriger les aberrations d'un système optique.

La figure 5.36 décrit un montage plus évolué. Les deux rayons qui y apparaissent sont ceux que l'on trace généralement dans un système optique. L'un est le rayon principal en provenance d'un point situé en bord de champ. L'autre est dénommé **rayon marginal**. *Le rayon marginal est celui qui, partant du centre de l'objet, sur l'axe optique, passe par le bord du diaphragme d'ouverture.*

Dans le cas où l'on ne sait pas exactement quel élément est le diaphragme d'ouverture, on doit faire l'image de chaque composant possible par l'ensemble des optiques se trouvant à sa gauche. *La pupille d'entrée est l'image qui, vue depuis le point axial de l'objet, sous-tend le plus petit angle.* L'élément dont l'image est la pupille d'entrée est alors le diaphragme d'ouverture du système pour ce point objet. Pour plus de détails sur ce raisonnement, on peut voir par exemple le problème 5.44.

Une dernière notion à aborder est ce qu'on appelle le **vignettage**. On voit bien, sur la figure 5.37, que le cône de rayons qui peut atteindre le plan image se rétrécit lorsque le point objet s'éloigne de l'axe. Le diaphragme d'ouverture effectif (qui était déterminé par les bords de L_1 pour le point sur l'axe) vu depuis un point hors axe est en effet une surface de plus en plus réduite, à mesure que le point s'éloigne de l'axe. Le résultat est un assombrissement progressif des bords de l'image ou vignettage.

Connaître la position et la taille des pupilles d'un système optique est d'une importance pratique considérable. Dans les instruments visuels, l'œil doit par exemple être placé au centre de la pupille de sortie (*cercle oculaire*). Or la pupille de l'œil humain varie entre 2 mm et 8 mm (en fonction de l'éclairement). On voit donc que la pupille de sortie de jumelles ou de tout autre instrument devant être utilisé, par exemple, dans de faibles conditions d'éclairement doit avoir un diamètre d'au moins 8 mm. En revanche, pour un instrument à utiliser en plein jour, une pupille de sortie de 3 ou 4 mm suffit.

Plus la pupille de sortie est grande, plus il est facile d'aligner convenablement son œil. Par exemple, la pupille d'une lunette de fusil doit être suffisamment large et de surcroît assez éloignée à l'arrière de l'instrument afin que le tireur ne se blesse pas à cause du recul de son fusil. Autant d'exemples qui montrent donc l'importance de la place et de la taille des pupilles dans la réalisation d'un instrument d'optique.

5.3.3 Ouverture relative et nombre d'ouverture

Supposons que l'on réalise l'image d'une source de lumière étendue en utilisant une lentille ou un miroir. La quantité d'énergie collectée par l'optique est alors directement proportionnelle à la surface de celle-ci, ou plus généralement à l'aire de la pupille d'entrée. Si l'on considère l'énergie émise par une partie élémentaire de la source, on perçoit facilement que, plus l'ouverture collectrice est large, plus elle peut intercepter un large cône de rayons. Remarquons en revanche que si la source est un laser et le faisceau extrêmement fin, cette considération n'est plus forcément valable. Du point de vue de l'image, on peut dire que, si l'on néglige les pertes dues à la réflexion et à l'absorption, l'énergie incidente provenant d'une certaine partie de la source objet se retrouve sur la partie correspondante de l'image (figure 5.38). L'énergie reçue par unité de surface et par unité de temps (i.e. densité de flux par unité de surface ou *éclairement*) est inversement proportionnelle à l'aire de l'image.

La surface de la pupille d'entrée, si elle est circulaire, varie comme le carré de son rayon ; elle est ainsi proportionnelle au carré de son diamètre D . D'autre part, la surface de l'image varie comme le carré de sa dimension latérale [équation (5.24) et équation (5.26)], lui-même proportionnel à f^2 (gardons en tête que nous considérons ici le cas d'un objet étendu et non pas un point source ; dans ce dernier cas, l'image serait effectivement une région extrêmement réduite indépendante de f). Ainsi, l'éclairement dans le plan image varie comme $(D/f)^2$.

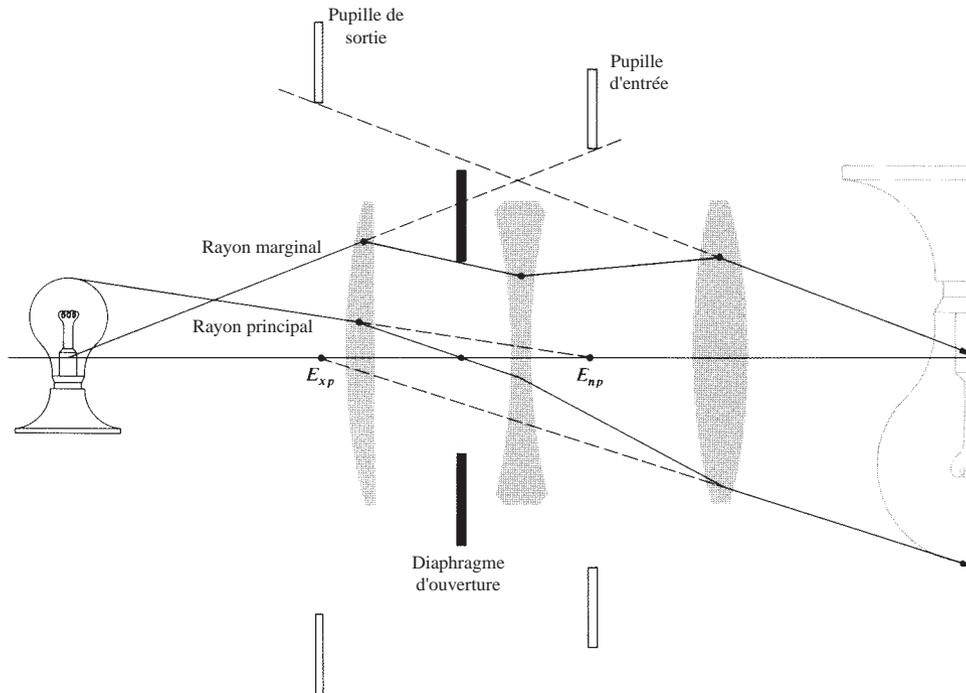


Figure 5.36 Diaphragmes et pupilles pour un système à trois lentilles.

Le rapport D/f est appelé l'*ouverture relative* et son inverse est le **nombre d'ouverture** (ou *nombre f*), noté **N.O.** ou $f/\#$ (pour le terme anglais *f-number*) tel que :

$$f/\# \equiv \frac{f}{D} \quad (5.40)$$

Remarquons que « $f/\#$ » doit être lu comme un symbole unique et non pas comme un rapport. Par exemple, une lentille qui a une ouverture $D = 25$ mm et une distance focale $f = 50$ mm a un nombre d'ouverture de 2. On dit alors usuellement que *le système est ouvert à $f/2$* . La figure 5.39 illustre cette notion de nombre d'ouverture. Elle représente une

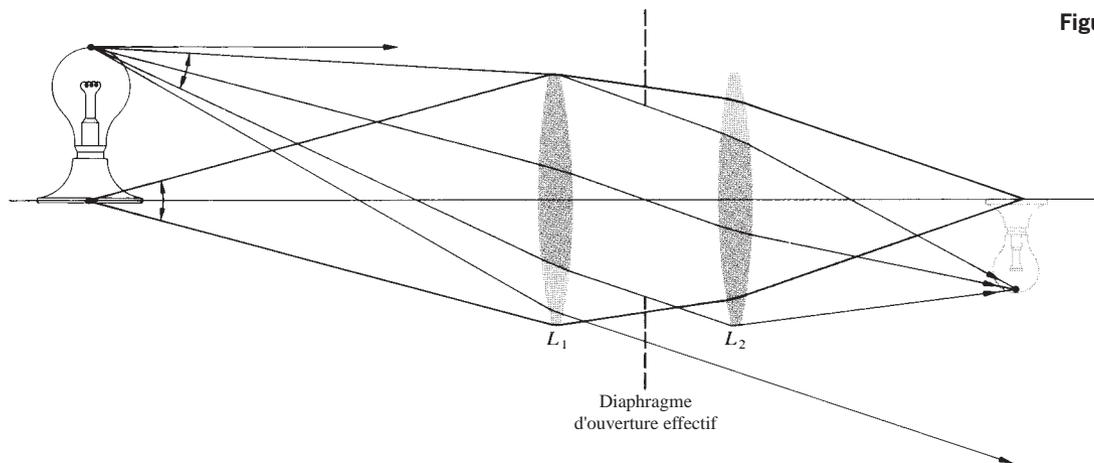


Figure 5.37 Vignetting.

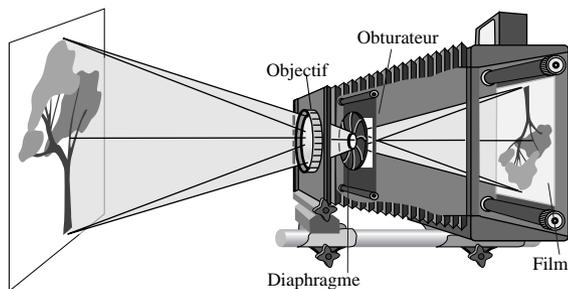


Figure 5.38 La structure d'un appareil photographique argentique peut se résumer à quatre éléments principaux : un objectif, un diaphragme de taille ajustable, un obturateur qui peut s'ouvrir et se refermer en un temps très bref et un film photosensible sur lequel l'image se forme.

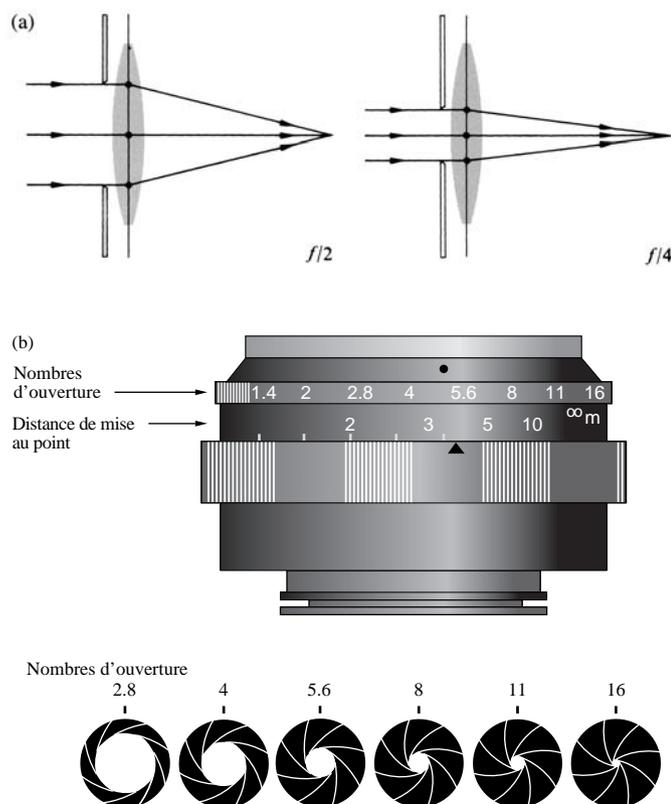


Figure 5.39 (a) Deux configurations de diaphragme correspondant à deux nombres d'ouverture. (b) Représentations de plusieurs configurations du diaphragme dans un objectif photographique.

lentille mince disposée à l'arrière d'un diaphragme à taille réglable (iris) opérant à $f/2$ ou $f/4$. On comprend donc ici qu'un petit nombre d'ouverture correspond à une grande ouverture : d'autant plus de lumière peut alors atteindre le plan image.

Les objectifs photographiques sont habituellement spécifiés par leur distance focale et par leur ouverture la plus grande (ou nombre d'ouverture le plus petit). On peut par exemple lire sur un objectif : « 50 mm, $f/1,4$ ». Comme le temps d'exposition est proportionnel au carré du nombre d'ouverture, $f/\#$ est parfois qualifié de **vitesse** de l'objectif. On dit par exemple qu'un objectif $f/1,4$ est deux fois plus rapide qu'un objectif $f/2$. Habituellement, les marquages sur les objectifs photographiques ont les valeurs : 1, 1,4, 2, 2,8, 4, 5,6, 8, 11, 16, 22, et ainsi de suite. L'ouverture la plus large dans ce cas correspond à $f/1$, ce qui est très ouvert : $f/2$ est plus courante. On voit donc que l'on passe d'un nombre d'ouverture particulier au suivant en le multipliant par un facteur $\sqrt{2}$ (arrondi numériquement). Cela correspond donc à un facteur $1/\sqrt{2}$ pour l'ouverture relative et à un facteur 1/2 pour l'éclairement. Ainsi, la même quantité de lumière atteint le film photographique si l'on a un nombre d'ouverture $f/1,4$ pour un temps d'exposition de 1/500 de seconde, $f/2$ pour 1/250 s, ou $f/2,8$ pour 1/125 s.

La plus grande lunette astronomique du monde, située au Yerkes Observatory de l'université de Chicago a un objectif d'environ un mètre de diamètre et une distance focale d'environ 18,9 mètres, et donc un nombre d'ouverture de 18,9. Les systèmes à miroirs ont eux aussi un nombre d'ouverture déterminé par le diamètre de la pupille d'entrée et leur distance focale. Ainsi, le télescope du Mont Palomar dont le miroir fait 5,08 mètres de diamètre pour une focale d'environ 16,9 mètres a un nombre d'ouverture de 3,33.

5.4 Miroirs

Les systèmes à miroirs sont extrêmement utilisés, en particulier en infrarouge, en ultraviolet et pour les rayons X, car ils ont effectivement des propriétés intéressantes. Il est, entre autres, relativement simple de construire un système à miroir qui fonctionne sur une large bande spectrale, à la différence des systèmes à réfraction. Par exemple, une lentille au silicium ou au germanium transparente en infrarouge sera complètement opaque dans le visible (voir photo p. 79). Comme nous le verrons plus tard (p. 269), les miroirs ont d'autres avantages qui contribuent d'autant plus à leur utilité.

Un miroir est un élément réfléchissant qui pourrait être, par exemple, un morceau de verre noir ou une surface métallique finement polie. Dans le passé, les miroirs étaient souvent faits de verre recouvert d'une couche d'argent, choisi du fait de ses bonnes performances de réflexion dans l'UV et dans l'IR (figure 4.59). Aujourd'hui, on utilise plutôt de l'aluminium déposé sur un substrat très finement poli par évaporation sous vide. On peut aussi déposer sur de l'aluminium des couches de protection en monoxyde de silicium ou en fluorure de magnésium. Pour certaines applications particulières (lasers...), où même les petites pertes dues à des surfaces métalliques ne peuvent être tolérées, il est indispensable d'utiliser des miroirs formés de films diélectriques multicouches (paragraphe 9.9).

En astronomie, de nouveaux types de miroirs allégés sont également en développement pour servir, par exemple, dans les télescopes orbitaux de grande dimension (type Hubble).

5.4.1 Miroirs plans

Comme pour tous les miroirs, les miroirs plans peuvent avoir leur couche réfléchissante sur la face avant ou sur la face arrière. Les derniers sont les plus courants dans la vie de tous les jours car leur couche métallique est complètement protégée derrière le support de verre. Au contraire, la plupart des miroirs utilisés dans les applications scientifiques ou techniques ont leur couche réfléchissante sur la face avant (figure 5.40).

On a vu précédemment (paragraphe 4.3.1), qu'il est assez facile de déterminer les caractéristiques d'une image formée par un miroir plan. Examinons par exemple l'arrangement de la figure 5.40. On peut facilement montrer que $|s_o| = |s_i|$. Cela étant, l'image P et l'objet S sont équidistants de la surface. En effet, on tire que $\theta_i = \theta_r$ de la loi de la réflexion. Par ailleurs, $\theta_i + \theta_r$ est l'angle extérieur du triangle SPA et il est donc égal à la somme des deux autres angles intérieurs alternés $\sphericalangle VSA + \sphericalangle VPA$. Or, $\sphericalangle VSA = \theta_i$, et donc $\sphericalangle VSA = \sphericalangle VPA$. Les triangles VAS and VPA sont donc congruents, ce qui donne bien que $|s_o| = |s_i|$.

Nous devons maintenant résoudre le problème de déterminer une convention de signe pour les miroirs. Quel que soit ce choix, il faut d'abord garder en tête que ce n'est qu'une convention arbitraire, même s'il faut lui être fidèle d'un bout à l'autre du problème. La différence évidente par rapport aux lentilles est qu'ici, l'image virtuelle est à la droite de l'interface. Un observateur voit P derrière le miroir parce que son œil (ou le système d'observation) ne peut percevoir la véritable réflexion. Celui-ci ne fait donc qu'interpoler simplement

les rayons réfléchis en ligne droite. Sur la figure 5.41, les rayons provenant de P sont divergents et aucune lumière ne peut être projetée sur un écran se trouvant en P : l'image est certainement virtuelle. Avec cette considération, le signe de s_i est donc une question de choix de commodité personnelle. Si l'on préfère l'idée que les distances pour des objets ou des images virtuels doivent être négatives, on définit s_o et s_i de la sorte, car *elles se trouvent à la droite du sommet du composant* V . Cette convention de signe a l'avantage de conduire à

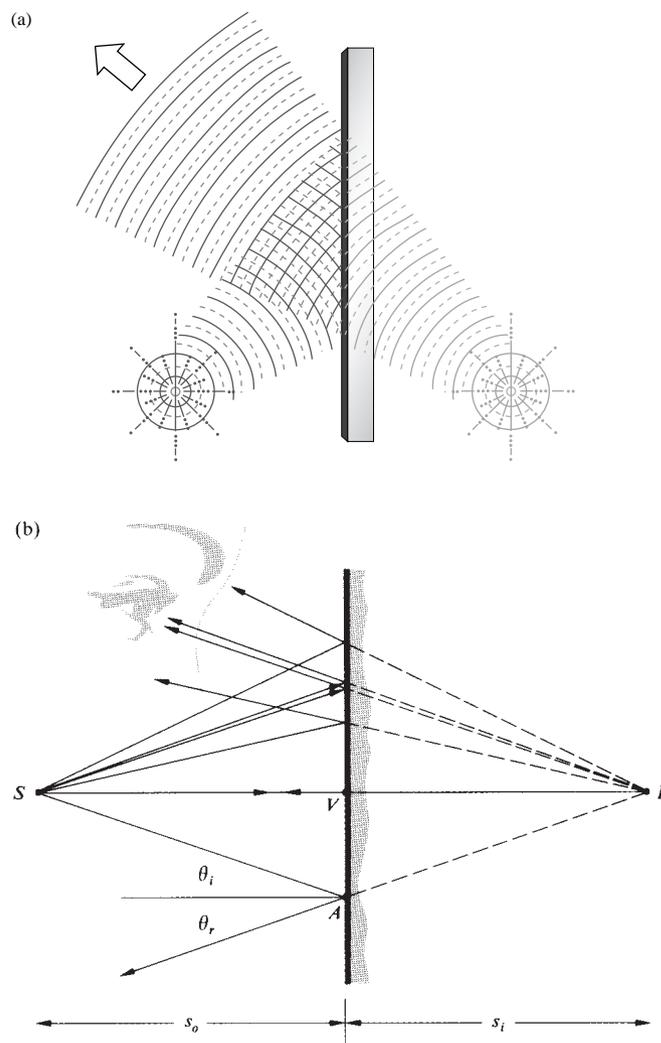


Figure 5.40 Miroir plan : (a) Réflexion d'ondes (b) Réflexion de rayons.

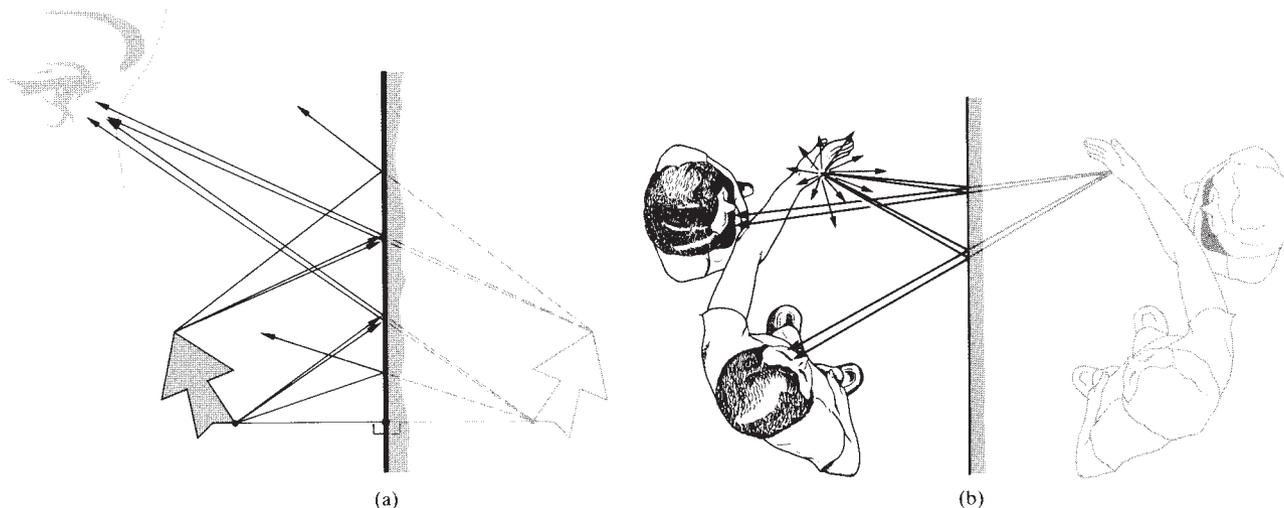


Figure 5.41 (a) Image d'un objet étendu dans un miroir plan. (b) Images formées par un miroir plan.

une « formule des miroirs » identiques à la relation de conjugaison des lentilles simples [équation (5.17)]. De la même manière, nous avons toujours la même définition pour le grandissement transversal [équation (5.24)]. Comme précédemment, $M_T = +1$ indique une image droite, virtuelle et de même taille que l'objet de départ.

On voit sur la figure 5.41 que chaque point d'un objet étendu, situé à la distance perpendiculaire s_i du miroir, est imagé à la même distance derrière le miroir. Ce principe est donc complètement différent du positionnement d'une image par une lentille. Rappelons-nous en particulier que l'image d'une main gauche par une lentille était aussi une main gauche (figure 5.27). Cette image pouvait également être distordue (car $M_L \neq M_T$), mais, quoi qu'il en soit, c'était toujours une main gauche. Le seul changement notable entre l'objet et l'image était un renversement complet (rotation de 180° autour de l'axe optique). Au contraire, dans le cas du miroir, l'image d'une main gauche, déterminée en faisant la perpendiculaire de chaque point de l'objet, est une main droite (figure 5.42). On qualifie d'ailleurs parfois les images obtenues avec des miroirs plans de « *chirales* ». Ce terme, provenant du mot grec signifiant « main », désigne justement deux figures, symétriques par rapport à un plan, comme la main gauche et la main droite. Le processus qui convertit un système de coordonnées droite dans l'espace objet en un système gauche dans le plan image est d'ailleurs appelé l'*inversion chirale*. On peut ainsi utiliser des

systèmes comportant plusieurs miroirs plans pour réaliser plusieurs inversions. Dans le cas de la figure 5.43, un objet droit (noté ici r-h pour le terme anglais *right-handed*) redevient droit après une double réflexion, après avoir été gauche (noté l-h pour le terme anglais *left-handed*).

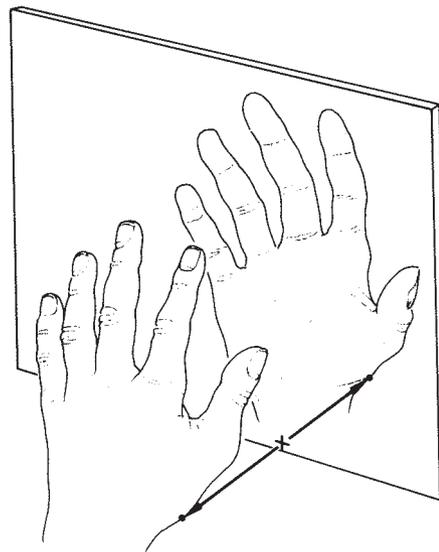
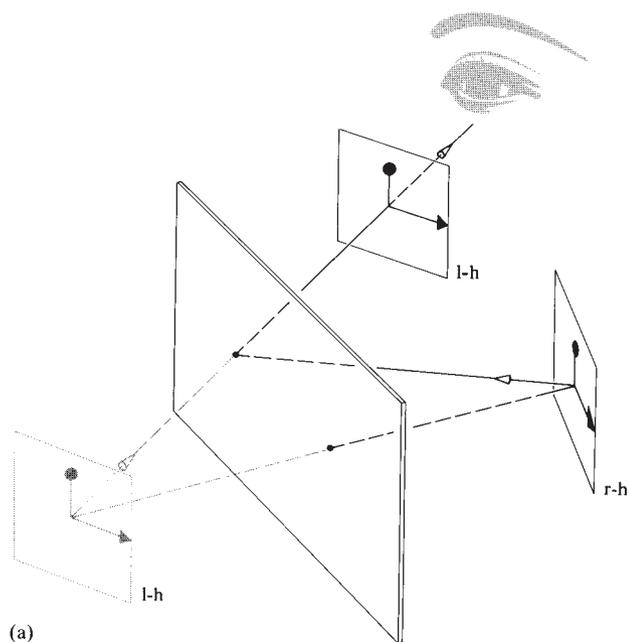
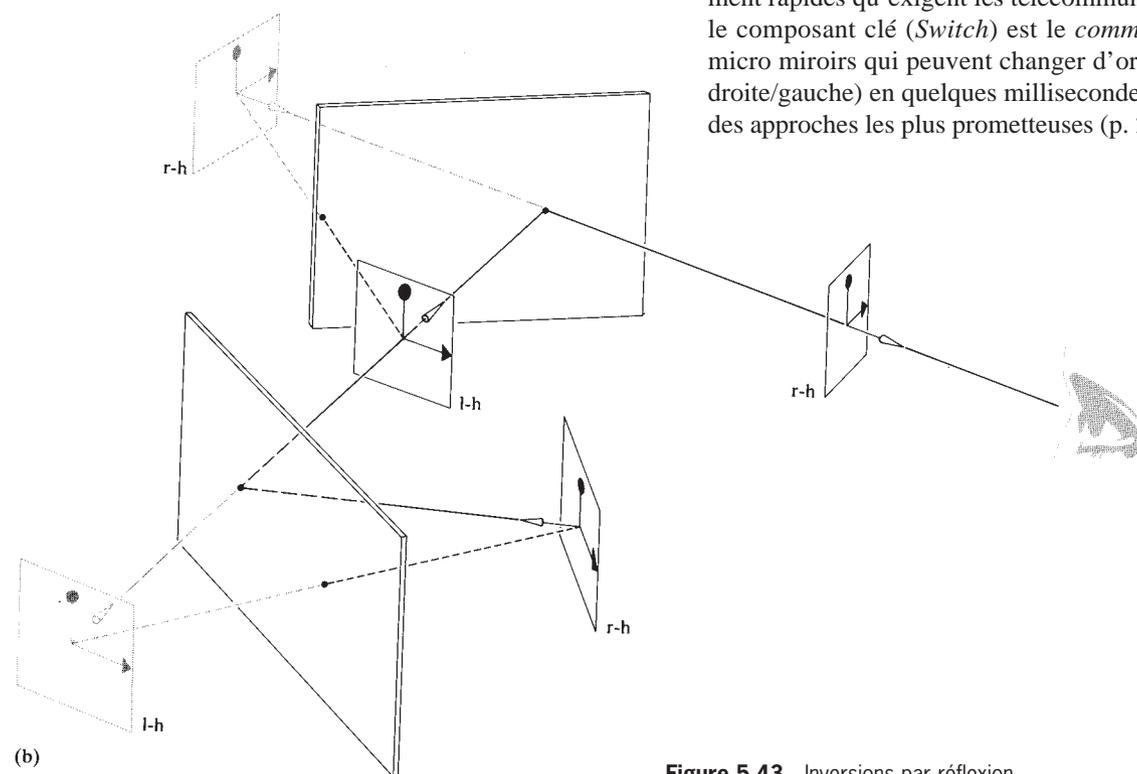


Figure 5.42 Image dans un miroir – inversion chirale.



(a)



(b)

Un grand nombre d'appareillages utilisent des systèmes à miroirs plans rotatifs : par exemple, les « choppers », les déflecteurs, les rotateurs d'image ou les scanners. Les miroirs sont fréquemment utilisés pour amplifier et mesurer les très légères rotations de certains dispositifs de laboratoires (galvanomètres, pendules à torsions, balances, etc.). Comme le montre la figure 5.44, si le miroir tourne d'un angle α , le faisceau ou l'image réfléchi se déplace d'un angle 2α .

La capacité de rediriger rapidement un faisceau de lumière est une vertu des miroirs plans connue et utilisée depuis des siècles. On peut par exemple citer le cas du principe de fonctionnement de l'appareil photo reflex (voir photo p. 186). Aujourd'hui, on réalise également des micro miroirs, assez petits pour passer dans le chas d'une aiguille dans le cadre des nouvelles technologies **MOEMS** (Micro-OptoElectroMechanical Systems). Celles-ci participent à la petite révolution technique que connaît le monde des télécommunications (téléphone, fax, Internet) où l'optique est promise à remplacer l'électronique, dont les composants sont plus chers, plus encombrants et surtout considérablement lents par rapport aux standards de l'optique. Pour réaliser les transitions extrêmement rapides qu'exigent les télécommunications à haut-débit, le composant clé (*Switch*) est le *commutateur* optique. Les micro miroirs qui peuvent changer d'orientation (haut/bas et droite/gauche) en quelques millisecondes sont à présent l'une des approches les plus prometteuses (p. 209).

Figure 5.43 Inversions par réflexion.

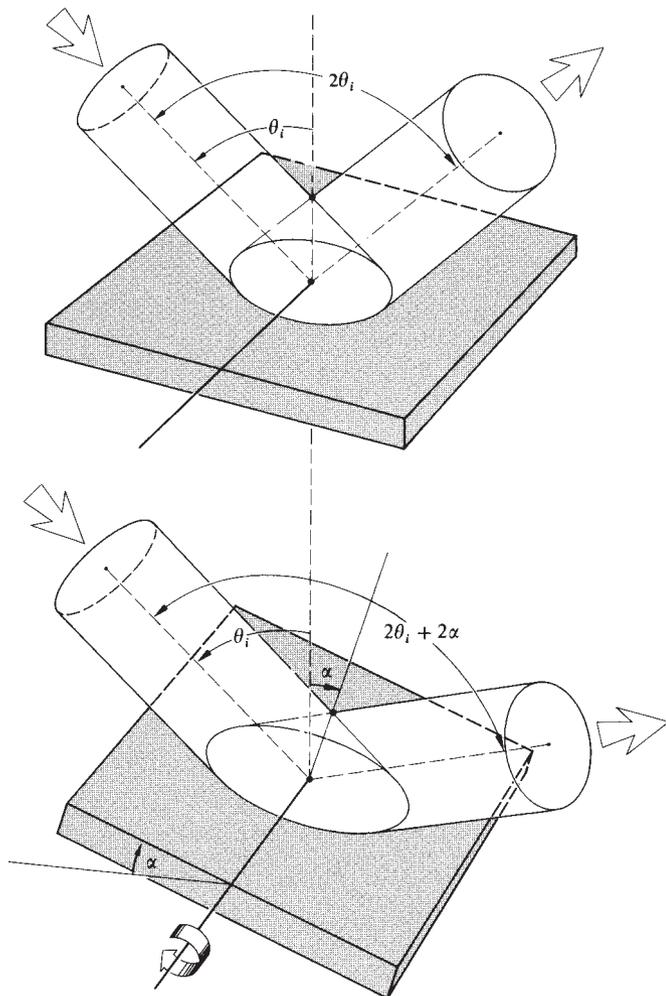
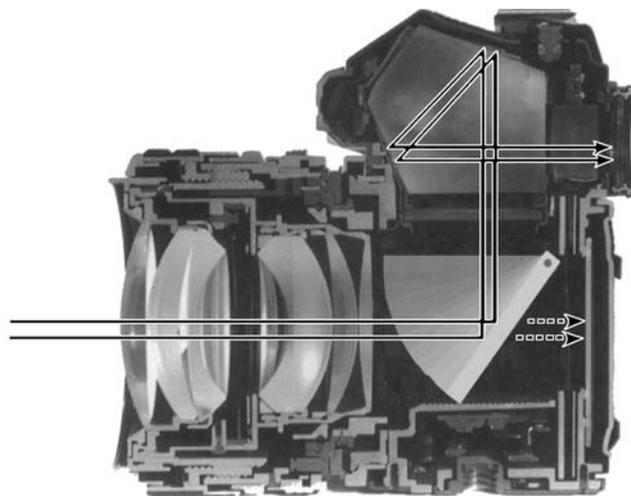


Figure 5.44 Effet de la rotation d'un miroir sur un faisceau.

5.4.2 Miroirs asphériques

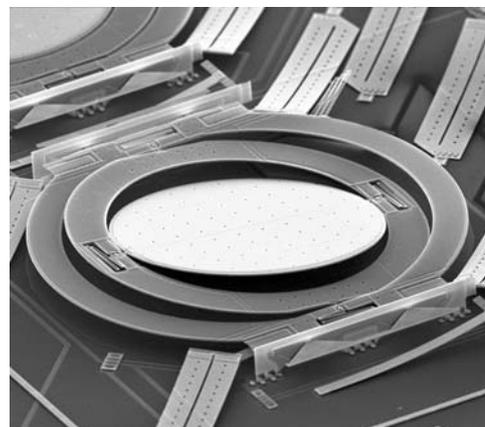
Les miroirs courbes sont connus et utilisés pour donner des images au moins depuis l'Antiquité. Ainsi, Euclide, auteur présumé de l'ouvrage *Catoptrique*, aborde déjà le cas des miroirs concaves et convexes*. Heureusement, les bases conceptuelles que nous avons déjà établies autour du principe de Fermat pour l'imagerie par des systèmes à réfraction

*La dioptrique fait référence à la science des composants réfringents alors que la *catoptrique* concerne celle des composants réfléchissants.



Appareil photo *reflex mono-objectif*. La lumière traverse l'objectif, rencontre un miroir et un prisme avant de pénétrer dans l'œil. Lorsque le déclencheur est poussé, le miroir bascule, la lumière impressionne la pellicule, puis le miroir se remet en place. (Photo E.H.)

s'appliquent aussi à la conception des miroirs. Par conséquent, déterminons quelle configuration doit avoir un miroir pour qu'une onde plane incidente devienne sphérique et convergente après une réflexion (figure 5.45). Comme l'onde plane doit converger en définitive au point F , les



Ce petit miroir orientable (si petit qu'il pourrait passer dans le chas d'une aiguille) est utilisé pour défléchir des faisceaux lumineux dans l'un des composants de base de systèmes de télécommunications actuels. (Photo Lucent Technologies' Bell Laboratories)

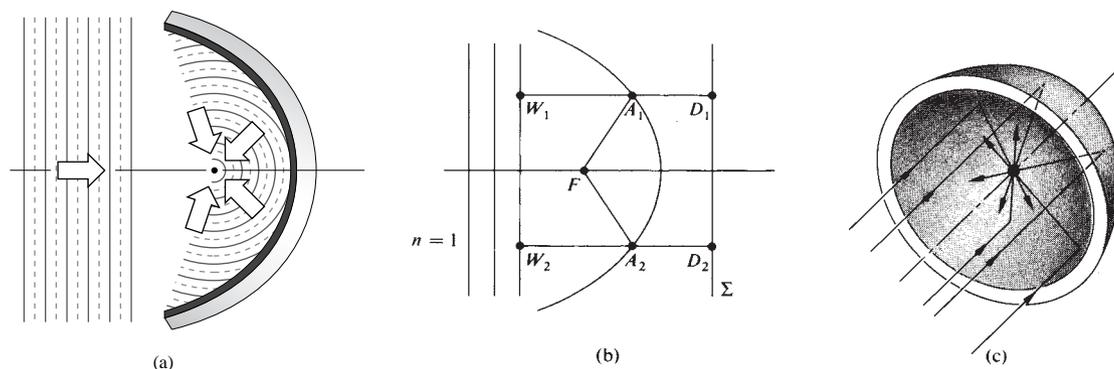


Figure 5.45
Miroir parabolique.

chemins optiques doivent être égaux pour tous les rayons. Par exemple, pour des points quelconques A_1 et A_2 , on a :

$$OPL = \overline{W_1 A_1} + \overline{A_1 F} = \overline{W_2 A_2} + \overline{A_2 F} \quad (5.41)$$

Puisque le plan Σ est parallèle aux fronts d'ondes incidents :

$$\overline{W_1 A_1} + \overline{A_1 D_1} = \overline{W_2 A_2} + \overline{A_2 D_2} \quad (5.42)$$

L'équation (5.41) sera donc satisfaite pour une surface pour laquelle $\overline{A_1 F} = \overline{A_1 D_1}$ et $\overline{A_2 F} = \overline{A_2 D_2}$ ou, plus généralement, une surface pour laquelle $\overline{AF} = \overline{AD}$ quel que soit le point A sur le miroir. En général, $\overline{AF} = e(\overline{AD})$, où e est l'excentricité d'une **section conique**. Précédemment (paragraphe 5.2.1), nous avons étudié le cas où la forme était une hyperbole, pour laquelle $e = n_{ii} > 1$. Dans le problème 5.3, la forme était une ellipse et $e = n_{ii} < 1$. Ici, le second milieu est identique au premier et $n_t = n_i$, et $e = n_{ii} = 1$. En d'autres termes, la surface est un paraboloïde, F est son foyer et Σ , sa directrice. Par ailleurs, les rayons peuvent être renversés : un point source au foyer d'un paraboloïde donne donc en sortie des ondes planes

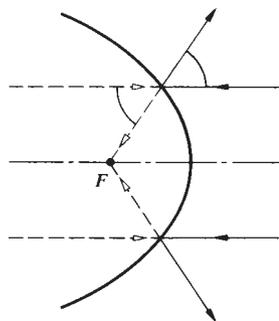
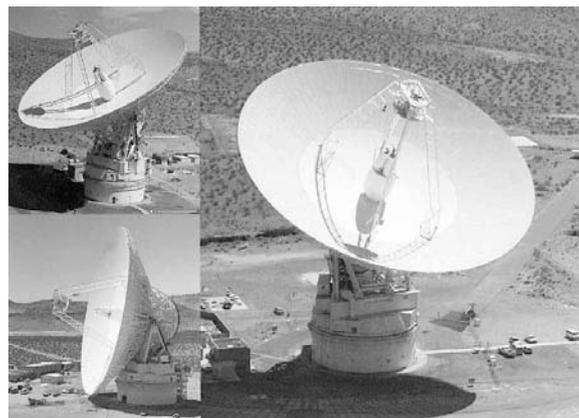


Figure 5.46 Images réelle et virtuelle pour un miroir parabolique.

parallèles. Les paraboloïdes sont utilisés dans beaucoup d'applications allant des lampes torches aux réflecteurs de phare de voitures, en passant par les antennes géantes des radiotélescopes (voir photos), les réflecteurs radars et acoustiques, les télescopes optiques, les antennes de communications lunaires, etc. Le miroir paraboloïdal convexe constitue également une solution possible mais il est beaucoup moins utilisé. Si l'on applique ce que l'on sait déjà au cas de la figure 5.46, on comprend que le système donne de F une image virtuelle lorsque le miroir est convexe et une image réelle lorsqu'il est concave.

En plus des paraboloïdes, d'autres cas de miroirs asphériques sont intéressants, en particulier les ellipsoïdes ($e < 1$) et les hyperboloïdes ($e > 1$). Les deux produisent des conditions d'imagerie parfaites entre deux points axiaux conjugués, correspondants à leurs deux foyers (figure 5.47).



La grande antenne paraboloïdale du radiotélescope du Goldstone Deep Space Communications Complex. (Photo NASA.)

Comme nous le verrons plus tard, les configurations de télescopes Cassegrain et Gregory utilisent des miroirs secondaires convexes qui sont respectivement un hyperboloïde et un ellipsoïde. Comme dans beaucoup d'instruments modernes, le miroir primaire du télescope spatial Hubble est lui un hyperboloïde (voir photo).

Une large variété de miroirs asphériques est disponible dans le commerce. En fait, on peut même acheter des composants travaillant *hors axe*, en plus des systèmes centrés qui sont plus courants. Ainsi, on voit à la figure 5.48 que le faisceau focalisé peut être récupéré par la suite sans obstruer le miroir. Cette géométrie se retrouve par exemple dans les grandes antennes des radars.

5.4.3 Miroirs sphériques

Les surfaces asphériques de précision sont considérablement plus difficiles à fabriquer (et donc plus chères) que les surfaces sphériques. C'est pourquoi nous revenons encore une fois aux surfaces sphériques pour bien comprendre leur principe de fonctionnement.

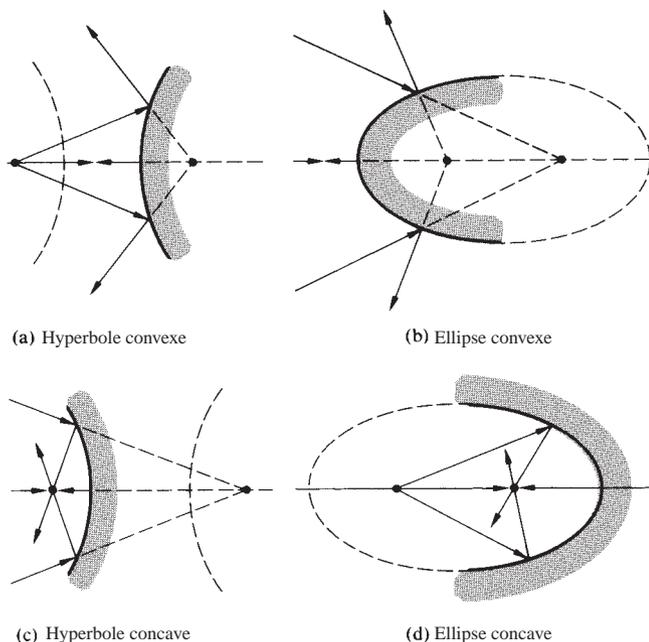
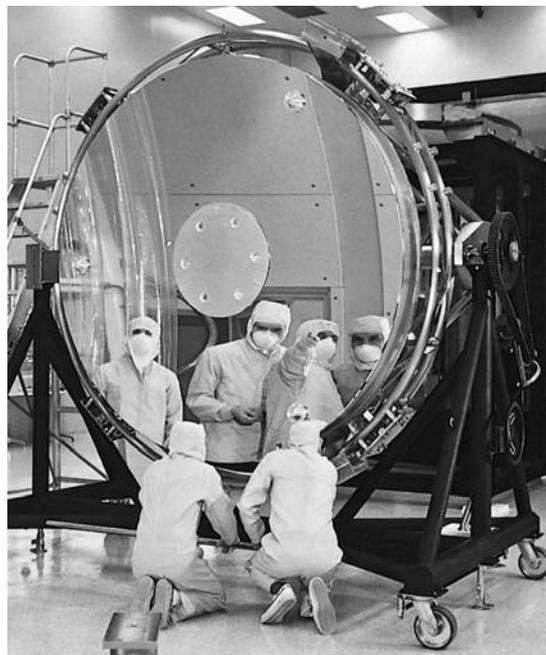


Figure 5.47 Miroirs hyperboliques et elliptiques.



Le miroir hyperbolique de 2,4 m de diamètre du télescope spatial Hubble. (Photo NASA.)

La région paraxiale (conditions de Gauss)

Pour une surface sphérique (figure 5.49a), on a l'équation bien connue :

$$y^2 + (x - R)^2 = R^2 \quad (5.43)$$

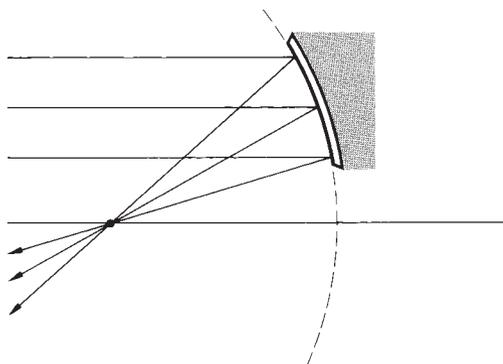


Figure 5.48 Élément de miroir parabolique hors axe.

où le centre C est décalé par rapport à l'origine d'une longueur de rayon R . On a donc, après réécriture :

$$y^2 - 2Rx + x^2 = 0$$

On peut alors chercher les solutions pour x :

$$x = R \pm (R^2 - y^2)^{1/2} \quad (5.44)$$

Limitons-nous aux valeurs de x inférieures à R . Cela étant, on étudie donc un hémisphère, ouvert sur la droite, correspondant au signe moins dans l'équation (5.44). Après développement en séries binomiales, on peut exprimer x sous la forme :

$$x = \frac{y^2}{2R} + \frac{1y^4}{2^2 2! R^3} + \frac{1 \cdot 3y^6}{2^3 3! R^5} + \dots \quad (5.45)$$

Cette expression devient significative lorsque l'on réalise que l'équation standard pour une parabole dont le sommet est à l'origine et le foyer à une distance f sur la droite (figure 5.49b) est simplement :

$$y^2 = 4fx \quad (5.46)$$

En comparant ces deux formules, nous voyons que si $4f = 2R$ (i.e. si $f = R/2$), le premier terme du développement peut être considéré comme parabolique, tandis que les termes suivants représentent la déviation par rapport au modèle de la parabole. Si l'on note cette déviation Δx , on a :

$$\Delta x = \frac{y^4}{8R^3} + \frac{y^6}{16R^5} + \dots$$

Évidemment, cette différence n'est appréciable que lorsque y est relativement grand (figure 5.49c) devant R . Dans la région

paraxiale, c'est-à-dire dans le voisinage immédiat de l'axe central, ces deux configurations sont pratiquement impossibles à distinguer. Si l'on reste, en première approximation, dans le cadre de la théorie paraxiale des miroirs sphériques, les conclusions que l'on a tirées de l'étude de l'imagerie stigmatique des paraboloides sont donc encore applicables. Cependant, en pratique, y a une dimension finie et les aberrations apparaissent. De plus, signalons bien que les surfaces sphériques ne sont parfaitement stigmatiques (images parfaites) que pour une seule paire de points axiaux ; elles aussi sont donc soumises aux aberrations.

Formule des miroirs

Pour un miroir sphérique, l'équation paraxiale reliant les positions des deux points conjugués aux autres paramètres physiques peut être déduite de la figure 5.50. On remarque effectivement que, comme $\theta_i = \theta_r$, le $\sphericalangle SAP$ a pour bissectrice le segment \overline{CA} . Ce dernier divise donc le côté \overline{SP} du triangle SAP en segments de longueurs proportionnelles aux deux côtés restants. Ainsi :

$$\frac{\overline{SC}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} \quad (5.47)$$

Par ailleurs,

$$\overline{SC} = s_o - |R| \quad \text{et} \quad \overline{CP} = |R| - s_i$$

Où s_o et s_i sont situés sur la gauche, donc positifs. En utilisant la même convention de signe que celle qui a été employée

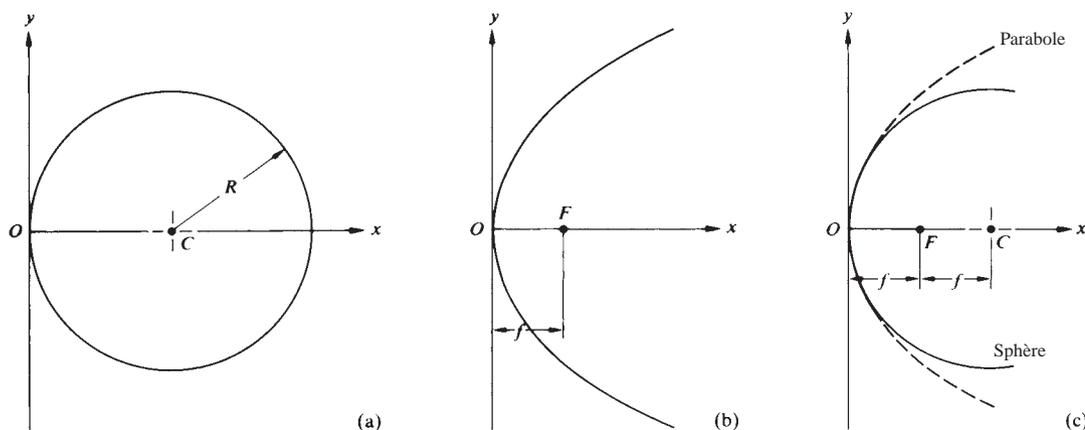


Figure 5.49
Comparaison de miroirs sphérique et parabolique.

pour l'étude de la réfraction, remarquons aussi que R est négatif car C est à la gauche de V (i.e. la surface est concave). Ainsi $|R| = -R$ et :

$$\overline{SC} = s_o + R \quad \text{et} \quad \overline{CP} = -(s_i + R)$$

Dans la région paraxiale, $\overline{SA} \approx s_o$, $\overline{PA} \approx s_i$, et l'équation (5.47) devient :

$$\frac{s_o + R}{s_o} = -\frac{s_i + R}{s_i}$$

Ou bien

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = -\frac{2}{R} \quad (5.48)$$

Cette dernière équation est connue sous le nom de **formule des miroirs**. Elle peut être appliquée aux miroirs concaves ($R < 0$) et convexes ($R > 0$). Le *foyer objet* est encore une fois défini par :

$$\lim_{s_i \rightarrow \infty} s_o = f_o$$

Et le *foyer image* correspond à :

$$\lim_{s_o \rightarrow \infty} s_i = f_i$$

Par conséquent, on a d'après l'équation (5.48) :

$$\frac{1}{f_o} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{f_i} = -\frac{2}{R}$$

Ce qui donne :

$$f_o = f_i = -\frac{R}{2} \quad (5.49)$$

Comme on peut le voir sur la figure 5.49c. Après remplacement, on arrive aussi à :

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \quad (5.50)$$

Notons que f est positive pour un miroir concave ($R < 0$) et négative pour un miroir convexe ($R > 0$). Dans ce dernier cas,

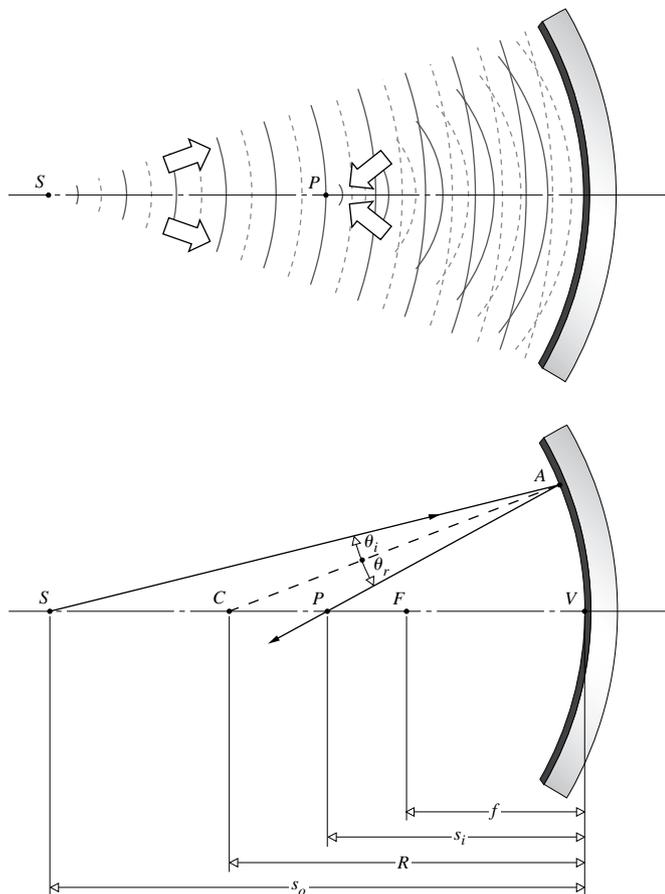


Figure 5.50 Miroir sphérique concave (points conjugués).



Exemple de miroir sphérique convexe formant une image virtuelle redressée. Pouvez-vous voir le photographe ? (Photo E.H.)

l'image se forme donc à l'arrière du miroir et elle est virtuelle (figure 5.51).

Images d'objets étendus à distance finie

Les propriétés des miroirs étant très proches de celles des lentilles et des dioptrés sphériques, nous nous contenterons ici de les annoncer brièvement sans refaire tout le développement. Comment construire un rayon réfléchi quelconque ? Dans les conditions de la théorie paraxiale, nous savons qu'un pinceau quelconque de rayons parallèles provenant d'un point hors axe se focalise en un point du plan focal. Comme dans le cas des lentilles, ce point est localisable sur le plan focal grâce au rayon incident passant par F et qui est donc parallèle à l'axe optique après réflexion. De même, un objet plan, étendu et fini, perpendiculaire à l'axe optique est imagé (en première

approximation) sur un plan possédant la même orientation, chaque point objet ayant un point image correspondant sur ce plan. Signalons que cette considération est rigoureusement exacte dans le cas du miroir plan mais n'est qu'une approximation pour les autres configurations.

Pour obtenir des images convenables d'objets étendus avec un miroir sphérique, il faut en effet que les ondes réfléchies provenant de chaque point objet se rapprochent d'ondes sphériques. Cette approximation ne peut être validée que sous certaines conditions uniquement.

De même que, dans une lentille, l'image d'un point se trouve sur la droite définie par le point objet et le centre optique O de la lentille, de même dans un miroir, l'image d'un point se trouve sur la droite joignant ce point au centre de courbure C du miroir (figure 5.52). Comme dans le cas d'une lentille mince (figure 5.21), la procédure graphique pour

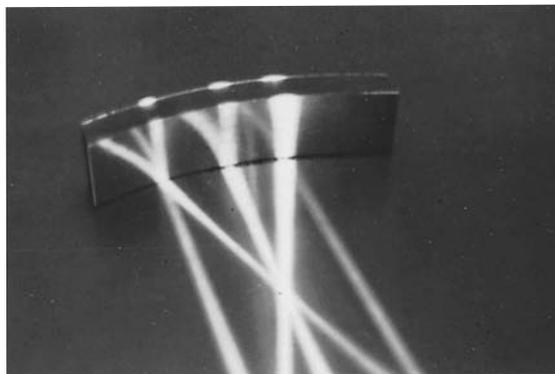
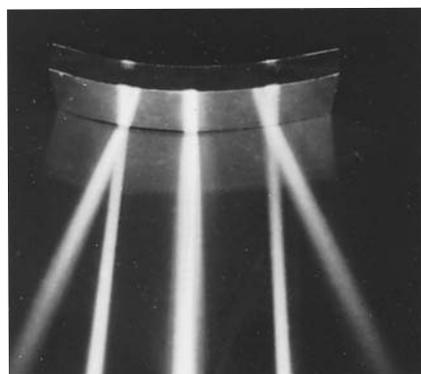
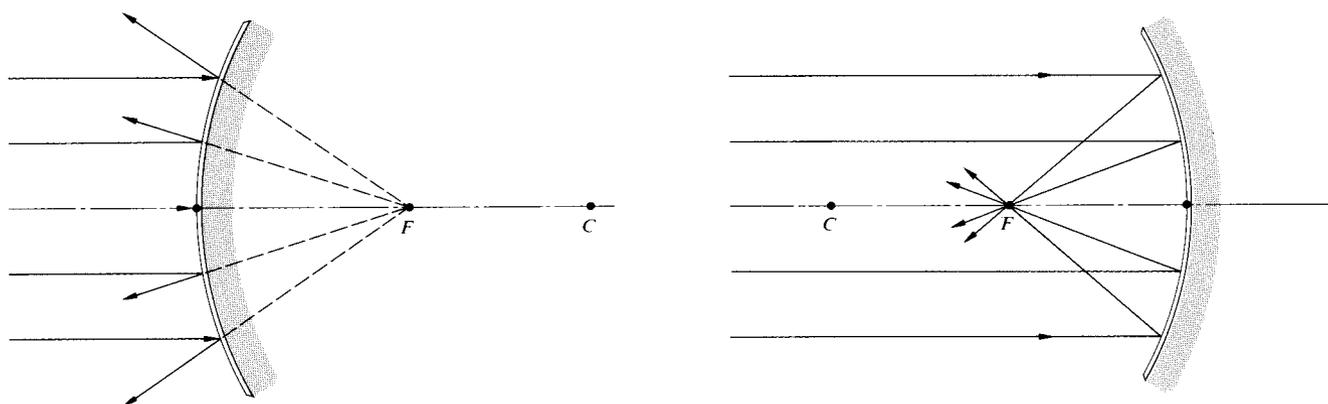


Figure 5.51 Focalisation de rayons par un miroir sphérique. (Photo E.H.)

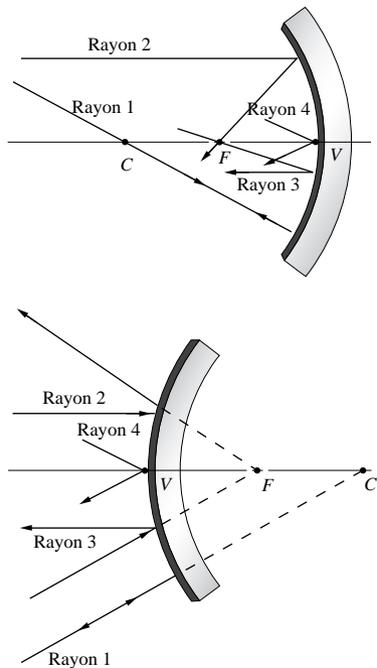


Figure 5.52 Quatre rayons caractéristiques : le rayon 1 se prolonge en C et se réfléchit sur lui-même. Le rayon 2 est parallèle à l'axe optique et se réfléchit en passant par F . Le rayon 3 se dirige vers F et se réfléchit parallèlement à l'axe optique. Le rayon 4 rencontre le miroir au point V et se réfléchit de telle sorte que : $\theta_i = \theta_r$.

positionner l'image est assez directe (figure 5.53). Le sommet de l'image se trouve à l'intersection de deux rayons, le premier qui est initialement parallèle à l'axe optique et qui passe par F après réflexion, le deuxième qui passe par C et qui revient donc sur son propre trajet après réflexion (figure 5.54). On peut aussi se servir du rayon qui passe initialement par F et qui est donc réfléchi parallèlement à l'axe optique. Le sommet du miroir possède également des propriétés intéressantes. Un rayon provenant d'un point objet situé en dehors de l'axe et qui arrive au sommet du miroir est réfléchi avec un angle égal par rapport à l'axe optique. Celui-ci forme donc la bissectrice de l'angle formé par le rayon incident et le rayon réfléchi.

Notons que les triangles S_1S_2V et P_1P_2V de la figure 5.53a sont semblables et que leurs côtés ont donc des longueurs proportionnelles. En prenant y_i négatif, comme nous l'avons fait auparavant, car il est en dessous de l'axe, on a alors : $y_i/y_o = -s_i/s_o$, ce qui est égal à M_T . Cela constitue le *grandissement transversal*, comme nous l'avons défini pour les lentilles [équation (5.25)].

Tableau 5.4 Convention de signe pour les miroirs sphériques

Quantité	Signe	
	+	-
s_o	À gauche de V , objet réel	Droite de V , objet virtuel
s_i	À gauche de V , image réelle	Droite de V , image virtuelle
f	Miroir concave	Miroir convexe
R	C à droite de V , convexe	C à gauche de V , concave
y_o	Au-dessus de l'axe, objet redressé	En dessous de l'axe, objet renversé
y_i	Au-dessus de l'axe, image redressée	En dessous de l'axe, image renversée

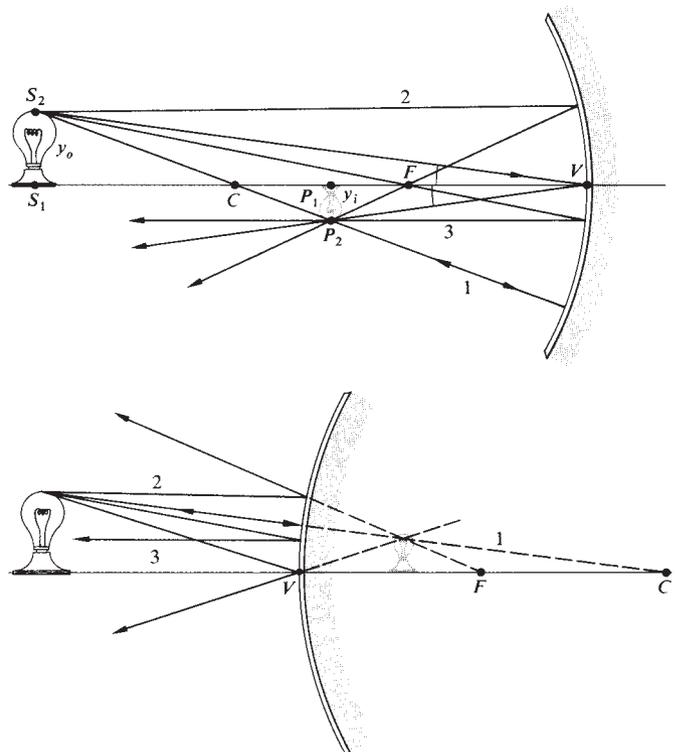


Figure 5.53 Image d'un objet étendu avec des miroirs sphériques.

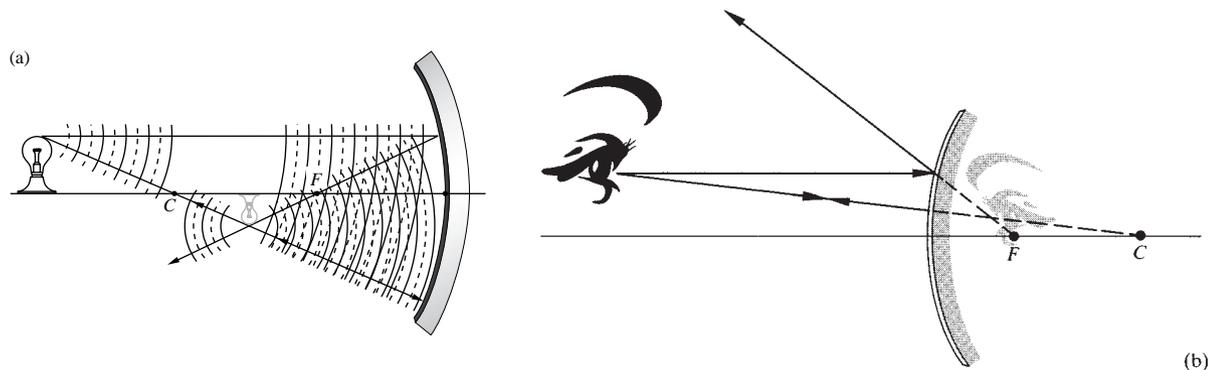


Figure 5.54 (a) Réflexion sur un miroir concave. (b) Réflexion sur un miroir convexe.

La seule équation qui contienne des informations structurales sur les éléments optiques (n , R , etc.) est celle qui donne l'expression de f . De par le principe de fonctionnement très différent des deux composants, l'expression obtenue pour la lentille mince [équation (5.16)] est différente de celle du miroir sphérique [équation (5.49)]. En revanche, les autres relations qui expriment s_o , s_i , et f , ou bien y_o , y_i , et M_T sont les mêmes. Le tableau 5.4 rappelle la convention de signe choisie pour les miroirs sphériques. On y constate la seule modification par rapport aux conventions précédentes : s_i est maintenant à la

gauche de V et est ici considérée comme une grandeur positive. On voit aussi, en comparant les tableaux 5.5 et 5.3, les grandes similarités entre les propriétés des miroirs concaves et celles des lentilles convexes. On constate la même analogie entre les miroirs convexes et les lentilles concaves.

Ces propriétés des miroirs sphériques, que l'on peut visualiser également sur la figure 5.55, peuvent être facilement vérifiées expérimentalement. Si vous ne disposez pas d'un véritable miroir sphérique, vous pouvez déjà en fabriquer un en pliant une feuille de papier d'aluminium sur une surface appropriée, comme l'extrémité d'une ampoule électrique (dans ce cas, R et donc f seront assez petits). On peut alors, par exemple, étudier l'image d'un petit objet formée par un miroir concave de courte distance focale. Si l'on rapproche l'objet du miroir en partant d'assez loin, l'image grandit jusqu'à ce que l'objet atteigne la distance $s_o = 2f = R$, où l'image apparaît inversée et de même taille que l'objet. Si l'on continue à rapprocher l'objet, l'image continue à grandir jusqu'à occuper tout le miroir et devenir une tache floue. Lorsque s_o devient de plus en plus petite, l'image, dorénavant redressée et agrandie, décroît jusqu'à redevenir de même taille que l'objet lorsque celui-ci vient au contact du miroir. Cette succession de conjugaisons est très intéressante. Et si l'on n'a vraiment aucun matériel sous la main, on peut même réaliser ces observations en regardant dans une cuillère en métal. Les deux faces sont intéressantes !

Tableau 5.5 Images d'objets réels formées avec des miroirs sphériques

Concave				
Objet		Image		
Localisation	Type	Localisation	Orientation	Taille relative
$\infty > s_o > 2f$	Réel	$f < s_i < 2f$	Renversée	Réduite
$s_o = 2f$	Réel	$s_i = 2f$	Renversée	Même taille
$f < s_o < 2f$	Réel	$\infty > s_i > 2f$	Renversée	Agrandie
$s_o = f$		$\pm\infty$		
$s_o < f$	Virtual	$ s_i > s_o$	Redressée	Agrandie
Convexe				
Objet		Image		
Localisation	Type	Localisation	Orientation	Taille relative
Quelconque	Virtual	$ s_i < f $, $s_o > s_i $	Redressée	Réduite

5.5 Prismes

Les prismes peuvent être employés de différentes façons en optique. On peut, par exemple, les utiliser en tant que séparateurs de faisceau (p. 133), comme éléments polarisants

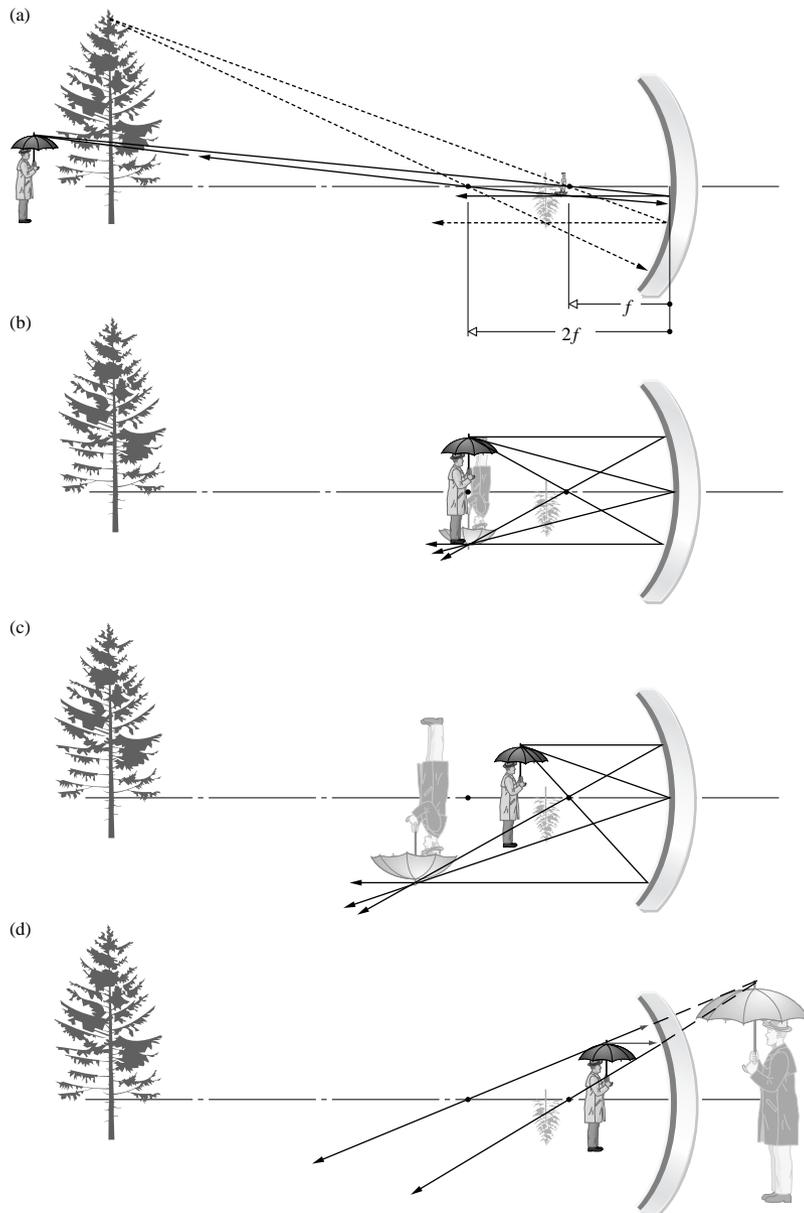


Figure 5.55 Principe de formation des images avec un miroir sphérique concave.

(paragraphe 8.4.3) ou comme interféromètres. En fait, les prismes possèdent deux propriétés principales dont découlent leurs utilisations. Un prisme est tout d'abord un composant dispersif qu'on peut par exemple trouver dans certains analyseurs de spectre (p. 195). Il est ainsi capable de séparer, dans une certaine mesure, les différentes composantes

spectrales d'un faisceau de lumière polychromatique. Souvenons-nous que nous avons déjà introduit le terme *dispersion* (p. 75) lorsque nous avons parlé de la dépendance en longueur d'onde de l'indice de réfraction, $n(\lambda)$, pour les diélectriques. En fait, les prismes vont pouvoir servir à mesurer cette dépendance $n(\lambda)$ pour une large gamme de longueurs

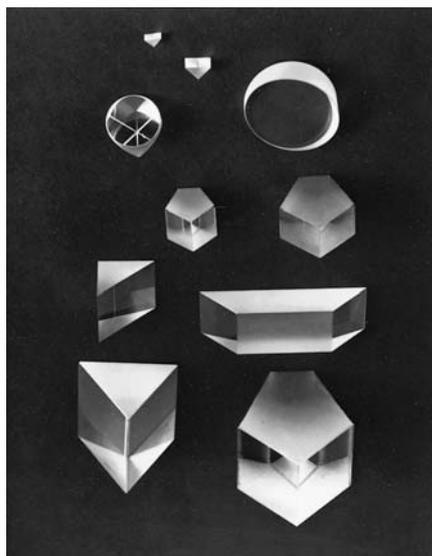
d'onde et pour une grande variété de matériaux (incluant les gaz et les liquides).

La seconde grande propriété des prismes est leur capacité à modifier l'orientation d'une image ou la direction de propagation d'un faisceau. Les prismes sont utilisés à ce propos dans de nombreux instruments, souvent pour faire tenir le système optique dans un espace limité. On trouve des prismes inverseurs, des prismes redresseurs et d'autres pouvant dévier un faisceau sans l'inverser ou le renverser, et tout cela sans dispersion de la lumière.

5.5.1 Prismes dispersifs

On compte une grande variété de prismes de toutes tailles et de toutes formes, pouvant remplir toutes sortes de fonctionnalités (voir photo). Considérons tout d'abord le groupe dit des **prismes dispersifs**. Typiquement, un rayon entrant dans un prisme dispersif (figure 5.56) en émerge en ayant subi par rapport à sa direction d'origine une **déviati on angulaire** d'un angle δ . Lorsqu'il rencontre la première face du prisme, le rayon subit en effet une première déviation $(\theta_{i1} - \theta_{r1})$. Sur la seconde face, le rayon subit une deuxième déviation $(\theta_{i2} - \theta_{r2})$. La déviation totale est alors :

$$\delta = (\theta_{i1} - \theta_{r1}) + (\theta_{i2} - \theta_{r2})$$



Différents exemples de prismes. (Photo Melles Griot.)

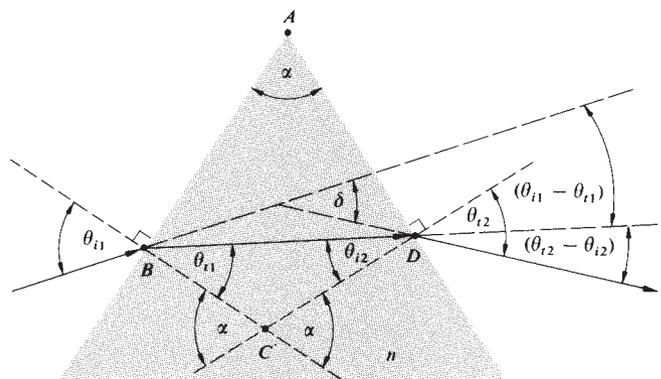


Figure 5.56 Géométrie d'un prisme dispersif.

Comme le polygone $ABCD$ contient deux angles droits, $\sphericalangle BCD$ est le supplément de α , **angle au sommet du prisme**. Par géométrie, α est aussi l'angle extérieur du triangle BCD . Il est donc équivalent à la somme des angles intérieurs alternés, ce qui donne :

$$\alpha = \theta_{i1} + \theta_{i2} \quad (5.51)$$

Ainsi

$$\delta = \theta_{i1} + \theta_{i2} - \alpha \quad (5.52)$$

Le but est ici d'exprimer δ uniquement en fonction de l'angle d'incidence du rayon sur le prisme (i.e. θ_{i1}) et de l'angle au sommet α . Si le prisme a pour indice n et qu'il est dans l'air ($n_a \approx 1$), il découle de la loi de Snell-Descartes que :

$$\theta_{i2} = \sin^{-1} (n \sin \theta_{r2}) = \sin^{-1} [n \sin (\alpha - \theta_{i1})]$$

Cette expression donne, en remplaçant $\cos \theta_{i1}$ par $(1 - \sin^2 \theta_{i1})^{1/2}$ et en utilisant à nouveau la loi de Snell-Descartes :

$$\theta_{i2} = \sin^{-1} [(\sin \alpha)(n^2 - \sin^2 \theta_{i1})^{1/2} - \sin \theta_{i1} \cos \alpha]$$

On obtient alors pour la déviation angulaire :

$$\delta = \theta_{i1} + \sin^{-1} [(\sin \alpha)(n^2 - \sin^2 \theta_{i1})^{1/2} - \sin \theta_{i1} \cos \alpha] - \alpha \quad (5.53)$$

Il apparaît donc que δ augmente avec n , qui varie lui-même en fonction de la longueur d'onde. La déviation angulaire d'un prisme est donc fonction de la longueur d'onde de la lumière et l'on peut la noter $\delta(\lambda)$. Dans le visible, $n(\lambda)$ décroît lorsque

la longueur d'onde augmente pour la plupart des matériaux diélectriques transparents d'usage courant, (par exemple la figure 3.41 : tracé de $n(\lambda)$ en fonction de λ pour différents verres). Il en est donc de même pour la déviation d'un prisme. Ainsi, $\delta(\lambda)$ sera plus petite pour de la lumière rouge que pour de la lumière bleue.

Certains récits de missionnaires ayant voyagé en Chine, indiquent qu'au début du xvii^e siècle, les prismes y étaient déjà bien connus et fort appréciés pour leur capacité à générer des couleurs. De nombreux savants européens de cette époque, comme Marci, Grimaldi ou Boyle, en utilisèrent pour leurs observations. Mais l'utilisation du prisme reste surtout rattachée aux célèbres expériences de Newton sur la dispersion de la lumière. Le 6 février 1672, le grand savant présenta à la *Royal Society* un article intitulé « *A New Theory about Light and Colours* » (« *une nouvelle théorie sur la lumière et les couleurs* »). Newton annonçait que la lumière blanche consistait en un mélange de différentes couleurs et que le phénomène de réfraction dépendait de celles-ci. En fait, c'est grâce à des observations menées avec des prismes qu'il avait pu arriver à de telles conclusions.

Examinons à nouveau l'équation (5.53). Il est évident que, pour un rayon de lumière monochromatique qui traverse un prisme donné (i.e. n et α fixés), la déviation ne dépend plus que de l'angle d'incidence sur la première face, θ_{i1} . La figure 5.57 représente la courbe de $\delta(\theta_{i1})$ pour un prisme de verre usuel. On constate sur la figure que cette courbe possède un minimum δ_m . Cette plus petite valeur de δ , appelée **minimum de déviation** est particulièrement intéressante pour

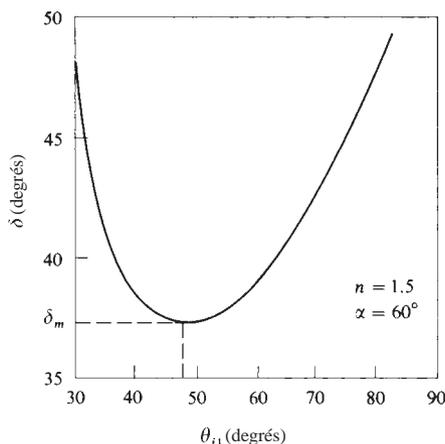


Figure 5.57 Déviation en fonction de l'angle d'incidence.

certaines expériences. La valeur de δ_m peut être déterminée graphiquement ou bien analytiquement, en différentiant l'équation (5.53) et en écrivant $d\delta/d\theta_{i1} = 0$. On peut aussi choisir une méthode plus indirecte mais certainement plus simple. En différentiant l'équation (5.52) et en écrivant qu'elle est nulle, on obtient :

$$\frac{d\delta}{d\theta_{i1}} = 1 + \frac{d\theta_{i2}}{d\theta_{i1}} = 0$$

Ce qui donne : $d\theta_{i2}/d\theta_{i1} = -1$. En faisant alors la dérivée de la loi de Snell-Descartes à chaque interface, on obtient :

$$\cos \theta_{i1} d\theta_{i1} = n \cos \theta_{r1} d\theta_{r1}$$

et

$$\cos \theta_{i2} d\theta_{i2} = n \cos \theta_{r2} d\theta_{r2}$$

Par ailleurs, en différentiant l'équation (5.51), on obtient $d\theta_{i1} = -d\theta_{i2}$ car $d\alpha = 0$. En divisant les deux dernières équations, on obtient donc :

$$\frac{\cos \theta_{i1}}{\cos \theta_{i2}} = \frac{\cos \theta_{r1}}{\cos \theta_{r2}}$$

En appliquant encore une fois la loi de Snell-Descartes, on peut écrire cela sous la forme :

$$\frac{1 - \sin^2 \theta_{i1}}{1 - \sin^2 \theta_{i2}} = \frac{n^2 - \sin^2 \theta_{i1}}{n^2 - \sin^2 \theta_{i2}}$$

La valeur de θ_{i1} pour laquelle cette relation est vraie est celle pour laquelle $d\delta/d\theta_{i1} = 0$. Comme $n \neq 1$, il s'ensuit que :

$$\theta_{i1} = \theta_{i2}$$

Et donc :

$$\theta_{i1} = \theta_{i2}$$

Ce résultat signifie que *le rayon pour lequel la déviation est minimale traverse le prisme de manière symétrique, c'est-à-dire parallèlement à sa base*. Remarquons, soit dit en passant, que le sens physique fournit logiquement un autre raisonnement, un peu moins mathématique, pour expliquer pourquoi θ_{i1} doit être égal à θ_{i2} . En effet, supposons qu'un rayon passe par un minimum de déviation mais que $\theta_{i1} \neq \theta_{i2}$. Connaissant le principe du retour inverse de la lumière, on sait aussi que le rayon allant dans le sens inverse va passer par le même chemin et que δ reste donc inchangé (i.e. $\delta = \delta_m$). Mais cela implique qu'il y a alors deux angles d'incidence différents pour lesquels la déviation est minimale, ce qui n'est pas vrai physiquement. Donc, $\theta_{i1} = \theta_{i2}$.

Dans le cas où $\delta = \delta_m$, il résulte des équations (5.51) et (5.52) que $\theta_{i1} = (\delta_m + \alpha)/2$ et $\theta_{t1} = \alpha/2$. En appliquant la loi de Snell-Descartes à la première interface, on obtient donc :

$$n = \frac{\sin [(\delta_m + \alpha)/2]}{\sin \alpha/2} \quad (5.54)$$

Cette équation est à la base d'une des méthodes les plus précises pour déterminer l'indice de réfraction d'une substance transparente. En effet, on peut fabriquer un prisme dans le matériau en question et réaliser un protocole expérimental pour mesurer α et $\delta_m(\lambda)$. $n(\lambda)$ est alors calculé grâce à l'équation (5.54) pour différentes longueurs d'onde. Ce procédé n'est pas exclusivement réservé aux substances solides. Pour mesurer l'indice d'un liquide ou d'un gaz, on fabrique des prismes creux constitués par des assemblages de lames de verre à faces parallèles. Ces enveloppes sont ensuite remplies avec le fluide à étudier : liquide ou gaz à haute pression. Comme les lames de verre planes n'induisent pas de déviation par elles-mêmes, on peut donc mesurer la déviation et l'indice de la substance étudiée.

Les figures 5.58 et 5.59 montrent deux exemples de **prismes dispersifs à déviation constante**, qui jouent un rôle très important en spectroscopie. Le prisme dit de **Pellin-Broca**

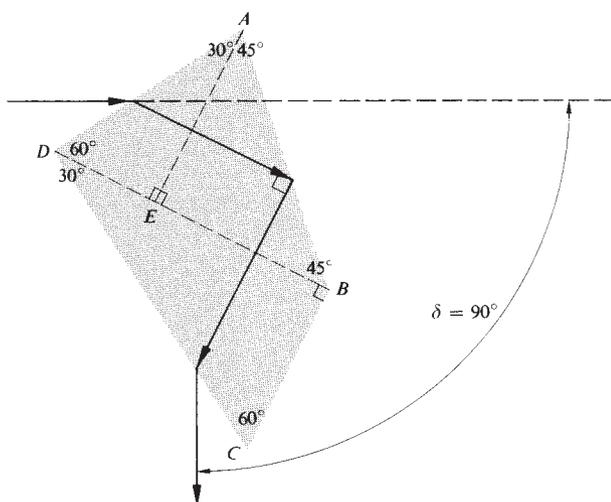


Figure 5.58 Prisme de Pellin-Broca.

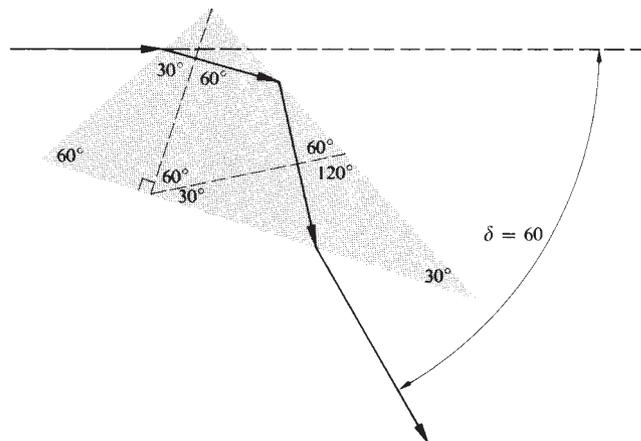


Figure 5.59 Prisme d'Abbe.

est certainement l'un des plus communs de cette catégorie. Ce type de prisme, fabriqué dans un unique bloc de verre, peut être vu comme l'association de deux prismes d'angles $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ et d'un autre prisme d'angles $45^\circ-45^\circ-90^\circ$. Dans la configuration de la figure 5.58, on voit effectivement que si un rayon de lumière monochromatique de longueur d'onde λ traverse le prisme DAE de manière symétrique, il est ensuite réfléchi à 45° sur la face AB . Continuant sa course, le rayon traverse ensuite le prisme CDB également de manière symétrique. Au final, le rayon a subi une déviation totale de 90° . Ainsi, tout se passe comme si le rayon était passé au minimum de déviation pour cette longueur d'onde et obtenu avec un prisme triangulaire classique d'angle 60° (DAE combiné avec CDB). Si le rayon est polychromatique, les autres longueurs d'onde vont effectivement émerger à des endroits différents, vu qu'à une longueur d'onde ne correspond qu'un seul minimum de déviation. On comprend aussi que si le prisme subit une légère rotation suivant un axe normal à la page du livre, le faisceau va avoir un nouvel angle d'incidence. Cette position va peut-être correspondre au minimum de déviation pour une longueur d'onde parmi celles qui sont présentes dans le faisceau. Ce minimum de déviation correspondra toujours à une déviation totale de 90° , d'où le terme de *prisme à déviation constante*. Avec un prisme de la sorte, on pourra donc, en observant toujours à 90° , sélectionner une longueur d'onde particulière grâce à la rotation précédente. L'appareil pourra même être calibré de manière à ce que la platine de rotation du prisme soit directement graduée en longueurs d'onde.

5.5.2 Prismes réflecteurs

Nous allons maintenant étudier le cas des **prismes réflecteurs** pour lesquels la dispersion n'est plus l'effet recherché. Pour ce type de prismes, le faisceau incident doit subir au moins une réflexion totale interne afin d'obtenir l'effet voulu : un changement dans la direction de propagation, dans l'orientation de l'image ou bien les deux à la fois.

Nous allons tout d'abord établir qu'il est possible d'obtenir une réflexion interne sans avoir de dispersion. En d'autres termes, δ peut-il être indépendant de λ ? Examinons le schéma de la figure 5.60 où nous observons un prisme dans la configuration commune du triangle isocèle. Le rayon réfracté sur la première interface AF est ensuite totalement réfléchi par la face FG . Comme nous l'avons vu précédemment (paragraphe 4.7), ce phénomène peut arriver si l'angle d'incidence est supérieur à un *angle critique* θ_c . Pour la réflexion interne au prisme, celui-ci est défini par :

$$\sin \theta_c = n_{ti} \quad [4.69]$$

Pour une interface verre/air, cette condition est obtenue pour un angle θ , supérieur à 42° environ. Afin d'éviter les difficultés pour des angles plus petits, supposons que la base du prisme est de toute façon recouverte d'un film d'argent réfléchissant (certains prismes nécessitent en fait cette argenture). L'angle de déviation entre le rayon incident et le rayon réfléchi est :

$$\delta = 180^\circ - \sphericalangle BED \quad (5.55)$$

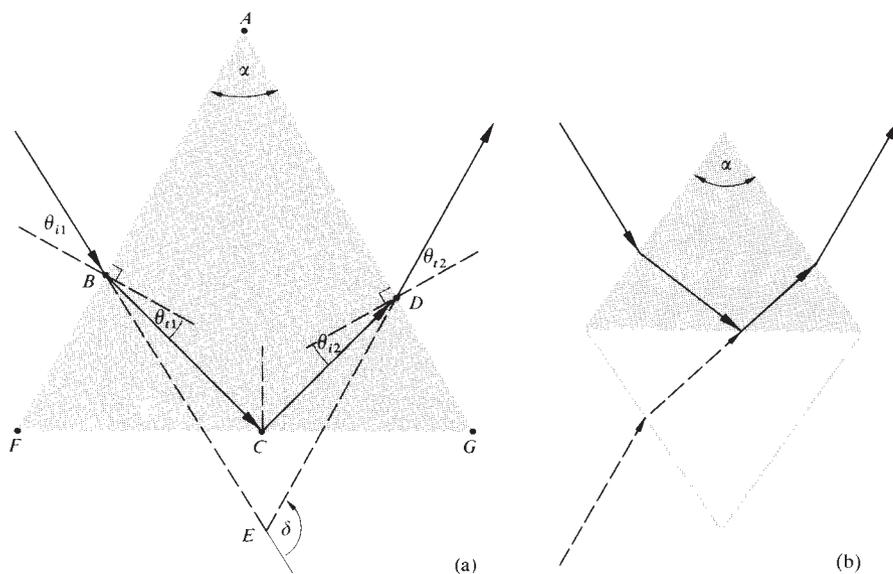


Figure 5.60 Géométrie d'un prisme en réflexion.

Or, après étude du polygone $ABED$, il ressort que :

$$\alpha + \sphericalangle ADE + \sphericalangle BED + \sphericalangle ABE = 360^\circ$$

D'autre part, on a, sur les deux interfaces du prisme :

$$\sphericalangle ABE = 90^\circ + \theta_{i1}$$

et

$$\sphericalangle ADE = 90^\circ + \theta_{i2}$$

En substituant $\sphericalangle BED$ dans l'équation (5.55), on obtient donc :

$$\delta = \theta_{i1} + \theta_{i2} + \alpha \quad (5.56)$$

Puisque le rayon incident au point C a des angles d'incidence et de réflexion égaux, $\sphericalangle BCF = \sphericalangle DCG$. Or, comme le prisme est isocèle, $\sphericalangle BFC = \sphericalangle DGC$, les triangles FBC et DGC sont semblables. Il s'ensuit que $\sphericalangle FBC = \sphericalangle CDG$, donc que : $\theta_{i1} = \theta_{i2}$. D'après la loi de Snell-Descartes, nous savons que cela est équivalent à $\theta_{i1} = \theta_{i2}$. L'expression de la déviation devient alors :

$$\delta = 2\theta_{i1} + \alpha \quad (5.57)$$

qui est tout à fait indépendante de λ et de n . La réflexion totale a donc lieu quelles que soient les longueurs d'onde et c'est pour cela que ce type de prisme est dit *achromatique*. De plus, si l'on

« déplie » le système optique que constitue le prisme, et si l'on dessine son image par la surface réfléchissante FG , on voit qu'il est optiquement équivalent, en un sens, à une lame de verre à faces parallèles (figure 5.60b). L'image du rayon incident émerge parallèle à lui-même, sans critère de longueurs d'onde.

Les figures suivantes représentent quelques-uns des nombreux types de prismes réflecteurs. Ces illustrations sont d'elles-mêmes assez significatives. Des repères schématisés sur les faisceaux incidents et émergents permettent par exemple de visualiser les effets d'orientation des images qui sont introduits par ces prismes. Structurellement, commençons par signaler que tous ces prismes sont généralement fabriqués dans du verre BSC-2 ou dans du C-1 (tableau 6.2).

Le **prisme à angle droit** (figure 5.61) provoque une déviation de 90° pour les rayons incidents normaux à sa face d'entrée. Cette transformation provoque également un renversement d'image (entre le haut et le bas). Sur la figure, on voit effectivement que la flèche noire a été retournée mais que les repères gauche et droit n'ont pas été affectés. Le prisme à angle droit constitue donc un système redresseur dont la face avant agit comme un miroir plan. Pour voir cela, on peut considérer le produit vectoriel des deux vecteurs matérialisés ici par la flèche noire et la figure en forme de sucette. La résultante est à l'origine dans le sens de propagation mais se retrouve dans l'autre sens après passage dans le prisme.

Le **prisme de Porro** (figure 5.62) est physiquement identique à un prisme à angle droit, mais il est utilisé dans une orientation différente. L'effet obtenu est une déviation de faisceau de 180° causée par une double réflexion. Une figure orientée vers la droite (dextre) va donc le rester après passage dans le prisme.

Le **prisme de Dove** (figure 5.63) est un modèle tronqué du prisme à angle droit (afin de réduire la taille et le poids de

l'ensemble) que l'on utilise presque exclusivement en lumière collimatée. Lorsqu'on lui fait subir une rotation longitudinale, ce prisme présente l'effet intéressant d'induire une rotation de l'image deux fois plus importante (problème 5.70).

Le **prisme d'Amici** (figure 5.64) est également un modèle tronqué du prisme à angle droit dont on a biseauté l'hypoténuse (*prisme en toit*). Il présente l'effet de couper une image en deux portions et d'interchanger la partie droite et la partie gauche*. Ces prismes sont très onéreux car leur fabrication doit être très minutieuse. L'angle de 90° de la « toiture » doit être taillé avec une précision de l'ordre de 3 ou 4 secondes

.....
*On peut par exemple se rendre compte de son fonctionnement en plaçant deux miroirs plans à angle droit et en regardant directement dans la combinaison. Si l'on ferme l'œil droit, c'est également celui-ci qui se ferme sur l'image. Soit dit en passant, remarquez que si la vue de l'observateur est identique sur les deux yeux, on doit voir un trait (image de la ligne de contact entre les miroirs) au niveau du milieu de chaque œil, avec le nez entre eux. Si un œil est plus fort que l'autre, on ne doit voir qu'un seul trait au milieu de cet œil. Si on le ferme, on doit observer ce trait sur l'autre œil. Il faut réaliser cette petite expérience pour se rendre compte parfaitement de son résultat.

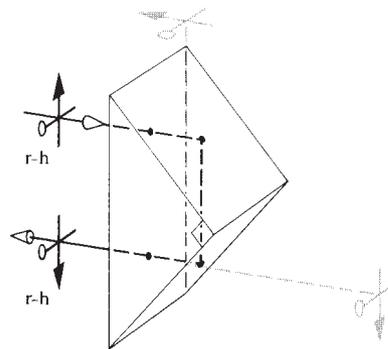


Figure 5.62 Prisme de Porro.

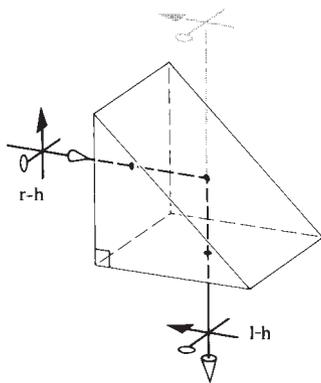


Figure 5.61 Prisme à angle droit.

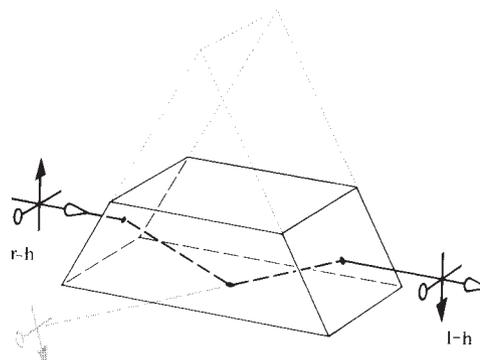


Figure 5.63 Prisme de Dove.

d'arc, sous peine d'introduire un effet de double image néfaste. Ces prismes sont souvent utilisés dans les systèmes tels que les lunettes astronomiques pour corriger le renversement introduit par les lentilles.

Le **prisme rhomboïdal** (figure 5.65) possède une base en forme de parallélogramme. Ce prisme a la propriété de déplacer la ligne de visée sans introduire de déviation angulaire ou de changement dans l'orientation de l'image.

Le **penta prisme** (figure 5.66) est un prisme à base pentagonale qui a la propriété de pouvoir faire subir à un faisceau une déviation de 90° sans affecter l'orientation de l'image. Notons que deux de ces surfaces doivent être argentées. Ces prismes sont souvent utilisés comme réflecteurs terminaux dans les jumelles.

Le **prisme de Leman-Springer** (figure 5.67) possède également une face biseautée à angle droit. Ce prisme induit un déplacement de la ligne de visée sans introduire de déviation. L'image de sortie reste dextre mais elle a subi une rotation de 180° . Cette variété de prismes peut ainsi servir à redresser les images inversées par des systèmes télescopiques, comme par exemple dans certaines lunettes de tir.

Il existe bien d'autres sortes de prismes à réflexion, adaptés à des fonctions très spécifiques. On peut par exemple citer le **prisme en coin de cube**, aux trois faces perpendiculaires, obtenu comme si l'on avait coupé la pointe d'un cube parallèlement à l'une de ses diagonales. Ces prismes ont la propriété d'être rétro-réfléchisseurs : ils réfléchissent tous les rayons incidents dans leur direction d'origine. Ces prismes présentent

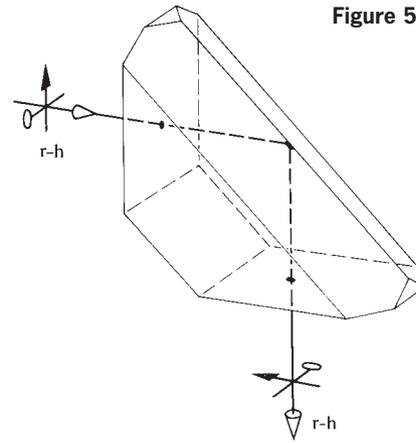


Figure 5.64 Prisme d'Amici.

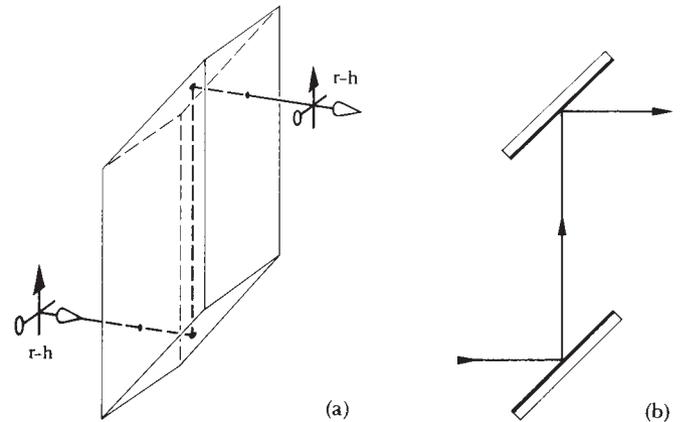
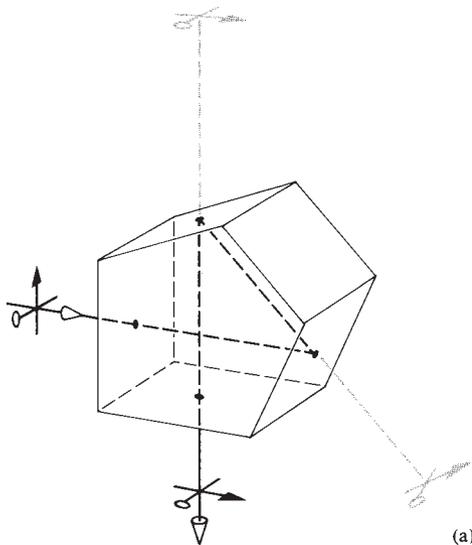
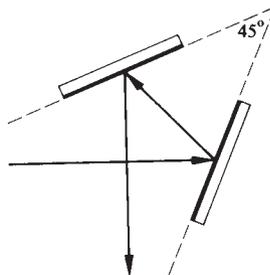


Figure 5.65 Rhomboïdre et son miroir équivalent.



(a)



(b) Figure 5.66 Pentaprisme et son miroir équivalent.

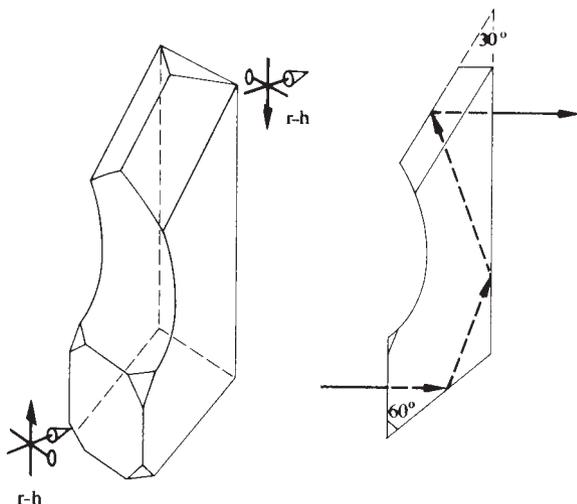


Figure 5.67 Prisme de Lemn-Springer.

donc un intérêt tout particulier pour la réflexion de signaux. Ils composent, par exemple, le réflecteur installé sur la surface de la lune par les astronautes américains d'Apollo XI, lors de leur mission de juillet 1969*.

L'un des systèmes les plus communs pour redresser une image dans le bon sens utilise également une combinaison de prismes. Il s'agit d'un système de deux prismes de Porro, comme on peut le voir à la figure 5.68. Le faisceau y subit quatre réflexions et l'image a la même orientation (droite ou gauche) que l'objet. Comme on peut le voir sur la figure 5.68, il arrive qu'on biseaute les coins et qu'on arrondisse les angles de ces prismes afin de réduire leur poids et leur taille. Dans ce cas, on creuse également une petite fente dans la face hypoténuse. Celle-ci sert à obstruer les rayons parasites provenant de réflexions internes sur les faces abrasées.

5.6 Fibres optiques

L'idée de transmettre la lumière à l'intérieur d'un câble diélectrique, en se servant du phénomène de réflexion totale, ne date pas d'hier. Dès 1870, le physicien irlandais John Tyndall

(1820-1893) démontrait qu'on pouvait contenir et guider de la lumière à l'intérieur d'un mince filet d'eau. Peu après, le même effet fut expérimenté avec des « tuyaux de lumière » en verre, puis des tubes en quartz fondu. Cependant, il fallut attendre le début des années 1950 pour que l'on réalise les premières études sérieuses sur la possibilité de transporter des images avec des faisceaux de courtes fibres de verre.

Dès les années 1960, l'avènement du laser permit de réaliser l'intérêt de transmettre de l'information grâce à la lumière, comme on le faisait avec du courant électrique ou même des micro-ondes. Les fréquences optiques étant très hautes (de l'ordre de 10^{15} Hz), il devenait possible de transmettre de très grandes quantités d'information, par exemple, cent mille fois plus qu'on pouvait le faire avec des micro-ondes. Théoriquement, cela revenait à transmettre dix millions de programmes de télévision dans un seul faisceau lumineux. Très vite (1966), l'idée vint aussi de coupler des lasers avec des fibres optiques pour réaliser des procédés de communications à longue distance. Ces quelques découvertes allaient entraîner de profondes mutations technologiques, à la base de la révolution des télécommunications qui continue encore aujourd'hui.

En 1970, des chercheurs de la société *Corning Glass Works* réussissaient à mettre au point un type de fibre en silice dont le facteur de transmission était supérieur à 1 % par km (i.e. une atténuation de 20 dB/km), comparable aux performances des fils de cuivre pour les transmissions électriques. Au cours des

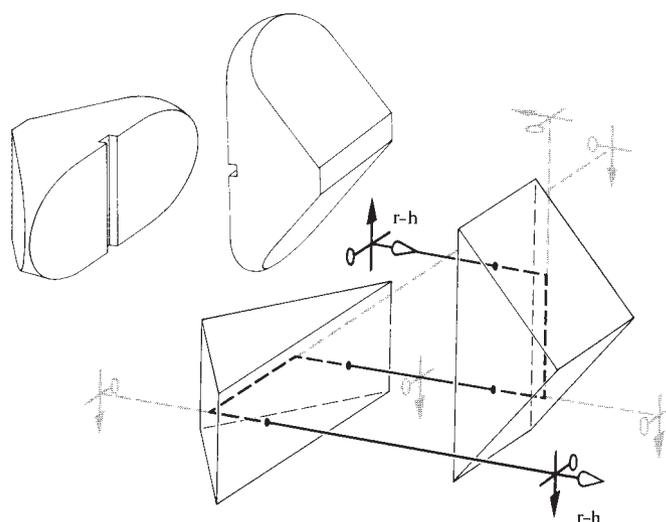


Figure 5.68 Double Porro.

* J. E. Foller et E. J. Wampler, « The Lunar Laser Reflector », *Sci. Am.*, mars 1970, p. 38.

deux décennies suivantes, cette transmission fut sans cesse améliorée jusqu'à atteindre une valeur de 96 % par km (correspondant à une atténuation de 0,16 dB/km).

De ce fait, grâce à leurs avantages étonnants : capacité à transmettre de grandes quantités d'information, peu de pertes de transmission, insensibilité aux interférences électromagnétiques, robustesse incomparable du signal, faibles dimensions et poids, faibles coûts dus à l'abondance du matériau de base (du sable ordinaire), les fibres de verre ultra-pur sont devenues le vecteur le plus important des télécommunications.

Comment se transporte la lumière à l'intérieur d'une fibre optique ? Tant que le diamètre de la fibre est grand devant la longueur d'onde de l'énergie introduite, le principe de propagation obéit aux lois de l'optique géométrique, sans tenir compte de la nature ondulatoire de la lumière. En revanche, dès que ce diamètre devient de l'ordre de λ , le mode de transmission ressemble à la manière dont se propagent les micro-ondes le long des guides d'ondes. Certains de ces modes sont évidents lorsqu'on observe la microphotographie de l'extrémité d'un faisceau de fibres, comme à la figure 5.69. Ici, il faut tenir compte de la nature ondulatoire de la lumière et l'étude de ces cas appartient au domaine de l'optique physique. Cependant, bien que les guides d'ondes optiques (particulièrement les films minces) soient d'un intérêt croissant, notre discussion se limitera ici aux cas des fibres optiques à diamètre relativement large, celles ayant environ l'épaisseur d'un cheveu.

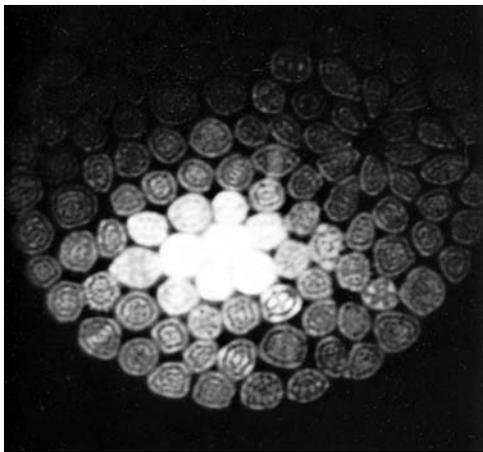


Figure 5.69 Guide d'onde optique : on distingue bien les modes véhiculés à l'extrémité de ces fibres de petit diamètre. (Photo Narinder S. Kapany, AMP Fellow.)

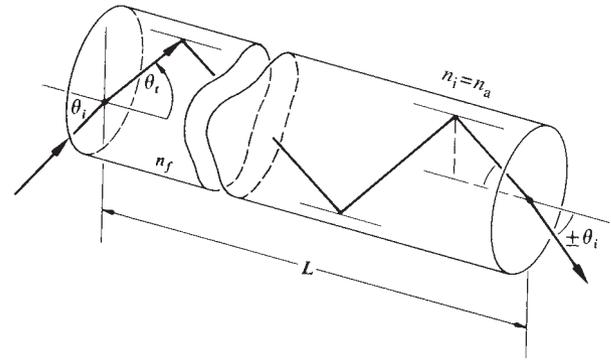


Figure 5.70 Réflexions des rayons à l'intérieur d'un cylindre diélectrique.

Considérons la figure 5.70 représentant un cylindre de verre d'indice n , entouré par un milieu que l'on suppose être de l'air : $n_i = n_a$. Afin de se propager, la lumière doit subir uniquement des réflexions totales sur les parois du cylindre. De ce fait, les angles d'incidence doivent donc être toujours supérieurs à $\theta_c = \sin^{-1} n_a/n_f$. Comme nous le montrerons, un rayon méridional (c'est-à-dire coplanaire à l'axe optique) peut subir des milliers de réflexions par mètre, en « rebondissant » sur les parois de la fibre, avant d'en atteindre l'extrémité (voir photo). Si la fibre a un diamètre D et une longueur L , le chemin optique ℓ du rayon est alors :

$$\ell = L/\cos \theta, \quad (5.58)$$



Lumière émergeant de l'extrémité d'un faisceau de fibres optiques. (Photo E.H.)

Ou bien, en utilisant la loi de Snell-Descartes :

$$\ell = n_f L (n_f^2 - \sin^2 \theta_i)^{-1/2} \quad (5.59)$$

Le nombre de réflexions N est alors donné par :

$$N = \frac{\ell}{D/\sin \theta_i} \pm 1$$

Et donc :

$$N = \frac{L \sin \theta_i}{D(n_f^2 - \sin^2 \theta_i)^{1/2}} \pm 1 \quad (5.60)$$

qui doit être arrondi au nombre entier le plus proche. Le terme correcteur ± 1 , qui dépend de l'endroit par lequel ressort le rayon sur la face de sortie, n'est pas significatif lorsque N est grand, ce qui est vrai en pratique. Ainsi, si $D = 50 \mu\text{m}$ (approximativement le diamètre d'un cheveu humain), $n_f = 1,6$ et $\theta_i = 30^\circ$, on trouve pour N une valeur supérieure à 6 500 réflexions par mètre. Les fibres optiques d'usage courant ont en fait un diamètre supérieur ou égal à $10 \mu\text{m}$. Il existe encore des fibres de diamètre plus petit (jusqu'à $2 \mu\text{m}$). Celles-ci, réalisées en verre ou en plastique, sont très souples et peuvent même être tressées.

Pour ne pas perturber le phénomène de réflexion totale (par l'intermédiaire d'un changement de gradient d'indice entre la fibre et le milieu extérieur), on comprend que les fibres optiques doivent rester propres (humidité, poussière, huile, etc.). Pour les mêmes raisons, il s'agit de prendre des précautions particulières lorsqu'un grand nombre de fibres sont rassemblées en faisceau, très proches l'une de l'autre, comme dans la plupart des câbles à fibres optiques. En effet, de la lumière provenant d'une fibre peut s'introduire dans une autre (phénomène parasite connu sous le nom de *cross-talk* ou *diaphotie*) et provoquer des interférences de signal. Pour cette raison, chaque fibre est généralement recouverte d'une **gaine** de matériau transparent d'indice moins élevé (« *cladding* »). Cette couche doit être suffisamment épaisse pour garantir une bonne isolation et, en pratique, elle occupe



Un faisceau cohérent de fibres optiques de $10 \mu\text{m}$: même fortement plié, il transmet une image.
(Photo American ACMI Div., American Hospital Supply Corp.)

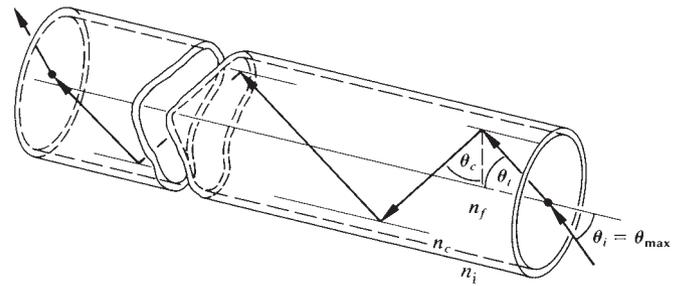


Figure 5.71 Rayons dans une fibre gainée.

généralement environ un dixième de la surface totale de la section de la fibre. Ce gainage des fibres optiques a une importance toute particulière. Si les premières références aux simples « *tubes* » de lumière datent d'une centaine d'années, c'est l'introduction des fibres gainées, en 1953, qui a marqué le véritable avènement de cette technologie.

Typiquement, une fibre est donc composée de deux parties : le cœur, d'indice n_f de 1,62 et la gaine, d'indice n_c inférieur, (généralement égal à 1,52). La figure 5.71 représente la structure schématique d'une fibre gainée. Notons qu'il existe une valeur maximale θ_{\max} de θ_i pour laquelle un rayon intérieur se réfléchit avec l'angle critique θ_c . Les rayons arrivant sur cette face avec des angles supérieurs à θ_{\max} se réfléchissent donc sur les parois internes de la fibre avec des angles inférieurs à θ_c . À chaque impact avec l'interface cœur/gaine, ceux-ci sont donc partiellement réfléchis et ils s'atténuent rapidement. θ_{\max} est défini comme étant l'angle d'acceptance, égal au demi-angle du cône délimitant la lumière incidente qui pourra être propagée par la fibre. On a en fait :

$$\sin \theta_c = n_c/n_f = \sin (90^\circ - \theta_i)$$

et donc $n_c/n_f = \cos \theta_i$ (5.61)

ou bien $n_c/n_f = (1 - \sin^2 \theta_i)^{1/2}$

En utilisant la loi de Snell-Descartes et en réarrangeant les termes, on obtient :

$$\sin \theta_{\max} = \frac{1}{n_i} (n_f^2 - n_c^2)^{1/2} \quad (5.62)$$

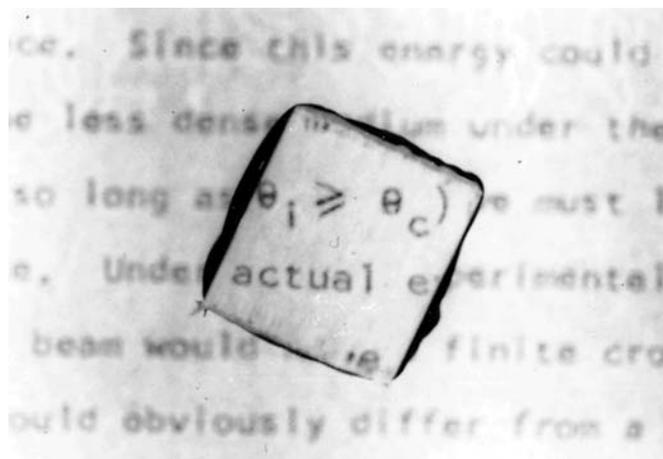
La quantité $n_i \sin \theta_{\max}$ est définie comme étant l'**ouverture numérique** (ON ou NA pour le terme anglophone *numerical aperture*). Le carré de cette grandeur est une mesure de la capacité du système à laisser entrer la lumière. Ce terme provient en fait de la microscopie, où l'expression équivalente décrit la même capacité pour un objectif d'instrument optique. On le relie en fait très facilement au *nombre d'ouverture* $f/\#$:

$$f/\# = \frac{1}{2(\text{NA})} \quad (5.63)$$

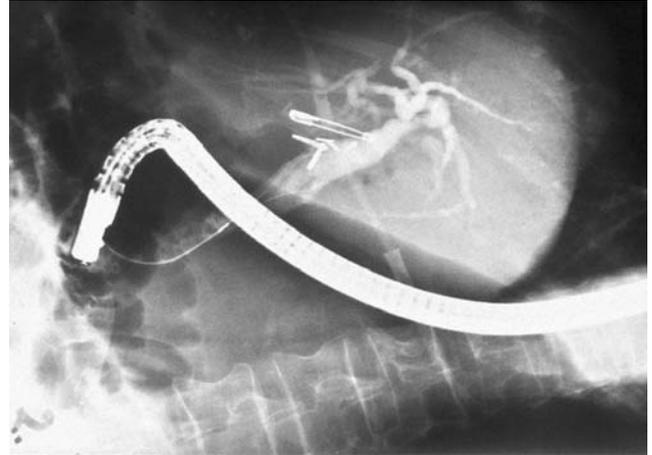
Ainsi, pour une fibre :

$$\text{NA} = (n_f^2 - n_c^2)^{1/2} \quad (5.64)$$

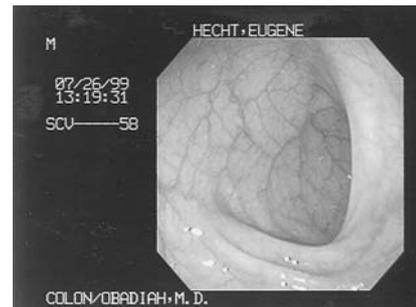
La partie gauche de l'équation (5.62) ne peut dépasser 1, car dans l'air ($n_a = 1,00028 \approx 1$), ce qui entraîne que la valeur maximale de NA est 1. Dans ce cas, le demi-angle θ_{\max} est égal à 90° , ce qui signifie que la fibre peut propager par réflexion totale tout rayon arrivant sur sa face d'entrée (problème 5.71). On trouve en fait dans le commerce des fibres possédant une large gamme d'ouvertures numériques allant de 0,2 à 1 inclus.



Un empilement de lames de microscope pris de côté illustre bien le principe des mosaïques cohérentes de fibres optiques. (Photo E.H.)



Cette radiographie montre un colonoscope utilisé pour examiner le colon d'un patient.



Exemple d'image détaillée que l'on peut obtenir avec un colonoscope à fibres optiques.

La plupart du temps, on utilise des faisceaux (ou *gerbes*) de fibres optiques, dont les extrémités sont collées (avec de la colle époxy), limées et polies, et qui forment ainsi des guides de lumière flexibles. Si les fibres ne sont pas agencées en ordre, le faisceau est dit « *incohérent* ». Ce terme, relativement maladroit ici, (il ne doit pas être mis en rapport avec la théorie de la cohérence de la lumière), signifie simplement qu'une fibre située en haut sur la face d'entrée du faisceau pourra être située n'importe où sur la face de sortie. La fonction principale est donc ici de conduire simplement de la lumière d'un endroit à un autre. Ces types de tubes optiques flexibles, « *transporteurs de lumière* », sont relativement aisés à fabriquer et peu onéreux. D'autre part, si les fibres sont agencées de telle sorte qu'elles gardent leurs positions

relatives sur les deux terminaisons, l'ensemble est dit « *cohérent* ». De tels arrangements sont donc capables de transmettre des images sans les altérer. Il s'agit alors de câbles flexibles « *transporteurs d'image* ».

Les faisceaux cohérents sont généralement fabriqués en dévidant les fibres sur un cylindre afin d'en faire des rubans. Ceux-ci sont ensuite disposés en couches agencées avec une grande attention. On comprend alors comment ces agencements de fibres peuvent transporter une image. En effet, lorsqu'une extrémité de l'un de ces assemblages est placée en contact avec la surface de l'objet, une image *point par point* est visible sur l'autre extrémité du faisceau (voir photo). Si l'on dispose une petite lentille à l'entrée des fibres, celle-ci n'a même plus besoin d'être en contact avec l'objet pour en faire l'image. C'est ce principe qu'exploitent les appareils imageurs à fibres optiques dont on se sert pour observer des endroits difficiles d'accès ou dangereux comme l'intérieur des réacteurs nucléaires, les moteurs d'avion, les estomacs ou les organes sexuels. Lorsqu'ils sont utilisés pour explorer les organes du corps humain, on parle d'« *endoscopes* », de « *bronchoscopes* » (pour les bronches), « *colonoscopes* » (pour le colon), « *gastrosopes* » (pour l'estomac), etc., tous inférieurs à deux mètres de long. En comparaison, les mêmes appareils à usage industriel sont souvent deux à trois fois plus longs et peuvent contenir entre 5000 et 50 000 fibres, en fonction de la résolution que l'on veut obtenir et du diamètre que l'on peut faire passer. En plus du câble cohérent imageur, signalons également que ces appareils comportent souvent un câble incohérent, chargé d'assurer l'éclairage de la scène à observer.

Les systèmes de fibres optiques ne sont pas tous flexibles. Il existe notamment des plaques rigides de fibres cohérentes, ou *mosaïques*. Celles-ci sont, par exemple, utilisées pour remplacer les feuilles de verre basse résolution des tubes cathodiques, dans les vidicons, dans les intensificateurs d'image ou autres dispositifs. Ces mosaïques peuvent être composées de millions de fibres gainées, soudées ensemble. Elles ont des propriétés mécaniques très proches d'un morceau de verre homogène. Elles ont de multiples applications. Certains blocs de mosaïques, « *évasés* », possèdent par exemple une face plus étendue que l'autre et peuvent servir à agrandir ou diminuer une image, selon que la lumière entre par l'une ou l'autre des faces. Le principe est alors le même que celui de l'œil composé des insectes, comme la mouche, qui est lui-même composé d'un faisceau d'un grand nombre de fibres optiques. Cela est d'ailleurs à rapprocher des cellules cônes et bâtonnets de l'œil humain qui canalisent, encore par réflexion totale, la lumière projetée sur la rétine. On peut également utiliser les mosaïques

en tant qu'*aplanisseur de champ*. Si l'image issue d'un système optique se forme sur une surface incurvée, il est souhaitable de la rendre plane, pour pouvoir par exemple l'adapter à une plaque photosensible. On peut alors limer et polir la face d'entrée d'une mosaïque afin qu'elle corresponde au plan de l'image alors que la face de sortie sera en contact avec le détecteur. Signalons enfin pour l'anecdote que l'on trouve dans la nature un cristal fibreux, l'ulexite, qui une fois poli, se comporte exactement comme une mosaïque de fibres optiques (certains magasins de perles en vendent pour fabriquer des petits bijoux).

L'effet du transport de la lumière par des mosaïques est très particulier. Si vous ne disposez pas de tels objets ou d'un cristal d'ulexite, vous pouvez en avoir un aperçu en regardant par les bords d'un empilement de lames de microscope. C'est encore mieux (voir photo) si vous disposez de lamelles de microscope, qui sont encore plus fines (0,18 mm).

À l'heure actuelle, on emploie les fibres optiques dans trois applications très différentes. Elles sont d'abord utilisées pour la transmission directe (courte distance) d'image ou d'éclairage (endoscopes...). Elles constituent également des guides d'ondes très performants pour les télécommunications. Elles sont enfin le constituant principal d'une nouvelle catégorie de détecteurs. En tant que support pour transmettre des images, il est effectivement peu rentable d'utiliser les fibres optiques cohérentes dès que les distances dépassent quelques mètres. On peut en revanche utiliser les fibres pour transmettre, sur de grandes distances, de l'information lumineuse codant des sons ou des images. Le potentiel de la fibre optique faisant voyager de la lumière a d'ailleurs fait que celle-ci a dorénavant remplacé le fil de cuivre et l'électricité comme premier support pour transmettre de l'information.

À partir des années 1970, 100 millions de kilomètres de fibres furent ainsi installés sur les continents ou au fond des océans. Et à l'heure actuelle, il est estimé que les fibres optiques installées chaque jour suffiraient à entourer plusieurs fois le globe terrestre. En ce qui concerne leur performance individuelle, il n'est d'ailleurs pas extravagant de dire, que d'ici une dizaine d'années, les capacités de débit d'information d'une seule fibre dépasseront cent téraoctets par seconde ($100 \text{ Tb/s} = 100 \times 10^{12} \text{ b/s}$). Enfin, il faut mentionner les nouveaux appareils de détection à fibres optiques permettant de mesurer des pressions, des sons, des températures, des intensités, des tensions, des champs électriques ou magnétiques, des rotations ou des niveaux de liquide, etc. Ceux-ci constituent la dernière manifestation de la grande polyvalence des fibres optiques.

5.6.1 Télécommunications par fibres optiques

On comprend que les fréquences optiques très élevées constituent un formidable potentiel pour transmettre de l'information à très haut débit très rapidement. Commençons par donner quelques ordres de grandeur. Avec les technologies les plus modernes, une paire de fils de cuivre, type fil téléphonique, peut transmettre deux douzaines de conversations simultanées. En comparaison, une transmission de télévision est équivalente, en termes de quantité d'information, à 1 300 conversations téléphoniques simultanées (ou bien à la transmission de 2 500 pages dactylographiées par seconde). On comprend alors pourquoi il est peu envisageable de transmettre de l'information télévisuelle par lignes téléphoniques en cuivre. Les fibres optiques sont, en revanche, bien moins limitées. Déjà, vers le milieu des années 1980, il était possible de transmettre plus de 12 000 conversations téléphoniques simultanées (soit plus de neuf programmes de télévision) à travers *une seule paire* de fibres optiques. Ces fibres possèdent des capacités de débit de 400 millions de bits par seconde (400 Mb/s). Ce sont elles (munies de répéteurs tous les 40 km) qui constituent le réseau mondial actuel des télécommunications interurbaines mondiales. Au début des années 1990, les chercheurs employant des **solitons**, impulsions lumineuses qui se propagent sans se déformer, ont réussi à atteindre des taux de transmission d'environ 4 Gb/s. Cela est équivalent à la retransmission de quelques 70 programmes de télévision en couleur pouvant être envoyés sur plus d'un million de kilomètres.

Le premier câble à fibres optiques transatlantique, le TAT-8, permet de transmettre 40 000 conversations téléphoniques simultanées. En comparaison, le premier câble transatlantique TAT-1, réalisé en cuivre et posé en 1956, n'avait qu'une capacité de 51 conversations et le TAT-7 (1983), dernier câble transatlantique en cuivre, ne pouvait en supporter que 8 000. Mis en fonction en 1988, le TAT-8 fonctionne à 296 Mb/s (en utilisant des fibres monomodes à 1 300 nm – p. 207). La ligne comporte des régénérateurs ou des répéteurs (pour renforcer le signal) environ tous les 50 km. Ces dispositifs sont extrêmement importants pour les télécommunications à longue distance. Les systèmes filaires ordinaires nécessitent par exemple des répéteurs pratiquement tous les kilomètres, chiffre qui s'étend entre 2 et 6 km pour les réseaux à câbles coaxiaux. Même les transmissions radio à travers l'atmosphère doivent être régénérées tous les 30 à 50 km. Pour les fibres optiques, les répéteurs utilisés jusqu'au milieu des années 1990 étaient des hybrides électro-optiques. Ceux-ci convertissaient le signal optique affaibli en signal électrique qui était lui-même amplifié

puis reconverti en signal optique et injecté dans la fibre avec des lasers à semi-conducteurs.

Les répéteurs sont essentiels pour lutter contre l'*atténuation* du signal au cours de sa propagation. Leurs espacements sont d'ailleurs déterminés par ce **taux d'atténuation**. Pour caractériser celui-ci, on emploie généralement le décibel (dB), qui est l'unité couramment utilisée pour comparer l'intensité d'un signal d'entrée P_i et d'un signal de sortie P_o . On a alors un nombre de dB = $-10 \log (P_o/P_i)$. Un ratio de 1/10 correspond donc à 10 dB ; 1/100 correspond à 20 dB, 1/1 000, 30 dB et ainsi de suite. L'atténuation (α) est usuellement exprimée en décibels par kilomètres (dB/km) pour une longueur de fibre (L). Ainsi, $-\alpha L/10 = \log (P_o/P_i)$, ce qui donne donc :

$$P_o/P_i = 10^{-\alpha L/10} \quad (5.65)$$

En règle générale, on considère que le signal doit être réamplifié lorsque son intensité a diminué d'un facteur 10. L'atténuation dépend bien sûr de la nature du matériau. Pour du verre optique commercial, celle-ci est d'environ 1 000 dB/km. Cela signifie donc qu'au bout d'un kilomètre, l'intensité de la lumière transmise par une fibre réalisée avec ce verre a donc chuté d'un facteur 10^{-100} . Dans ce cas, il faudrait avoir un répéteur tous les 50 mètres (ce qui est à peine meilleur que le « téléphone » d'enfant réalisé avec deux timbales et une ficelle). Au début des années 1970, la meilleure atténuation était de 20 dB/km, obtenue avec de la silice fondue (quartz, SiO_2) et elle fut réduite à environ 0,16 dB/km en 1982. Ces progrès spectaculaires furent obtenus principalement en éliminant les impuretés du matériau (particulièrement les ions fer, nickel et cuivre) et en réduisant la contamination des groupements OH (obtenus principalement en éliminant scrupuleusement toute trace d'eau présente dans le verre – p. 78). De nos jours, les fibres optiques les plus pures peuvent transmettre un signal jusqu'à 80 km sans réamplification.

À la fin du xx^e siècle, deux innovations majeures ont permis d'accroître considérablement les capacités de transmission des fibres optiques sur de longues distances. La première fut l'introduction des **amplificateurs à fibres dopées à l'erbium** (*Erbium Doped Fiber Amplifier*, **EDFA**). Celles-ci sont des fibres monomodes dont les cœurs sont dopés avec des ions d'éléments de la famille des terres rares (lanthanides), en particulier l'erbium, à raison de 100 à 1 000 ppm. Ceux-ci possèdent effectivement des propriétés intéressantes au niveau de leur structure électronique. Les ions erbium peuvent être excités (ou « pompés ») à différentes longueurs d'onde. Cette étape est accomplie à l'aide

de diodes laser de 200 mW émettant par exemple à 980 nm pour le maximum d'inversion et 1480 nm pour le maximum d'efficacité quantique. Étant dans un état excité, les ions erbium se désexcitent par émission stimulée et libèrent de l'énergie photonique à des fréquences induites par celles du signal affaibli. Les photons ainsi libérés contribuent par là même à renforcer le flux initial (quelques milliwatts) et cela pour une large gamme de fréquences simultanément. Un EDFA se présente donc comme un segment de quelques mètres de fibre dopée à l'erbium sur laquelle arrivent à la fois le signal d'information et le signal du laser de pompe. La mise au point de ces amplificateurs a permis d'éliminer le goulet que constituait la précédente génération de répéteurs électroniques hybrides.

La seconde innovation majeure fut l'introduction d'un nouveau procédé de transfert de l'information appelé **multiplexage dense en longueurs d'onde** (DWDM pour *Dense Wavelength Division Multiplexing*). Le terme « multiplexage » désigne l'utilisation d'un seul canal pour transmettre simultanément plusieurs signaux indépendants les uns des autres. À l'heure actuelle, cette technique permet d'utiliser simultanément sur une fibre jusqu'à 160 canaux optiques transportant des signaux à des fréquences (longueurs d'onde)

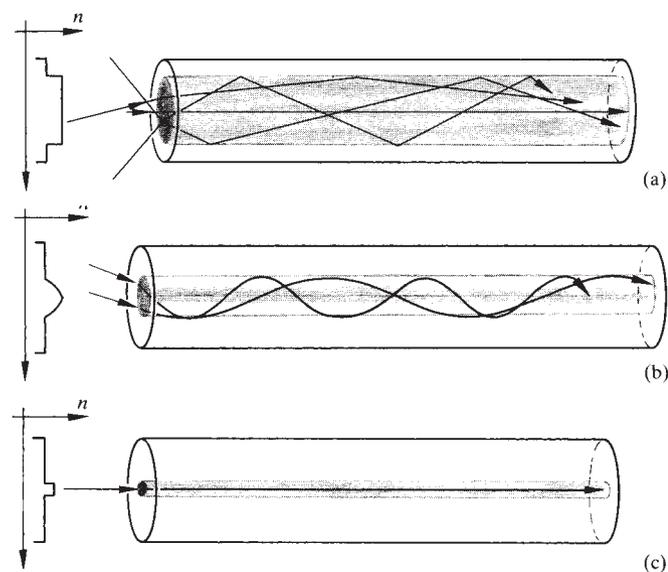


Figure 5.72 Les trois configurations principales des fibres optiques et leurs profils d'indice : (a) Fibre multimode à saut d'indice, (b) fibre multimode à gradient d'indice, (c) fibre monomode à saut d'indice.

différentes. Bientôt, il est probable qu'on pourra obtenir jusqu'à 1 000 canaux par fibre optique. En pratique, les canaux ont chacun une capacité de débit d'information de 10 Gb/s et ils sont espacés entre eux de 50 à 100 GHz. La technologie DWDM est déjà utilisée depuis un certain temps. Les câbles transatlantiques les plus récents sont ainsi constitués de quatre paires de fibres optiques qui ont une capacité individuelle de 48 canaux DWDM pour un débit de 10 Gb/s. Ces câbles ont donc une capacité globale de $4 \times 48 \times 10$ Gb/s, c'est-à-dire 1,9 Tb/s. Des réseaux commerciaux à 40 Gb/s par canal sont déjà en service.

La figure 5.72 représente les trois principales configurations de fibres utilisées aujourd'hui pour les télécommunications. Le schéma (a) représente une **fibre à saut d'indice**, caractérisée par un cœur transparent d'indice constant (épaisseur de 50 à 200 μm) et une gaine sombre. Il y a alors réflexion du rayon lumineux à la frontière entre les deux matériaux. Ce type de fibre fut utilisé dans les systèmes de première génération (1975-1980). Du fait de la relativement grande largeur du cœur, la lumière y est aisément injectable et elle est identiquement facile à coupler ou à interrompre. C'est aussi la moins onéreuse des trois sortes de fibres. Néanmoins, c'est également la moins efficace et elle possède de sérieux désavantages pour la propagation d'information à longue distance.

Selon l'angle d'incidence à l'entrée de la fibre, on peut y injecter des centaines, voire des milliers de rayons différents. Ceux-ci vont suivre des chemins optiques (ou « modes ») différents suivant lesquels l'énergie va pouvoir se propager dans la fibre (figure 5.73). Une telle fibre constitue de fait ce que l'on appelle une **fibre multimode**, où chaque mode correspond à un temps de parcours légèrement différent. Les rayons

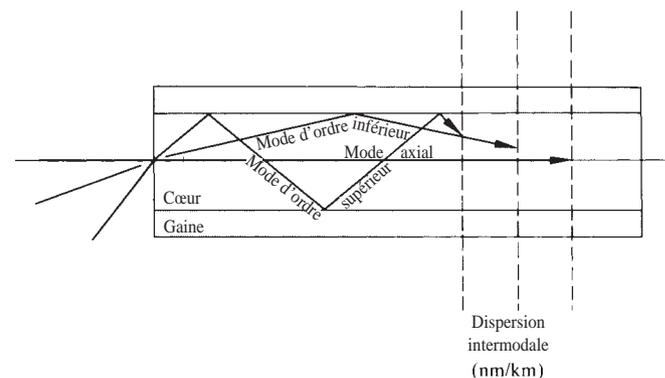


Figure 5.73 Dispersion intermodale dans une fibre multimode à saut d'indice.

possédant à l'entrée l'angle le plus ouvert voyagent plus longtemps du fait de leurs multiples réflexions entre le cœur et la gaine. Ils mettent donc plus de temps à atteindre la sortie de la fibre que les rayons proches de l'axe. Cela entraîne logiquement ce que l'on appelle une **dispersion intermodale** (ou plus simplement « *dispersion modale* »), bien que cela n'ait aucun rapport avec la dispersion des fréquences due à l'indice de réfraction du matériau. Cela peut être très gênant dans la propagation d'information. En effet, celle-ci est codée sous forme de millions d'impulsions (ou bits) lumineuses par seconde avant d'être envoyée dans la fibre. Comme chacune d'entre elles a un temps de parcours différent, un signal d'entrée parfaitement rectangulaire se déforme rapidement au bout de quelques kilomètres (figure 5.74).

Posons $\Delta t = t_{\max} - t_{\min}$, le temps de retard à l'arrivée entre le rayon le plus rapide (axial) et le rayon le plus lent (le plus incliné). Le calcul de t_{\min} revient simplement à diviser la longueur de la fibre L par la vitesse de la lumière dans le matériau. On a alors :

$$t_{\min} = \frac{L}{v_f} = \frac{L}{c/n_f} = \frac{Ln_f}{c} \quad (5.66)$$

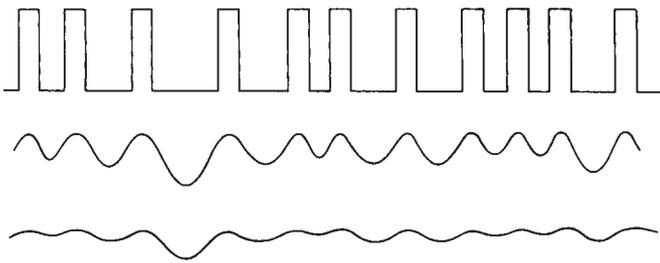


Figure 5.74 Impulsions rectangulaires déformées par une dispersion croissante : notez comment deux impulsions rapprochées se dégradent plus rapidement.

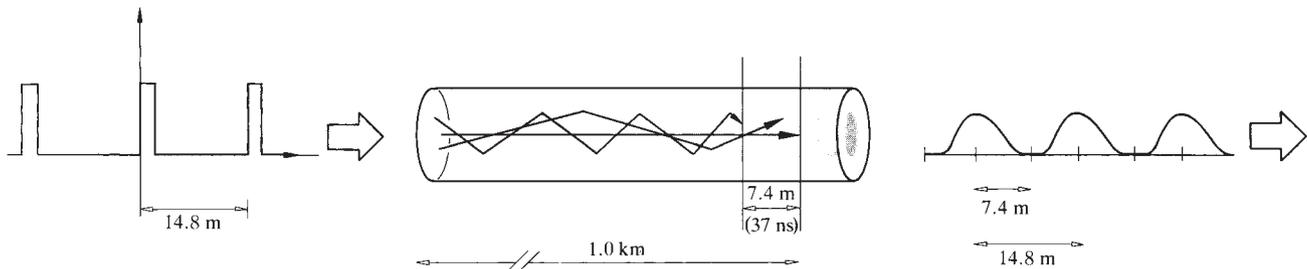


Figure 5.75 Étalement d'un signal incident dû au phénomène de dispersion intermodale.

La longueur du chemin non axial (ℓ), donné par l'équation (5.58), est maximale lorsque le rayon est orienté suivant l'angle critique, exprimé par l'équation (5.61). En combinant les deux, on obtient : $\ell = Ln_f/n_c$ et donc :

$$t_{\max} = \frac{\ell}{v_f} = \frac{Ln_f/n_c}{c/n_f} = \frac{Ln_f^2}{cn_c} \quad (5.67)$$

En soustrayant l'équation (5.66) à l'équation (5.67), on obtient donc :

$$\Delta t = \frac{Ln_f}{c} \left(\frac{n_f}{n_c} - 1 \right) \quad (5.68)$$

Supposons par exemple que $n_f = 1,500$ et $n_c = 1,489$. Le retard, $\Delta t/L$, est donc égal à 37 ns/km. En d'autres termes, un pic de lumière injectée à l'entrée de la fibre va s'élargir de 37 ns par kilomètre traversé. Comme la lumière voyage dans la fibre à la vitesse de $v_f = c/n_f = 2,0 \times 10^8$ m/s, cela correspond à une déformation spatiale de 7,4 m/km. Or, pour être sûr de pouvoir décoder le signal transmis, il s'agit d'avoir entre deux pics une séparation spatiale (ou temporelle) au moins deux fois plus grande que l'épaisseur d'étalement d'un pic (figure 5.75). Imaginons alors que la ligne fasse 1,0 kilomètre de long. Dans ce cas, chaque impulsion a, à la sortie, une longueur de 7,4 m et l'on veut donc avoir au moins 14,8 m entre deux impulsions. De ce fait, les impulsions doivent être séparées d'au moins 74 ns, ce qui correspond à un débit maximal de 13 millions d'impulsions par seconde. On comprend ainsi pourquoi la dispersion intermodale (typiquement de l'ordre de 15 à 30 ns/km) limite la fréquence du signal d'entrée et donc le débit d'information du système. C'est pour cela que ces fibres multimodes à saut d'indice ne sont plus guère utilisées que pour les télécommunications à faible vitesse, sur des distances courtes.

On utilise essentiellement des fibres épaisses pour la transmission d'images ou l'éclairage. Leur gros diamètre permet

aussi de faire transiter, sans dommage, des faisceaux laser de haute énergie.

Le problème de la différence de temps de parcours peut être considérablement réduit en utilisant des **fibres multimodes à gradient d'indice** (figure 5.72b). Dans celles-ci, l'indice diminue graduellement du centre à la gaine. Cette différence progressive d'indice fait que les rayons ne zigzaguent plus brutalement comme précédemment, mais qu'ils ondulent autour de l'axe central. Parce que l'indice de réfraction est plus élevé au centre de la fibre, les rayons qui suivent le plus court chemin sont ralentis alors que les rayons passant par les bords vont plus vite, mais sur un chemin plus long. Le résultat est que les rayons restent groupés dans le temps. En pratique, les fibres à gradient d'indice ont un diamètre de cœur compris entre 20 et 90 μm pour une dispersion intermodale d'environ 2 ns/km. D'un prix intermédiaire, elles sont largement utilisées pour les télécommunications interurbaines à moyennes distances.

Les fibres multimodes dont les cœurs ont un diamètre supérieur de 50 μm ou plus sont souvent alimentées avec des diodes électroluminescentes (LEDs pour « *Light Emitting Diodes* »). Ces composants peu onéreux sont utilisés communément dans le cadre des transmissions à faible débit sur de courtes distances. Cependant, l'un de leurs inconvénients est qu'elles émettent une assez large gamme de fréquences. Or, l'indice du matériau constituant la fibre est fonction de la longueur d'onde. Il s'ensuit un phénomène de « *dispersion spectrale* » ou « *dispersion chromatique* », qui peut constituer un facteur limitant. On peut éviter ce problème en utilisant des faisceaux laser spectralement très purs. Alternativement, on peut aussi travailler à des longueurs d'onde proches de 1,3 μm où la silice a une dispersion assez faible (figure 3.40 et figure 3.41).

La meilleure solution au phénomène de dispersion intermodale est apportée par la dernière catégorie de fibres optiques. L'idée est d'avoir un cœur extrêmement fin (moins de 10 μm) de manière à ce qu'un seul mode, correspondant au rayon parallèle à l'axe central, puisse se propager. Ces **fibres monomodes** (figure 5.72c), réalisées en verre extrêmement pur, peuvent être à saut ou à gradient d'indice. Typiquement, elles possèdent un cœur dont le diamètre est compris entre 2 et 9 μm (de l'ordre de grandeur de 10 longueurs d'onde). Pratiquement, ces fibres fonctionnent à des longueurs d'onde de 1,55 μm où leur atténuation est de l'ordre de 0,2 dB/km (0,1 dB/km étant la valeur idéale que l'on puisse obtenir avec de la silice). Bien qu'elles soient relativement onéreuses et qu'elles nécessitent des sources laser, ces fibres sont de loin les plus performantes, ce qui explique qu'elles soient devenues le

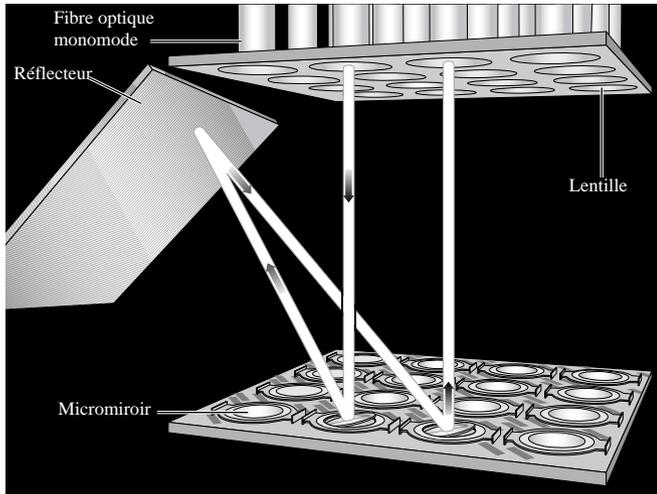
premier vecteur d'information pour les télécommunications sur longues distances. Ce sont ces fibres qui permettent quotidiennement de connecter votre ordinateur personnel au réseau mondial des télécommunications.

« Surfer » sur Internet demande d'aiguiller très rapidement de vastes quantités de données entre les canaux optiques. À la fin des années 1990, cette tâche était accomplie dans des centrales réseau, où les impulsions de lumière étaient converties en impulsions électriques qui pouvaient donc être redirigées électroniquement. Ces signaux étaient alors reconvertis sous forme de lumière afin de continuer leur trajet. Malheureusement, les *commutateurs* (*switches*) électroniques sont encombrants, coûteux et relativement lents ; ils ne sont pas à la hauteur des demandes futures. Jusqu'à très récemment, on n'avait que peu d'espoir de supprimer ces goulets d'information. À la fin du xx^e siècle, les progrès de la photonique ont cependant permis la mise au point de commutateurs optiques.

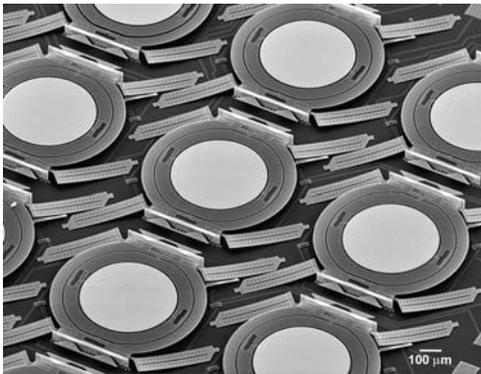
La figure 5.76 représente l'un de ces commutateurs « tout optique » utilisant la technologie **MOEMS** (pour « *Micro-OptoElectroMechanical Systems* », p. 185). Ce composant réalise l'aiguillage de l'information entre deux câbles optiques pouvant rassembler des centaines de fibres monomodes. Lorsqu'une impulsion lumineuse arrive à la sortie d'une fibre amont, elle rencontre une microlentille qui la focalise sur un micro miroir (de seulement 0,5 mm de diamètre) dont l'orientation, contrôlée électroniquement, peut varier en quelques millisecondes. L'impulsion est ensuite réfléchi sur un réflecteur, puis rencontre un second micromiroir orientable qui la réinjecte finalement dans la fibre aval voulue. Les **commutateurs MOEMS** sont déjà en service sur le réseau mondial. On prévoit également qu'ils deviendront l'un des composants déterminants du futur système de télécommunications pétabits (10^{15} b/s). Avec un réseau mondial purement optique, il est probable que la télévision, Internet et le téléphone prendront dans quelques années des dimensions encore inimaginables.

Optique capillaire

On a vu que le principe général de fonctionnement des fibres optiques reposait sur une réflexion totale interne du rayonnement (de fréquence relativement basse : visible ou IR) sur l'interface de deux matériaux d'indices différents. Le résultat est qu'elles constituaient des guides d'ondes solides pour ces fréquences. De la même manière, les ondes électromagnétiques de haute fréquence, en particulier les rayons X, peuvent être confinées par réflexion totale (p. 128) sur une interface



(a)



(b)

Figure 5.76 (a) Schéma de principe d'un commutateur optique, utilisant des miroirs orientables pour rediriger des impulsions de lumière. (b) Réseau de miroirs orientables. (Photo Lucent Technologies' Bell Laboratories.)

air/verre (et non plus une interface verre/air). L'angle critique, mesuré à partir de la surface, n'est typiquement que de $0,2^\circ$ pour des rayons X de 10 keV ($\approx 0,12$ nm). La figure 5.77 montre comment un tel faisceau suit la courbure d'un tube capillaire creux grâce à des réflexions multiples sous incidence rasante sur l'interface air/verre. Par d'autres méthodes que celle-ci, dévier des rayons X est un vrai casse-tête.

On peut réaliser des composants de 300 à 600 μm de diamètre contenant des milliers de tubes capillaires de 3 à 50 μm de diamètre (voir photo). Avec un grand nombre de ces composants, on peut directement agir sur la trajectoire de rayons X en

manipulant le faisceau de tubes capillaires (figure 5.78). On peut ainsi arriver à focaliser ou à collimater des rayons X avec des qualités que l'on ne savait pas obtenir auparavant.



Figure 5.77 Multiples réflexions à incidence rasante de rayons X dans un microtube de verre

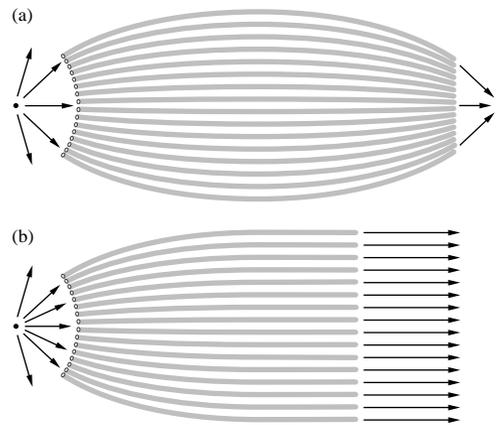
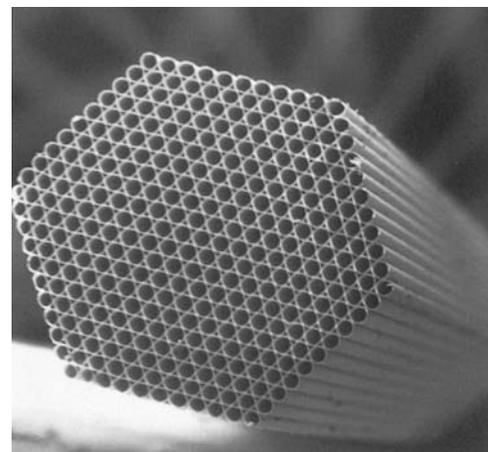


Figure 5.78 Faisceau de microtubes utilisé pour (a) focaliser ou (b) collimater les rayons X émis par un point source.



Microphotographie (réalisée par balayage d'électrons) d'un cristal constitué de centaines de microtubules. (Photo X-Ray Optical Systems, Inc. Albany, NY, USA.)

5.7 Systèmes optiques

Les connaissances que nous avons acquises sur les principes de l'optique géométrique et la théorie paraxiale nous permettent à présent d'étudier plus en détail certains systèmes optiques parmi les plus courants. Il est sûr que les subtilités du contrôle des aberrations sont extrêmement importantes et qu'elles se situent au-delà de cette discussion. Cependant, il est possible de construire, par exemple, un télescope (qui ne sera peut-être pas excellent, mais qui sera un télescope tout de même) en s'en tenant aux conclusions issues de la théorie du premier ordre.

Commentons notre étude avec la description de l'instrument optique le plus courant : l'œil.

5.7.1 L'œil

Avant d'aller plus loin, signalons qu'on peut distinguer trois catégories d'œil. Certains yeux forment les images à l'aide d'un seul système centré composé de lentilles. D'autres utilisent une structure à plusieurs facettes composée d'un grand nombre de petites lentilles (ils canalisent la lumière comme dans des fibres optiques). Les plus rudimentaires sont enfin ceux qui n'utilisent qu'un petit trou dépourvu de dioptré (p. 227). Cette dernière catégorie inclut d'ailleurs d'autres systèmes que ceux uniquement sensibles à la lumière, comme la fossette nasale des crotales, qui leur permet de « voir » leurs proies en infrarouge.

Il est par ailleurs étonnant de constater à quel point les organes de vision du premier type ont évolué selon des configurations très proches, au moins pour trois espèces d'organismes très différentes. Chez certains mollusques supérieurs, comme le poulpe, et chez certaines araignées (par exemple, l'aviculaire), le principe de vision est le même que chez les vertébrés, qui comprennent bien entendu les humains. Chaque œil forme en continu, une image réelle sur un écran sensible à la lumière : la rétine. Par comparaison, l'œil composé multifacettes a évolué de manière très différente chez les arthropodes (invertébrés à squelette externe), comme les insectes et les crustacés. Celui-ci produit une image en mosaïque, composée de la contribution élémentaire de chaque segment de l'œil (comme s'il regardait une scène à travers un grand nombre de petits tubes). Comme une image de télévision, l'œil composé divise puis digitalise la scène extérieure. Ici, il n'y a donc pas d'image formée sur une rétine. La synthèse se fait de manière électrique dans le système nerveux. Le nombre d'unités optiques varie beaucoup suivant les espèces (50 pour certaines fourmis, 7 000 pour le taon, 30 000 pour la libellule). Bien entendu, plus il y a de facettes, plus il y a de « pixels » et meilleure est la résolution de l'image obtenue. L'œil composé est sans doute le plus ancien parmi le règne animal : de tels systèmes bien développés équipaient déjà les trilobites, ces petites créatures marines, il y a 500 millions d'années. Les trois types d'yeux existants témoignent de la richesse de la diversité animale. Ce qui est remarquable est que même si les optiques sont très différentes, les procédés chimiques à la base des mécanismes de traitement de l'image sont restés très similaires chez toutes les espèces.

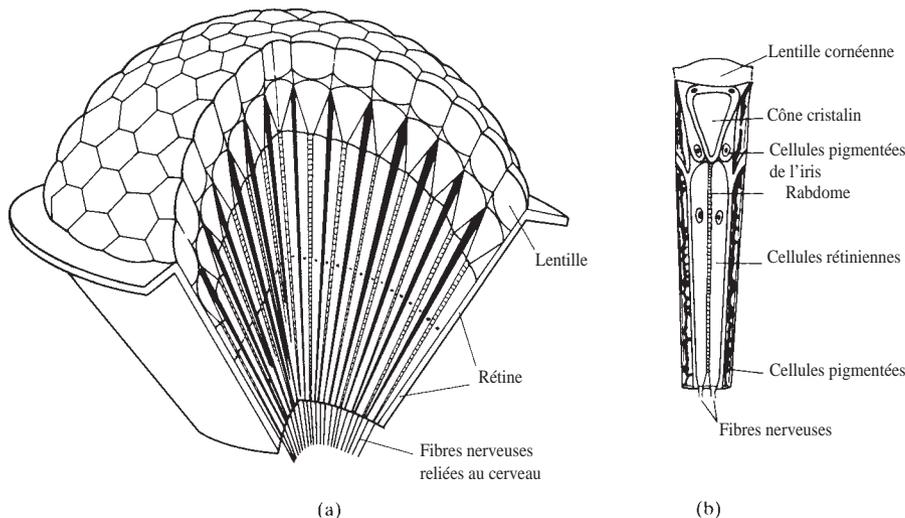


Figure 5.79 (a) L'œil composé est constitué de nombreuses ommatidies. (b) Une ommatidie, unité fonctionnelle, « voit » une petite région dans une direction particulière. La lentille cornéenne et le cône cristallin canalisent la lumière vers une structure photosensible en bâtonnet, le rhabdome. Ce prolongement nerveux est recouvert de cellules rétiniennees qui véhiculent l'information visuelle jusqu'au cerveau. (D'après Ackerman et al., *Biophysical Science*, © 1962, 1979. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, Inc., p. 31. After R. Bushman, *Animals Without Backbones*.)

Structure de l'œil humain

L'œil humain peut être considéré comme une association de deux lentilles convergentes qui reproduit une image réelle sur une surface photosensible. Cette description fut apparemment introduite par Kepler, qui écrit déjà en 1604 : « La vision, je dis, a lieu lorsque l'image du... monde extérieur... est projetée sur la rétine concave ». Il fallut cependant attendre 1625 pour que l'assertion de Kepler soit acceptée, à la suite d'une étonnante expérience réalisée par le jésuite allemand Christophe Scheiner (et également par Descartes, cinq ans après). Scheiner préleva la partie arrière du globe oculaire d'un animal jusqu'à atteindre la rétine, légèrement transparente. En observant soigneusement l'arrière de celle-ci, il fut aussi capable de distinguer une image réduite et renversée de la scène environnante. Bien qu'il ressemble à un simple appareil photographique (p. 182), le système de vision (œil, nerf optique et cortex visuel) fonctionne beaucoup plus comme un système de télévision informatisé en circuit fermé.

L'œil humain (figure 5.80) peut être décrit comme une masse gélatineuse pratiquement sphérique (24 mm de long sur 22 mm de large) contenue dans une membrane rigide : la **sclérotique**. Celle-ci est blanche et opaque et constitue ce que l'on appelle couramment le « blanc de l'œil ». À l'avant, la sclérotique devient la **cornée**. Saillant légèrement du globe oculaire, ce tissu transparent (légèrement aplati, ce qui permet de minimiser l'aberration sphérique) constitue l'élément le plus convergent du système optique oculaire. C'est en effet l'interface air/cornée qui doit donner aux rayons l'essentiel de leur déviation. C'est d'ailleurs l'une des raisons pour lesquelles il n'est normalement pas possible de bien voir en ouvrant les yeux sous l'eau. L'indice de l'eau ($n_E \approx 1,33$) est en effet trop proche de celui de la cornée ($n_C \approx 1,376$) pour assurer une réfraction adéquate.

La lumière qui émerge de la cornée passe ensuite à travers une chambre remplie d'un liquide transparent : l'**humeur aqueuse**, dont la fonction est essentiellement physiologique (elle maintient la pression oculaire). Optiquement, ayant un indice ($n_{ha} \approx 1,336$) très proche de celui de la cornée, elle n'agit que peu sur la réfraction d'un rayon. C'est en revanche dans l'humeur aqueuse que se situe l'iris. Celui-ci joue le rôle de diaphragme et contrôle ainsi la quantité de lumière qui passe à travers son ouverture : la **pupille**. C'est aussi l'iris (du mot grec signifiant *arc-en-ciel*) qui donne aux yeux leurs belles couleurs caractéristiques : bleue, marron, grise, verte ou jaune. Constitué de muscles dilatateurs et de sphincters circulaires, l'iris peut dilater ou contracter la pupille de 2 mm en

pleine lumière à environ 8 mm dans l'obscurité. En plus de cette fonction, il est aussi lié au réflexe d'accommodation et il se contracte pour accroître la finesse de l'image pour les travaux de près.

Immédiatement derrière l'iris vient le **cristallin**. Ce nom, quelque peu trompeur, date de l'Antiquité et des travaux du mathématicien arabe Alhazen (1000 apr. J.-C.) qui décrivait l'œil selon trois régions : l'aqueux, le cristallin et le vitreux.

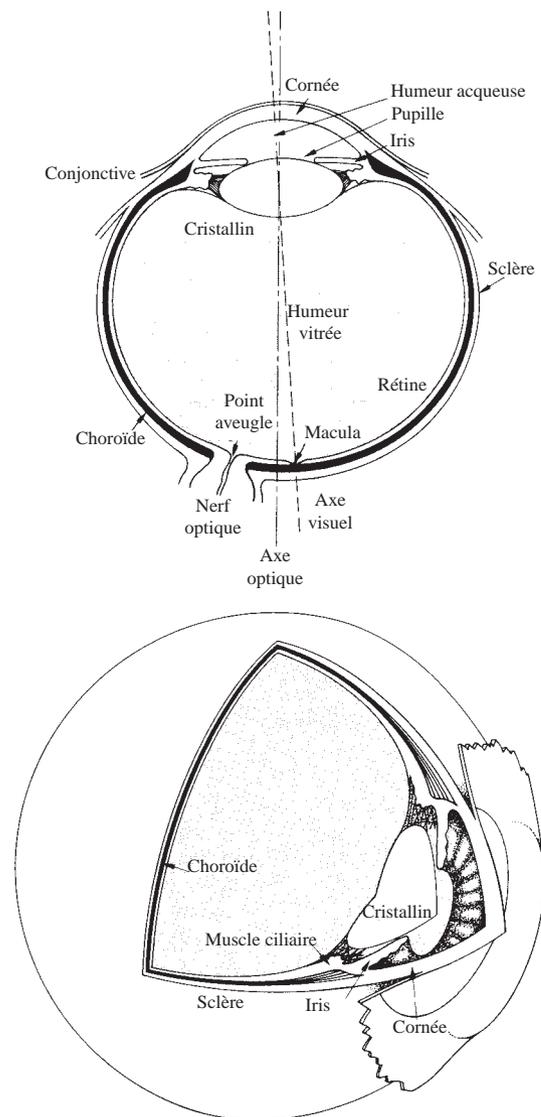


Figure 5.80 Structure de l'œil humain.

Le cristallin est la lentille de l'œil qui lui permet la mise au point, de par son élasticité (qui diminue avec l'âge) qui lui permet de modifier sa courbure, donc sa longueur focale, lors de l'accommodation. Le cristallin est de forme biconvexe (9 mm de diamètre sur 4 mm d'épaisseur). La structure de cette lentille est très différente de celles qui sont fabriquées par l'homme. Elle est constituée de près de 22 000 couches transparentes très fines en « pelures d'oignon » molles, entourées par une membrane élastique. Un rayon qui la traverse emprunte donc des chemins faits de minuscules segments discontinus. Par ailleurs, l'indice de réfraction des couches évolue du centre vers la périphérie de 1,406 à 1,386, un peu comme dans les systèmes GRIN à gradient d'indice (p. 287).

On peut finalement considérer les deux composants réfringents de l'œil, la cornée et le cristallin, comme un système optique à deux éléments avec un foyer objet situé à environ 15,6 mm à l'avant de la face antérieure de la cornée et un foyer image à 24,3 mm en arrière, sur la rétine. Pour simplifier cela, on peut considérer que ce système a un centre optique situé à 17,1 mm à l'avant de la rétine, ce qui correspond à la limite de la face arrière du cristallin.

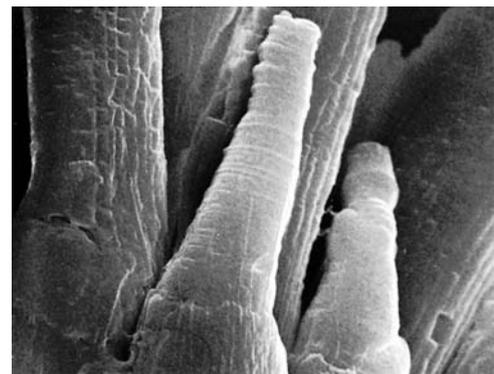
À l'arrière du cristallin se trouve une seconde chambre remplie d'une substance gélatineuse transparente faite de collagène (un polymère de protéines) et d'acide hyaluronique (un concentré de protéines) : l'**humeur vitrée** ($n_{hv} \approx 1,337$). Cette masse constituant 60 % du volume oculaire maintient la rétine contre les parois de l'œil. Notons ici que l'humeur vitrée contient des petits débris cellulaires microscopiques qui « flottent » librement. Ce sont ces particules qui font apparaître les « mouches volantes » lorsque l'on fixe un ciel lumineux ou une lampe fluorescente. On aperçoit en fait leurs ombres, entourées de franges de diffraction, projetées sur la rétine. Un accroissement important du nombre de ces corps flottants peut d'ailleurs signifier un problème de détachement de la rétine. La visualisation de ses propres constituants internes de l'œil est connue sous le nom de « **vision entoptique** ». On peut facilement distinguer certains éléments comme l'image de sa propre pupille. Pour cela, il faut éclairer son œil par le côté et fermer presque entièrement ses paupières, au point de ne pratiquement plus voir de lumière. On distingue alors la périphérie circulaire de la pupille ! Si vous ne le croyez pas, vous pouvez éteindre puis rallumer la lampe : vous distinguerez alors les dilatations et les contractions bien caractéristiques de celle-ci.

Continuons notre description de l'œil. La paroi intérieure sclérotique est recouverte d'une couche sombre bien vascularisée, riche en mélanine : la **choroïde**. La choroïde absorbe la lumière parasite, comme la peinture noire à l'intérieur d'un

appareil photo. Au fond de l'œil, on trouve le récepteur de notre système optique : la **rétine** (du latin *rete* signifiant filet). Cette fine couche de cellules réceptrices (de 0,1 à 0,5 mm d'épaisseur) recouvre pratiquement toute la choroïde. Ce sont ses cellules qui transforment, de manière électrochimique, l'information lumineuse en influx nerveux.

L'œil humain contient deux sortes de cellules photoréceptrices : les **bâtonnets** et les **cônes** (voir photo). On en compte environ 125 millions réparties pratiquement sur toute la rétine de manière non uniforme. Les bâtonnets (0,002 mm de diamètre) sont celles qui sont les plus nombreuses. Ils forment un ensemble dont les caractéristiques sont très proches d'un film photographique noir et blanc à haute sensibilité, tel que le Tri-X. Bien qu'extrêmement sensibles, fonctionnant dans des ambiances lumineuses trop faibles pour les cônes, les bâtonnets ne peuvent pas distinguer les couleurs et les images qu'ils captent n'ont pas une bonne définition. En comparaison, la vision véhiculée par les cônes est de bien meilleure qualité. Ces cellules sont seulement au nombre de 6 à 7 millions, pour des dimensions de 0,006 mm de diamètre. En analogie photographique, on peut les comparer à un film couleur de faible sensibilité. En lumière vive, les cônes permettent une vision détaillée en couleur mais ils deviennent insensibles à de bas niveaux de lumière.

L'œil humain fonctionne normalement sur une gamme de longueurs d'onde allant d'environ 390 à 780 nm (tableau 3.4). Cependant, certaines études ont montré que ces limites pouvaient être étendues à environ 310 nm dans l'ultraviolet et à 1050 nm dans l'infrarouge. Certaines personnes ont même



Micrographie électronique de la rétine d'une salamandre (*Necturus Maculosus*). On distingue deux cônes au premier plan et plusieurs bâtonnets à l'arrière plan. (Photo tirée de E. R. Lewis, Y. Y. Zeevi, et F. S. Werblin *Brain Research* 15, 559, 1969.)

assuré qu'elles pouvaient percevoir les rayons X. La limitation dans l'ultraviolet provient en fait du pouvoir absorbant du cristallin pour ces longueurs d'onde. On constate effectivement que les personnes ayant subi une suppression du cristallin présentent une sensibilité fortement accrue dans l'UV.

L'endroit où le nerf optique se connecte au globe oculaire est connu sous le nom de **point aveugle** (figure 5.81). Comme cette zone ne contient pas de récepteurs, elle est de fait totalement insensible à la lumière. Pourtant, nous ne ressentons pas d'interruption dans notre champ visuel car notre cerveau « compense » d'une certaine façon la perception pour cet endroit.

À peu près au centre de la rétine se trouve une petite dépression de 2,5 à 3 mm de diamètre appelée **point jaune** ou **macula**. Les cônes y sont particulièrement nombreux, deux fois plus que les bâtonnets. Au centre de la macula, on trouve une petite région de 0,3 mm de diamètre, uniquement composée de cônes : la **fovéa**. Pour donner un ordre d'idée, signalons que l'image de la pleine lune mesure 0,2 mm de diamètre sur la rétine (problème 5.75). C'est au niveau de la fovéa que l'on trouve les cônes les plus fins (avec des diamètres situés entre 0,0015 et 0,003 mm) et positionnés de la façon la plus dense sur la rétine. De par cette densité, la fovéa est responsable de la vision la plus fine. L'œil est d'ailleurs toujours en perpétuel mouvement afin d'y envoyer les rayons lumineux provenant des objets perçus. Grâce à ces petites oscillations, une même image est ainsi envoyée régulièrement sur différents récepteurs. Sans cela, elle resterait fixe sur les mêmes cellules photosensibles et elle aurait tendance à s'effacer. Sans la fovéa, l'œil perdrait de 90 à 95 % de ses capacités s'il ne gardait que sa vision périphérique.

Les mécanismes du système visuel sont très complexes. Par exemple, les bâtonnets sont reliés en grand nombre à une seule fibre nerveuse, qui peut en revanche être activée par une seule de ces cellules. Au contraire, les cônes sont reliés individuellement aux cellules nerveuses. Le cerveau joue finalement un rôle primordial dans la perception d'une scène. C'est lui qui analyse et corrige en permanence le signal qu'il reçoit de la

rétine. Pensons simplement au peu d'influence du point aveugle, même avec un œil fermé.

Signalons enfin une petite expérience. Entre la rétine et l'humeur vitrée se situe un réseau de vaisseaux sanguins rétiens, qui peut être perçu de manière entoptique. On peut par exemple procéder en fermant la paupière et en disposant près de l'œil une petite source de lumière suffisamment puissante. On observe alors les ombres projetées de ces vaisseaux sur la rétine. C'est ce que l'on appelle les *figures de Purkinje*.

Accommodation

La fonction de *mise au point* ou **accommodation** est réalisée dans l'œil humain par le cristallin. Cette lentille biologique est maintenue en position derrière l'iris par des ligaments reliés à un anneau musculéux : les **muscles ciliaires**. Ces muscles sont normalement relâchés, ce qui a pour effet d'étirer la base des ligaments suspenseurs, augmentant ainsi la tension qu'ils exercent sur la périphérie du cristallin. Par conséquent, celui-ci s'aplatit, ce qui accroît son rayon de courbure et augmente donc sa distance focale [équation (5.16)]. Lorsque l'anneau de muscles est complètement relâché, la lumière provenant d'un objet à l'infini doit se focaliser parfaitement sur la rétine (figure 5.82). À mesure que l'objet se rapproche de l'œil, les muscles ciliaires se contractent et relâchent ainsi la tension sur le cristallin. Du fait de son élasticité naturelle, celui-ci se bombe et devient plus convergent. Grâce à ce mécanisme, la focale diminue, de telle sorte que s_i demeure constant. Lorsque l'objet devient très proche de l'œil, les muscles ciliaires se contractent de plus en plus fortement, réduisant encore plus le rayon de courbure du cristallin. Le point le plus proche que l'on peut voir net en accommodant au maximum est le **punctum proximum**. Pour un œil normal, la distance à ce point est d'environ 7 cm pour un adolescent, 12 cm pour un jeune adulte, 28 à 40 cm pour un quadragénaire et environ 100 cm à 60 ans. Bien sûr, l'invention des lunettes a permis de soulager ces défauts dus au vieillissement. Par ailleurs, un œil ne peut pas se focaliser à la fois sur deux objets différents. En regardant par une fenêtre, vous pouvez vous-même en faire l'expérience en essayant de focaliser à la fois sur la vitre et sur la scène extérieure.

Si l'ensemble des mammifères accommodent par variation de la courbure du cristallin, il existe d'autres moyens pour y parvenir. Chez les poissons, par exemple, le cristallin se déplace vis-à-vis de la rétine, comme l'objectif d'un appareil photo. Certains mollusques accomplissent la même tâche en contractant ou en relâchant la totalité de leur œil, ce qui modifie



Figure 5.81 Petite expérience pour vérifier l'existence du point aveugle. Observez ce dessin à une distance d'environ 25 cm en fermant un œil. Regardez attentivement la croix : le 2 disparaît. Rapprochez-vous du dessin : le 2 réapparaît tandis que le 1 disparaît à son tour.

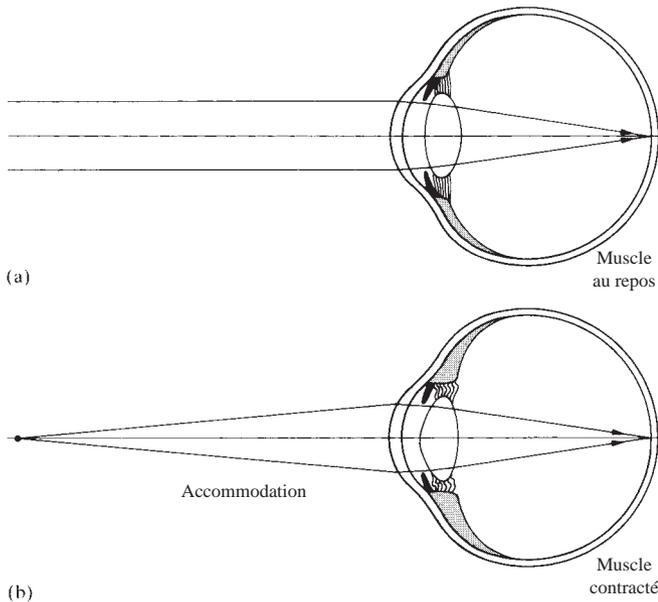


Figure 5.82 Accommodation – changements de configuration du cristallin.

également la distance entre le cristallin et la rétine. Les oiseaux de proie, qui ont besoin d’accommoder très rapidement pour des distances très différentes, utilisent en revanche un mécanisme très différent. Ils accommodent en changeant de manière très importante la courbure de leur cornée !

5.7.2 Verres de lunettes

Les lunettes de vue furent probablement inventées en Italie à la fin du XIII^e siècle. Un manuscrit florentin de cette période (1299), aujourd’hui disparu, relatait que « les lunettes ont été récemment inventées pour le confort des vieillards dont la vue a commencé à baisser ». Ces lorgnons consistaient en une association solidaire de deux lentilles biconvexes, ce qui ne représentait que peu d’évolution par rapport aux loupes à main, faites de verre ou de pierre transparente polie, sans doute utilisés depuis longtemps pour la lecture. Pourtant, si Roger Bacon expose dès 1267 ses connaissances sur les lentilles divergentes, il faut patienter pratiquement deux siècles pour que Nicolas de Cues (1401-1464) discute de leur utilisation en tant qu’instrument de vue et encore une centaine d’années pour que leur existence soit connue de tous. Étonnamment, jusqu’au

XVIII^e siècle, il n’était pas poli de se montrer en public avec des lunettes, ce dont témoigne leur absence sur les portraits de cette époque. En 1804, le physicien britannique Wollaston (1766-1828) constate que les verres traditionnels (presque plats, biconvexes et concaves) ne donnent de bons résultats que si l’on regarde à travers leur centre, ce qui n’est pas compatible avec la mobilité naturelle de l’œil. Il brevète alors une nouvelle sorte de lentille très incurvée, que l’on peut considérer comme l’ancêtre des ménisques modernes (du grec *meniskos*, *petite lune*, c’est-à-dire *croissant*). À la base des lunettes actuelles, ceux-ci offrent de bonnes conditions d’observation au centre ou en périphérie, sans grand défaut de distorsion.

En optique physiologique, le paramètre couramment employé pour caractériser les lentilles est la **vergence** ou **puissance intrinsèque**, \mathcal{D} qui est simplement l’inverse de la distance focale et s’exprime en *dioptries*, de symbole D. On a alors : $1 \text{ m}^{-1} = 1 \text{ D}$. Par exemple, une lentille convergente de distance focale +1 m a une vergence de +1 D. Pour une distance focale de -2 m (lentille divergente), on a : $\mathcal{D} = -\frac{1}{2} \text{ D}$; pour $f = +10 \text{ cm}$, $\mathcal{D} = 10 \text{ D}$. De ce fait, comme la distance focale d’une lentille mince d’indice n_l dans l’air est donnée par la relation :

$$\frac{1}{f} = (n_l - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad [5.16]$$

Sa vergence est donc :

$$\mathcal{D} = (n_l - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (5.69)$$

Pour évaluer de manière pratique la vergence d’une lentille, on peut se souvenir que plus une surface dévie les rayons incidents, plus sa vergence est importante. Une lentille très convergente a donc une courte focale et une grande vergence. Par ailleurs, on se souvient que la distance focale d’un système de deux lentilles minces en contact est donnée par la formule :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad [5.38]$$

En termes de vergence, on a donc :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$$

Ainsi, un système composé d’une lentille convergente telle que $\mathcal{D}_1 = +10 \text{ D}$ accolée à une lentille divergente telle que $\mathcal{D}_2 = -10 \text{ D}$ donne une vergence nulle : $\mathcal{D} = 0$. Cette combinaison se comporte donc comme une lame de verre à faces parallèles. On peut également considérer le cas d’un doublet convergent composé de deux lentilles plan-convexes accolées

par leurs faces planes. La vergence de chaque lentille est exprimée par l'équation (5.69). Ainsi, pour la première lentille, on a ($R_2 = \infty$) :

$$\mathcal{D}_1 = \frac{(n_l - 1)}{R_1} \quad (5.70)$$

Et pour la seconde :

$$\mathcal{D}_2 = \frac{(n_l - 1)}{-R_2} \quad (5.71)$$

Remarquons que ces expressions sont identiques à celles donnant les vergences respectives des faces d'une lentille biconvexe. En d'autres termes, *la vergence d'une lentille mince s'obtient en additionnant les vergences de chaque surface*. Pour une lentille convergente, comme R_2 a une valeur négative, \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont donc toutes les deux positives. Avec cette définition, la vergence d'une surface n'est donc plus toujours égale à l'inverse de sa distance focale, sauf lorsque celle-ci est immergée dans l'air. En utilisant cette convention au modèle de l'œil humain précédemment décrit, on note que la vergence du cristallin *dans l'air* est approximativement de +19 D. La cornée possède, elle, une vergence de +43 D sur le total de +58,6 D que possède un œil intact qui n'accommode pas.

Un œil normal, malgré la connotation de ce mot, n'est pas si commun que l'on croit. Par le terme *normal* (on emploie en fait rigoureusement le mot « *emmétrope* »), on entend que l'œil est capable de focaliser des rayons parallèles sur la rétine en ayant ses muscles ciliaires totalement relâchés. En termes d'optique, cela signifie donc que l'œil possède, dans ces conditions, son foyer image sur la rétine. On définit aussi la notion de **punctum remotum** qui est le point le plus éloigné reproduit avec netteté sur la rétine lorsque l'œil regarde à l'infini

(normalement sans accommodation). Pour un œil emmétrope, ce point est situé à l'infini (pratiquement, à une distance supérieure à 5 m). Lorsqu'il a des défauts d'accommodation, c'est-à-dire lorsque le point focal n'est plus situé sur la rétine, l'œil est dit *amétrope*. L'amétropie regroupe entre autres la myopie, l'hypermétropie et l'astigmatisme. Ces problèmes peuvent être dus à un changement anormal des mécanismes de réfraction (cornée, cristallin...) ou le plus souvent à des modifications de la longueur du globe oculaire qui altèrent la distance entre le cristallin et la rétine. Pour avoir une idée, signalons qu'environ 65 % des jeunes adultes nécessitent $\pm 1,0$ D ou moins de correction et que 25 % n'ont besoin que de $\pm 0,5$ D ou moins.

Myopie et verres divergents

La **myopie** est une anomalie de la vision pour laquelle les rayons parallèles forment leur foyer en avant de la rétine. Dans ce cas, les objets lointains apparaissent flous et le sujet a donc des difficultés à voir de loin. Dans un œil myope, la vergence est trop forte comparée à sa longueur et le punctum remotum n'est plus à l'infini. Le punctum proximum suit également ce décalage, ce qui fait qu'une personne myope peut voir de manière nette des objets très rapprochés (figure 5.83). La myopie se corrige en plaçant devant l'œil une lentille divergente de telle manière que le système verre/œil ait son foyer image sur la rétine. L'idée est donc ici de faire légèrement diverger les rayons incidents. Résistons cependant à la tentation de supposer que cela diminue la vergence relative du système. En fait, on choisit le verre correcteur de telle manière que la vergence du système lunette/œil soit la même que celle de l'œil non corrigé. Si vous portez des lunettes pour corriger la myopie, faites-en l'expérience. Si vous les enlevez, le monde devient flou mais il ne change pas de taille. Essayez alors de faire l'image d'un petit objet avec vos verres : vous n'y arriverez pas.

Supposons un œil myope ayant un punctum remotum de 2 m. Il faut donc que les lunettes correctrices conjuguent les objets lointains à une distance inférieure ou égale à celui-ci. Si une lentille divergente forme d'un objet à l'infini une image (virtuelle) à 2 m, l'œil peut en effet la voir nettement sans accommoder. En utilisant l'approximation des lentilles minces (justifiée pour les verres de lunette qui sont généralement très fins), on a alors :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-2} \quad [5.17]$$

La **cataracte** est liée à une opacification du cristallin qui peut entraîner des effets catastrophiques sur la vision. Dans les cas les plus extrêmes, une ablation du cristallin est nécessaire. Le chirurgien implante à la place une petite lentille convergente en plastique, afin d'augmenter la convergence de l'œil. La photo montre une image agrandie de cet **implant intraoculaire** d'environ 6 mm de diamètre. Cette solution n'est que palliative mais elle évite en tout cas le port de lunettes très épaisses, indispensables auparavant après une telle opération.



Et $f = -2$ m si $\mathcal{D} = -\frac{1}{2}$ D. Notons que la focale de la lentille de correction doit donc correspondre à la distance entre celle-ci et le punctum remotum (figure 5.84). L'œil voit finalement les images, virtuelles et redressées, que le verre correcteur forme entre le punctum remotum et le punctum proximum. Ce dernier est également plus proche pour un œil myope. C'est pour cela que les personnes ayant ce défaut préfèrent généralement enlever leurs lunettes pour lire ou pour faire des travaux minutieux. Ils peuvent en effet d'autant plus rapprocher l'objet de leurs yeux, et accroître de ce fait son grandissement.

Le calcul que nous venons de faire suppose une distance nulle entre l'œil et son système correcteur. Il s'applique donc rigoureusement plus au cas des lentilles de contact qu'aux lunettes. Dans le cas de ces dernières, on cherche en fait à ce que leur position à la cornée coïncide avec celle du foyer objet de l'œil (≈ 16 mm). De cette manière, le verre de lunette

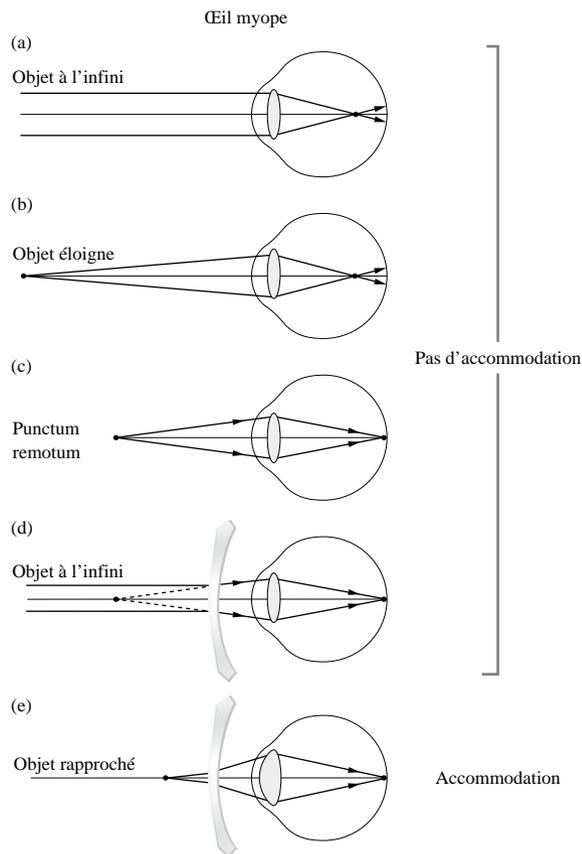


Figure 5.83 Correction de la myopie.

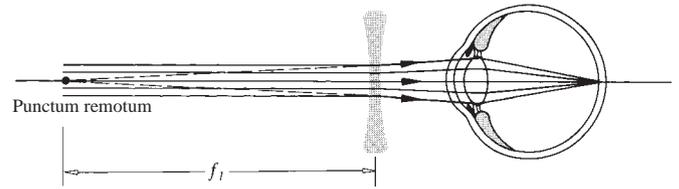


Figure 5.84 La focale du verre correcteur doit être égale à la distance du punctum remotum.

n'introduit aucun grandissement par rapport à l'œil nu. La plupart des gens ont en effet des yeux à corriger de manière inégale mais les deux doivent conserver le même grandissement. Avoir un grandissement M_T différent à chaque œil perturberait en effet complètement la vision. Placer le verre au niveau du foyer objet de l'œil permet ainsi d'éviter tout problème [équation (6.8)]. Pour comprendre cela, il suffit de considérer un modèle d'œil et tracer le rayon partant du sommet d'un objet et passant par son foyer objet. Lorsqu'il atteint l'œil, ce rayon le traverse parallèlement à l'axe optique, ce qui établit la hauteur de l'image. Ajoutons maintenant une lentille correctrice au niveau du foyer objet. Comme le centre de cette lentille coïncide avec le foyer, le rayon n'est pas perturbé par sa présence. Si elle corrige la position de l'image, une lentille placée à ce niveau ne modifie pas la taille de l'image finale, (d'où M_T constant) bien qu'elle rectifie sa position par rapport à la rétine [équation (5.24)].

Par ailleurs, on peut calculer la vergence équivalente d'un verre correcteur, situé à une distance d (d'environ 16 mm) de l'œil, par rapport à un système accolé (c'est-à-dire une lentille de contact de distance focale f_c , égale à la distance au punctum remotum). Pour cela, considérons l'œil comme une lentille simple. Le problème revient alors à étudier la vergence d'un système de deux lentilles séparées d'une distance d . Soit f_l la distance focale du verre de lunette et f_e celle de l'œil. La combinaison a alors une distance focale exprimée par l'équation (5.36) :

$$\text{b.f.l.} = \frac{f_e(d - f_l)}{d - (f_l + f_e)} \quad (5.72)$$

Cela est la distance entre le cristallin et la rétine. D'un autre côté, la focale équivalente d'un système accolé (lentille de contact) est donnée par l'équation (5.38) :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_c} + \frac{1}{f_e} \quad (5.73)$$

En inversant l'équation (5.72), l'équation (5.73) et en faisant $f = \text{b.f.l.}$, on obtient après simplification : $1/f_c = 1/(f_l - d)$, ce qui est indépendant des paramètres de l'œil. En termes de vergence :

$$\mathcal{D}_c = \frac{\mathcal{D}_l}{1 - \mathcal{D}_l d} \quad (5.74)$$

Un verre de lunette, de vergence \mathcal{D}_l , situé à une distance d de l'œil, a donc une vergence équivalente à une lentille de contact de vergence \mathcal{D}_c . Notons que, dans cette relation, d est mesurée en mètres. Même si \mathcal{D}_l est grande, le produit du dénominateur est donc assez petit et l'on considère parfois que $\mathcal{D}_c \approx \mathcal{D}_l$. Rigoureusement, la distance verre/cornée a cependant de l'importance. Si la position exacte des lunettes sur le nez (donc la valeur de d) ne semble pas avoir beaucoup d'effet, elle est donc sans doute responsable de besoins de compensation accrûs de la part de notre cerveau et de bien des maux de tête.

Hypermétropie et verres convergents

À l'inverse de la myopie, l'**hypermétropie** est le défaut de l'œil dans lequel les rayons parallèles provenant d'un objet lointain forment une image en arrière de la rétine (figure 5.85). Cette anomalie peut être due à une courbure trop faible de la cornée ou bien à un raccourcissement de l'œil qui fait que le cristallin est trop proche de la rétine (les personnes hypermétropes peuvent d'ailleurs corriger temporairement leur défaut en appuyant légèrement autour de l'œil, ce qui a pour effet de bomber la cornée). Pour voir nettement, un hypermétrope doit donc en permanence augmenter la puissance de son cristallin en accommodant, ce qui exige des efforts oculaires constants et « fatigue » très vite la vision. S'il accommode déjà en vision lointaine, l'œil hypermétrope est donc rapidement limité en vision rapprochée. En d'autres termes, le punctum proximum est plus éloigné que pour l'œil emmétrope (pour lequel on le considère égal à 25 cm). Une personne hypermétrope voit donc mieux de loin que de près. Pour corriger ce défaut, on introduit cette fois devant l'œil une lentille convergente, afin de « rabattre » d'autant plus les rayons pénétrant dans l'œil. Cette lentille forme de la scène extérieure une image virtuelle plus éloignée que l'objet. Les objets trop proches sont donc « ramenés » au-delà du punctum proximum, ce qui fait que l'œil peut les voir convenablement. Supposons par exemple un œil hypermétrope avec punctum proximum situé à 125 cm et un objet à +25 cm. Le

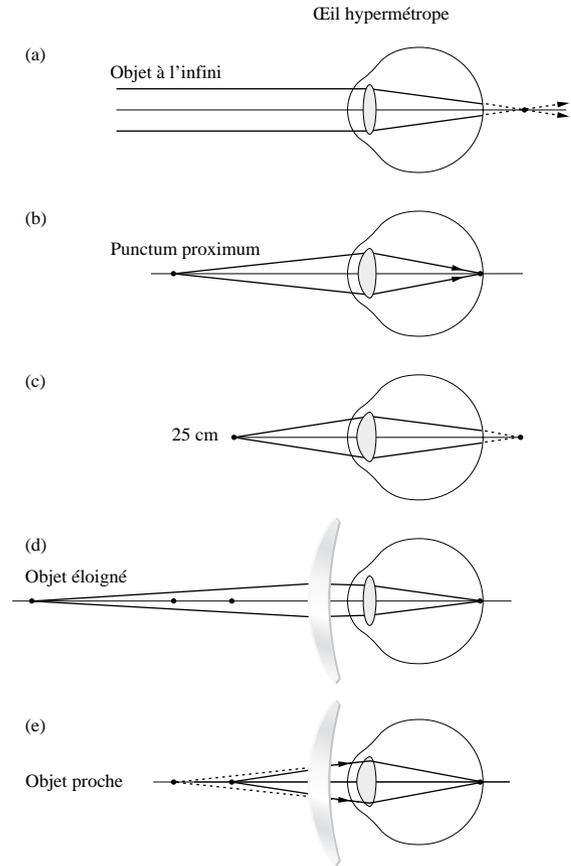


Figure 5.85 Correction d'un œil hypermétrope.

verre correcteur doit donc en faire une image telle que $s_i = -125$ cm. Sa distance focale est alors déterminée par la formule de conjugaison classique :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{(-1,25)} + \frac{1}{0,25} = \frac{1}{0,31}$$

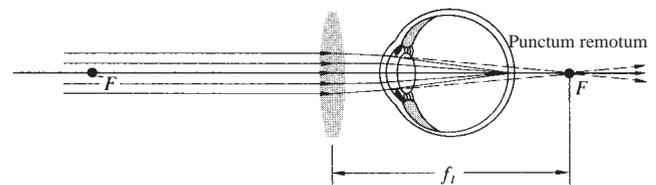


Figure 5.86 De même que précédemment, la focale du verre correcteur doit être égale à la distance du punctum remotum.

Ce qui donne : $f = 0,31$ m ou bien $\mathcal{D} = +3,2$ D. Cela est bien en accord avec les résultats du tableau 5.3 (avec $s_o < f$). De tels verres peuvent donc projeter des images réelles. Faites-en l'expérience !

Dans le cas de l'hypermétropie, le *punctum remotum* est situé derrière l'œil qui regarde à l'infini. Cependant, le système correcteur convergent permet également de corriger ce défaut. S'il est bien adapté, il doit en effet permettre à l'œil relaxé de fonctionner convenablement en vision lointaine. Le verre doit alors former d'un objet à l'infini une image dans le plan focal image de l'œil nu. Cette dernière sert alors d'objet virtuel pour l'œil qui la conjugue à son tour sur la rétine. La focale f_l de la lentille de correction doit, encore une fois, correspondre à sa distance avec le *punctum remotum*. En règle générale, on constate donc qu'un verre de lunettes corrige parfaitement une amétropie, lorsque son point focal image se confond avec le *punctum remotum*.

Astigmatisme et verres anamorphiques

L'**astigmatisme** est peut-être l'anomalie de la vision la plus courante. Il est dû à des irrégularités de courbure de la cornée et/ou du cristallin, qui ne sont plus sphériques mais asymétriques. Il en résulte une focalisation différente suivant deux plans méridiens (contenant l'axe optique) de l'espace image. La vision est floue, de près comme de loin. Si ces plans sont perpendiculaires, l'astigmatisme est dit *régulier* et il est possible de le corriger. S'il est *irrégulier*, cette tâche est, en revanche, bien plus difficile. L'œil astigmatique peut également être emmétrope, myope ou hypermétrope à des degrés différents suivant les deux plans méridiens. Par exemple, les colonnes d'un damier peuvent être vues convenablement alors que les lignes apparaissent floues à cause d'une myopie ou d'une hypermétropie. Dans ce cas, l'astigmatisme est bien sûr régulier et les plans méridiens sont horizontaux et verticaux (figure 5.87).

En 1825, le grand astronome britannique George Biddell Airy (1801-1892) fut le premier à corriger son propre astigmatisme (ainsi que sa myopie), à l'aide de verres sphéro-cylindriques. Il fallut cependant attendre 1862 et l'ophtalmologue hollandais Franz Donders (1818-1889) pour lire le premier article reliant les lentilles cylindriques à la correction de l'astigmatisme.

Tout système optique qui a une vergence \mathcal{D} ou un grandissement M_T différent selon deux méridiens principaux est dit « *anamorphique* », comme les lentilles cylindriques. Un tel système produit une image distordue, agrandie suivant un plan

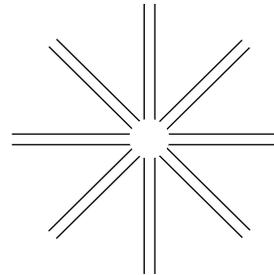


Figure 5.87 Une petite expérience pour évaluer l'astigmatisme de vos yeux. Observez cette figure en fermant un œil. Si vous voyez certaines lignes plus épaissies que les autres, vous avez de l'astigmatisme. Rapprochez votre œil de la figure puis éloignez la feuille lentement ; notez alors quelles lignes sont mises au point en premier. Si deux lignes paraissent aussi nettes l'une que l'autre, tournez la figure jusqu'à accommoder uniquement pour l'une des lignes. Si vous voyez nettement toutes les lignes, vous n'avez pas d'astigmatisme.

uniquement (figure 5.88). C'est justement l'effet recherché pour corriger un œil astigmatique pour un seul méridien. Dans ce cas, des lunettes plano-cylindriques, convergentes ou divergentes, suffisent à arranger le problème. Quand une correction est nécessaire au niveau des deux méridiens, on utilise alors des lentilles *sphéro-cylindriques* ou même *toriques* (figure 5.89).

Signalons également que les lentilles anamorphiques ne sont pas utilisées seulement pour la correction de l'astigmatisme. On s'en sert par exemple pour la réalisation des films en panavision, tournés avec un grand champ horizontal mais compactés ensuite sur une pellicule standard. Parfois, les télévisions en diffusent des extraits sans lentilles adaptées et l'on constate alors des élongations anormales sur l'image.

5.7.3 La loupe

On peut faire en sorte qu'un objet paraisse plus gros, afin de l'examiner en détail, en l'approchant toujours plus de son œil. L'image rétinienne s'agrandit et l'œil maintient une bonne mise au point jusqu'à ce que le cristallin ne puisse plus accommoder. Si l'on continue à rapprocher l'objet en deçà du *punctum proximum*, l'image devient floue (figure 5.90). On peut alors utiliser une lentille convergente simple que l'on dispose entre l'œil et l'objet. Un tel dispositif constitue une **loupe**, et sert donc à *donner, d'un petit objet, une image plus grande que celle vue à l'œil nu* (figure 5.91). L'homme semble avoir découvert le principe de la loupe il y a bien longtemps. C'est sans doute à cet usage que servait par exemple l'antique lentille convexe de quartz ($f \approx 10$ cm) que l'on mit à jour, en 1885, dans les ruines du palais du roi Sennachérib d'Assyrie (705-681 av. J.-C.).

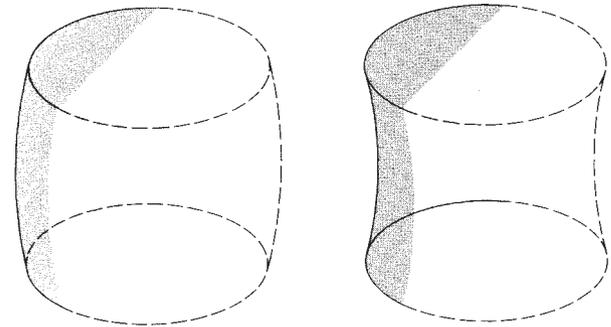
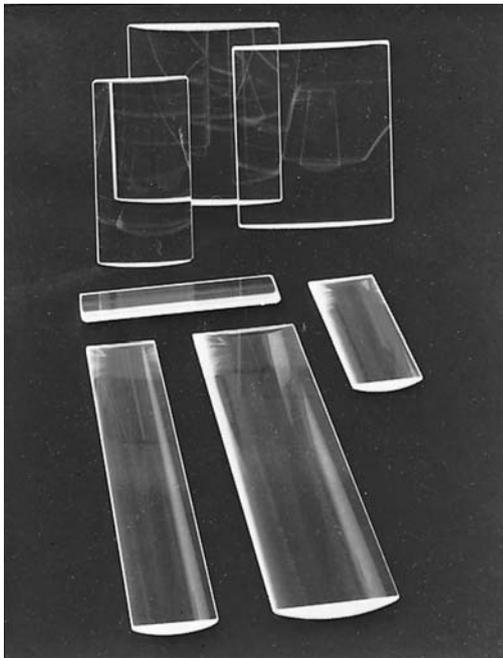
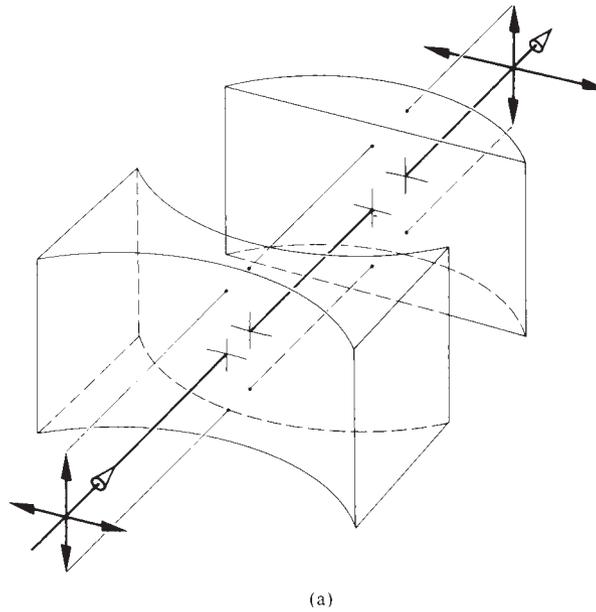


Figure 5.89 Surfaces toriques

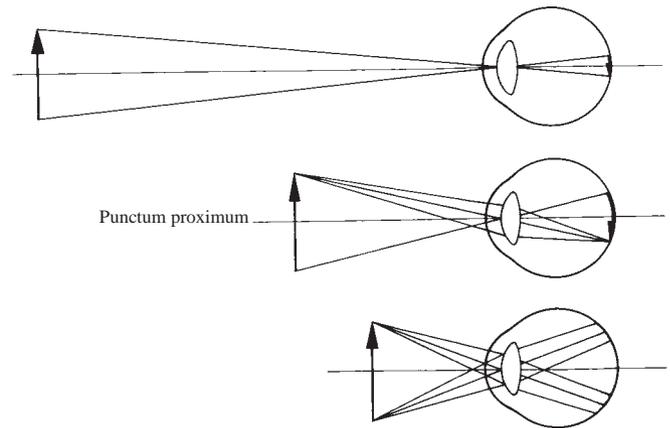
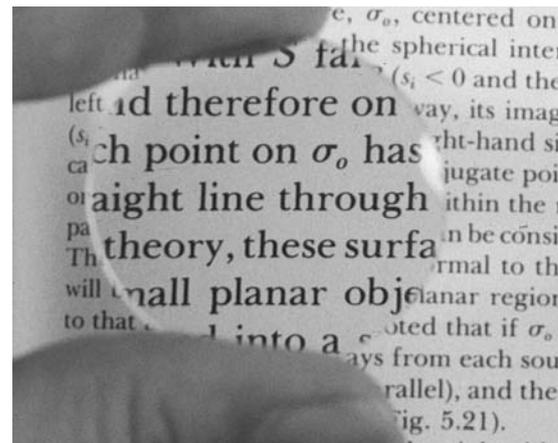


Figure 5.90 Rapport des images au punctum proximum.



Lentille convergente utilisée comme loupe. (Photo E.H.)

Figure 5.88 (a) Système anamorphique (b) Lentilles cylindriques. (Photo Melles Griot.)

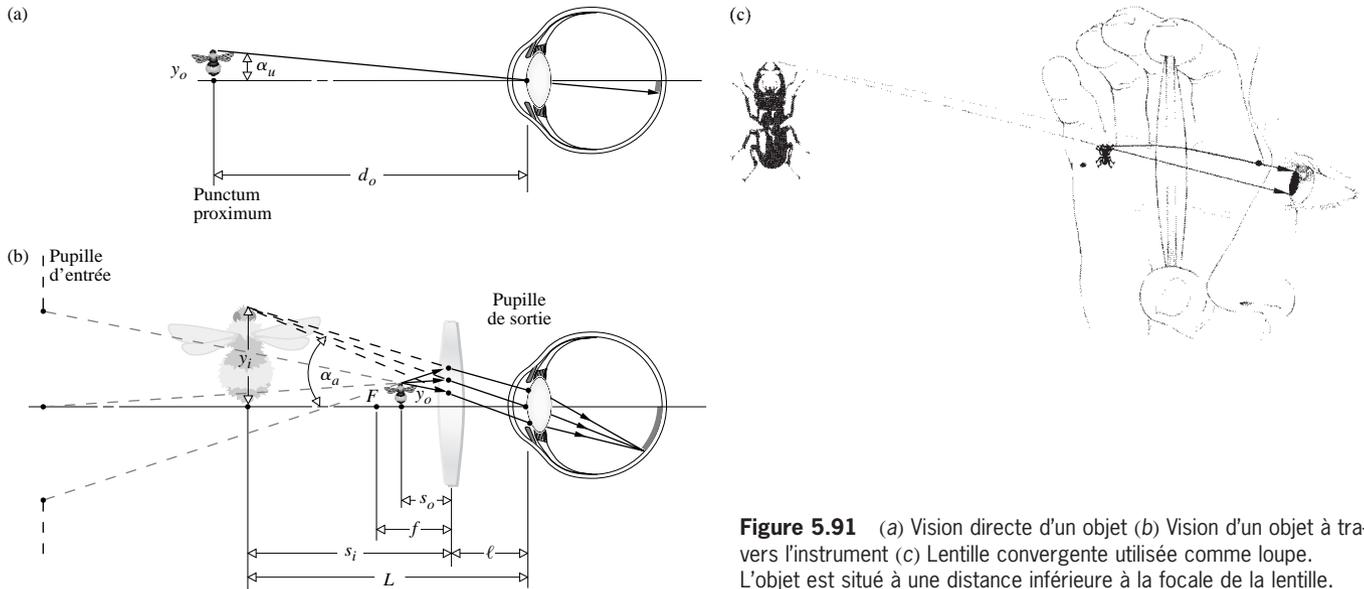


Figure 5.91 (a) Vision directe d'un objet (b) Vision d'un objet à travers l'instrument (c) Lentille convergente utilisée comme loupe. L'objet est situé à une distance inférieure à la focale de la lentille.

On attend logiquement d'un système grossissant qu'il donne une image agrandie mais redressée. D'autre part, les rayons pénétrant dans l'œil ne doivent pas être convergents. D'après le tableau 5.3 (p. 170), il s'agit donc de placer l'objet entre la loupe et son foyer objet (c'est-à-dire : $s_o < f$). Le résultat est montré à la figure 5.91. Remarquons d'autre part qu'étant donné sa petite taille, la pupille de l'œil est presque toujours le diaphragme d'ouverture, comme à la figure 5.34 (p. 179), ainsi que la pupille de sortie du système.

Afin d'évaluer les performances d'une instrument visuel, on introduit ici la notion de **grossissement** (ou *grandissement angulaire*) MP . Le grossissement est une grandeur définie comme le rapport de la taille de l'image rétinienne obtenue avec l'instrument sur la taille de celle obtenue à l'œil nu, pour un objet à distance normale d'observation. Celle-ci est généralement prise comme la distance du punctum proximum, d_o . Le grossissement correspond finalement au rapport de l'angle sous lequel on voit l'image donnée par l'instrument divisé par l'angle α_u sous lequel on voit l'objet à l'œil nu. On a donc :

$$MP = \frac{\alpha_a}{\alpha_u} \quad (5.75)$$

Gardons à l'esprit que nous sommes dans les conditions de l'optique paraxiale. De ce fait, on peut écrire : $\tan \alpha_a = y_i/L \approx \alpha_a$ et $\tan \alpha_u = y_o/d_o \approx \alpha_u$, ainsi :

$$MP = \frac{y_i d_o}{y_o L}$$

Où y_i et y_o sont au-dessus de l'axe et positives. Il s'agit donc de considérer d_o et L comme des quantités positives pour obtenir un grossissement également positif, comme l'indique sa définition. En utilisant l'équation (5.24) et l'équation (5.25), de même que la relation de conjugaison des lentilles simples dans l'air, on obtient alors :

$$MP = -\frac{s_i d_o}{s_o L} = \left(1 - \frac{s_i}{f}\right) \frac{d_o}{L}$$

Or, la distance image est négative $s_i = -(L - \ell)$, ce qui donne :

$$MP = \frac{d_o}{L} [1 + \mathcal{D}(L - \ell)] \quad (5.76)$$

\mathcal{D} est ici bien sûr la vergence de la loupe : $(1/f)$. Trois cas sont alors à considérer. (1) Lorsque $\ell = f$, le grossissement est égal à $d_o \mathcal{D}$. (2) Lorsque ℓ est nulle, on a alors :

$$[MP]_{\ell=0} = d_o \left(\frac{1}{L} + \mathcal{D}\right)$$

Dans ce cas, la plus grande valeur de MP correspond à la plus petite valeur de L , égale à d_o pour avoir une vision nette. Ainsi :

$$[MP]_{\ell=0}^{L=d_o} = d_o \mathcal{D} + 1 \quad (5.77)$$

En prenant la valeur standard $d_o = 0,25$ m, on a donc :

$$[\text{MP}]_{L=d_o}^{\ell=0} = 0,25\mathcal{D} + 1 \quad (5.78)$$

Ainsi, lorsque L ou ℓ augmente, MP diminue. Mais si l'œil est très loin de la loupe, il est logique que l'image rétinienne soit effectivement très petite. (3) Le troisième et dernier cas est sans doute le plus commun. Pour celui-ci, nous considérons un objet placé au foyer objet de la loupe ($s_o = f$), qui en donne donc une image virtuelle à l'infini ($L = \infty$). L'équation (5.76) donne alors :

$$[\text{MP}]_{L=\infty} = d_o\mathcal{D} \quad (5.79)$$

Cette expression reste identique quelle que soit la valeur de ℓ . Cette configuration d'observation est la plus confortable car les rayons sont parallèles et l'œil n'a pas à accommoder. Notons aussi que $M_T = -s_i/s_o$ tend vers l'infini lorsque $s_o \rightarrow f$. On remarque toutefois que le grossissement obtenu dans le cas (3) dépend de la distance minimale de vision distincte (punctum proximum) de l'individu. Aussi a-t-on eu l'idée de définir un **grossissement commercial** correspondant à une distance standardisée de 25 cm pour le punctum proximum. Ce grossissement est donc égal au quart de la vergence de l'instrument d'observation (car la distance du punctum proximum doit être exprimée en mètres). C'est ce grossissement qui est indiqué sur les instruments du commerce.

Une loupe de vergence 10 D a donc une focale ($1/\mathcal{D}$) de 0,1 m et un grossissement commercial de 2,5 (équivalent donc au grossissement lorsque $L = \infty$). On trouve alors sur l'instrument l'indication « 2,5× ». Cela signifie donc que l'image rétinienne obtenue est 2,5 fois plus grande que celle de l'objet mis au punctum remotum de l'œil nu. Cette assertion n'est évidemment vraie que lorsque l'objet observé est au foyer de la loupe. Les loupes constituées d'une seule lentille sont limitées par les aberrations à des grossissements de 2× ou de 3×. Par ailleurs, la recherche d'un champ large implique généralement l'utilisation d'une grande lentille, dont les surfaces ont, pour des raisons pratiques, une faible courbure. Or, de grands rayons de courbure impliquent une grande focale, donc une petite vergence et un faible grossissement. La loupe de lecture, à la « Sherlock Holmes », en est l'exemple typique. Au contraire, la loupe de bijoutier a un tout petit diamètre. Elle est le plus souvent faite d'une seule lentille et son grossissement est typiquement de 2× ou 3×. Il existe également des loupes plus sophistiquées pouvant avoir

des grossissements commerciaux compris entre 10× et 20× (figure 5.92). Les doublets sont assez communément utilisés dans de nombreuses configurations. La loupe (ou microscope) de *Coddington* a une forme sphérique évidée transversalement de façon à ce que son ouverture soit plus petite que la pupille de l'œil. Toute boule de verre transparent peut aussi servir de loupe de fortune mais il y a beaucoup de distorsion.

Nous savons déjà que l'indice de réfraction d'un matériau n_{im} est dépendant de la longueur d'onde (phénomène de dispersion). Pour une lentille simple, cette dépendance touche également la distance focale, du fait de sa variation en $n_{im}(\lambda)$. Les différentes couleurs composant la lumière blanche sont donc inégalement réfractées et se focalisent ainsi à des endroits différents de l'espace. C'est ce que l'on appelle l'*aberration chromatique*. Pour réaliser une lentille sans aberration chromatique (« *achromats* »), la seule solution est de réaliser des combinaisons avec différents verres. On peut alors avoir des combinaisons accolées de doublets (*clairauts*) ou de triplets achromatiques, mais celles-ci sont particulièrement onéreuses et ne servent que dans les loupes puissantes de haute qualité.

5.7.4 Oculaires

Un **oculaire** est un instrument visuel dont le rôle est de grossir l'image intermédiaire qu'un premier système optique (*l'objectif*) donne d'un objet réel. L'œil « regarde » alors dans l'oculaire qui « regarde » lui-même dans l'objectif. Objectif et

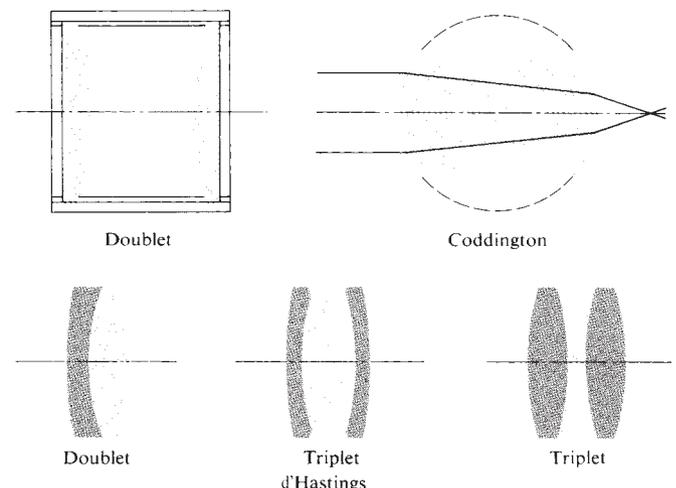


Figure 5.92 Différentes configurations de loupes.

oculaire forment un instrument d'observation visuelle qui peut être un microscope, une lunette d'observation, un télescope, des jumelles, etc. Une simple lentille peut convenir mais le résultat est médiocre. Pour avoir une image rétinienne de bonne qualité, il faut en effet que l'oculaire ait le moins d'aberrations possible. L'oculaire est donc un élément à part entière du système global car ses lentilles peuvent participer à réduire les aberrations. On trouve cependant des oculaires interchangeables, par exemple dans le cas des instruments d'observation astronomique ou pour les microscopes. De plus, les oculaires sont assez difficiles à concevoir et l'approche usuelle, et peut-être la plus fructueuse, est d'utiliser et de modifier un schéma existant.

Un oculaire doit fournir une image virtuelle de l'image intermédiaire donnée par l'objectif, le plus souvent à l'infini ou à grande distance, de manière à pouvoir observer confortablement sans accommoder. Dans cette optique, l'objet observé doit donc se situer sur le foyer objet de l'oculaire. D'autre part, ce dernier doit également conjuguer la pupille de sortie (souvent la monture de l'objectif) à une position convenable, dénommée « *cercle oculaire* », qui correspond à l'endroit où l'observateur doit positionner son œil pour une observation optimale. Pour des raisons pratiques, le cercle oculaire doit être à 10 mm au minimum de la dernière optique.

Les oculaires sont généralement constitués de deux éléments : un « *verre de champ* » (côté objet) qui reçoit les rayons lumineux et un « *verre d'œil* » qui observe et envoie à l'infini l'image formée par le verre de champ. Les oculaires sont généralement décrits par une série de trois chiffres (exemple : 4,3,2) qui indiquent les rapports respectifs entre la distance focale du verre de champ, l'espace entre verres et la distance focale du verre d'œil et par leur grossissement MP (ou le grossissement commercial $MP = d_o \mathcal{D} = (250 \text{ mm})/f$). Signalons d'autre part qu'étant donné leur fonctionnalité commune, tous les oculaires dérivent de quelques configurations élémentaires que nous allons décrire.

L'**oculaire de Huygens** (figure 5.93) est historiquement l'un des oculaires les plus anciens (1703). Dans cette configuration, le foyer objet de l'ensemble est situé entre les deux lentilles (*oculaires négatifs*). L'objet observé par l'oculaire doit donc être virtuel (un tel système ne peut donc pas servir de loupe). L'oculaire de Huygens a également l'inconvénient de posséder un cercle oculaire très proche du dernier dioptre (environ 3 mm), ce qui est peu confortable pour l'observateur. Néanmoins sa simplicité et son faible coût (paragraphe 6.3.2) en font un système toujours largement utilisé, surtout en microscopie. L'**oculaire de Ramsden** (figure 5.94) fait

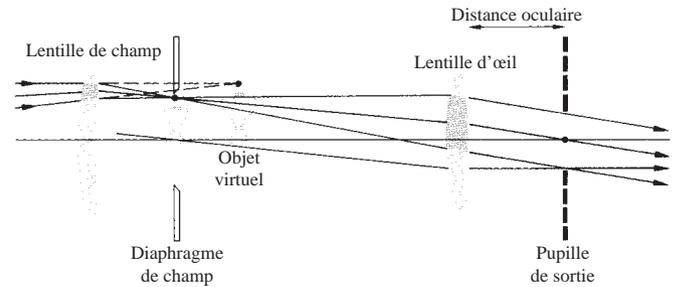


Figure 5.93 Oculaire d'Huygens.

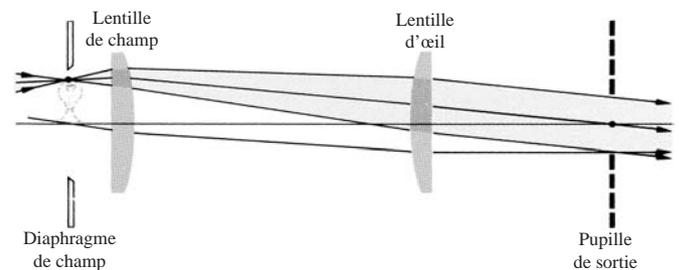


Figure 5.94 Oculaire de Ramsden.

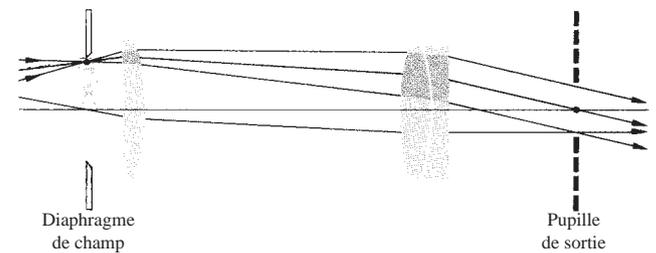


Figure 5.95 Oculaire de Kellner.

également partie des configurations classiques. Dans ce cas, le foyer est situé à l'avant du verre de champ (*oculaires positifs*), à l'extérieur du système. L'objet observé est donc réel, ce qui permet de pouvoir s'en servir comme d'une loupe. Cette localisation extérieure est également pratique car elle permet d'y positionner un réticule (mire), gradué ou non. Comme l'objet observé et le réticule sont situés sur un même plan, ils sont focalisés ensemble, et l'on peut ainsi réaliser des mesures. Possédant un cercle oculaire à 12 mm environ et un coût équivalent, l'oculaire de Ramsden est finalement plus fonctionnel que celui de Huygens (problème 6.2). Troisième exemple, l'**oculaire de Kellner** (figure 5.95) consiste essentiellement

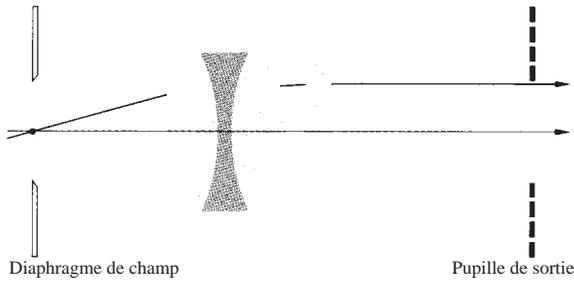


Figure 5.96 Oculaire orthoscopique.

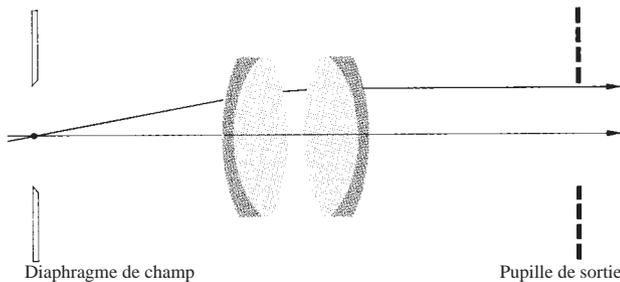


Figure 5.97 Oculaire symétrique (Plössl).

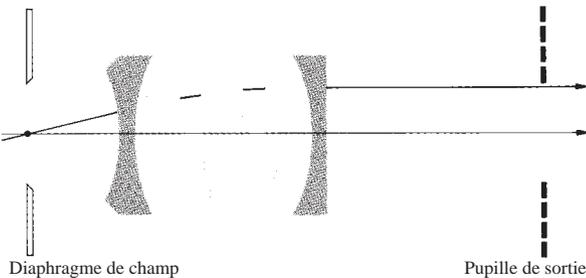


Figure 5.98 Oculaire d'Erfle.

en une version achromatique de l'oculaire de Ramsden. Communément employé dans les instruments astronomiques de champ modéré, il fournit une qualité d'image supérieure aux deux autres, bien que son cercle oculaire soit encore plus près du verre d'œil. On peut également citer l'**oculaire orthoscopique** (figure 5.96), qui a l'avantage de posséder un champ large, un fort grossissement et une longue distance oculaire (≈ 20 mm). L'**oculaire symétrique** ou **oculaire de Plössl** (figure 5.97) est une version similaire mais plus performante

que ce dernier. Mentionnons finalement l'**oculaire d'Erfle** (figure 5.98). Bien corrigé des aberrations et d'un prix abordable, celui-ci constitue probablement la configuration à champ large (environ $\pm 30^\circ$) la plus commune*.

Bien qu'il existe des systèmes plus sophistiqués (systèmes à grossissement variable permettant de « zoomer », systèmes asphériques...), ces quelques oculaires constituent les exemples les plus représentatifs des nombreuses configurations existantes. Ce sont elles qui équipent les microscopes ou les instruments astronomiques les plus courants.

5.7.5 Le microscope

Le microscope va plus loin que la simple loupe et permet d'observer les détails d'objets rapprochés grâce à son fort grossissement (supérieur à $30\times$). On attribue généralement son invention au lunetier hollandais Zacharias Janssen, dans les années 1590. Un second modèle fut également mis au point par Galilée en 1610. La figure 5.99 représente le schéma de principe de cet instrument. Le microscope est constitué d'un **objectif** et d'un **oculaire**. L'objectif (ici une simple lentille) forme une image réelle, inversée et agrandie d'un objet. Celle-ci est alors reprise par un oculaire qui en forme une image, également agrandie, à l'infini, observable à l'œil. L'image formée par l'objectif doit donc être dans le plan focal objet de l'oculaire. Également dans le plan du diaphragme de champ de l'oculaire, cette image doit être suffisamment petite pour être contenue à l'intérieur de celui-ci. On apprécie finalement un microscope grâce à son grossissement qui est le produit du grandissement transversal de l'objectif M_{To} par le grossissement de l'oculaire M_{Ae} . Ainsi

$$MP = M_{To}M_{Ae} \quad (5.80)$$

Souvenons-nous que $M_T = -x_i/f$ [équation (5.26)]. Connaissant cela, les fabricants de microscopes font en sorte que la distance (correspondant à x_i) entre le foyer image de l'objectif et le foyer objet de l'oculaire soit standardisée à 160 mm. Cette distance, appelée « **longueur de tube** » est notée L sur la figure (certains auteurs définissent ce paramètre comme la distance image de l'objectif). De fait, pour un

*On peut trouver une description détaillée de ces oculaires ainsi que d'autres configurations dans *Military Standardization Handbook – Optical Design*, MIL-HDBK-141.

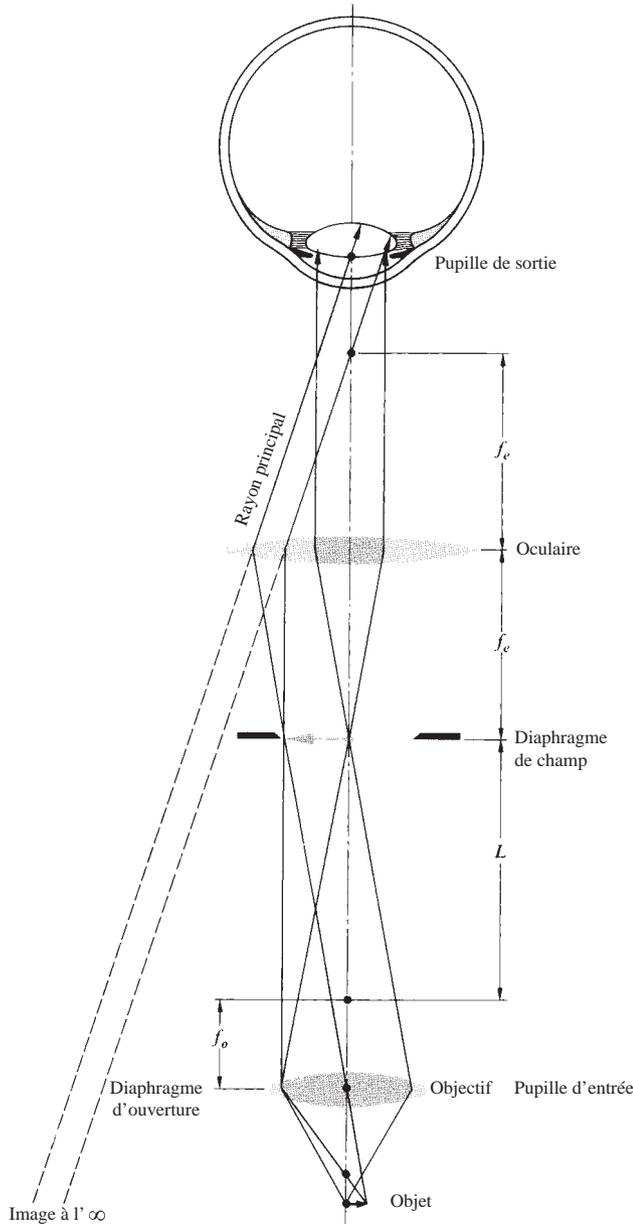


Figure 5.99 Schéma de principe d'un microscope composé rudimentaire. L'objectif forme une image réelle d'un objet proche. L'oculaire, fonctionnant comme une loupe, agrandit cette image intermédiaire. L'image finale virtuelle peut ainsi être plus grande que la monture de l'instrument.

observateur normal (punctum remotum à 254 mm) et une image finale à l'infini, il vient :

$$MP = \left(- \frac{160}{f_o} \right) \left(\frac{254}{f_e} \right) \quad (5.81)$$

Ici, les focales sont en millimètres et l'image est inversée ($MP < 0$). Généralement, on réalise ce calcul en valeur absolue, de manière à avoir toujours un grossissement positif. Par exemple, si l'objectif et l'oculaire indiquent respectivement $5\times$ et $10\times$, le microscope a un grossissement de $50\times$.

Lorsque l'observateur met au point, il est nécessaire de maintenir l'image intermédiaire formée par l'objectif au niveau du foyer de l'oculaire, donc de conserver les mêmes écarts de distance entre les différents éléments du microscope. C'est pour cela qu'objectif, diaphragme de champ et oculaire sont solidaires et déplacés ensemble.

L'objectif du microscope sert à la fois de diaphragme d'ouverture et de pupille d'entrée. Son image, formée par l'oculaire, constitue de fait la pupille de sortie dans laquelle l'œil doit être positionné. Le diaphragme de champ, qui limite la taille de la zone pouvant être observée, fait partie de l'oculaire. Les images du diaphragme de champ formées par les optiques qui le précèdent et qui le suivent constituent respectivement la *lucarne d'entrée* et la *lucarne de sortie* du système. L'angle solide qui relie le centre de la pupille de sortie au contour de la lucarne de sortie est appelé le « *champ de l'espace image* » du microscope.

Il existe trois types d'objectifs de microscope. Certains sont faits pour observer directement les objets. D'autres fonctionnent mieux si l'objet est recouvert d'une lame de verre ou s'il est immergé dans un liquide en contact avec l'objectif (*microscope à immersion*). Dans certains cas, on peut aussi utiliser le microscope indifféremment avec ou sans lame de verre. La figure 5.100 montre quatre exemples d'objectifs représentatifs (paragraphe 6.3.1). Signalons en plus le cas du doublet achromatique collé de faible puissance (environ $5\times$), qui est couramment utilisé. Il arrive aussi qu'on utilise certains objectifs achromatiques de moyenne puissance ($10\times$ ou $20\times$) pas trop chers, pour élargir des faisceaux laser et les filtrer spatialement.

Il faut également mentionner ici un paramètre important concernant les microscopes. La luminosité de l'image dépend, entre autres, de la quantité de lumière que recueille l'objectif, ce qui s'évalue généralement grâce au nombre d'ouverture ($f/\#$), en particulier lorsque l'objet observé est éloigné. Cependant, pour un instrument fonctionnant avec *des conjugués à*

distances finies (s_i et s_o finies), il est plus approprié de se servir de l'ouverture numérique NA (paragraphe 5.6). Ici,

$$NA = n_i \sin \theta_{\max} \quad (5.82)$$

Où n_i est l'indice de réfraction du milieu objet (air, huile, eau...) en contact avec la lentille de l'objectif et θ_{\max} est le demi-angle du plus grand cône de lumière que peut recevoir cette lentille (figure 5.100b). En d'autres termes, θ_{\max} est l'angle que fait un rayon marginal avec l'axe. L'ouverture numérique est généralement le second nombre qui est indiqué sur la monture d'un objectif. Elle peut aller d'environ 0,07 à 1,4 pour les objectifs les plus performants (100×). Bien sûr, si l'objet est immergé dans l'air, NA ne peut pas être supérieure à 1. Le concept d'ouverture numérique fut en fait introduit par le grand physicien Ernst Abbe (1840-1905) alors qu'il travaillait à l'atelier de fabrication des microscopes Carl Zeiss. C'est d'ailleurs lui qui introduisit le concept de *pouvoir de résolution*. Il montra que cette distance transverse minimale entre deux points objets pouvant être séparés sur l'image est proportionnelle à λ et inversement proportionnelle à NA.

En résumé, le microscope est donc un instrument optique qui permet d'observer une image agrandie d'un petit objet rapproché. Il le fait en collectant un maximum de lumière grâce à

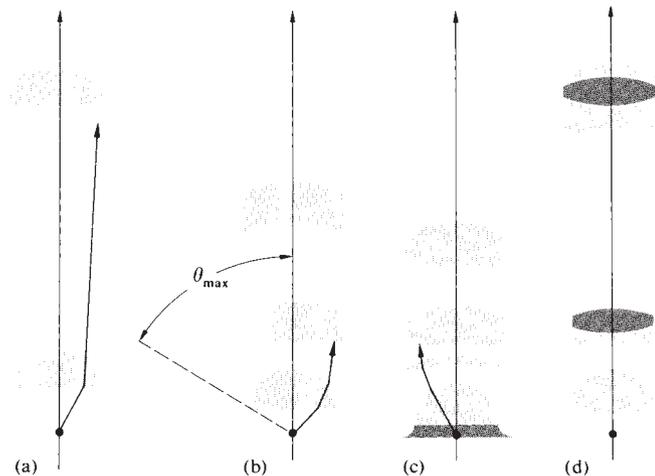


Figure 5.100 Exemples d'objectifs de microscope : (a) Objectif Lister, 10×, NA = 0,25, $f = 16$ mm (deux achromats collés). (b) Objectif Amici, de 20×, NA = 0,5, $f = 8$ mm à 40×, NA = 0,8, $f = 4$ mm. (c) Objectif à immersion dans l'huile, 100×, NA = 1,3, $f = 1,6$ mm (figure 6.18). (d) Objectif apochromatique, 55×, NA = 0,95, $f = 3,2$ (contient deux lentilles en fluorite).

un objectif de courte focale, placé tout contre l'objet. L'image réelle donnée par l'objectif est alors examinée par un oculaire fonctionnant comme une loupe.

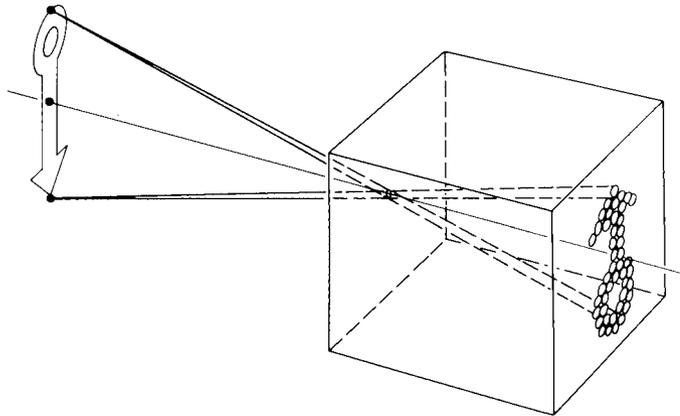
5.7.6 L'appareil photographique

L'ancêtre de l'appareil photographique moderne est un système connu sous le nom de *camera obscura**, qui consiste simplement en une chambre noire percée d'un petit trou sur l'avant (le *sténopé*). La lumière entrant par le sténopé projette la scène extérieure sur la paroi opposée de la chambre. Ce principe était déjà connu d'Aristote avant d'être repris par certains savants arabes du haut Moyen Âge. Alhazen devait par exemple se servir d'une camera obscura pour observer des éclipses de Soleil. Les carnets de Léonard de Vinci contiennent également certains dessins de ce système. La première véritable description est cependant à attribuer à Giovanni Della Porta (*Magia Naturalis*, 1589). Dans cet ouvrage, le grand savant italien la mentionne comme un outil d'aide pour le dessin. Au cours du Siècle des lumières, la camera obscura devint un accessoire très populaire. Le fameux astronome Johannes Kepler en avait une version transportable sous une tente qu'il utilisa lors de ses observations en Autriche. Indiquons également que le système de la camera obscura existe dans la nature. C'est sur le même principe que fonctionne l'œil d'un petit mollusque, véritable fossile vivant, le nautilus.

En disposant un film photosensible sur la zone de projection, la camera obscura devient un appareil photographique, où l'on fixe l'image réalisée par un système optique. Le procédé photographique fut mis au point en 1826 par le Français Joseph Nicéphore Niepce (1765-1833). Celui-ci devait réaliser le premier cliché de l'histoire en exposant pendant 8 heures une plaque étamée dans une chambre noire en bois.

La chambre noire sans lentille (figure 5.101) représente bien entendu le système optique de photographie le plus élémentaire. Pourtant, elle possède des qualités très intéressantes. Elle peut former des images avec une bonne définition et une faible distorsion selon un très grand champ angulaire (en raison de la grande *latitude de mise au point*) et pour des distances très différentes (en raison de la grande *profondeur de champ*). Si la pupille d'entrée est initialement trop grande, on n'obtient pas d'image. Avec des diamètres de plus en plus petits, les images se forment et deviennent de plus en plus finement résolues,

*Voir W. H. Price, « The Photographic Lens », *Sci. Am.* **72** (août 1976).



Photographie prise avec un sténopé (Science Building, Adelphi University). Diamètre du trou : 0,5 mm, distance du plan du film : 24 cm, A.S.A. 3000, obturateur vitesse 0,25 s. Notez la profondeur de champ. (Photo E.H.)

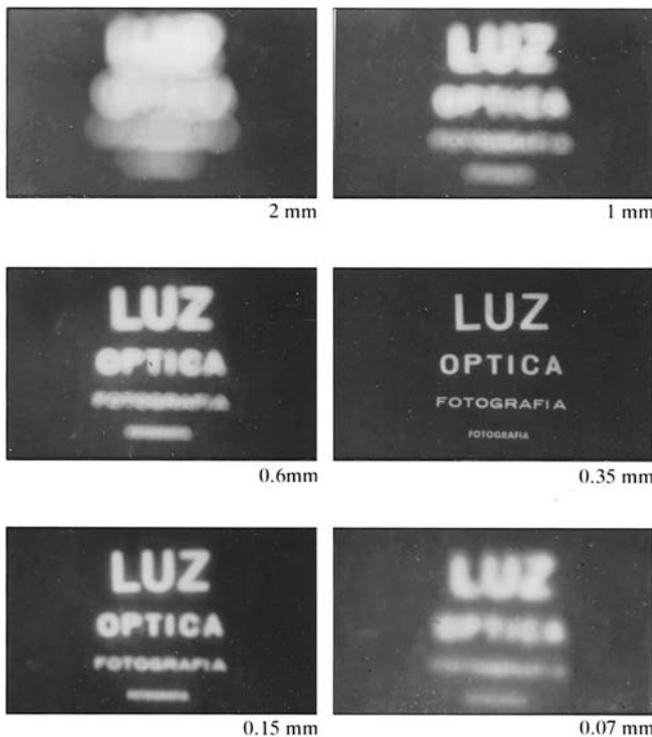


Figure 5.101 Photographies prises avec un sténopé (chambre noire percée d'un trou d'épingle). Notez la variation de la clarté de l'image lorsqu'on diminue le diamètre du trou.

(Photos Dr. N. Joel, UNESCO.)

jusqu'à un certain point où l'image devient floue à nouveau. On peut ainsi montrer que la définition maximale est obtenue lorsque le sténopé a un diamètre proportionnel à sa distance (on obtient, par exemple, un bon résultat avec un trou de 0,5 mm de diamètre et situé à 25 cm de la plaque photosensible). Insistons sur le fait qu'il n'y a pas ici de focalisation des rayons. La baisse de clarté observée pour de très petits diamètres de sténopé est en fait due au phénomène de diffraction, que nous examinerons plus tard (paragraphe 10.2.5). En ce qui concerne une utilisation pratique, l'inconvénient majeur de la chambre noire sans lentille est qu'elle est extrêmement *lente* (environ $f/500$). Cela signifie que le temps d'exposition est considérablement long, même avec les films ou les détecteurs les plus sensibles. La seule exception concerne évidemment les scènes parfaitement immobiles, comme un bâtiment (voir photo), pour lesquelles ces dispositifs donnent de très bons résultats.

La figure 5.102 représente les composants caractéristiques d'un appareil photographique moderne et très courant : l'*appareil photo reflex mono-objectif* (en anglais, *SLR* : *Single Lens Reflex*). Son principe est le suivant : la lumière traverse les premières lentilles de l'objectif puis passe à travers un iris (diaphragme circulaire) qui contrôle à la fois le temps d'exposition (il s'ouvre et se referme) et l'ouverture du système ($f/\#$) de par son diamètre d'ouverture variable. À la sortie de l'objectif, la lumière rencontre un miroir amovible orienté à 45° qui l'envoie

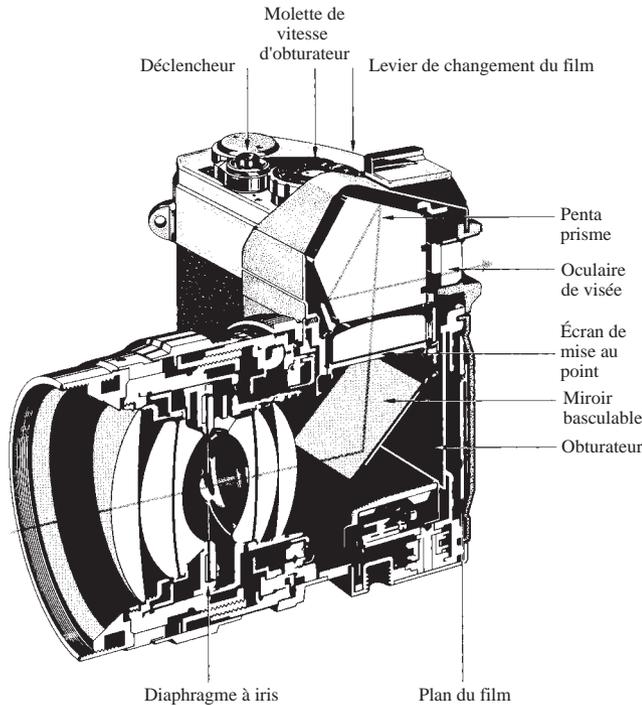


Figure 5.102 Schéma d'un appareil photo reflex mono-objectif.

à travers un écran de mise au point sur un pentaprisme et un oculaire qui constitue le dispositif de visée (visueur). Lorsque l'utilisateur appuie sur le déclencheur, le diaphragme se ferme, le miroir bascule. Puis le rideau protégeant le film s'ouvre, de même que le diaphragme (durant le temps choisi) : c'est l'étape d'exposition du film. Enfin, tout revient en place : le diaphragme et le rideau se ferment, le miroir rebascule et le diaphragme s'ouvre à nouveau, permettant de viser encore une fois. À l'origine, ces appareils photographiques étaient manuels : il fallait choisir le temps d'exposition (vitesse) et l'ouverture, le tout en fonction de l'éclairage de la scène et de la sensibilité du film, et mettre au point manuellement. Avec les années, toutes ces étapes sont devenues largement automatisées, grâce à une panoplie de détecteurs très perfectionnés.

Pour « mettre au point », c'est l'objectif entier qui se déplace par rapport au plan du film. Comme s_o varie et que la focale reste fixe, s_i doit également varier. Le *champ angulaire* correspond grossièrement à la fraction d'espace représenté sur la photographie. Il est de plus nécessaire d'avoir la même qualité d'image en n'importe quel point de la photo. Plus précisément, considérons le champ d'angle φ correspondant à l'angle

partant de l'objectif et sous-tendant un cercle délimitant la zone du film (figure 5.103). Pour poursuivre notre modélisation, faisons également l'approximation que la diagonale du film est égale à la distance focale. On a alors : $\varphi/2 \approx \tan^{-1} \frac{1}{2}$; et donc, $\varphi \approx 53^\circ$. Si l'objet se trouve à l'infini, s_i doit augmenter. Conséquemment, la lentille doit s'éloigner du film afin de conserver la mise au point. Le champ, déterminé par le film dont la périphérie constitue le diaphragme de champ, décroît de même. L'objectif d'un **SLR standard** a une distance focale typique de 50 à 58 mm pour un champ de 40 à 50°. Avec des dimensions de film constantes, une réduction de f correspond à une augmentation du champ. Il existe également des objectifs SLR **grand angle**, pour lesquels f peut varier de 40 mm à 6 mm, ce qui donne un angle de champ φ allant de 50° à un remarquable 220° (correspondant à des objectifs particuliers de type « *fish-eye* » pour lesquels la distorsion est inévitable). Les *téléobjectifs* ont, quant à eux, des focales de 80 mm ou plus. Leur champ est donc rapidement très réduit (quelques degrés à $f \approx 1000$ mm).

Finalement, un appareil photographique standard doit avoir une grande ouverture relative, $1/(f/\#)$, afin d'avoir des temps d'exposition courts. L'image doit être plane et non distordue et l'objectif doit également avoir un champ large. De nombreuses configurations permettent, dans la mesure du possible, de réunir ces qualités. De nos jours, les logiciels de conception optique et l'ordinateur permettent la mise au point de modèles très performants en s'acquittant des erreurs et des nombreux prototypes par lesquels il fallait passer auparavant.

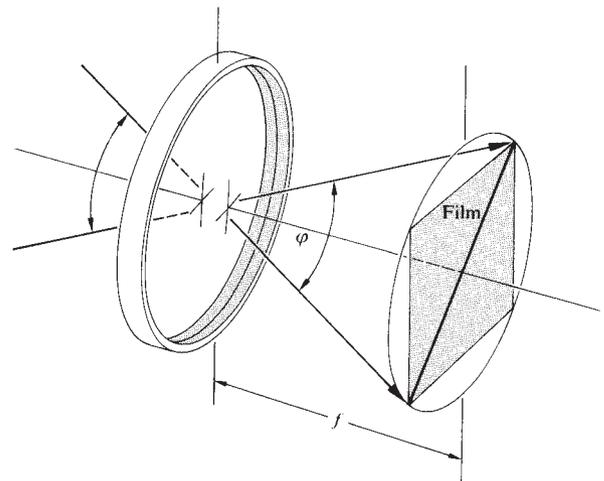


Figure 5.103 Champ angulaire pour une focalisation à l'infini.

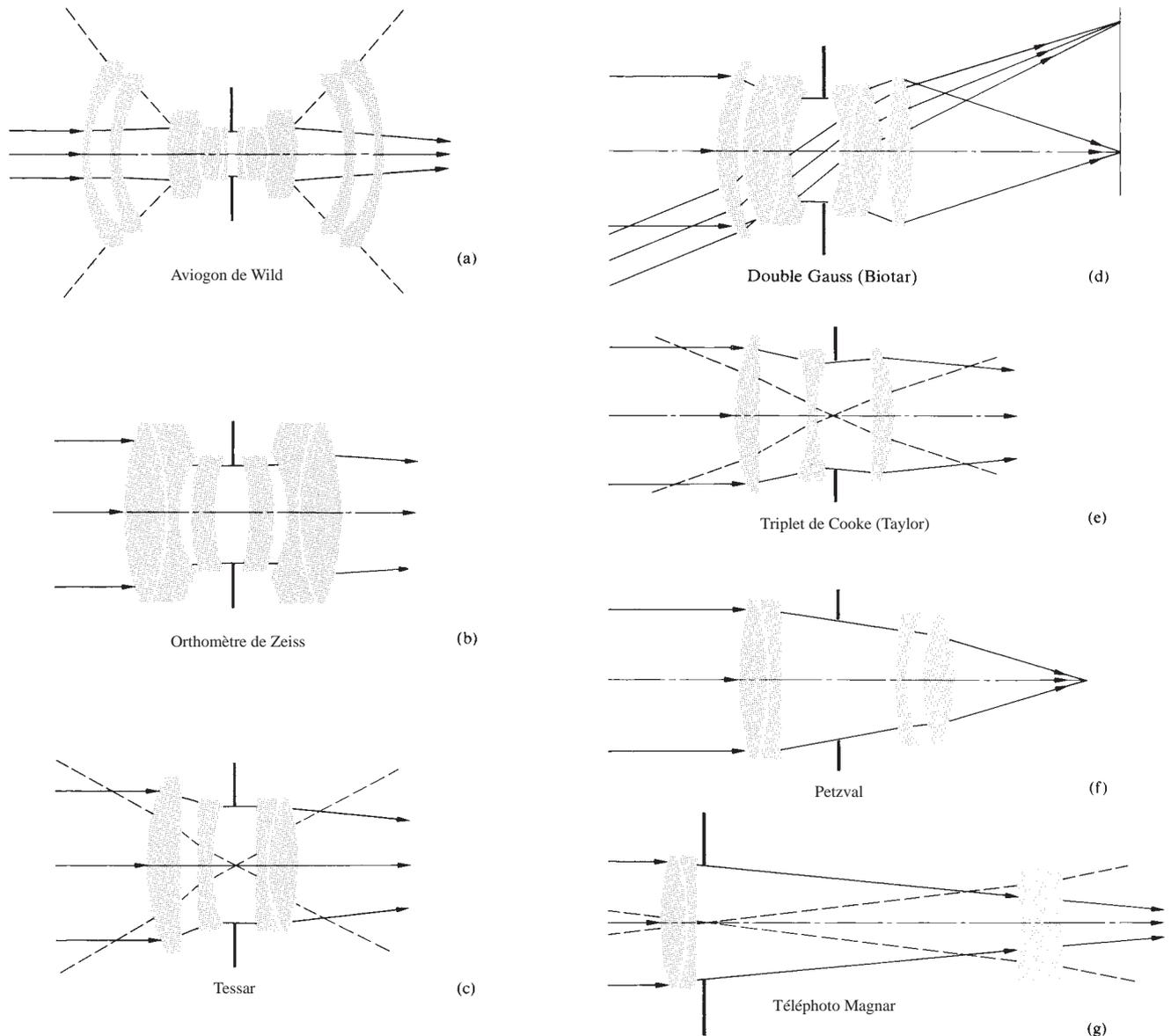


Figure 5.104 Exemples d'objectifs d'appareil photographique.

Les objectifs sont souvent des variantes de configurations éprouvées. La figure 5.104 illustre quelques exemples représentatifs d'objectifs allant du grand angle au téléobjectif. L'*aviogon* et l'*orthomètre de Zeiss* sont par exemple des grands angles. Le *tessar* et le *biotar* peuvent être considérés comme des objectifs polyvalents standards. Le *triplet de Cooke*, inventé par Dennis Taylor en 1893, est toujours fabriqué et utilisé

(notez la ressemblance avec le *tessar*). Cet objectif est remarquable dans la mesure où il constitue la configuration minimale qui corrige les aberrations du troisième ordre. Mentionnons également le *petzval*, dessiné vers 1840 en tant qu'objectif rapide (afin de raccourcir les temps de pose pour les portraits) par Josef Max Petzval pour Voightländer & Son. Ses variantes modernes sont innombrables.

5.7.7 Lunettes et télescopes

Le mot *lunette* désigne les instruments d'observation d'objets éloignés uniquement composés de lentilles. Le mot *télescope* est en revanche utilisé lorsque l'objectif est constitué de miroirs.

Le débat existe toujours pour savoir à qui revient le mérite de l'invention du premier système de « *vision à distance* » (*teleskopos* en grec). Il est d'ailleurs probable qu'il fut inventé et réinventé plusieurs fois à des endroits différents. Souvenons-nous en effet qu'au XVII^e siècle, les lunettes de vue étaient déjà utilisées en Europe depuis plus de trois cents ans. Durant cette période, il est aussi fort probable que certains aient essayé d'agencer des lentilles et soient arrivés à une configuration appropriée. Quoiqu'il en soit, la première lunette d'observation fut certainement mise au point à cette époque en Hollande, peut-être par l'inventeur du microscope Zacharias Janssen. La première preuve irréfutable de l'invention date cependant du 2 octobre 1608, quand l'opticien Hans Lippershey sollicita les États généraux de Hollande pour breveter son instrument permettant de voir à distance. Comme on peut l'imaginer, les potentialités militaires furent tout de suite perçues. Le brevet de Lippershey ne lui fut pas accordé ; le gouvernement en racheta les droits et il chargea Lippershey de continuer ses recherches. En Italie, Galilée entendit parler de

ces travaux ; il décida de construire sa propre lunette, ce qu'il fit à partir de deux lentilles et d'un tuyau d'orgue (1609). Rapidement, il améliora ses instruments grâce auxquels il put réaliser ses fantastiques découvertes astronomiques.

Lunettes astronomiques

Le schéma de principe de la **lunette astronomique** est indiqué à la figure 5.105. À la différence du microscope, qui lui est pourtant très similaire, celle-ci a pour fonction l'observation d'objets *éloignés*. Dans cette illustration, l'objet observé est effectivement à une distance importante (mais finie) de l'objectif, ce qui fait que l'image intermédiaire, réelle, est très proche de son foyer image. Pour des distances objets encore plus importantes, les rayons incidents sont pratiquement parallèles et l'image intermédiaire vient se situer sur le foyer image de l'objectif. Comme dans le cas du microscope, cette image constitue le nouvel objet d'un oculaire. D'après le tableau 5.3 (p. 170), on comprend que si l'oculaire doit former une image finale, virtuelle et agrandie (et dans l'échelle d'accommodation d'un observateur normal), sa distance à l'objet doit être inférieure ou égale à sa distance focale f_e . Habituellement, on s'arrange pour faire coïncider exactement le foyer image de l'objectif avec le foyer objet de l'oculaire.

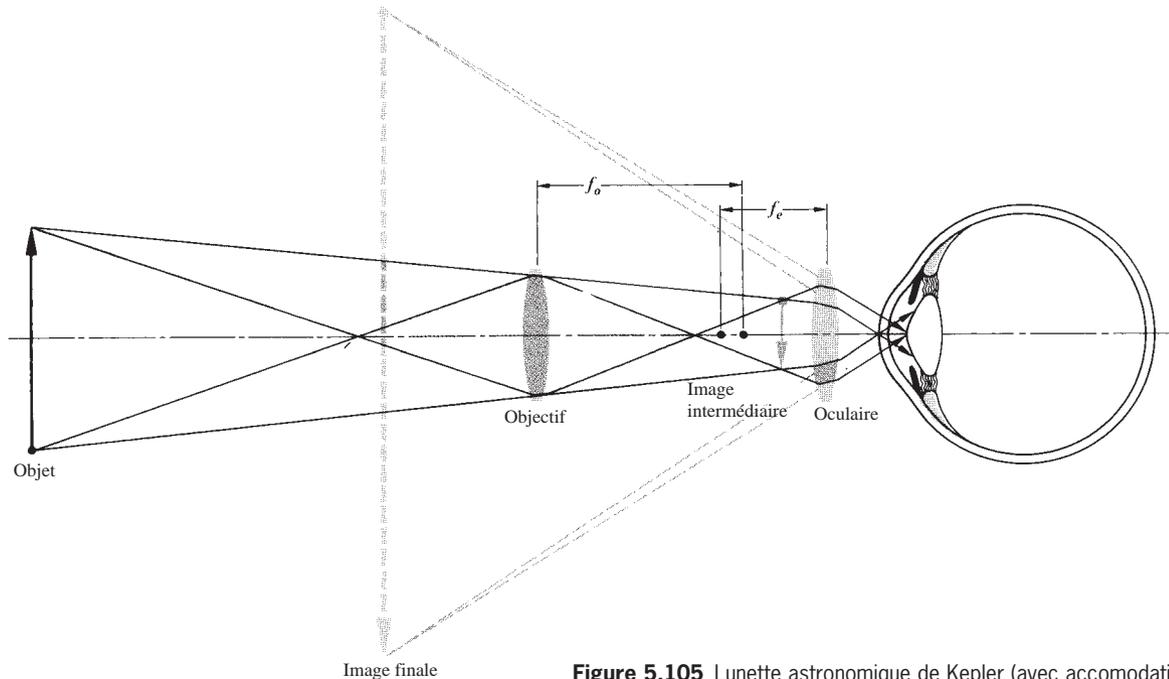


Figure 5.105 Lunette astronomique de Kepler (avec accommodation de l'œil).

De cette manière, les rayons en ressortent également parallèles entre eux. Un œil normal peut ainsi observer confortablement l'image finale à l'infini. En pratique, *la position de l'image intermédiaire est fixée ; seul l'oculaire est mobile afin de mettre au point l'instrument*. Si l'observateur est myope ou hypermétrope, il lui suffit de déplacer légèrement l'oculaire, de sorte que les rayons divergent ou convergent légèrement en sortie et corrigent le défaut (les personnes astigmatiques doivent en revanche garder leurs lunettes lorsqu'elles observent). Remarquons que, dans la configuration étudiée, l'image finale est *renversée*. Si la lunette est employée pour l'observation astronomique, cette situation ne pose pas de problème, en particulier si l'on prend des clichés de ce que l'on observe.

Nous avons déjà vu auparavant un exemple de système conjuguant objet et image à l'infini (paragraphe 5.2.3). C'est notamment le cas lorsque deux lentilles minces sont séparées par une distance d égale à la somme de leurs distances focales. Un tel système est dit « *afocal* » car il ne focalise pas les rayons (des rayons incidents parallèles entre eux ressortent parallèles). Les lunettes astronomiques utilisent couramment cette configuration (figure 5.106). Elles constituent également des réducteurs ou des agrandisseurs de faisceau. En effet, toute l'énergie lumineuse reçue sur l'objectif ressort finalement concentrée sur une section bien inférieure dans l'espace image. Il arrive aussi qu'on utilise cette propriété « à l'envers ». En effet, si l'on envoie un faisceau laser étroit et collimaté sur la sortie d'un tel système, le faisceau en ressort toujours collimaté mais avec une section plus importante. Ce procédé est ainsi fort utile pour « élargir » le faisceau d'un laser et obtenir un faisceau collimaté de lumière quasi monochromatique de plus grand diamètre.

La monture de l'objectif constitue généralement le diaphragme d'ouverture du système (ainsi que sa pupille d'entrée,

étant donné qu'il n'y a pas de lentille à la gauche de l'objectif). Si la lunette pointe des objets à distance astronomique, l'axe visuel est pratiquement colinéaire avec l'axe optique de l'instrument. Pour des conditions d'observation optimales, la position de la pupille d'entrée de l'œil (i.e. la pupille, au sens physiologique) doit coïncider avec la pupille de sortie (*cercle oculaire*) de l'instrument. Comme nous l'avons vu précédemment, l'œil n'est cependant pas immobile. Le regard balaye instinctivement tout le champ visuel, en s'arrêtant localement sur les objets intéressants, c'est-à-dire en orientant les rayons provenant de ces objets sur la fovéa. La direction déterminée par le rayon principal qui relie le centre de la pupille d'entrée à la fovéa constitue la *ligne de visée principale*. Le croisement des différentes lignes de visée, obtenues pour toutes les orientations possibles de l'œil, détermine un *point d'intersection de visée*, fixe par rapport à la tête de l'observateur. Pour que la vision puisse balayer tout le champ de la lunette, on comprend qu'il est nécessaire que celui-ci soit positionné au centre de la pupille de sortie. Dans ce cas, la ligne de visée principale correspond au rayon principal passant au centre de la pupille de sortie de l'instrument, quelle que soit l'orientation instantanée de l'œil.

Supposons que le bord de l'objet observé fasse un demi-angle α avec l'objectif de la lunette (figure 5.107). Celui-ci est alors identique à l'angle α_u obtenu dans le cas d'une observation à l'œil nu. Pour un système afocal, le grossissement de l'instrument s'identifie de fait au grossissement angulaire. On a alors :

$$MP = \frac{\alpha_a}{\alpha_u} \quad [5.75]$$

Ici, α_u et α_a représentent respectivement les valeurs du champ dans l'espace objet et dans l'espace image. α_u est le demi-angle du cône de lumière collectée par l'objectif et α_a celui du cône apparent. Si un rayon arrive sur l'objectif avec une pente négative, il pénètre dans l'œil avec une pente positive et vice

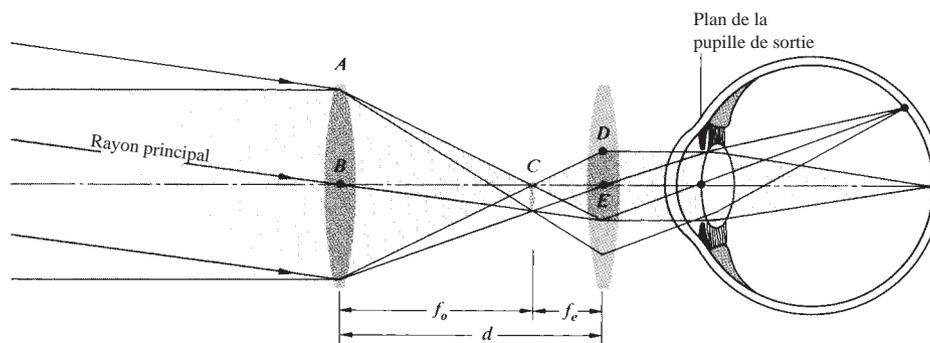


Figure 5.106 Lunette astronomique afocale.

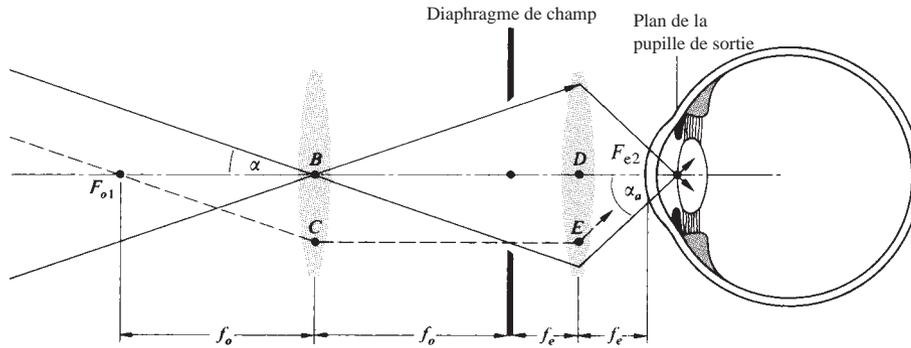


Figure 5.107 Angles des rayons dans une lunette.

versa. Afin que MP soit de signe positif lorsque l'image est redressée (figure 5.91), les deux angles α_u et α_a doivent être pris négatifs (on choisit ce cas car le rayon a une pente négative). Observons que le rayon passant par le foyer objet de l'objectif passe par le foyer image de l'oculaire, ce qui fait que F_{o1} et F_{e2} sont des points conjugués. Dans l'approximation paraxiale, $\alpha \approx \alpha_u \approx \tan \alpha_u$ et $\alpha_a \approx \tan \alpha_a$. L'image occupe donc toute la zone du diaphragme de champ pour une demi-extension égale à la distance $\overline{BC} = \overline{DE}$. De plus, il apparaît d'après l'étude des triangles $F_{o1}BC$ et $F_{e2}DE$ que le rapport des tangentes est tel que :

$$MP = -\frac{f_o}{f_e} \quad (5.83)$$

On peut aussi arriver à une expression pratique du grossissement en considérant le grandissement transversal de l'oculaire. Comme la pupille de sortie est l'image de l'objectif (figure 5.107), il vient en effet :

$$M_{Te} = -\frac{f_e}{x_o} = -\frac{f_e}{f_o}$$

D'autre part, si D_o est le diamètre de l'objectif et D_{ep} le diamètre de son image (la pupille de sortie), il vient :

$M_{Te} = D_{ep}/D_o$. L'équation (5.83) devient finalement avec ces deux expressions de M_{Te} :

$$MP = \frac{D_o}{D_{ep}} \quad (5.84)$$

Ici, D_{ep} est une quantité négative, car l'image est retournée. Il est donc facile de construire une lunette d'observation élémentaire. Il suffit de disposer une lentille de longue focale devant une autre de courte focale, en faisant en sorte que $d = f_o + f_e$. Les véritables instruments ont évidemment une configuration un peu plus sophistiquée. Ils sont parfois télescopiques et utilisent des doublets ou des triplets, pour corriger au mieux les aberrations.

À la différence des instruments astronomiques, les **lunettes terrestres** (*longues-vues*) doivent comporter un système permettant de **redresser l'image**. Une ou plusieurs lentilles de redressement sont alors disposées entre l'objectif et l'oculaire, ce qui permet d'avoir l'image finale dans le même sens que l'objet de départ. La figure 5.108 montre un tel système utilisant un objectif en doublet collé et un oculaire de Kellner. Un tel dispositif nécessite une grande longueur de tube : c'est typiquement la longue-vue télescopique que l'on voit dans les films de pirates.

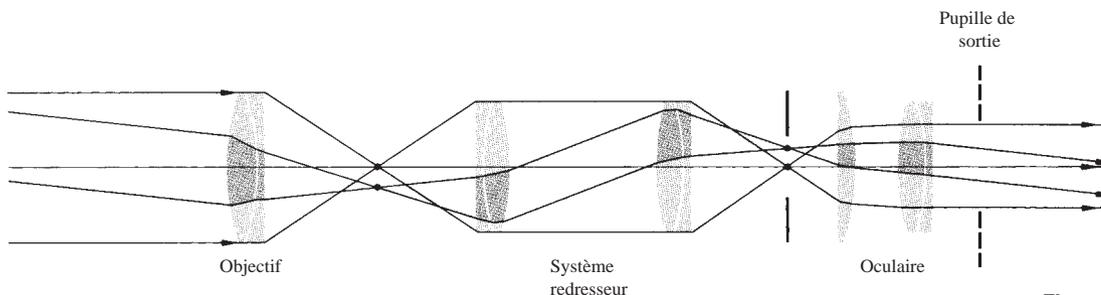


Figure 5.108 Lunette terrestre.

C'est aussi pour réduire l'encombrement que les **jumelles** comprennent des systèmes de redressement à prismes (prismes redresseurs). Ceux-ci permettent d'obtenir le même effet dans un espace plus réduit. L'utilisation de prismes redresseurs permet aussi une plus grande séparation entre l'objectif de l'œil droit et celui de l'œil gauche, ce qui accroît la vision stéréoscopique (en relief). La plupart du temps, de tels systèmes utilisent des prismes de Porro, comme dans la figure 5.109 (où l'on peut également remarquer un oculaire d'Erffle modifié, le large diaphragme de champ et l'objectif doublet achromatique).

Les jumelles comportent généralement une série de deux chiffres, comme par exemple : 6×30 , 7×50 , ou 20×50 . Le premier indique le grossissement ; ici : $6\times$, $7\times$, ou $20\times$ et le second le diamètre de la pupille d'entrée, c'est-à-dire le diamètre d'ouverture de l'objectif, en millimètres. D'après l'équation (5.84), le diamètre de la pupille de sortie est donc donné par le rapport du second chiffre par le premier, dans le cas présent : 5, 7,1 et 2,5 millimètres. En tenant l'instrument à bout de bras, on peut en effet voir le disque lumineux entouré d'une zone sombre, correspondant à la pupille de sortie. Pour la mesurer, on peut focaliser l'instrument à l'infini et pointer un ciel lumineux. On observe alors un disque de lumière, qu'on peut mesurer à l'aide d'un papier et d'une règle.

Tant que $d = f_o + f_e$, l'instrument reste afocal, même si l'oculaire est négatif (i.e. $f_e < 0$). Un bon exemple en est la

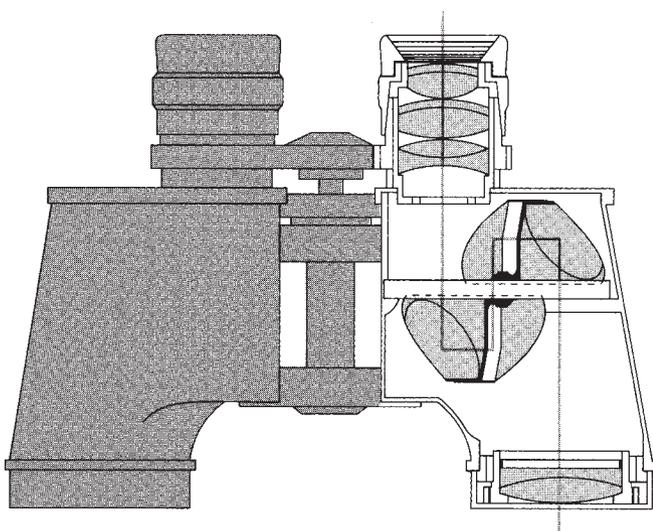


Figure 5.109 Jumelles.

lunette construite par Galilée (figure 5.110), dont l'oculaire est une simple lentille divergente, ce qui forme une image finale redressée [$f_e < 0$ et $MP > 0$ dans l'équation (5.83)]. En tant qu'instrument d'observation, la lunette de Galilée est une configuration un peu dépassée (bien que pédagogiquement intéressante). Elle est en revanche très utile en tant qu'expandeur de faisceau laser car elle ne comporte pas de points de focalisation internes où le faisceau de haute énergie pourrait ioniser l'air environnant.

Télescopes à miroirs

La fonction première des systèmes tels que les lunettes ou les télescopes est d'observer nettement des objets extrêmement éloignés et souvent à peine visibles. Astronomiquement parlant, il s'agit de pouvoir *résoudre* des objets, c'est-à-dire de distinguer des détails au sein d'un même corps céleste, par exemple deux étoiles dans un système binaire. De la même

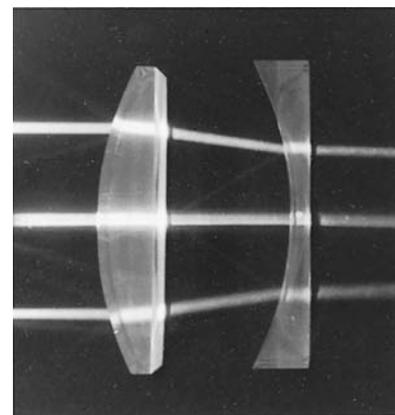
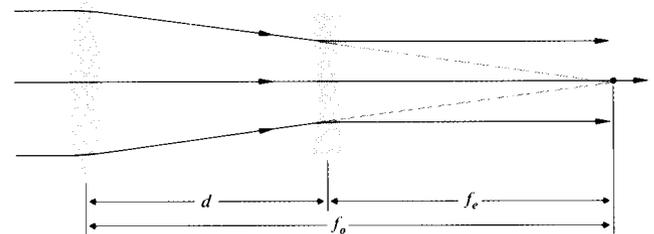


Figure 5.110 Lunette de Galilée : la première lunette inventée par Galilée avait un objectif plan-convexe (5,6 cm de diamètre, $f = 1,7$ m, $R = 93,5$ cm) et un oculaire plan-concave, tous les deux polis par le savant. Cet instrument était un $3\times$ alors que sa dernière lunette était une $32\times$. (Photo E.H.)

manière, un satellite espion qui permet de reconnaître un uniforme est encore plus intéressant qu'un satellite capable de détecter le déplacement d'individus au sol. Le paramètre important est donc ici la **résolution** ou le **pouvoir séparateur**. Celui-ci caractérise la capacité d'un instrument à *séparer* deux objets très proches l'un de l'autre. On peut montrer qu'il augmente avec le diamètre (D) de l'ouverture de l'instrument. À paramètres équivalents (dans des conditions idéales d'observation), un instrument de large diamètre aura une meilleure résolution qu'un autre à diamètre plus petit. Il y a d'ailleurs un autre avantage à avoir une optique d'entrée de grande taille : celui de pouvoir **capter un maximum de lumière**. Un système possédant une grande ouverture pourra collecter plus de photons et voir des objets moins lumineux ou plus éloignés qu'un autre système identique, mais à pupille plus petite.

Le problème est qu'il n'est pas facile de fabriquer des lentilles de qualité avec un très grand diamètre. Les chiffres parlent d'eux-mêmes : alors que les plus grands télescopes à miroirs ont des diamètres d'entrée de plus de 8 mètres, l'objectif de la plus grande lunette astronomique ne mesure qu'un mètre de diamètre (*Observatoire Yerkes*, Wisconsin, USA). Les raisons sont évidentes. Une lentille doit être parfaitement transparente et dépourvue de défauts à la fois internes (bulles...) et de surface. Un miroir en face avant n'est concerné que par la qualité de sa surface. Une lentille ne peut être tenue que par une monture externe et peut se déformer sous son propre poids. Un miroir peut en revanche être maintenu à la fois par ses bords mais aussi par l'arrière. Les miroirs ont enfin l'avantage de ne pas fonctionner par réfraction. Les systèmes à miroirs ne sont donc pas soumis aux aberrations chromatiques et leur distance focale n'est donc pas fonction de la longueur d'onde des rayonnements. Pour ces différentes raisons, ainsi que d'autres (par exemple, leur domaine spectral étendu), les grands instruments sont constitués de systèmes à miroirs.

Inventé en 1661 par le savant écossais James Gregory (1638-1675), le premier modèle effectif de télescope à miroir fut construit par Newton en 1668. Il fallut cependant attendre un siècle et les travaux du grand astronome allemand William Herschel (1738-1822) pour que ses qualités soient enfin reconnues.

La figure 5.111 représente quelques configurations classiques de télescopes utilisant toutes un miroir d'entrée (*miroir primaire*) paraboloidal concave. Le télescope de Hale, de 5 m de diamètre est si gros qu'une petite cabine (où peut s'asseoir un observateur) est placée au foyer primaire (figure 5.111a). La figure 5.111b montre un *télescope de Newton*, dans lequel

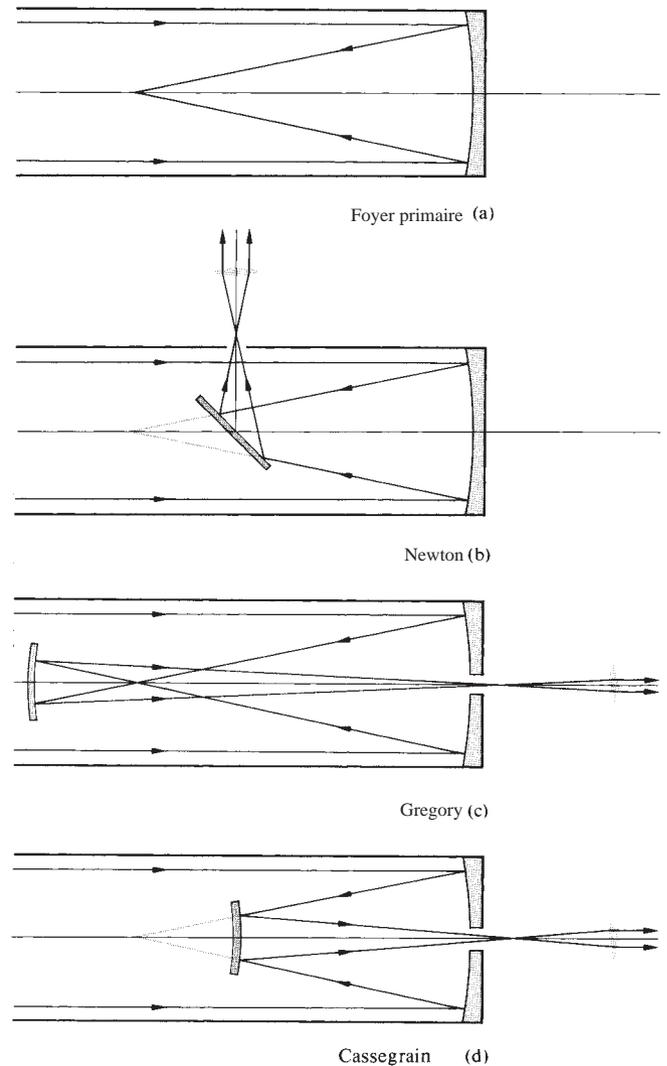


Figure 5.111 Exemples de télescopes à miroirs.

un miroir plan (ou un prisme) fait ressortir le faisceau perpendiculairement à l'axe de l'instrument, où l'image peut être observée, photographiée, subir une analyse spectrale ou un traitement photoélectrique. Dans la configuration de *Gregory* (figure 5.111c), un miroir secondaire ellipsoïdal concave redresse l'image et l'envoie à travers une ouverture pratiquée au centre du miroir primaire. Le *télescope de Cassegrain* (5.111d) utilise quant à lui un miroir secondaire hyperboloidal convexe afin d'accroître la longueur focale effective de l'instrument (figure 5.47). Tout se passe en effet comme si le

miroir primaire avait la même ouverture mais une focale (ou une courbure) plus grande.

Le télescope simple à un seul miroir primaire paraboloidal (figure 5.111a) fut construit pour fonctionner avec des rayons entrants suivant son axe optique. Mais il y a toujours des objets intéressants dans le champ ailleurs que le long de cette direction précise. Lorsqu'un pinceau de rayons parallèles dirigés hors de l'axe est réfléchi par le paraboloïde, les rayons ne se croisent pas tous au même point. L'image d'un point hors de l'axe lointain (par exemple, une étoile) est une tache désaxée asymétrique en raison de l'effet combiné des aberrations de *coma* (p. 271) et d'*astigmatisme* (p. 275). Plus l'objet est désaxé, plus l'image devient d'une qualité inacceptable. Ce phénomène est lié spécialement à la contribution de la coma et il peut être corrigé en limitant le champ à une valeur acceptable. Mais même pour un système très peu ouvert de $f/10$, celle-ci ne correspond qu'à un petit rayon angulaire de 9 minutes d'arc. Elle chute à un minuscule 1,4 minutes d'arc pour $f/4$. De même, les configurations classiques à 2 miroirs (figure 5.111b, c et d) ont des champs sévèrement limités par la coma.

Signalons ici un dispositif surprenant : le miroir liquide. Si l'on met effectivement un liquide comme du mercure dans un bassin horizontal peu profond et que l'on fait subir à l'ensemble une rotation suivant un angle vertical à une vitesse constante ω , la surface prend naturellement la forme d'une parabole. Quel que soit le point de la surface, la hauteur (z) par rapport au point le plus bas est donnée par :

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad (5.85)$$

Ces miroirs sont robustes et *limités par la diffraction*. Certains modèles assez grands (3 mètres de diamètre) ont même pu être expérimentés. Leur avantage principal réside dans le fait qu'ils sont bien moins chers que les miroirs de verre. En revanche, ils ne peuvent servir qu'à regarder à la verticale (voir photo).



Le télescope à miroir liquide tournant de 3 m de l'observatoire du Nouveau-Mexique est utilisé par la NASA pour repérer des débris de satellites à orbite basse, dont les dimensions peuvent descendre jusqu'à 5 cm.

Réflecteurs aplanétiques

Le terme d'« **aplanétique** » désigne les systèmes optiques convenablement corrigés de l'aberration sphérique (p. 267) et de la coma. Il existe en fait des versions aplanétiques des télescopes de Cassegrain et de Gregory. Avec ses miroirs primaire et secondaire hyperboloïdaux, le télescope *Ritchey-Chrétien* constitue par exemple une version aplanétique du Cassegrain. De nos jours, cette configuration est devenue la plus courante pour les télescopes de plus de 2 mètres de diamètre. Le télescope spatial *Hubble* (2,4 m), représenté à la figure 5.112, en constitue peut-être le meilleur exemple. Il se trouve que seuls les télescopes « spatiaux » peuvent observer dans l'ultraviolet (absorbé par l'atmosphère), qui représente une gamme de longueurs d'onde pourtant très intéressante, par exemple pour étudier les étoiles jeunes. Avec son nouveau capteur CCD*, installé en 1993, *Hubble* peut « voir » de 1 μm dans l'IR à 121,6 nm dans l'UV. Pouvant fournir une imagerie limitée par la diffraction pour les longueurs d'onde supérieures à 10 μm , les grands télescopes terrestres lui sont parfaitement complémentaires.

Avec très peu ou aucune coma, le champ d'un Ritchey-Chrétien reste limité par l'astigmatisme. Ainsi, un instrument à $f/10$ dispose d'un rayon angulaire acceptable de 18 minutes d'arc, deux fois plus que pour un télescope paraboloidal équivalent. Comparé au Gregory aplanétique, le Ritchey-Chrétien possède un secondaire plus petit, qui obstrue donc moins de lumière, pour une longueur plus petite. C'est pour ces diverses raisons que cette configuration est si populaire.

Comme les instruments ont une ouverture finie, ils ne peuvent reformer une image qu'à partir d'une portion d'un front d'onde incident. Ils sont ainsi toujours soumis à la diffraction : la lumière ne suit plus une trajectoire rectiligne et s'étale quelque peu dans le plan image. Lorsqu'un système optique avec une ouverture circulaire reçoit des ondes planes, la lumière ne forme donc pas un « point » image mais elle se distribue à l'intérieur d'une petite zone circulaire (appelée « *disque d'Airy* ») et contenant environ 84 % de l'énergie incidente) entourée d'anneaux à peine visibles. Le rayon de la *tache d'Airy* définit le recouvrement des images de deux points voisins. Il est donc directement relié à la résolution du système. Voilà pourquoi un instrument parfait est qualifié de **limité par la diffraction**.

*Les CCD (*charge-coupled-device*) ou DTC (*dispositifs à transfert de charges*) permettent d'avoir des sensibilités 50 fois supérieures aux meilleurs films photographiques. L'ère des capteurs argentiques spatiaux, largués sur Terre avec des parachutes, est définitivement finie.

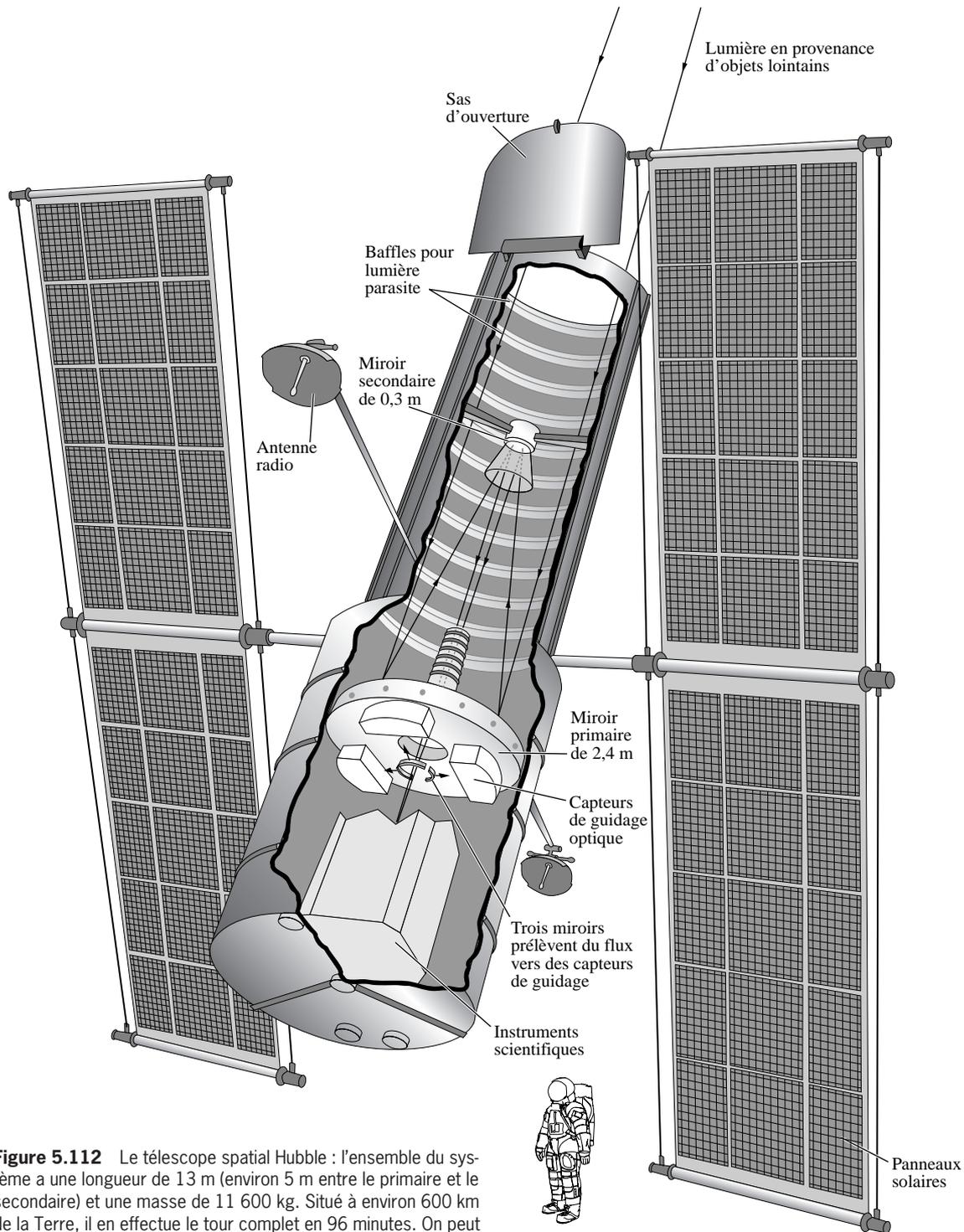


Figure 5.112 Le télescope spatial Hubble : l'ensemble du système a une longueur de 13 m (environ 5 m entre le primaire et le secondaire) et une masse de 11 600 kg. Situé à environ 600 km de la Terre, il en effectue le tour complet en 96 minutes. On peut voir une photographie du miroir primaire p. 188.

Pour un instrument parfait, la résolution angulaire théorique idéale (pouvoir séparateur) est donnée par l'équation (10.59). C'est le rayon de la tache d'Airy : $1,22\lambda/D$, exprimé en radians. Ici, D est bien sûr le diamètre de l'instrument et il doit être exprimé dans la même unité que λ . En secondes d'arc, le pouvoir séparateur est donné par la formule $2,52 \times 10^5 \lambda/D$. À cause des distorsions de l'atmosphère, même les plus grands télescopes terrestres ne peuvent avoir une résolution angulaire meilleure que 1 seconde d'arc. Cela signifie donc que les images de deux étoiles séparées d'un angle inférieur à 1 seconde d'arc ne forment qu'une tache indiscernable. En comparaison, le télescope spatial Hubble, pour lequel $D = 2,4$ m, a une résolution angulaire limitée par la diffraction (0,05 seconde d'arc à $\lambda = 500 \times 10^{-9}$ m).

Les deux plus grands télescopes terrestres sont les télescopes Cassegrain aplanétiques jumeaux du Keck, à Hawaii. Séparés de 85 m, ces télescopes géants ont été installés au sommet du volcan Mauna Kéa, à une altitude de plus de 4 000 m. Chacun a un miroir primaire hyperboloïdal de 10 m de diamètre composé de 36 éléments hexagonaux. Ces miroirs sont très incurvés, de telle manière que le système ouvert à $f/1,75$ possède une focale de 17,5 m. La plupart des grands télescopes récents tendent d'ailleurs tous à avoir des miroirs très ouverts (ouverture supérieure à $f/2$) et des focales relativement courtes. Les télescopes courts sont effectivement moins chers à construire, pour des infrastructures plus fonctionnelles. Ils sont également plus stables et pointés avec une plus grande précision.

Il existe maintenant des méthodes pour combiner de manière interférométrique des images provenant de plusieurs télescopes séparés. Cette nouvelle technologie permet de constituer un système global ayant une ouverture effective considérablement accrue. L'observation astronomique promet d'évoluer de manière très significative grâce à ces réseaux de télescopes.

Télescopes catadioptriques

Un système catadioptrique comprend à la fois des miroirs (*catoptriques*) et des lentilles (*dioptriques*). L'exemple le plus typique, bien que n'étant pas le premier historiquement, est le *télescope de Schmidt*. Nous allons en faire une description concise, car il représente un modèle important pour la conception des systèmes à grand champ et à large ouverture. Comme on peut le voir à la figure 5.113, un faisceau de rayons parallèles rencontre un miroir sphérique et vient former une image (par exemple d'un groupe d'étoiles) sur une

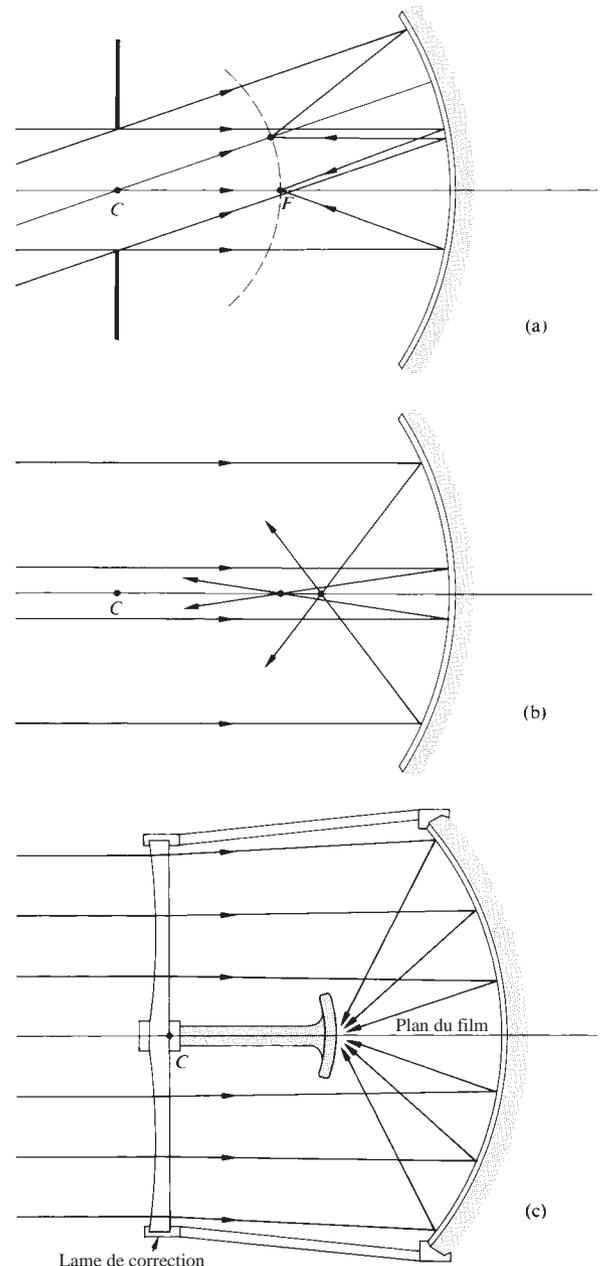


Figure 5.113 Télescope de Schmidt.

surface image également sphérique, que l'on recouvre d'un détecteur. Une telle configuration permet d'avoir un système corrigé pour l'astigmatisme et la coma (paragraphe 6.3.1).

En revanche, on voit que les rayons réfléchis par les parties les plus périphériques du miroir et ceux issus de la partie centrale paraxiale, ne vont pas converger au même point. Un miroir non plus parabolique mais sphérique est donc affecté par cette *aberration sphérique* (figure 5.113b). En étant capable de corriger cette dernière, il est donc possible (au moins en théorie) de disposer d'un instrument parfait pour un grand champ. En effet, un tel système n'ayant pas d'axe central, il n'est donc plus question de points hors d'axe. Rappelons que ceux-ci posaient problème dans le cas des miroirs paraboloidaux.

Un soir de 1929, alors qu'il voguait quelque part sur l'océan Indien, de retour d'une observation d'éclipse aux Philippines, l'opticien et astronome allemand Bernhard Schmidt (1879-1935) montra à un collègue un schéma du système qu'il avait imaginé pour se débarrasser de l'aberration sphérique d'un miroir primaire sphérique. La solution qu'il préconisait était d'utiliser une mince plaque de verre correctrice possédant une très légère courbure de forme toroïdale (figure 5.113c). Ce procédé est très ingénieux. Les rayons les plus périphériques subissent en effet une légère déviation, de sorte qu'ils focalisent exactement avec les rayons paraxiaux, sur la sphère image. Signalons pourtant que la lame correctrice doit pouvoir corriger l'aberration sphérique sans introduire d'autres aberrations de manière notable.

Le premier instrument comportant ce système fut construit dès 1930. En 1949, on fit également le choix de cette configuration pour le fameux télescope de 1,20 m de l'observatoire du Mont Palomar. Ouvert ($f/2,5$) et possédant un grand champ, il constitue toujours un instrument idéal pour scruter les ciels nocturnes. Avec un tel système, une seule prise de vue suffit à photographier le Chariot de la Grande Ourse, alors qu'il en faut environ 400 avec un réflecteur paraboloidal de 6 mètres.

Depuis leur invention, les systèmes Schmidt ont été largement perfectionnés et leurs performances ne concernent plus uniquement les grands télescopes. Ils sont utilisés dans les instruments des satellites d'observation ou d'alerte, dans les systèmes de guidage de missiles, dans les petits télescopes commerciaux ou dans certains téléobjectifs photographiques. De très nombreuses variantes en existent. Certaines remplacent la lame de verre correctrice par un arrangement concentrique de ménisques (*Bouwers-Maksutov*). D'autres utilisent encore un miroir épais très solide ou bien un triplet de lentilles asphériques (*Baker*).

5.8 Correction de front d'onde

Ce paragraphe introduit les technologies utilisées pour contrôler et corriger localement la forme d'un front d'onde. À la différence des lentilles et des miroirs qui reconfigurent une surface d'onde de manière globale, certains moyens permettent maintenant d'analyser et de modifier uniquement certaines parties d'un front d'onde incident pour des besoins spécifiques.

Considérons une onde plane traversant un milieu inhomogène d'indice fluctuant $n(\mathbf{r})$ ou un milieu d'épaisseur non uniforme, comme la lame correctrice d'un télescope de Schmidt ou plus prosaïquement la vitre d'une cabine de douche (figure 5.114a). Les chemins optiques (*OPL*) étant différents pour chaque rayon, les fronts d'ondes émergents sont déformés. Si ceux-ci sont réfléchis par un miroir plan ordinaire, ils changent de direction de propagation mais demeurent fondamentalement inchangés : la région retardée ou avancée reste en retard ou en avance par rapport au reste du front d'onde (figure 5.114b). On ne peut pas bien voir au travers d'une vitre de cabine de douche, que l'on regarde directement ou avec un miroir.

En revanche, on comprend que si un miroir plus perfectionné était en mesure d'annuler les déformations précédentes, il serait possible de récupérer un front d'onde réfléchi

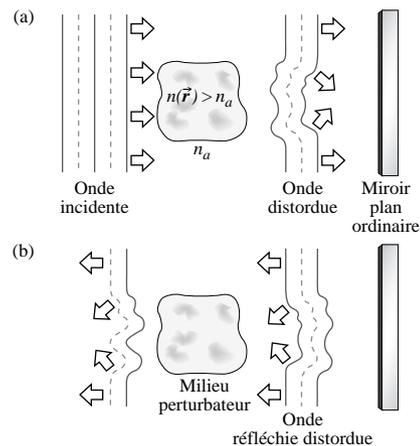


Figure 5.114 (a) Une onde plane est déformée lorsqu'elle passe dans un milieu inhomogène. (b) Lorsque l'onde déformée est réfléchie par un miroir classique, elle change de direction, mais les régions originellement en retard ou en avance le demeurent. Si elle retransverse à nouveau le milieu inhomogène, l'onde est encore plus déformée.

identique au front d'onde incident. Nous allons voir dans les sous-paragraphes suivants deux techniques permettant d'arriver effectivement à ce résultat.

5.8.1 Optique adaptative

L'**optique adaptative** constitue l'une des avancées les plus notables de l'optique astronomique moderne. Cette technique consiste à restaurer en temps réel la qualité des images détériorées par la turbulence atmosphérique. Comme Newton l'écrivait : « si l'on peut un jour arriver à construire les instruments astronomiques que nous concevons théoriquement, il seront certainement soumis à des limites que l'on n'a pas encore prévues ». L'optique adaptative est une procédure destinée à contrôler cette « agitation perpétuelle » d'abord en mesurant les déformations de la lumière incidente induite par la turbulence puis en utilisant cette information pour remettre en forme la surface d'onde, et la redresser comme si elle n'avait jamais traversé le tumulte bouillonnant de l'atmosphère.

Il se trouve effectivement que l'atmosphère, la couche d'air à travers laquelle les instruments terrestres regardent les étoiles, est en perpétuel mouvement. Ses différentes masses d'air n'ont pas les mêmes indices de réfraction, en raison de leurs différences de température ou de leur densité. Cela induit des différences de chemins optiques qui font que l'image obtenue sur Terre est finalement déformée. Prenons par exemple le cas de la lumière émise par une étoile ponctuelle lointaine. Au niveau de l'atmosphère terrestre, le front d'onde incident est effectivement plan (avec une longueur d'onde d'environ $0,5 \mu\text{m}$, au milieu du spectre visible). Mais en parcourant les 150 km de la couche atmosphérique, les *turbulences* y introduisent aléatoirement des différences de chemin optique de

quelques micromètres. Après cette traversée, le front d'onde n'a plus rien de plan. Il est localement distordu, comme la surface d'une tôle ondulée. C'est un peu comme si l'on considérait un immense film, subdivisé en petites dalles d'une dizaine de centimètres, parfaitement plan et qu'on le disposait sur un sol couvert d'une masse grouillante de scarabées. Ceux-ci le déformeraient en permanence, sans logique apparente. Plus scientifiquement, tout se passe comme si le front d'onde plan était réfléchi par un miroir déformant, changeant de forme de manière imprévisible et très rapide (quelques millisecondes).

Les effets de la turbulence sont le plus souvent peu perceptibles à l'œil nu. Mais il existe cependant au moins deux cas familiers où l'on peut s'en rendre compte, par exemple lorsque l'on regarde à travers une zone chauffée (par exemple une route, l'été) : les images sont effectivement déformées. D'autre part, lorsque l'on regarde les beaux ciels nocturnes, la « *scintillation* » (clignotement) des étoiles est aussi une conséquence de l'agitation de l'air au-dessus de nous.

Bien que pouvant paraître étrange, l'analogie avec les dalles au sol et les scarabées en dessous, est pourtant très proche de la réalité. En 1966, le physicien David Fried montra effectivement que la turbulence atmosphérique pouvait être optiquement modélisée de manière assez simple. En effet, en raison de la grande valeur de la vitesse de la lumière, on peut considérer qu'à tout instant, l'atmosphère se comporte comme un ensemble de cellules stables, adjacentes, prismatiques (plus ou moins inclinées) et d'indice constant. À un endroit donné, la portion locale d'une surface d'onde stellaire se compose de nombreuses petites zones quasi planes, inclinées de façon aléatoire (chacune étant similaire à l'une des dalles précédemment évoquées). Au niveau de la mer, ces cellules font typiquement une dizaine de centimètres. Au sommet des montagnes, où la couche d'air qui nous sépare de l'espace est



Lorsque l'on observe à travers l'atmosphère avec un instrument astronomique, la probabilité d'être peu perturbé décroît exponentiellement avec le diamètre de l'ouverture. Si l'on utilise un objectif de taille moyenne ($< 30 \text{ cm}$), cette probabilité est de 1 %. Cette série de photographies d'une étoile, prises à $1/60$ de seconde d'intervalle, montre la scintillation générée par les turbulences de l'atmosphère. L'image de droite correspond par exemple à de bonnes conditions d'observation. Avec un instrument limité par la diffraction, cette image devrait ressembler à un disque d'Airy (p. 487), c'est-à-dire un point central très brillant entouré de cercles concentriques moins lumineux. (Photo Ron Dantowitz, Museum of Science, Boston)

plus réduite, elles peuvent faire jusqu'à 30 cm, dans de très bonnes conditions d'observation (nuits très claires). Voilà pourquoi les plus grands télescopes sont installés en altitude. Cette modélisation est très intéressante. Chaque cellule constitue une **région isoplanétique** où le front d'onde n'est relativement pas déformé (on estime que la différence entre les points les plus hauts et les plus bas doit y être d'environ $\lambda/17$, alors qu'une image avec une déformation inférieure à $\lambda/10$ est considérée comme très bonne). Plus la turbulence est importante, plus les zones isoplanétiques sont petites.

On comprend donc que les effets de la turbulence sur une image dépendent énormément de la taille de l'ouverture du télescope qui l'a prise. Si un instrument a un diamètre effectif de quelques centimètres, la petite portion de front d'onde qu'il recueille est relativement plane car celle-ci n'a traversé qu'une partie de cellule isoplanétique. Mais même dans ce cas, la turbulence atmosphérique peut affecter l'*inclinaison globale* de ces portions de front d'onde pratiquement planes. Celle-ci évolue au cours du temps et n'est donc pas la même pour une série de fronts d'ondes normalement identiques. Cela signifie que si l'on peut obtenir momentanément une tache d'Airy pour un front d'onde incident particulier, celle-ci se déplace aléatoirement à mesure que d'autres fronts d'ondes, ayant des angles différents, arrivent sur l'objectif (nos insectes imaginaires n'arrêtent pas de se déplacer...). Cette situation devient encore plus complexe dès que les instruments ont une ouverture plus importante. Pour un télescope de plusieurs mètres de diamètre, la portion de front d'onde recueillie est beaucoup plus importante ; elle se compose aussi d'une mosaïque de plusieurs sections planes et différemment inclinées, correspondant aux différentes régions isoplanétiques traversées. L'image instantanée est alors une superposition de nombreuses taches d'Airy entremêlées, ce qui ne donne qu'un amas lumineux confus. À cause de la turbulence, un accroissement du diamètre permet certes de recueillir plus de lumière, mais n'augmente pas proportionnellement la résolution.

L'ouverture critique pour laquelle le manque de netteté devient intolérable constitue donc une mesure de la turbulence. Quantitativement, elle correspond à ce que l'on appelle le **paramètre de Fried**, de symbole r_0 (choix maladroit car ce n'est pas un rayon). Celui-ci représente en fait la taille de la région horizontale sur laquelle on peut considérer que le front d'onde incident est plan (c'est donc la taille de la « plaquette » isoplanétique). Comme nous l'avons déjà dit, r_0 peut atteindre 30 cm lorsque les conditions sont excellentes. Dans ce cas, un instrument de 30 cm d'ouverture donnera donc d'une étoile très éloignée une image parfaite (*disque d'Airy*). Par ailleurs,

si le paramètre de Fried diminue lorsque la turbulence augmente, il croît avec la longueur d'onde du rayonnement observé ($r_0 \propto \lambda^{1.2}$). Pour tout instrument regardant à travers l'atmosphère, la résolution angulaire est finalement donnée par $1,22\lambda/r_0$. Comme r_0 est rarement meilleur que 20 cm, il en résulte que les plus grands télescopes terrestres ont une résolution brute équivalente à celles des modestes systèmes de 20 cm de diamètre !

Les facteurs météorologiques sont donc très importants pour les systèmes terrestres ; ils dégradent considérablement les conditions d'observation. On peut calculer qu'un vent de 5 m/s (18 km/h) balaye par exemple une région isoplanétique de $r_0 = 10$ -cm en 20 ms. Pour mesurer et éventuellement corriger les déformations dues à l'atmosphère, il faut un système de contrôle opto-électromécanique qui opère 10 à 20 fois plus vite, c'est-à-dire qui soit capable d'échantillonner les informations à environ 1 kHz.

La figure 5.115 indique le schéma de principe d'une optique adaptative pour applications astronomiques. Le télescope est pointé vers une étoile qui sert à la fois d'objet d'étude et de lumière de référence pour corriger les déformations. Pour des raisons de taille des instruments, le système d'optique adaptative fonctionne à partir du faisceau réduit et non pas du large faisceau issu du miroir primaire. Dans ce schéma, chaque région isoplanétique, perçue directement par le miroir primaire, correspond ainsi à une zone proportionnellement plus petite dans le faisceau réduit.

La première étape consiste à analyser le front d'onde déformé Σ_1 transmis par le télescope et contenu dans le faisceau de sortie réduit. Cela est effectué grâce à un **analyseur de front d'onde**, dont il existe plusieurs types. Dans notre exemple, il s'agit d'un analyseur de type Hartmann (figure 5.116). Celui-ci consiste en une matrice compacte d'un grand nombre de détecteurs CCD, indépendants et adjacents. Le faisceau réduit rencontre d'abord la matrice de microlentilles. Celle-ci le subdivise en autant de parties qu'il y a de lentilles. La dimension de celles-ci est d'ailleurs calculée de telle manière que chacune corresponde à la taille des cellules isoplanétiques du faisceau réduit. Chaque microlentille focalise la lumière qu'elle reçoit sur un sous-ensemble de 4 pixels de la matrice CCD, y formant ainsi une minuscule image de l'étoile (figure 5.116a). Le CCD est donc dans le plan focal image de la microlentille, parfaitement centré sur son axe optique.

Si le front d'onde incident n'a aucune déformation (parfaitement plan, i.e. si toutes les régions isoplanétiques n'ont aucune inclinaison et sont toutes parallèles), chaque microlentille produit donc une image parfaite, c'est-à-dire un disque

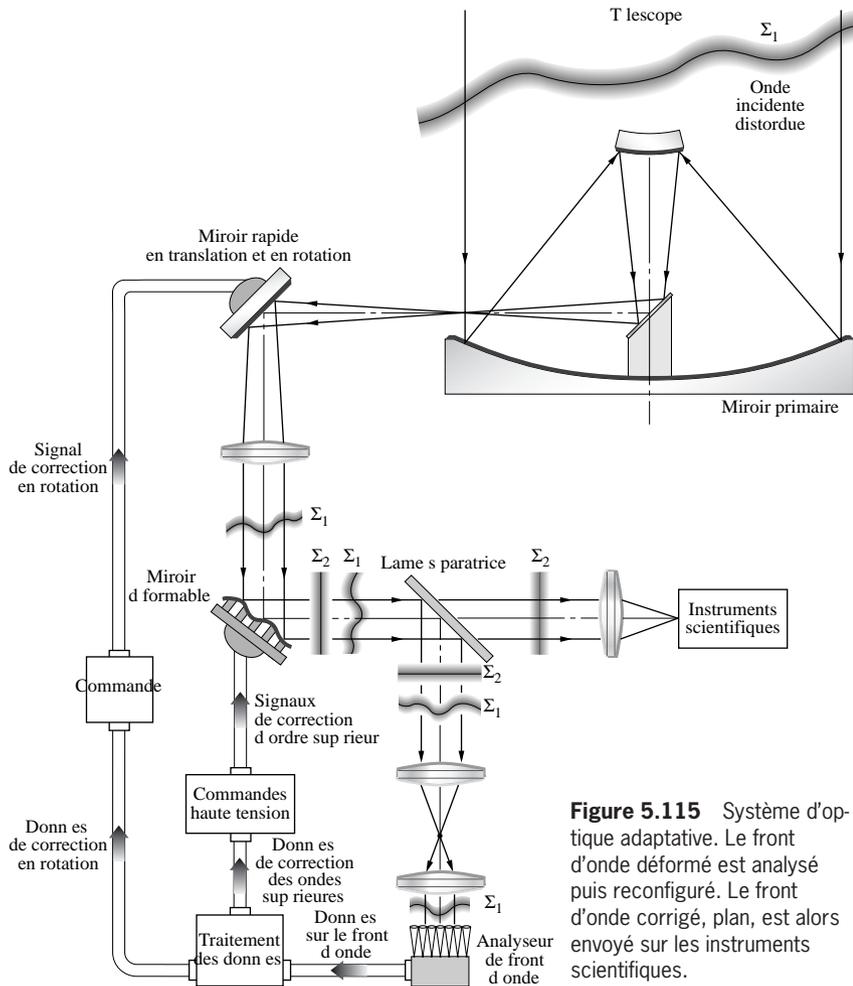


Figure 5.115 Système d'optique adaptative. Le front d'onde déformé est analysé puis reconfiguré. Le front d'onde corrigé, plan, est alors envoyé sur les instruments scientifiques.

d'Airy centré parfaitement sur l'axe optique, à l'intersection des 4 pixels photosensibles (figure 5.116b). Mais, en pratique, chaque région isoplanétique a une inclinaison propre. Le point

miroir « à l'inverse » du front d'onde incident (les « creux » du front d'onde correspondant à des « bosses » équivalentes sur le miroir et inversement). Le faisceau initial rencontre alors ce

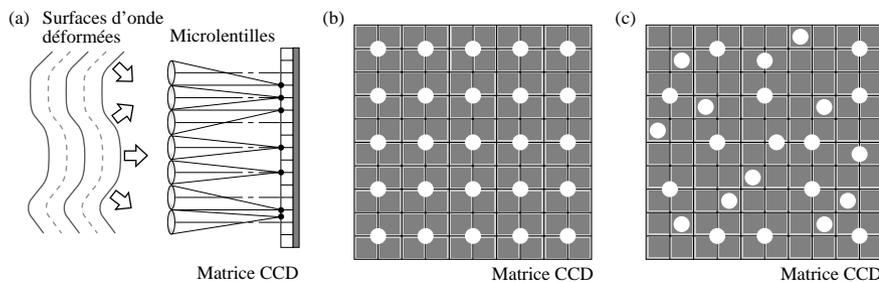


Figure 5.116 Analyseur de front d'onde de type Hartmann : (a) Une matrice de microlentilles focalise la lumière sur un petit détecteur CCD carré, composé de quatre éléments. (b) Lorsque l'onde incidente est plane, les taches d'Airy se forment exactement au centre de chaque groupe de quatre détecteurs. (c) Lorsque le front d'onde incident est déformé, les taches d'Airy sont décalées par rapport à ces points de référence.

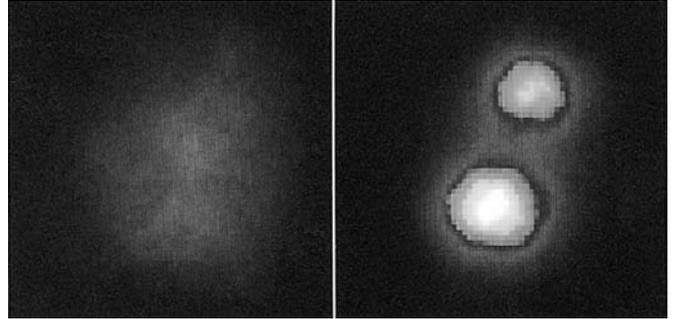
miroir. Le résultat est tel, qu'après réflexion, le front d'onde Σ_2 est à nouveau plan, corrigé de l'effet de turbulence et identique à la lumière arrivant à l'entrée de l'atmosphère. La lumière possédant un front d'onde restauré est alors envoyée sur les instruments scientifiques classiques.

Une petite fraction de lumière incidente est donc toujours dérivée dans la boucle analyseur/ordinateur/miroirs afin de maintenir continuellement le processus de correction. La fréquence d'analyse du front d'onde est très importante (l'échantillonnage se fait à plus de 1 000 fois par seconde), ce qui permet de rafraîchir la correction du miroir déformable plus rapidement que les changements de turbulence atmosphérique.

Un tel dispositif nécessite donc toujours un front d'onde plan de référence. Cependant, les astronomes n'observent pas que des étoiles ponctuelles. Ils s'intéressent également aux objets célestes étendus, comme les planètes, les galaxies, les nébuleuses, etc., dont on ne peut plus utiliser la lumière comme référence. Plusieurs solutions palliatives existent cependant. Quelquefois, on peut par exemple se servir d'une étoile suffisamment brillante située dans le même champ que l'objet observé. Mais la présence de ce genre d'« étoile guide » naturelle n'est pas systématique. Une autre solution consiste aussi à utiliser un faisceau laser afin de créer une étoile guide artificielle (voir photo). Ce procédé a été expérimenté avec succès. Deux phénomènes rendent aussi possibles les manières d'obtenir l'effet désiré. Dans la première, le télescope est pointé sur une impulsion laser focalisée entre 10 et 40 km d'altitude. Une portion de cette lumière est rétrodiffusée par diffusion Rayleigh, et joue le rôle d'étoile guide. On peut également utiliser la couche riche en atomes de sodium (certainement déposés par les météorites), située à une altitude



Création d'une étoile guide artificielle à l'aide d'un laser (Philips Laboratory, Kirtland Air Force Base, Nouveau-Mexique. (Photo Philips Laboratory, Department of the US Air Force.)



Une exposition de 1 seconde de l'étoile 53ξ de la Grande Ourse, réalisée en utilisant le télescope de 1,5 m du Philips Laboratory. (a) L'image non corrigée est inexploitable. (b) En utilisant l'optique adaptative, la qualité de l'image est considérablement améliorée. (Photos Philips Laboratory, Department of the US Air Force.)

de 92 km, bien au-dessus de la majeure partie de l'atmosphère turbulente. La manipulation consiste dans ce cas à exciter ces atomes grâce à un laser à 589 nm. Leur désexcitation produit alors une vive lueur jaune qui peut également servir de lumière de référence.

Les résultats obtenus avec de l'optique adaptative sont très encourageants* (voir photo). Logiquement, les plus grands télescopes terrestres exploitent ou prévoient d'exploiter cette technologie très efficace.

5.8.2 Conjugaison de phase

La **conjugaison de phase** permet également de restaurer un front d'onde dégradé, à condition qu'il retransverse une seconde fois le milieu qui l'a déformé, grâce à un miroir particulier.

Imaginons un faisceau collimaté (ondes planes) se déplaçant vers la droite (dans la direction des z positifs) en incidence normale sur un miroir plan ordinaire. On peut décrire l'onde incidente par une expression où les dépendances spatiales et temporelles sont séparées, de la forme $E_i = E_0 \cos(kz - \omega t)$, (ou en écriture complexe : $\tilde{E}_i = E_0 e^{i(kz - \omega t)} = E_0 e^{ikz} e^{-i\omega t} = E(z) e^{-i\omega t}$). Avec ce cas géométrique simple, les ondes réfléchies repartent dans la direction inverse : **elles sont identiques**

*Voir L. A. Thompson, « Adaptive Optics in Astronomy », *Phys. Today* **47**, 24 (1994) ; J. W. Hardy, « Adaptive Optics », *Sci. Am.* **60** (juin 1994) ; R. Q. Fugate et W. J. Wild, « Untwinkling the Stars – Part I », *Sky & Telescope* **24** (mai 1994) ; W. J. Wild et R. Q. Fugate, « Untwinkling the Stars – Part II », *Sky & Telescope* **20** (juin 1994).

aux ondes incidentes, sauf en ce qui concerne leur direction de propagation. L'onde réfléchi est ainsi de la forme : $E_r = E_0 \cos(-kz - \omega t)$, ou $\tilde{E}_r = E_0 e^{-ikz} e^{-i\omega t} = E^*(z) e^{-i\omega t}$. Changer le signe de la dépendance spatiale de la phase traduit donc le changement de direction. On obtient le même résultat en prenant le complexe conjugué en notation exponentielle. Pour cette raison, l'onde réfléchi a donc une phase qui correspond au conjugué de la phase de l'onde incidente. Dans ce cas, l'onde réfléchi est ainsi appelée « **onde conjuguée en phase** » ou « **onde conjuguée** ». On comprend également qu'une onde conjuguée est **réversible par rapport au temps**. Une caméra qui filmerait une telle onde donnerait un film qui, lu dans un sens ou dans l'autre, serait identique. Pour des ondes monochromatiques, changer le signe de la dépendance temporelle est équivalent à changer la direction de propagation : $\cos[kz - \omega(-t)] = \cos(kz + \omega t) = \cos(-kz - \omega t)$.

Une situation simple de réflexion conjuguant la phase arrive lorsque l'on positionne un point source au centre de courbure d'un miroir concave sphérique. La source émet effectivement une onde sphérique que le miroir réfléchit à nouveau vers son point d'origine, de manière parfaite. Vraisemblablement, on pourrait imaginer de façonner une surface réfléchissante conventionnelle adaptée à n'importe quel front

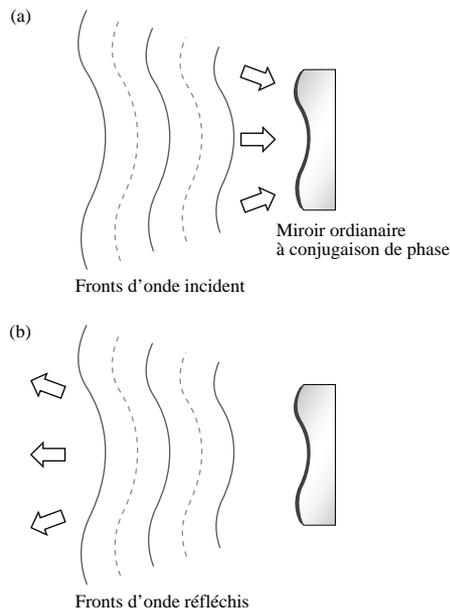


Figure 5.117 Principe d'un miroir à conjugaison de phase assez fruste. Il ne fonctionne que pour le type de front d'onde montré ici.

d'onde de manière à ce qu'elle en réfléchisse son conjugué (figure 5.117). Néanmoins, ce concept est impraticable, en particulier si l'on ne peut pas anticiper la forme et les changements d'un front d'onde au cours du temps.

Heureusement, en 1972, une équipe de scientifiques russes a découvert une procédé permettant de produire, grâce à la *diffusion Brillouin*, une conjugaison de phase pour n'importe quel front d'onde incident. Cette méthode consiste à diriger un laser de forte intensité dans un tube contenant du méthane à forte pression. Pour un flux d'environ un million de watts, le laser provoque des variations de densité de pression qui font que le milieu devient un miroir remarquable, réfléchissant quasiment toute la lumière incidente. Le milieu a, dans ces conditions, une autre propriété surprenante. La lumière réfléchi présente effectivement une conjugaison de phase par rapport à l'onde incidente. En fait, le milieu, le méthane dans le cas présent, s'adapte à la présence du champ électromagnétique et rétrodiffuse l'onde en « retournant » son front d'onde. De ce fait, après diffusion, les parties en avance sont retardées et inversement. À l'heure actuelle, il existe d'autres moyens (mais utilisant le même milieu) d'arriver à ces effets décrits par l'optique non linéaire. Les applications potentielles sont innombrables et vont du « tracking » des satellites à l'amélioration de la qualité des faisceaux laser*.

On peut imaginer de nombreuses expériences mettant en évidence les propriétés exceptionnelles des miroirs à conjugaison de phase. Considérons par exemple le cas d'un faisceau déformé après avoir traversé un milieu inhomogène (figure 5.114). S'il est réfléchi par un miroir ordinaire et qu'il retransverse le premier milieu, il en ressort logiquement encore plus déformé. Au contraire, s'il est réfléchi avec un miroir à conjugaison de phase, le front d'onde issu de la deuxième traversée du milieu redevient identique à celui du faisceau d'origine. La figure 5.118 illustre cette technique et la figure 5.119 montre les clichés obtenus à l'issue d'une expérience réelle. L'image d'un chat a été imprimée sur un faisceau laser à argon collimaté ($\lambda = 514,5 \text{ nm}$) en faisant passer simplement le faisceau à travers une diapositive du chat. Pour avoir une référence, le faisceau transportant l'image a été envoyé, via une lame séparatrice, sur un miroir ordinaire. Celui-ci l'a réfléchi à nouveau à travers la lame, puis vers une plaque de verre dépoli où une image a pu être photographiée (figure 5.119a). Dans un

*Voir D. M. Pepper, « Applications of Optical Phase Conjugation », *Sci. Am.* **74** (janvier 1986) et V. V. Shkunov et B. Ya. Zel'dovich, « Optical Phase Conjugation », *Sci. Am.* **54** (décembre 1985).

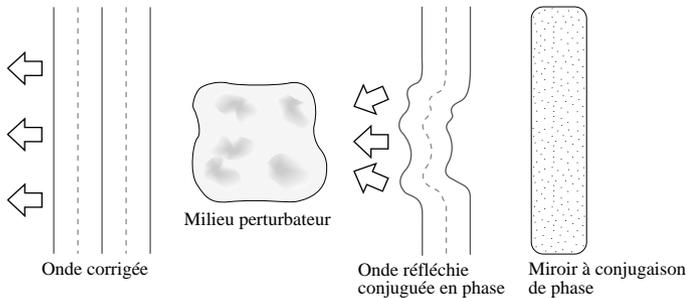


Figure 5.118 Lorsque l'onde déformée de la figure 5.113 est réfléchiée par un miroir à conjugaison de phase, son front d'onde est « retourné » ou conjugué. On peut la comparer à l'onde réfléchiée conventionnellement de la figure 5.113b. Une onde traversant un milieu inhomogène et réfléchiée par un miroir à conjugaison de phase aura donc son front d'onde exactement identique au front d'onde incident, après avoir retraversé une seconde fois le milieu perturbateur. (figure 5.113a).

second temps, on a introduit un milieu déformant la phase (tel qu'un verre de cabine de douche) entre la séparatrice et le miroir, de telle manière que le faisceau le traverse deux fois. L'image obtenue avec ce dispositif est devenue totalement brouillée (figure 5.119b). Enfin, le miroir ordinaire a été remplacé par un miroir à conjugaison de phase. Comme on s'y attendait, l'image finale a été totalement restaurée, comme s'il n'y avait pas eu de milieu déformant (figure 5.119c).

5.9 Lentille gravitationnelle

L'effet de *lentille gravitationnelle* est basé sur la déviation de la lumière par la gravitation. Ce phénomène a été décrit dans la *théorie de la relativité générale* en 1916 par Einstein, qui indique effectivement que la matière provoque (ou est équivalente à) une courbure de l'espace-temps. La gravité exercée par une masse importante, telle qu'un corps céleste, a donc pour effet de courber l'espace-temps qui l'entoure. D'après cette théorie, un rayon lumineux passant à proximité d'une masse importante de matière se trouve donc dévié vers elle. Localement, sa trajectoire n'est donc plus une ligne droite. Tout se passe comme si la lumière traversait un milieu hétérogène ayant un indice de réfraction dépendant de la position $n_G(\vec{r})$ plus grand que 1.

Les rayons parallèles en provenance de l'espace lointain et passant à proximité d'une masse de matière sont donc localement infléchis vers elle. Lorsqu'ils ont dépassé la masse, ils ne sont ainsi plus parallèles mais convergents. Ils se rencontrent finalement en un point où ils forment des images. Tout se passe finalement comme s'ils étaient passés à travers une *lentille asphérique géante*.

Voilà pourquoi toute masse qui dévie les rayons lumineux est appelée une **lentille gravitationnelle**. Sur un plan plus fondamental, on sait pourtant que tout écart à la loi de propagation rectiligne de la lumière est synonyme de diffraction. C'est effectivement le cas ici où, bien qu'il y ait convergence

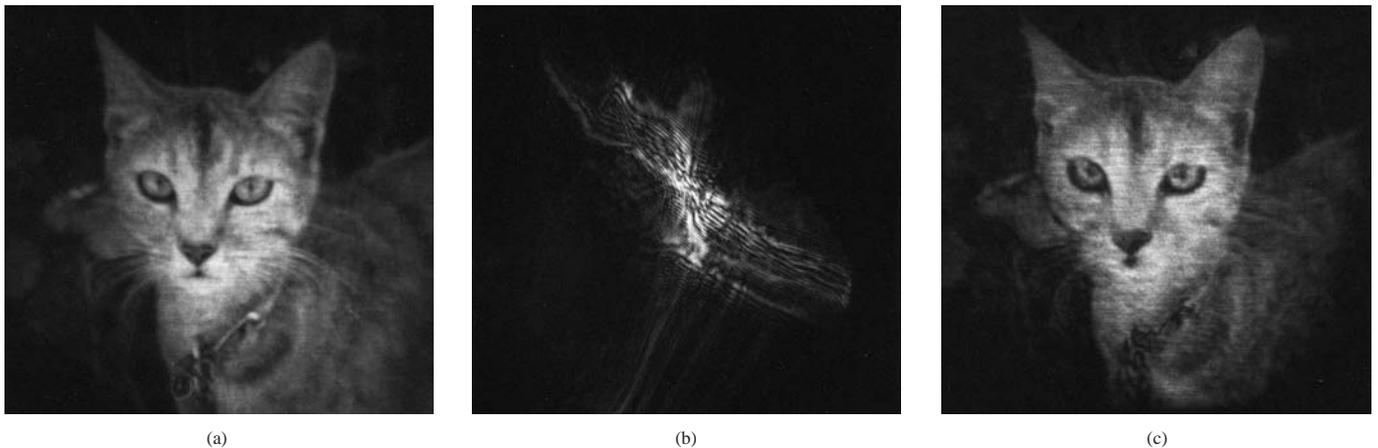


Figure 5.119 Utilisation de la conjugaison de phase pour corriger un front d'onde déformé par un milieu inhomogène. (a) L'image d'un chat réfléchiée par un miroir classique ; aucune déformation n'est introduite. (b) Même prise de vue après introduction d'un milieu inhomogène sur le parcours devant le miroir : l'image est complètement déformée. (c) L'image est restaurée lorsque le miroir classique est remplacé par un miroir à conjugaison de phase. Celui-ci « inverse » les déformations du front d'onde introduites par la première traversée du milieu inhomogène. Un second passage dans le milieu annule donc ces déformations. (Photos Jack Feinberg, University of Southern California.)

comme pour les lentilles, le phénomène s'apparente beaucoup à la diffraction. L'effet observé pourrait donc également être appelé *diffraction gravitationnelle*.

La géométrie de la situation est simple. Elle demande un observateur (par exemple, situé avec un télescope sur la Terre), une source éloignée de radiations électromagnétiques (un quasar ou une galaxie) jouant le rôle d'objet et une masse plus proche, localisée sur l'axe source-observateur, jouant le rôle de lentille (un quasar, une galaxie, un groupe de galaxies, ou un trou noir). La masse intermédiaire forme donc des images de l'objet éloigné. Sans se douter de quoi que ce soit, l'observateur peut ainsi observer plusieurs *mirages* correspondant, en fait, au même objet. C'est d'ailleurs en remarquant des objets célestes aux caractéristiques très proches que les astronomes ont fini par comprendre qu'il s'agissait des effets de lentille prévus par la *relativité générale*. On pourrait penser que ces mirages perturbent donc notre connaissance de l'Univers. En fait, c'est le contraire. Grâce aux lentilles gravitationnelles, on peut observer des images d'objets célestes extrêmement éloignés et impossibles à voir en observation directe.

La lentille asphérique représentée à la figure 5.120 pourrait ainsi correspondre à une belle galaxie symétrique, alors qu'un modèle plus pointu correspondrait davantage à un trou noir.

Il se trouve cependant que les trois corps célestes ont rarement un alignement parfait. Dans ce cas, une lentille gravitationnelle donne plusieurs images souvent déformées de l'objet dont elle perturbe la propagation des rayons. Considérons, par exemple, le cas où un quasar lointain, une galaxie proche et la Terre sont à peu près alignés (même direction dans le ciel). La lumière que nous recevons du quasar a été fortement déviée par son passage à proximité de la galaxie. Les rayons lumineux qui sont passés au-dessus de celle-ci ont été déviés vers le bas et forment une image distordue vers le haut. De même, ceux qui sont passés sous la galaxie ont été infléchis vers le haut et

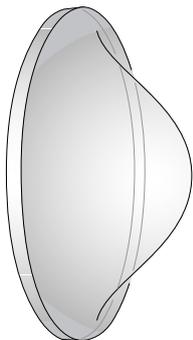


Figure 5.120 Une lentille asphérique est utilisée pour simuler l'effet de lentille gravitationnelle par des objets célestes massifs, tels que des galaxies.

forment une image distordue vers le bas. Ainsi, la galaxie proche peut générer plusieurs images du quasar. Lorsqu'une lentille gravitationnelle est désaxée par rapport à un objet très éloigné derrière elle, l'image globale est ainsi distordue en plusieurs arcs lumineux (figure 5.121). Le nombre total d'images est conditionné par le type de lentille gravitationnelle et la précision de l'alignement. On montre en fait qu'il est toujours impair, en comptant l'image centrale non diffractée.

On obtient le même phénomène lorsque l'objet observé n'est plus ponctuel mais étendu (par exemple, une galaxie lointaine : figure 5.122). Là aussi, les images sont déformées et ressemblent à des arcs lumineux. L'amas de galaxies Abell 2218 en constitue un exemple bien représentatif (voir photos).

L'effet de lentille gravitationnelle fut prévu par Einstein dès 1912. Il suggéra également que les cas d'alignement parfait (figure 5.121c) devaient être très rares et donner un motif en anneau : l'*anneau d'Einstein*. Par chance, le télescope spatial Hubble a pu en photographier un en 1998. C'était la première fois qu'un tel phénomène était observé (voir photo).

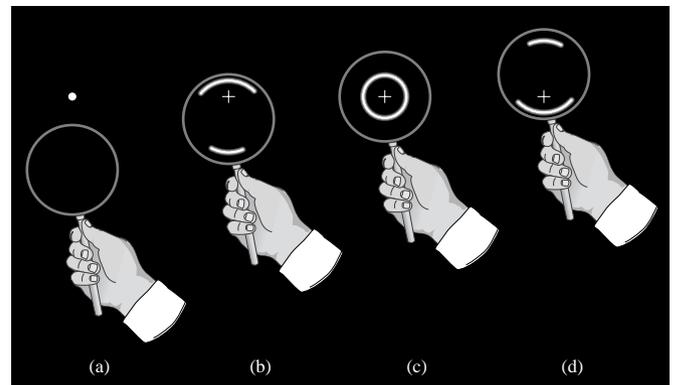
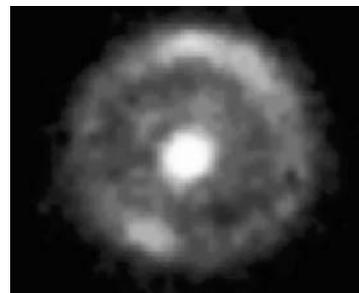
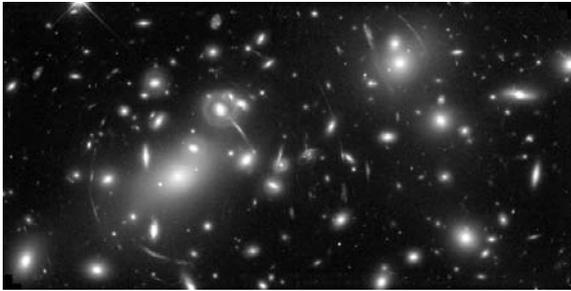


Figure 5.121 Une lentille asphérique est utilisée, comme dans la figure 5.120, pour expliquer la forme des images produites par les lentilles gravitationnelles.



Une photographie du premier Anneau d'Einstein jamais observé, prise par le télescope spatial Hubble en 1998. C'est le résultat d'un alignement quasi parfait de la Terre et de deux galaxies, l'une derrière l'autre (figure 5.121c).



Le groupe de galaxies Abell 2218 est tellement massif et compact que la lumière qui le traverse est déviée par son énorme champ gravitationnel. Ce phénomène provoque la formation d'images agrandies, déformées et plus brillantes des galaxies qui se trouvent loin derrière ce groupe. Les nombreux arcs lumineux que l'on peut voir sur cette photographie sont les images déformées de galaxies qui sont 5 à 10 fois plus éloignées qu'Abell 2218.

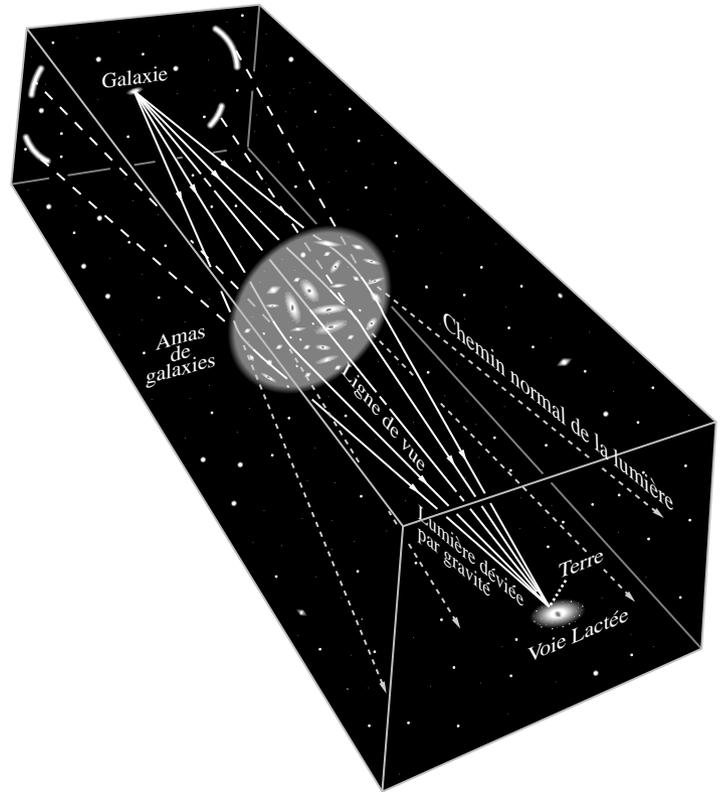


Figure 5.122 Effet de lentille gravitationnelle provoqué par un amas de galaxies.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Les solutions complètes des exercices (exceptés ceux ayant un astérisque) figurent à la fin de l'ouvrage.

5.1 Le dioptré de la figure P.5.1 a le profil d'un *ovale cartésien* (appelé ainsi en relation avec certaines recherches de René Descartes). C'est une configuration parfaite pour un rayon joignant S , l'interface et P . Prouver que son équation est définie par :

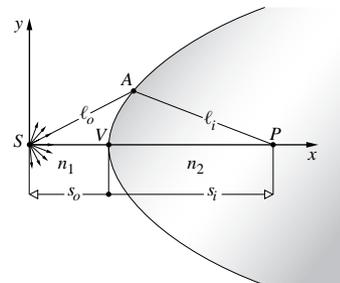
$$\ell_o n_1 + \ell_i n_2 = \text{constant}$$

Montrer qu'elle est équivalente à l'équation :

$$n_1(x^2 + y^2)^{1/2} + n_2[y^2 + (s_o + s_i - x^2)]^{1/2} = \text{constante}$$

Où x et y sont les coordonnées du point A .

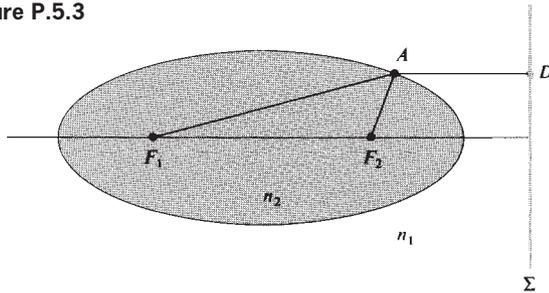
Figure P.5.1



5.2 Construire un ovale cartésien tel que les points conjugués soient séparés de 11 cm lorsque l'objet est situé à 5 cm du sommet du dioptré. Sachant que $n_1 = 1$ et $n_2 = \frac{3}{2}$, représenter plusieurs points.

5.3* Utiliser la figure P.5.3 pour montrer que si un point source est placé au foyer F_1 de l'ellipsoïde, des ondes planes émergent du côté opposé. Souvenez-vous qu'un des éléments caractéristiques d'une ellipse est que la distance entre le premier foyer, la courbe et le second foyer est constante.

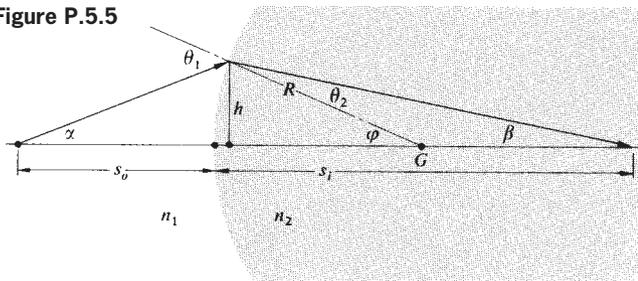
Figure P.5.3



5.4 Représenter une lentille convergente sphéro-elliptique et une lentille divergente elliptico-sphérique en montrant les rayons et les fronts d'ondes avant, pendant et après passage dans les lentilles. Même exercice pour une lentille convergente ovoïde-sphérique.

5.5* En utilisant la figure P.5.5, la loi de Snell-Descartes et le fait que, dans la région paraxiale, $\alpha \approx h/s_o$, $\varphi \approx h/R$, et $\beta \approx h/s_i$, établir l'équation (5.8).

Figure P.5.5

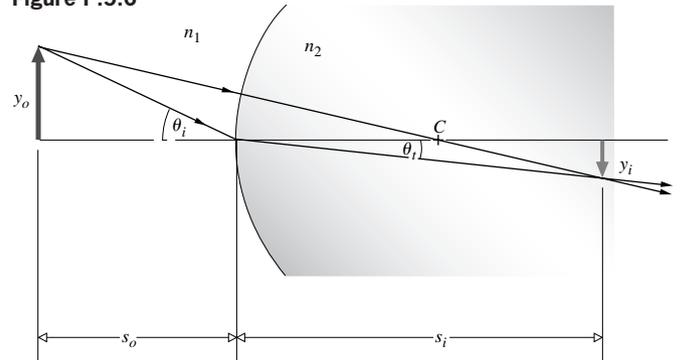


5.6* Montrer que, dans les conditions de Gauss (*optique paraxiale*), le grandissement produit par un dioptré sphérique séparant deux milieux homogènes d'indices n_1 et n_2 (figure P.5.6) est donné par :

$$M_T = - \frac{n_1 s_i}{n_2 s_o}$$

Utiliser la loi de Snell-Descartes avec l'approximation des petits angles, selon laquelle on peut approximer les angles par leurs tangentes.

Figure P.5.6



5.7* Soit une interface hémisphérique possédant un rayon de courbure de 5 cm, séparant deux milieux : de l'air à gauche et de l'eau à droite. Un crapaud de 3 cm de hauteur se repose, dans l'air, sur l'axe central, à 30 cm du sommet de l'interface convexe. Déterminer la position de son image dans l'eau. Quelle taille paraît-il avoir pour un poisson nageant dans l'eau ? Utiliser les résultats du problème précédent en considérant l'approximation de Gauss.

5.8 Soit une boule de cristal de voyante de 20 cm de diamètre et d'indice $n = 1,5$. Déterminer la position de l'image d'un objet placé à 1,2 m du sommet de celle-ci. Faire un dessin (des rayons, pas de la voyante !).

5.9* En considérant les paramètres du problème 5.7, supposer que l'on coupe le milieu de droite et que l'on forme une lentille biconvexe formée d'eau dont chaque face a un rayon de courbure de 5 cm. Si cette lentille a une épaisseur de 10 cm, déterminer son grandissement pour le crapaud. Que peut-on dire de plus sur cette image ?

5.10* Soit une lentille mince, biconvexe, en verre ($n_l = 1,5$), de +10 cm de focale, dont les faces possèdent le même rayon de courbure. Déterminer la valeur de ce dernier. Montrer qu'une araignée située à 1 cm en face de l'optique est imagée à $-1,1$ cm. Faire un tracé de rayon et décrire l'image.

5.11* Après lecture du paragraphe 5.2.3, montrer que, pour une lentille mince baignée dans un milieu d'indice n_m :

$$\frac{1}{f} = \frac{(n_l - n_m)}{n_m} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Cela étant, considérer une lentille biconcave formée d'air. Déterminer si elle est convergente ou divergente.

5.12* Soit une lentille mince en forme de ménisque concave, en verre d'indice $n_l = 1,5$ (figure 5.12), dont les faces ont des rayons de courbure respectifs de +20 cm et +10 cm. Montrer qu'un objet placé

à 20 cm devant le ménisque est imagé à une distance de $-13,3$ cm. Faire un tracé de rayon et décrire l'image.

5.13 Soit une lentille biconcave ($n_l = 1,5$) de rayons de courbure respectifs de 20 cm et 10 cm et d'épaisseur axiale 5 cm. Décrire l'image d'un objet de 2,54 cm placé à 8 cm du premier sommet de la lentille. Utiliser l'équation de conjugaison des lentilles minces afin de déterminer la distance de l'image formée par le système.

5.14* Soit un appareil photo 35 mm composé par une seule lentille mince de 50 mm de focale. Une jeune femme de 1,70 m se tient à 10 m devant l'objectif. (a) Montrer que la distance lentille/pellicule doit être de 50,3 mm. (b) Déterminer la taille de la jeune femme sur une photographie prise dans ces conditions ?

5.15 Soit une lentille mince de focale f . Montrer que la distance minimale entre un point objet réel et son image réelle est $4f$.

5.16 Soit un objet de 2 cm de hauteur placé à 5 cm à droite d'une lentille mince convergente de focale 10 cm. Déterminer la position et la taille de l'image résultante en utilisant les relations de conjugaison de Gauss et de Newton.

5.17 Donner la relation de conjugaison des lentilles minces dans l'air (relation de Gauss) en décrivant les paramètres mis en jeu. Représenter alors la fonction $s_i(s_o)$ en utilisant des multiples de f comme unité sur les deux axes.

5.18* Un faisceau de rayons parallèles provenant d'un point source très éloigné rencontre une lentille mince divergente de distance focale -50 cm. L'ensemble des rayons fait un angle de 6° avec l'axe optique de la lentille. Déterminer la position de l'image du point source.

5.19 Déterminer la distance focale que doit avoir une lentille mince divergente pour former d'une fourmi située à 100 cm en face de la lentille, une image virtuelle à 50 cm de la lentille. Étant donné que la fourmi est à la droite de la lentille, décrire quantitativement et qualitativement l'image qu'en forme un tel système.

5.20* Déterminer la distance focale dans l'air d'une lentille mince biconvexe ($n_l = 1,5$) de rayons de courbure respectifs 20 cm et 40 cm. Décrire quantitativement et qualitativement l'image d'un objet situé à 40 cm de la lentille.

5.21 Déterminer la distance focale d'une lentille plan-concave ($n_l = 1,5$) de 10 cm de rayon de courbure. Quelle est sa vergence en dioptries ?

5.22* Déterminer la distance focale d'une lentille mince plan-convexe ($n = 1,5$) de 50 mm de rayon de courbure, plongée dans l'air. Comment évolue cette valeur de la focale si la lentille est placée dans un réservoir rempli d'eau ?

5.23* Un expérimentateur voudrait placer un objet à 45 cm devant une lentille et projeter son image sur un écran à 90 cm à l'arrière. Quelle doit être la focale de la lentille convergente appropriée ?

5.24 Le cheval de la figure 5.26 a une hauteur de 2,25 m et il se tient avec son museau à 15 m d'une lentille mince de 3 m de focale.

- Déterminer la position de l'image du museau de l'équidé.
- Décrire quantitativement et qualitativement l'image obtenue : type, orientation, grandissement.
- Déterminer la taille de l'image.
- Si la queue du cheval est à 17,5 m de la lentille, quelle est la distance séparant le museau et la queue de l'animal dans l'image ?

5.25* Une chandelle de 6 cm de haut est disposée à 10 cm d'une lentille mince concave de focale -30 cm. Déterminer la localisation de l'image et la décrire en détail. Représenter un tracé des rayons caractéristiques.

5.26* Une lentille équiconvexe d'indice $n = 1,5$ projette d'une grenouille de 5 cm de haut et située à 0,60 m d'un écran, une image de 25 cm de haut. Déterminer les rayons de courbure de la lentille.

5.27* Un petit fil de 4,00 mm de long est placé à 60 cm d'une lentille mince perpendiculairement à son axe optique. On en obtient sur un écran une image nette de 2,00 mm de long. Quelle est la focale de la lentille ? Lorsque l'on éloigne l'écran de la lentille de 10 mm, on observe une image floue du fil de 0,80 mm d'épaisseur. Quel est le diamètre de la lentille ? [Astuce : considérez l'image d'un point source sur l'axe].

5.28 Une lentille mince biconvexe en verre (d'indice 1,56) a une focale de 10 cm dans l'air. On la place dans un réservoir d'eau (d'indice 1,33), à 100 cm d'un poisson rouge. Déterminer la position de l'image du poisson rouge.

5.29 Un bricoleur a fabriqué lui-même un système de projection de télévision utilisant une grande lentille convergente pour projeter l'image de son poste sur un mur blanc. Il arrive à obtenir une image nette agrandie trois fois. Si la lentille a une focale de 60 cm, quelle doit être la distance entre le poste de télévision et le mur ? Pourquoi utiliser une grande lentille ? Comment obtenir une image convexe ?

5.30 Donner une expression de la distance focale (f_w) d'une lentille mince immergée dans de l'eau ($n_w = \frac{4}{3}$) à partir de la valeur de sa focale dans l'air (f_a).

5.31* Soit la figure P.5.31 représentant trois vecteurs \vec{A} , \vec{B} , et \vec{C} de longueur $0,10f$, où f est la distance focale d'une lentille mince convergente. Le plan formé par \vec{A} et \vec{B} est à une distance de $1,10f$ de la lentille. Décrire l'image de chaque vecteur.

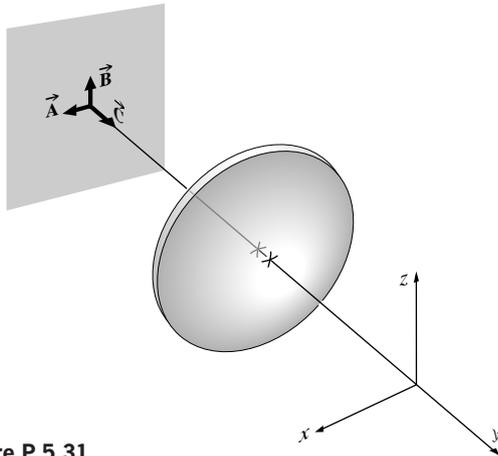


Figure P.5.31

5.32* Une méthode pratique pour mesurer la focale d'une lentille convergente utilise le principe suivant. Si deux points conjugués objet et image (réelle) S et P sont séparés par une distance $L > 4f$, il existe deux positions de la lentille, séparées par une distance d , pour lesquelles on obtient la conjugaison. Montrer que :

$$f = \frac{L^2 - d^2}{4L}$$

Cette méthode a l'avantage d'éviter de mesurer des distances à partir des sommets de la lentille, ce qui n'est pas facile à faire en pratique.

5.33* Soient deux lentilles convergentes de focales respectives 0,30 m et 0,50 m, séparées de 0,20 m. Un petit papillon se repose au niveau de l'axe optique, à 0,50 m devant la première lentille. Déterminer la position de son image à travers les deux lentilles, par rapport à la seconde lentille.

5.34 Afin de fabriquer un doublet, on place une lentille mince équiconvexe L_1 en contact intime avec une lentille mince divergente L_2 , de telle manière que la combinaison ait une focale de 50 cm dans l'air. Si les indices respectifs de ces lentilles sont 1,50 et 1,55 et que L_2 a une focale de -50 cm, déterminer tous les rayons de courbure de la combinaison.

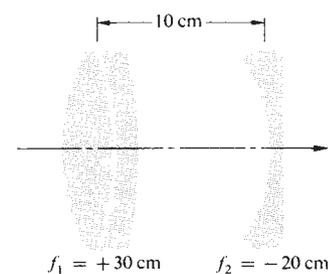
5.35 Retrouver l'équation (5.34), donnant M_T pour une combinaison de deux lentilles minces.

5.36* Une brindille de 10 mm est placée à 150 mm devant une lentille mince convergente de 100 mm de focale. À 250 mm derrière cette lentille, on place une lentille mince divergente de focale $-0,75$ mm. (a) Montrer que la première lentille forme une image à 300 mm derrière elle. (b) Décrire l'image. (c) Déterminer le grandissement de la

première lentille. (d) Démontrer que l'image finale formée par le système de lentilles est située à 150 mm derrière la lentille divergente. (e) Quel est le grandissement de la combinaison ?

5.37 Déterminer la position de l'image et le grandissement du système pour un objet situé à 30 cm devant le doublet de lentilles minces de la figure P.5.37. Faire le calcul en étudiant séparément les effets des deux lentilles. Représenter un tracé des rayons caractéristiques.

Figure P.5.37



5.38* Deux lentilles minces de distances focales respectives $+15$ cm et -15 cm sont positionnées à 60 cm l'une de l'autre. Une page dactylographiée est placée 25 cm devant la lentille convergente. Décrire en détail l'image obtenue (en supposant des conditions paraxiales).

5.39* Représenter un tracé des rayons caractéristiques pour une combinaison de deux lentilles convergentes séparées d'une distance égale à la somme de leurs focales. Même exercice dans le cas où l'une des lentilles est divergente.

5.40* Deux lentilles convergentes sont utilisées pour élargir un faisceau laser : un faisceau de 1 mm de section rencontre une lentille convergente de courte focale puis une autre de focale plus longue et ressort du système avec une section de 8 mm. Étant donné que la seconde lentille a une distance focale de 50 mm, déterminer la distance focale de la première lentille, ainsi que la distance entre les deux lentilles. Faire un schéma de l'ensemble.

5.41 Représenter le tracé des rayons caractéristiques d'un microscope composé (figure 5.99), en considérant l'image intermédiaire comme un objet réel (approche plus simple).

5.42* Soit une lentille mince positive L_1 . Montrer, en utilisant le tracé des rayons caractéristiques, qu'une lentille L_2 placée au foyer de L_1 n'en modifie pas le grandissement. C'est une bonne raison pour porter ses lunettes, dont les verres ont des corrections différentes, à une distance appropriée de ses yeux.

5.43* Les figures P.5.43a et P.5.43b sont extraites d'un ouvrage d'introduction à la physique. Quelles sont les erreurs ?

Figure P.5.43a

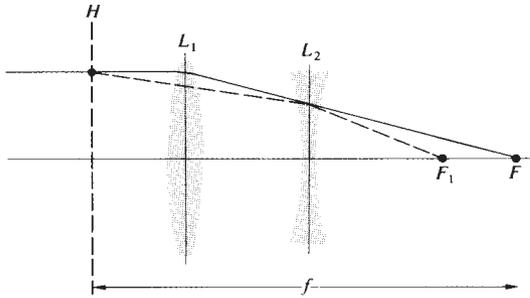
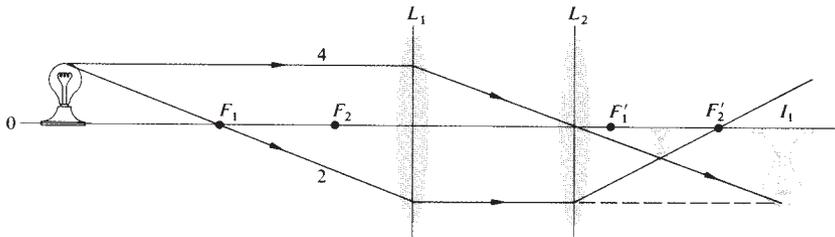


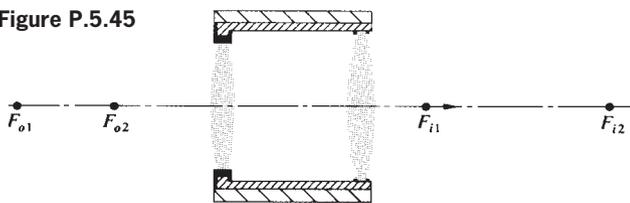
Figure P.5.43b



5.44 Soient deux lentilles minces convergentes L_1 et L_2 séparées de 5 cm. Leurs diamètres respectifs sont de 6 et 4 cm, pour des focales de $f_1 = 9$ cm et $f_2 = 3$ cm. Si l'on place un diaphragme avec un trou de 1 cm de diamètre entre les deux lentilles, à 2 cm de L_2 , déterminer (a) le diaphragme d'ouverture et (b) la position et la taille des pupilles pour un point axial S situé à 12 cm devant (ou à gauche) de L_1 .

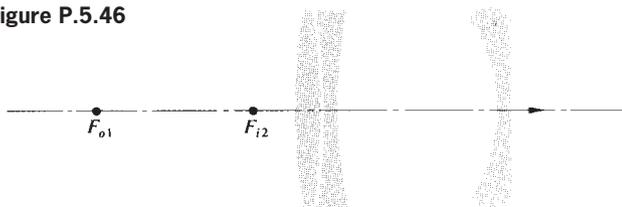
5.45 Déterminer graphiquement la position du diaphragme d'ouverture et des pupilles d'entrée et de sortie pour la lentille de la figure P.5.45.

Figure P.5.45



5.46 Déterminer graphiquement la position approximative du diaphragme d'ouverture et des pupilles d'entrée et de sortie pour la lentille de la figure P.5.46, en considérant le point objet au-delà (à la gauche) de F_{o1} .

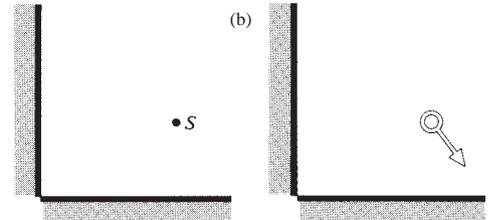
Figure P.5.46



5.47 La figure P.5.47 montre un système de lentilles, un objet, et les pupilles appropriées. Déterminer graphiquement la position de l'image.

5.48 Déterminer graphiquement, en utilisant un tracé des rayons caractéristiques, les images d'un point source par une paire de miroirs disposés à 90° (figure P.5.48a). Même exercice pour la flèche de la figure P.5.48b.

Figure P.5.48 (a)



5.49 Examiner la photographie représentant la toile de Vélasquez *Vénus et Cupidon* (figure P.5.49). Vénus est-elle en train de se regarder dans le miroir ? Expliquer.

5.50 La toile de Manet *Le bar des Folies-Bergère* (figure P.5.50) montre une serveuse se tenant debout devant un grand miroir plan. Celui-ci réfléchit le dos de la jeune femme ainsi qu'un monsieur en habit de soirée à qui elle a l'air de parler. Manet a sans doute voulu donner à celui qui regarde sa toile la sensation qu'il se trouve à la place du gentleman. Quelle est l'erreur du point de vue de l'optique géométrique ?

Figure P.5.47

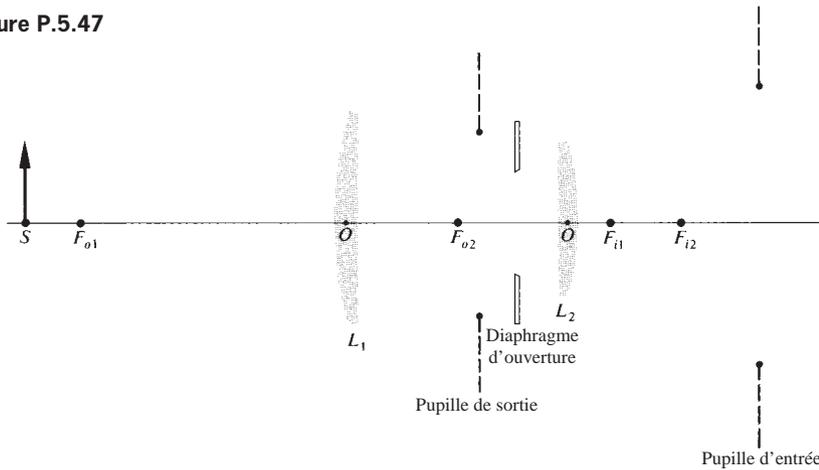


Figure P.5.49 *La toilette de Vénus* peinte par Diego Rodriguez de Silva y Vélasquez. (The Trustees, The National Gallery, London.)



5.51 Démontrer que l'équation (5.48) obtenue pour une surface sphérique est également applicable au cas du miroir plan.

5.52 Déterminer la position de l'image d'une pince à papier située à 100 cm devant un miroir sphérique convexe de 80 cm de rayon de courbure.

5.53* Imaginez que vous vous tenez à 1,5 m d'une boule réfléchissante de 30 cm de diamètre. Décrire l'image que vous pourriez voir dans cette boule.

5.54* Une lentille mince de 50 cm de focale est positionnée à 250 cm devant (i.e. à la gauche) d'un miroir plan. Une fourmi se repose sur

Figure P.5.50 *Le Bar des Folies-Bergère* peint par Édouard Manet. (The Courtauld Institute Galleries, London, Courtauld Collection.)



l'axe optique de l'ensemble, à 250 cm devant la lentille (i.e. à sa gauche). Déterminer la position de trois images de cette fourmi.

5.55 L'image d'une rose rouge est formée par un miroir sphérique concave sur un écran situé à 100 cm. Si la fleur est à 25 cm du miroir, quel est le rayon de courbure de ce dernier ?

5.56 D'après ce que vous pouvez en voir sur la figure P.5.56, quelle est la forme du miroir pendu derrière *Jean Arnolfini et sa femme*, sur la célèbre peinture de Van Eyck ?

5.57* On trouve dans le commerce plusieurs sortes de rétro-réfléc-teurs. L'un de ceux-là est constitué de plusieurs sphères transparentes

Figure P.5.56 Détail de *Jean Arnolfini et sa femme* par Jan van Eyck. (The Trustees, The National Gallery, London.)



dont l'arrière a été argenté. La lumière se réfracte à la première interface, se focalise sur la face arrière qui la réfléchit dans la même direction. Déterminer l'indice de réfraction que doit avoir le matériau de ces sphères. Considérer que la lumière incidente est collimatée.

5.58* Dessiner le schéma d'un œil de robot utilisant un miroir sphérique concave tel que l'image d'un objet de 1 m de haut situé à 10 m puisse se former sur un détecteur photosensible carré de 1 cm de côté (pouvant être déplacé pour la mise au point). Où faut-il positionner le détecteur par rapport au miroir ? Quelle doit être la distance focale du miroir ? Représenter un tracé des rayons.

5.59 Dessiner le schéma d'un petit miroir de dentiste, à fixer au bout d'une tige, pour pouvoir voir au fond de la bouche d'un patient. Les exigences sont (1) que le dentiste puisse voir une image redressée et (2) qu'il produise une image agrandie deux fois lorsqu'on le tient à 1,5 cm d'une dent.

5.60 Un objet est situé à la distance s_o d'un miroir sphérique de rayon R . Montrer que l'image résultante est agrandie d'un facteur :

$$M_T = \frac{R}{2s_o + R}$$

5.61* On appelle « *kératomètre* » l'appareil utilisé pour mesurer le rayon de courbure de la cornée d'un œil. Ce paramètre est en effet très important lorsque l'on porte des lentilles de contact. Le principe est le suivant : un objet lumineux est placé à une distance connue de l'œil et l'on observe alors son image réfléchie par la cornée d'un

patient. Cet instrument permet alors au praticien de mesurer la taille de l'image virtuelle qu'il observe. Si le grandissement trouvé est $0,037 \times$ pour une distance objet de 100 mm, quel est alors le rayon de courbure de la cornée ?

5.62* Considérant le principe d'un miroir sphérique, démontrer que les positions d'un objet et de son image sont données par :

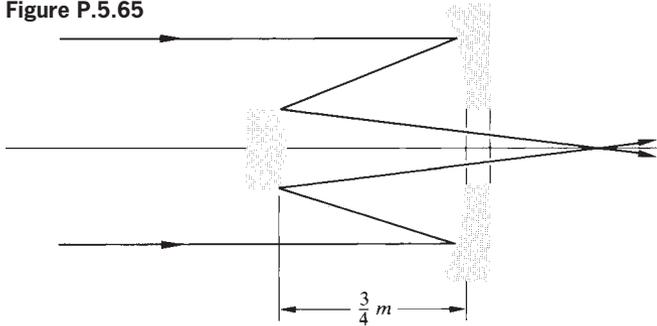
$$s_o = f(M_T - 1)/M_T \quad \text{et} \quad s_i = -f(M_T - 1)$$

5.63 Un homme regarde dans une cuillère à soupe placée à 25 cm en face de lui et voit son visage avec un grandissement de $-0,064$. Déterminer le rayon de courbure de la cuillère.

5.64* Dans une fête foraine, un grand miroir sphérique convexe fait face à un miroir plan situé à 10 m. Une petite fille de 1 m de haut, placée à mi-distance entre les deux systèmes, se voit deux fois plus grande dans le miroir plan que dans le miroir sphérique. En d'autres termes, l'angle qui a pour sommet l'observateur et qui est sous-tendu par l'image est deux fois plus grand dans le cas du miroir plan que dans le cas du miroir sphérique. Quelle est la focale de ce dernier ?

5.65* Un téléobjectif rudimentaire est constitué de deux miroirs sphériques (figure P.5.65). Le rayon de courbure est de 2,0 m pour le primaire et de 60 cm pour le secondaire. À quelle distance du secondaire doit être le plan du film si l'on utilise cet objectif pour photographier les étoiles ? Quelle est la distance focale effective de ce système ?

Figure P.5.65



5.66* Un point source S est situé sur l'axe optique d'une lentille mince convergente, à une distance comprise entre une et deux distances focales (à la gauche de la lentille). Un miroir sphérique concave est positionné à la droite de la lentille, de telle manière que l'image finale, réelle, soit également située en S . Où doit être placé le miroir ? Où devrait-on placer un miroir sphérique convexe pour accomplir la même tâche ?

5.67* Soit un miroir sphérique concave possédant une distance focale de 10 cm. À quelle distance doit-on placer un objet si l'on veut que l'image soit redressée et 1,50 fois plus grande ? Quel est le rayon de courbure de ce miroir ? Vérifier avec le tableau 5.5.

5.68 Décrire l'image que l'on obtiendrait en plaçant un objet de 7,5 cm de haut à 20 cm d'un miroir sphérique concave de -60 cm de rayon de courbure, utilisé pour le rasage.

5.69* Soit une lentille équiconcave recevant un faisceau de rayons parallèles le long de son axe optique. Une partie de la lumière est réfléchiée par la première surface, tandis que le reste pénètre dans la lentille. Montrer que si l'indice de réfraction de la lentille (baignée par de l'air) est 2,00, l'image réfléchiée coïncide avec l'image formée par la lentille.

5.70 Considérons le prisme de Dove de la figure 5.63. Faisons-lui subir une rotation de 90° suivant l'axe déterminé par la direction des rayons. Faire le schéma de la nouvelle configuration et déterminer l'angle de rotation de l'image.

5.71 Déterminer l'ouverture numérique d'une fibre optique gainée possédant un indice de cœur de 1,62 et un indice de gaine de 1,52. Lorsqu'elle est immergée dans l'air, quel est l'angle maximum d'acceptance ? Que se passe-t-il si un rayon arrive avec une incidence de 45° ?

5.72 Soit une fibre de silice fondue ayant une atténuation de 0,2 dB/km. Quelle distance un signal peut-il parcourir dans cette fibre avant d'avoir une intensité diminuée de moitié ?

5.73 Le nombre de modes dans une fibre à saut d'indice est donné par l'expression :

$$N_m \approx \frac{1}{2}(\pi D \text{NA}/\lambda_0)^2$$

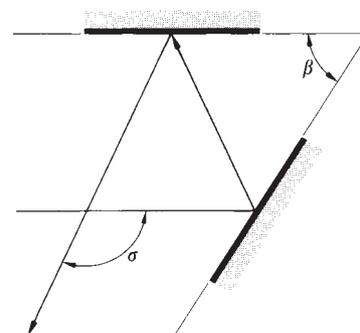
Étant donné une fibre de 50 μm de diamètre de cœur et d'indices $n_c = 1,482$ et $n_f = 1,500$, déterminer N_m lorsque cette fibre est éclairée par une LED émettant à la longueur d'onde de 0,85 μm .

5.74* Déterminer le retard intermodal (en ns/km) pour une fibre à saut d'indice possédant une gaine d'indice 1,485 et un cœur d'indice 1,500.

5.75 En utilisant les descriptions de l'œil humain (paragraphe 5.7.1), déterminer la taille approximative (en millimètres) de l'image de la Lune sur la rétine. On suppose que la Lune a un diamètre de 3475 km et se situe à environ 380 000 km (bien que cette distance varie).

5.76* La figure P.5.76 montre un arrangement dans lequel, quel que soit son angle d'incidence, un faisceau est dévié d'un angle constant σ , égal au double de l'angle β entre les miroirs plans. Démontrer ce résultat.

Figure P.5.76



5.77 Un objet situé à 20 m d'un objectif ($f_o = 4$ m) d'une lunette astronomique est imagé à 30 cm de l'oculaire ($f_o = 60$ cm). Déterminer le grossissement de l'instrument.

5.78* La figure P.5.78, issue d'un ancien ouvrage d'optique, est censée représenter un système redresseur constitué de lentilles. Quelle est l'erreur ?

5.79* La figure P. 5.79 montre un écran percé d'un trou d'aiguille, système utilisé pour un usage pratique. Expliquer ce qu'on obtient et décrire le principe. Faire l'expérience.

5.80* Si une photographie d'un manège de chevaux de bois est parfaitement exposée mais floue à $\frac{1}{30}$ s et $f/11$, quelle doit être l'ouverture si l'on règle l'obturateur à $\frac{1}{120}$ s, afin de « stopper » le mouvement ?

Figure P.5.78

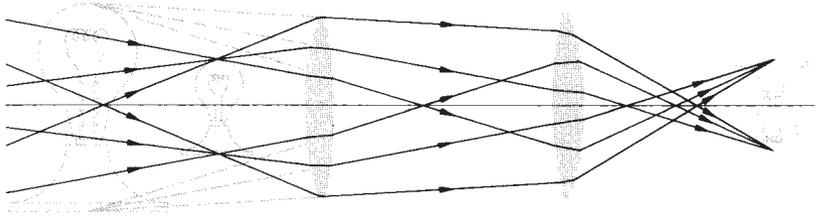
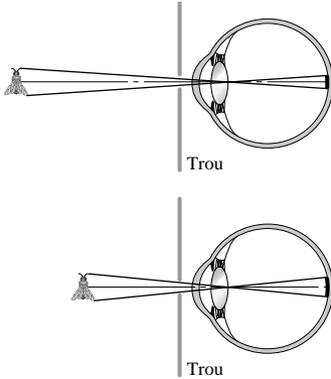


Figure P.5.79



5.81 Le champ d'une lunette astronomique à deux éléments est réduit par la taille de la lentille d'œil. Représenter un tracé de rayons montrant ce vignelage.

5.82 Une *lentille de champ* est une lentille convergente placée dans le plan de l'image intermédiaire (ou tout près), afin de collecter les rayons qui ne rencontreraient pas, sinon, la lentille suivante. En effet, elle accroît le champ sans changer la vergence du système. En considérant cet élément, refaire le problème précédent. Montrer que la distance oculaire est quelque peu réduite.

5.83* Décrire complètement l'image que l'on obtient lorsqu'une mouche vient se poser sur le sommet d'une lentille mince convergente. Comment relier ce problème à la manière dont fonctionne une lentille de champ ? (problème 5.82).

5.84* Un patient a un punctum proximum à 50 cm et un œil de longueur 2,0 cm.

- Quelle est la vergence de son système oculaire lorsqu'il regarde à l'infini ? à 50 cm ?
- Quel est l'accommodation pour une observation à 50 cm ?
- Quelle vergence doit avoir l'œil pour voir nettement un objet à la distance de punctum proximum standard de 25 cm ?
- Quelle correction doit-on apporter à la vision de ce patient ?

5.85* Un ophtalmologiste note qu'un de ses patients est hypermétrope, avec un punctum proximum à 125 cm. Quelle vergence de lentilles de contact doit-il lui prescrire pour que cet individu puisse observer et lire à une distance normale de 25 cm ? Utiliser le fait qu'un objet imagé au punctum proximum est vu nettement.

5.86 Une personne hypermétrope peut voir des montagnes extrêmement éloignées, en vision relaxée, lorsqu'elle porte ses lentilles de contact +3,2D. Déterminer la vergence des lunettes équivalentes, qu'il porterait sur le nez, à 17 mm de la cornée. Localiser la position du punctum remotum dans les deux cas.

5.87* Un bijoutier examine un diamant de 5,0 mm de diamètre avec une loupe de focale 25,4 mm.

- Déterminer le grandissement angulaire maximal de la loupe.
- Quelle taille paraît avoir la pierre précieuse dans l'instrument ?
- Déterminer la valeur de l'angle qui a pour sommet l'œil nu et qui est sous-tendu par le diamant.
- Déterminer la valeur de cet angle lorsque le bijoutier regarde à travers la loupe.

5.88 Un expérimentateur veut réaliser un microscope (pouvant être utilisé en vision relaxée) à l'aide de deux lentilles convergentes de 25 mm de focale. En considérant que l'objet observé doit être à 27 mm de l'objectif, (a) à quelle distance doit-il espacer les lentilles et (b) quel grossissement peut-il avoir ?

5.89* La figure P.5.89 montre un système de focalisation des rayons X à incidence rasante, inventé en 1952 par Hans Wolter. Quel est son principe de fonctionnement ? Des microscopes utilisant ce type de système ont été utilisés pour photographier, dans les rayons X, l'implosion de pastilles de combustible dans le cadre de la recherche sur la fusion nucléaire par laser. Des arrangements à rayons X similaires ont également été utilisés dans certains systèmes astronomiques.

5.90* Les deux systèmes de miroirs asphériques à incidence rasante de la figure P.5.90 ont été conçus pour focaliser des rayons X. Expliquer le rôle de chaque miroir : identifier la forme, la localisation, les foyers, etc.

Figure P.5.89

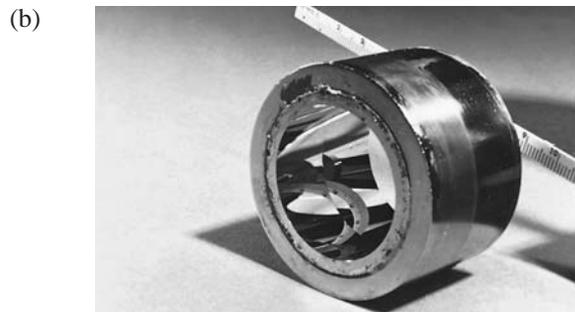
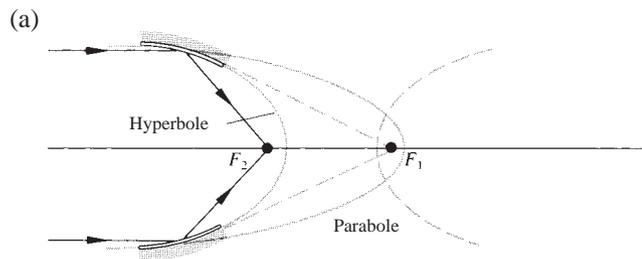
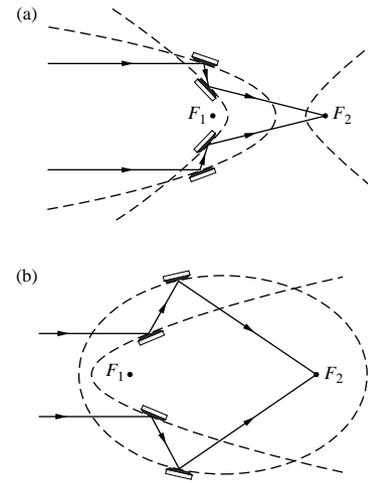


Figure P.5.90



5.91* Le télescope spatial *Hubble* a un miroir primaire de 2,4 m de diamètre que l'on considère limité par la diffraction. Supposons que nous voulions l'utiliser pour lire la marque de fabrication d'un satellite russe éloigné. Si la résolution recherchée est de 1,0 cm, au niveau du satellite, à quelle distance maximale est le satellite russe ?

6

Compléments d'optique géométrique

Le chapitre précédent a traité principalement de la théorie paraxiale appliquée aux systèmes de lentilles sphériques minces, en s'appuyant essentiellement sur deux approximations : lentilles minces et théorie au premier ordre, qui sont rédhibitoires pour la conception de systèmes optiques de qualité industrielle, et ne permettent d'obtenir que des solutions approximatives. Ce chapitre va plus loin en étudiant le cas des lentilles épaisses et en introduisant les aberrations. L'avènement de la conception optique assistée par ordinateur requiert une prise de recul ; il s'agit d'en saisir les limites et les subtilités.

6.1 Systèmes de lentilles épaisses

La figure 6.1 représente une lentille épaisse (i.e. dont l'épaisseur n'est plus négligeable). Comme on va le voir, il pourrait s'agir d'un système optique constitué d'une lentille ou plus. Les points focaux objet et image, F_o et F_i , peuvent être positionnés par rapport aux deux sommets les plus à l'extérieur. Dans ce cas, on retrouve les tirages optiques objet et image désignées par b.f.l. et f.f.l. Les rayons incidents et émergents se prolongent pour se rencontrer en des points qui forment une surface courbe qui peut se trouver ou non dans la lentille. Cette surface, approximativement un plan dans la région paraxiale, est appelée **plan principal** (paragraphe 6.3.1). Les points d'intersection des plans principaux objet et image (comme dans la figure 6.1) avec l'axe optique sont les points principaux objet et image, H_1 et H_2 , respectivement. Ce sont des points de référence abondamment utilisés, à partir desquels on définit plusieurs paramètres du système. On a vu (figure 5.16, p. 167) qu'un rayon incident passant par le centre optique d'une lentille en ressort parallèlement à sa direction incidente. En les

prolongeant, ces rayons incidents et émergents vont croiser l'axe optique en des points appelés **points nodaux**, N_1 et N_2 (figure 6.2). *Lorsque les milieux extrêmes sont identiques, en*

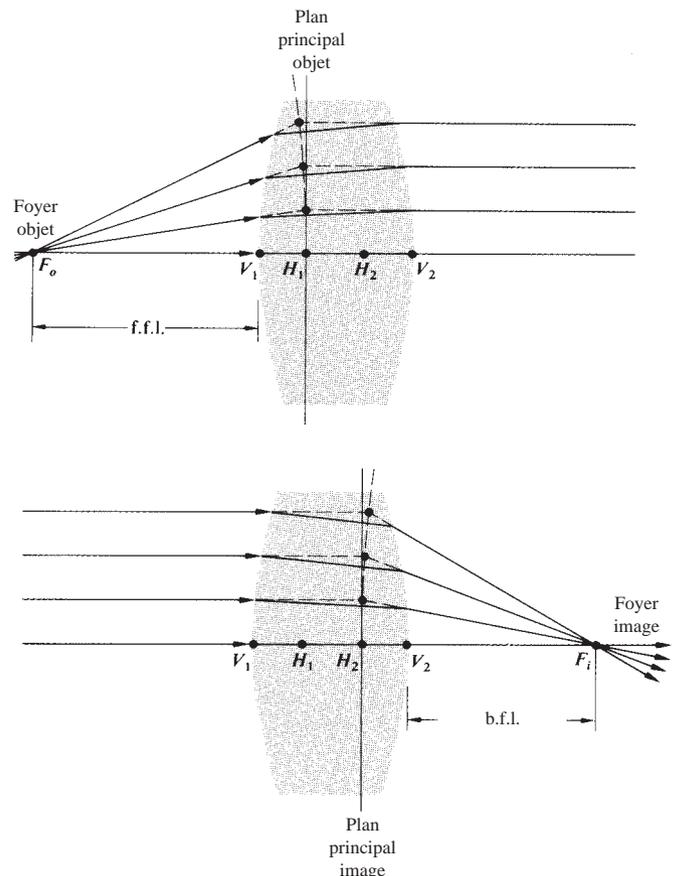


Figure 6.1 Une lentille épaisse.

général l'air, les points principaux et nodaux sont confondus. Les deux foyers, les deux points principaux, et les deux points nodaux constituent les six **points cardinaux** d'un système. Comme le montre la figure 6.3, les plans principaux peuvent se situer en dehors de la lentille. Chaque lentille, dans chacun des deux groupes, a la même puissance. Notons que les plans principaux de la lentille symétrique sont eux-mêmes positionnés symétriquement. Dans le cas de lentilles plan-concave et plan-convexe, l'un des deux plans principaux est tangent à la surface courbe – conformément à la définition (appliquée dans la région paraxiale). En revanche, les points principaux peuvent se trouver en dehors de la lentille, comme pour les ménisques. La différence de forme entre lentilles de même puissance se traduit par leur *cambrure*. La règle empirique pour les lentilles en verre ordinaire dans l'air est que la séparation $\overline{H_1H_2}$ vaut environ un tiers de l'épaisseur de la lentille $\overline{V_1V_2}$.

Une lentille épaisse est constituée de deux dioptries sphériques dont les sommets sont séparés d'une distance d_l , comme dans la section 5.2.3, où l'équation de la lentille mince a été démontrée. Après calculs algébriques,* d_l n'étant plus négligeable, on trouve un résultat intéressant pour une lentille épaisse dans l'air. Les points conjugués sont reliés par la relation de Gauss,

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \tag{6.1}$$

pourvu que les distances objet et image soient mesurées depuis les plans principaux objet et image, respectivement. De plus,

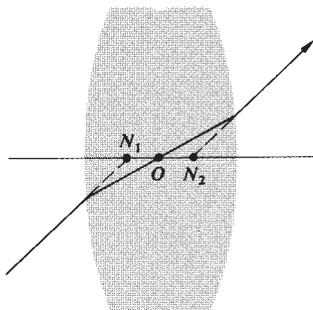


Figure 6.2 Points nodaux.

*Pour une démonstration complète, voir Morgan, *Introduction to Geometrical and Physical Optics*, p. 57. On utilisera beaucoup ces résultats dans le calcul matriciel du paragraphe 6.2.1.

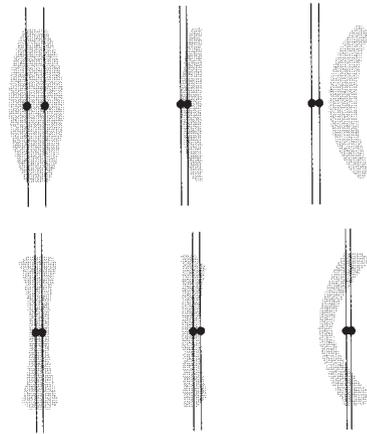


Figure 6.3 Lentilles de différentes courbures.

la *distance focale* ou plus simplement la *focale*, f , dépend aussi de la position des plans principaux. Elle est donnée par :

$$\frac{1}{f} = (n_l - 1) \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n_l - 1)d_l}{n_l R_1 R_2} \right] \tag{6.2}$$

Les plans principaux se situent à des distances $\overline{V_1H_1} = h_1$ et $\overline{V_2H_2} = h_2$, qui sont positives lorsque les plans sont à droite de leur sommet respectif. La figure 6.4 illustre la modélisation complète d'une lentille épaisse. Les valeurs de h_1 et h_2 sont (exercice 6.18) données par :

$$h_1 = - \frac{f(n_l - 1)d_l}{R_2 n_l} \tag{6.3}$$

et
$$h_2 = - \frac{f(n_l - 1)d_l}{R_1 n_l} \tag{6.4}$$

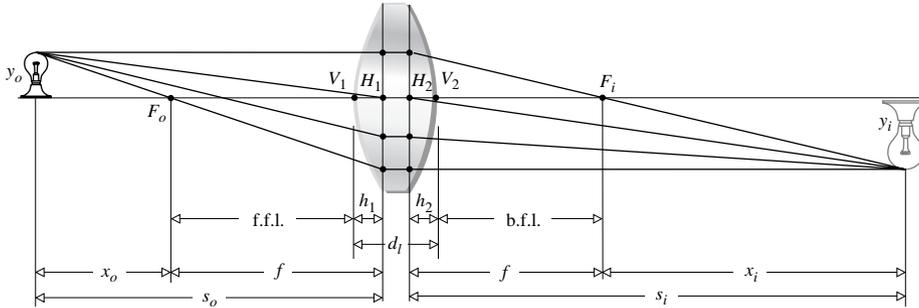
Les propriétés des triangles semblables (figure 6.4) permettent d'écrire, à l'instar de la relation de Newton, que :

$$x_o x_i = f^2 \tag{6.5}$$

tant que f est définie comme précédemment. De même on a :

$$M_T = \frac{y_i}{y_o} = - \frac{x_i}{f} = - \frac{f}{x_o} \tag{6.6}$$

Évidemment, si $d_l \rightarrow 0$, les équations (6.1), (6.2) et (6.5) sont transformées en leurs homologues de la lentille mince, les équations (5.17), (5.16) et (5.23). À titre d'exemple, cherchons la


Figure 6.4 Géométrie de la lentille épaisse.

distance image d'un objet situé à 30 cm du sommet d'une lentille biconvexe de rayons 20 cm et 40 cm, d'épaisseur 1 cm, et d'indice 1,5. D'après l'équation (6.2) la focale vaut (en centimètres)

$$\frac{1}{f} = (1,5 - 1) \left[\frac{1}{20} - \frac{1}{-40} + \frac{(1,5 - 1)1}{1,5(20)(-40)} \right]$$

soit $f = 26,8$ cm. De plus,

$$h_1 = - \frac{26,8(0,5)1}{-40(1,5)} = + 0,22 \text{ cm}$$

et

$$h_2 = - \frac{26,8(0,5)1}{20(1,5)} = - 0,44 \text{ cm}$$

ce qui signifie que H_1 est à droite de V_1 , et H_2 à gauche de V_2 . Finalement, $s_o = 30 + 0,22$, d'où :

$$\frac{1}{30,2} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{26,8}$$

et $s_i = 238$ cm, mesurée depuis H_2 .

Les points principaux sont conjugués l'un de l'autre. En d'autres termes, le fait que $f = s_o s_i / (s_o + s_i)$ entraîne que $s_i = 0$ quand $s_o = 0$, puisque f est finie, et donc un point en H_1 donne une image en H_2 . En outre, comme l'image d'un objet situé dans le plan principal objet ($x_o = -f$) est dans le plan principal image ($x_i = -f$) avec un grandissement unitaire ($M_T = 1$), les plans principaux sont souvent désignés comme *plans unitaires*. Tout rayon incident en un point du plan principal objet émerge de la lentille au point image correspondant dans le plan principal image (à la même hauteur au-dessus ou en dessous de l'axe).

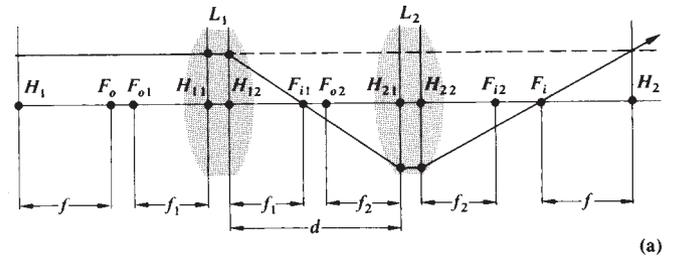
Supposons maintenant une combinaison de deux lentilles épaisses, L_1 et L_2 (figure 6.5). Posons s_{o1} , s_{i1} , et f_1 et s_{o2} , s_{i2} , et f_2 les distances objet et image et les focales des deux lentilles, mesurées par rapport à leurs plans principaux respectifs. Le

grandissement transversal est le produit des grandissements individuels, donc :

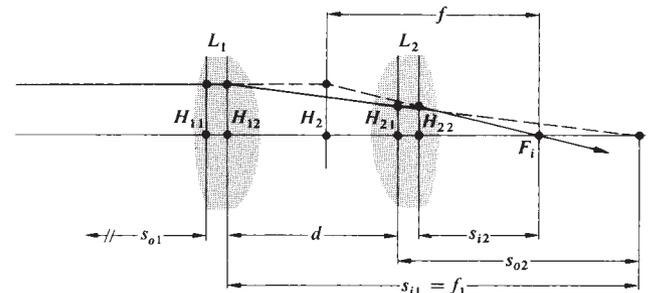
$$M_T = \left(- \frac{s_{i1}}{s_{o1}} \right) \left(- \frac{s_{i2}}{s_{o2}} \right) = - \frac{s_i}{s_o} \quad (6.7)$$

où s_o et s_i sont les distances objet et image du système de lentilles. Quand s_o tend vers l'infini $s_o = s_{o1}$, $s_{i1} = f_1$, $s_{o2} = -(s_{i1} - d)$, et $s_i = f$. Comme :

$$\frac{1}{s_{o2}} + \frac{1}{s_{i2}} = \frac{1}{f_2}$$



(a)



(b)

Figure 6.5 Une combinaison de lentilles épaisses.

il suit (exercice 6.1), en substituant dans l'équation (6.7), que

$$-\frac{f_1 s_{i2}}{s_{o2}} = f$$

ou
$$f = -\frac{f_1}{s_{o2}} \left(\frac{s_{o2} f_2}{s_{o2} - f_2} \right) = \frac{f_1 f_2}{s_{i1} - d + f_2}$$

Donc :
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (6.8)$$

C'est la focale de la combinaison des deux lentilles épaisses, toutes les distances étant définies à partir des plans principaux. La position des plans principaux du système se déduit des expressions :

$$\overline{H_{11}H_1} = \frac{fd}{f_2} \quad (6.9)$$

et
$$\overline{H_{22}H_2} = \frac{fd}{f_1} \quad (6.10)$$

ce qui sera démontré dans le paragraphe 6.2.1. Le système peut donc être décrit par une lentille épaisse équivalente. Si les lentilles sont minces, alors les paires de points H_{11}, H_{12} , et H_{21}, H_{22} se confondent, et d devient la distance centre à centre des deux lentilles, comme dans la section 5.2.3. Par exemple, pour la lentille mince de la figure 5.31 où $f_1 = -30$ cm, $f_2 = 20$ cm, et $d = 10$ cm (figure 6.6),

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{-30} + \frac{1}{20} - \frac{10}{(-30)(20)}$$

donc $f = 30$ cm. On a trouvé (p. 176) b.f.l. = 40 cm et f.f.l. = 15 cm. De plus, pour les lentilles minces, les équations (6.9) et (6.10) se réécrivent :

$$\overline{O_1H_1} = \frac{30(10)}{20} = +15 \text{ cm}$$

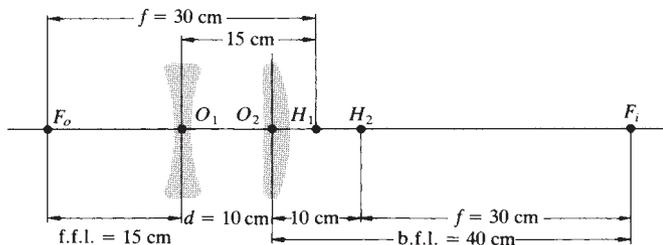


Figure 6.6 Une lentille composée.

et
$$\overline{O_2H_2} = -\frac{30(10)}{-30} = +10 \text{ cm}$$

Les deux distances sont positives donc les plans sont situés à droite de O_1 et O_2 , respectivement.

La même procédure s'applique à trois, quatre lentilles ou plus, c'est-à-dire que :

$$f = f_1 \left(-\frac{s_{i2}}{s_{o2}} \right) \left(-\frac{s_{i3}}{s_{o3}} \right) \dots \quad (6.11)$$

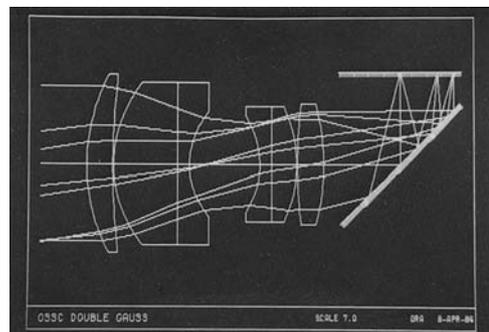
Ainsi, les deux premières lentilles sont caractérisées par une lentille équivalente dont on connaît la position des plans principaux et la focale. Ensuite, cette lentille équivalente est combinée à la troisième lentille en réappiquant la même méthode, et ainsi de suite pour les lentilles suivantes.

6.2 Tracé de rayons

En optique, le tracé de rayons est indéniablement l'un des outils principaux du concepteur. Après avoir imaginé un système optique sur le papier, on peut tester ses performances en lançant mathématiquement des rayons virtuels à travers celui-ci. On peut suivre la propagation exacte de n'importe quel rayon, paraxial ou non, à travers le système. Il ne s'agit en fait que d'appliquer l'équation de la réfraction :

$$n_i(\hat{\mathbf{k}}_i \times \hat{\mathbf{u}}_n) = n_t(\hat{\mathbf{k}}_t \times \hat{\mathbf{u}}_n) \quad [4.6]$$

au premier dioptre, de manière à localiser le point d'impact du rayon sur le second dioptre, et ainsi de suite en réappiquant l'équation de la réfraction. Pendant longtemps on n'a tracé que des *rayons méridiens* (situés dans le plan de l'axe optique) car les rayons « en biais » (qui ne croisent pas l'axe)



Tracé de rayons par ordinateur. (Optical Research Associates, Pasadena, California.)

sont considérablement plus délicats à manier mathématiquement. Ce n'est plus un problème avec les ordinateurs qui traitent cela en une fraction de seconde. Alors qu'il fallait 10 à 15 minutes pour une personne entraînée (avec une calculatrice) par surface et par rayon non méridien, il suffit de moins d'un millième de seconde à un ordinateur pour exécuter la même tâche et, ce qui n'est pas sans importance, l'ordinateur attaque la surface suivante avec le même enthousiasme !

Le cas le plus simple pour illustrer le calcul optique est celui d'un rayon paraxial dans le plan méridien traversant une lentille épaisse. La loi de Snell-Descartes au point P_1 de la figure 6.7 donne :

$$n_{i1}\theta_{i1} = n_{t1}\theta_{t1}$$

ou
$$n_{i1}(\alpha_{i1} + \alpha_1) = n_{t1}(\alpha_{t1} + \alpha_1)$$

Comme $\alpha_1 = y_1/R_1$, on a :

$$n_{i1}(\alpha_{i1} + y_1/R_1) = n_{t1}(\alpha_{t1} + y_1/R_1)$$

ou encore :

$$n_{t1}\alpha_{t1} = n_{i1}\alpha_{i1} - \left(\frac{n_{t1} - n_{i1}}{R_1}\right)y_1$$

or d'après le paragraphe 5.7.2, la puissance d'un dioptre est :

$$\mathcal{D}_1 = \frac{(n_{t1} - n_{i1})}{R_1}$$

Donc :
$$n_{t1}\alpha_{t1} = n_{i1}\alpha_{i1} - \mathcal{D}_1 y_1 \tag{6.12}$$

C'est la **loi de la réfraction** appliquée à la première surface.

Après avoir été réfracté au point P_1 , le rayon continue sa marche dans le milieu homogène de la lentille jusqu'au point P_2 sur le second dioptre. La hauteur en P_2 s'exprime par :

$$y_2 = y_1 + d_{21}\alpha_{t1} \tag{6.13}$$

pourvu que $\tan \alpha_{t1} \approx \alpha_{t1}$. Cette relation est **l'équation du transfert**, car elle permet de suivre la marche du rayon entre P_1 et P_2 . Dans la région paraxiale $d_{21} \approx \sqrt{V_2 V_1}$ et y_2 est facilement calculable. Les équations (6.12) et (6.13) sont alors utilisées successivement pour tracer un rayon à travers tout le système. Bien entendu, on n'a traité que les rayons méridiens qui, à cause de la symétrie de la lentille par rapport à l'axe optique, restent constamment dans le plan méridien. Le problème pour un rayon méridien est à deux dimensions et l'on dispose de deux équations pour déterminer les deux inconnues, α_{t1} et y_2 . Un rayon non méridien doit être traité en trois dimensions.

6.2.1 Méthodes matricielles

Au début des années 1930, T. Smith formula une méthode intéressante pour suivre la marche d'un rayon. La forme linéaire des expressions et leur répétition successive suggéraient naturellement le calcul matriciel ; les lois de la réfraction et du transfert pouvant alors être implémentées mathématiquement grâce à des opérateurs matriciels. Ces réflexions furent malgré tout négligées pendant presque 30 ans. Le début des années 1960 vit renaître l'intérêt pour cette approche.* On se contentera d'en

.....
*Pour plus de détails, voir K. Hallbach, « Matrix Representation of Gaussian Optics, » *Am. J. Phys.* **32**, 90 (1964) ; W. Brouwer, *Matrix Methods in Optical Instrument Design* ; E. L. O'Neill, *Introduction to Statistical Optics* ; ou A. Nussbaum, *Geometric Optics*.

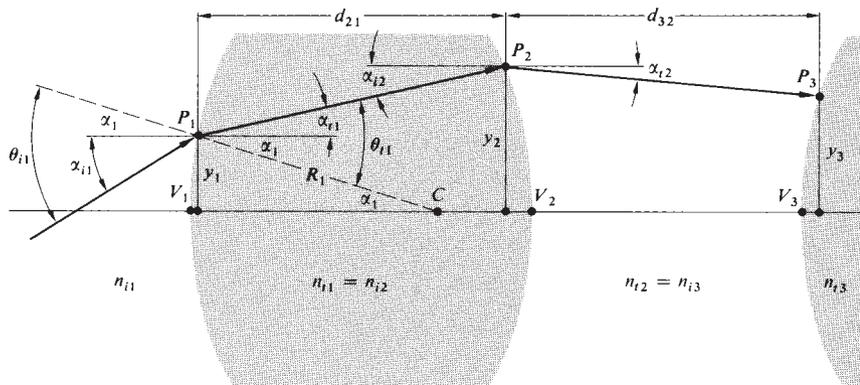


Figure 6.7 Marche d'un rayon.

exposer les points marquants et on laissera le lecteur consulter les références pour une étude plus approfondie du sujet.

Analyse matricielle des lentilles

Commençons par écrire :

$$n_{i1}\alpha_{i1} = n_{i1}\alpha_{o1} - \mathcal{D}_1 y_{i1} \quad (6.14)$$

et
$$y_{i1} = 0 + y_{i1} \quad (6.15)$$

qui découlent de l'équation (6.12) en remplaçant y_1 par y_{i1} et posons $y_{r1} = y_{i1}$. Cette dernière égalité est triviale, car la hauteur d'incidence du rayon au point P_1 au-dessus de l'axe est la même dans le milieu incident (y_{i1}) que dans le milieu après le dioptre (y_{r1}). Maintenant, la paire d'équations peut se mettre sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} n_{i1}\alpha_{i1} \\ y_{i1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{D}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{i1}\alpha_{o1} \\ y_{i1} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Elle peut également s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{i1} \\ y_{i1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{i1}/n_{i1} & -\mathcal{D}_1/n_{i1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{o1} \\ y_{i1} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

La forme précise des vecteurs colonne 2×1 est une question de préférence personnelle. De toute façon, ils représentent les rayons de part et d'autre de P_1 , avant et après la réfraction. En utilisant \mathbf{r}_{i1} et \mathbf{r}_{r1} pour les deux rayons, on peut écrire :

$$\mathbf{r}_{i1} \equiv \begin{bmatrix} n_{i1}\alpha_{i1} \\ y_{i1} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_{r1} \equiv \begin{bmatrix} n_{i1}\alpha_{o1} \\ y_{i1} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

La matrice 2×2 d'un dioptre, exprimée par :

$$\mathcal{R}_1 \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{D}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

est appelée **matrice de réfraction**, et l'équation (6.16) s'écrit symboliquement sous la forme :

$$\mathbf{r}_{i1} = \mathcal{R}_1 \mathbf{r}_{r1} \quad (6.20)$$

ce qui signifie que \mathcal{R}_1 transforme le rayon \mathbf{r}_{r1} en \mathbf{r}_{i1} pendant la réfraction sur le premier dioptre. On remarque que la convention utilisée pour décrire la réfraction (équations (6.16)

et (6.17)) est déterminante pour fixer les éléments de la matrice de réfraction. Par conséquent, plusieurs variations équivalentes de cette matrice peuvent être trouvées dans la littérature.

D'après la figure 6.7 on a $n_{i2}\alpha_{i2} = n_{r1}\alpha_{r1}$, c'est-à-dire,

$$n_{i2}\alpha_{i2} = n_{r1}\alpha_{r1} + 0 \quad (6.21)$$

et
$$y_{i2} = d_{21}a_{r1} + y_{r1} \quad (6.22)$$

où $n_{i2} = n_{r1}$, $\alpha_{i2} = \alpha_{r1}$, et grâce à l'équation (6.13), avec $y_{r2} = y_{i2}$ pour plus de clarté. Donc :

$$\begin{bmatrix} n_{i2}\alpha_{i2} \\ y_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21}/n_{r1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{r1}\alpha_{r1} \\ y_{r1} \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

Le rayon émergent de P_1 (i.e. \mathbf{r}_{i1}) devient le rayon incident en P_2 grâce à la **matrice de transfert** :

$$\mathcal{T}_{21} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21}/n_{r1} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

en prenant :

$$\mathbf{r}_{i2} \equiv \begin{bmatrix} n_{i2}\alpha_{i2} \\ y_{i2} \end{bmatrix}$$

Les équations (6.21) et (6.22) se réécrivent sous la forme :

$$\mathbf{r}_{i2} = \mathcal{T}_{21} \mathbf{r}_{i1} \quad (6.25)$$

En combinant l'équation (6.20) avec l'équation (6.25), on a :

$$\mathbf{r}_{i2} = \mathcal{T}_{21} \mathcal{R}_1 \mathbf{r}_{r1} \quad (6.26)$$

La matrice 2×2 , qui est le produit des matrices de réfraction et de transfert $\mathcal{T}_{21}\mathcal{R}_1$ permet de suivre la marche du rayon incident en P_1 jusqu'au point P_2 . On remarque que le déterminant de \mathcal{T}_{21} , qu'on désigne par $|\mathcal{T}_{21}|$, vaut 1, puisque $(1)(1) - (0)(d_{21}/n_{r1}) = 1$. De la même manière, on a $|\mathcal{R}_1| = 1$, et comme le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants, $|\mathcal{T}_{21}\mathcal{R}_1| = 1$. Ce résultat permet un rapide contrôle des calculs. En répétant la procédure à travers le second dioptre (figure 6.7) de la lentille, dont la matrice de réfraction est \mathcal{R}_2 , il s'ensuit que :

$$\mathbf{r}_{i2} = \mathcal{R}_2 \mathbf{r}_{i2} \quad (6.27)$$

où :

$$\mathcal{R}_2 \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{D}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et la puissance du second dioptré vaut :

$$\mathcal{D}_2 = \frac{(n_{i2} - n_{t2})}{R_2}$$

D'après l'équation (6.26) :

$$\mathbf{r}_{i2} = \mathcal{R}_2 \mathcal{F}_{21} \mathcal{R}_1 \mathbf{r}_{i1} \quad (6.28)$$

On définit la **matrice \mathcal{A} du système** suivant :

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{R}_2 \mathcal{F}_{21} \mathcal{R}_1 \quad (6.29)$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

Vu que :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{D}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21}/n_{t1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{D}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{et que } \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{D}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{D}_1 \\ \frac{d_{21}}{n_{t1}} & 1 - \frac{\mathcal{D}_1 d_{21}}{n_{t1}} \end{bmatrix}$$

il s'avère que :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\mathcal{D}_2 d_{21}}{n_{t1}} & -\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2 + \frac{\mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 d_{21}}{n_{t1}} \\ \frac{d_{21}}{n_{t1}} & \frac{\mathcal{D}_1 d_{21}}{n_{t1}} \end{bmatrix}$$

et l'on a encore $|\mathcal{A}| = 1$ (problème 6.17). Comme notre problème ne traite qu'une seule lentille, on simplifie les notations en posant $d_{21} = d_l$ et $n_{t1} = n_l$. Par conséquent,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\mathcal{D}_2 d_l}{n_l} & -\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2 + \frac{\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 d_l}{n_l} \\ \frac{d_l}{n_l} & 1 - \frac{\mathcal{D}_1 d_l}{n_l} \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Les éléments de \mathcal{A} font intervenir les paramètres physiques de la lentille que sont son épaisseur, son indice de réfraction et son rayon (via \mathcal{D}). Les points cardinaux, qui sont des propriétés exclusives d'une lentille donnée, doivent donc se déduire de \mathcal{A} . Appelons \mathcal{A}_{21} la matrice du sous-système qui, dans notre cas, équation (6.31), transforme un rayon incident sur le premier dioptré en un rayon émergent du second dioptré.

Le concept de formation d'image apparaît dès lors qu'on définit les plans objet et image concernés (figure 6.8). Par conséquent, le premier opérateur \mathcal{F}_{10} transfère le point de référence de l'objet (i.e. P_O à P_1). Ensuite, l'opérateur \mathcal{A}_{21} suit la marche du rayon à travers la lentille et un dernier transfert \mathcal{F}_{12} l'amène dans le plan image (i.e. P_I). On en déduit qu'au point image, le rayon (\mathbf{r}_I) est donné par :

$$\mathbf{r}_I = \mathcal{F}_{12} \mathcal{A}_{21} \mathcal{F}_{10} \mathbf{r}_O \quad (6.32)$$

où \mathbf{r}_O est le rayon en P_O . Sous forme matricielle, l'équation (6.32) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} n_I \alpha_I \\ y_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{12}/n_I & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{10}/n_O & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_O \alpha_O \\ y_O \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

Remarquons que $\mathcal{F}_{10} \mathbf{r}_O = \mathbf{r}_{i1}$ et que $\mathcal{A}_{21} \mathbf{r}_{i1} = \mathbf{r}_{i2}$, donc $\mathcal{F}_{12} \mathbf{r}_{i2} = \mathbf{r}_I$. Les indices $O, 1, 2, \dots, I$ désignent les points de référence P_O, P_1, P_2 , et ainsi de suite, et les indices i et t désignent le milieu du point de référence (i.e. incident ou transmis). L'opération induite par une matrice de réfraction remplace i par t , mais l'indice du point de référence reste inchangé. En revanche, avec une matrice de transfert, l'indice du point de référence est modifié.

D'habitude le sens physique des composants de \mathcal{A} se dégage en développant l'équation (6.33), mais ce n'est pas

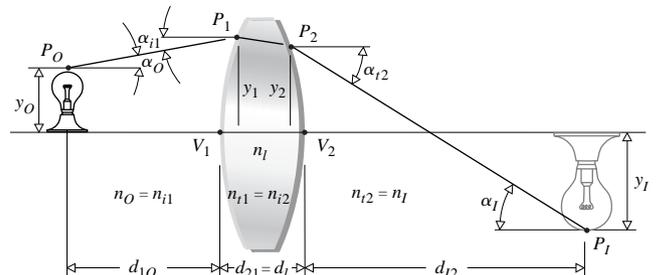


Figure 6.8 Géométrie de la formation d'une image.

notre propos ici. Au lieu de cela, retournons à l'équation (6.31) pour examiner quelques-uns de ses termes. Par exemple,

$$-a_{12} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 d_l / n_l$$

Supposons, pour plus de clarté, que la lentille soit dans l'air :

$$\mathcal{D}_1 = \frac{n_l - 1}{R_1} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 = \frac{n_l - 1}{-R_2}$$

comme dans les équations (5.70) et (5.71). Donc :

$$-a_{12} = (n_l - 1) \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n_l - 1)d_l}{R_1 R_2 n_l} \right]$$

On reconnaît l'expression de la focale d'une lentille épaisse [équation (6.2)] ; en d'autres termes,

$$a_{12} = -1/f \tag{6.34}$$

On en déduit la puissance de la lentille :

$$-a_{12} = \mathcal{D}_l = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 - \frac{\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 d_l}{n_l}$$

Pour une lentille qui n'est plus dans l'air (figure 6.9), on a :

$$a_{12} = -\frac{n_{i1}}{f_o} = -\frac{n_{i2}}{f_i} \tag{6.35}$$

De manière similaire, on laisse au lecteur le soin de montrer que :

$$\overline{V_1 H_1} = \frac{n_{i1}(1 - a_{11})}{-a_{12}} \tag{6.36}$$

et

$$\overline{V_2 H_2} = \frac{n_{i2}(a_{22} - 1)}{-a_{12}} \tag{6.37}$$

ce qui permet de situer les points principaux.

Appliquons le procédé décrit ci-dessus à l'exemple de l'objectif Tessar* de la figure 6.10. Le système matriciel du système a la forme suivante :

$$\mathcal{A}_{71} = \mathcal{R}_7 \mathcal{T}_{76} \mathcal{R}_6 \mathcal{T}_{65} \mathcal{R}_5 \mathcal{T}_{54} \mathcal{R}_4 \mathcal{T}_{43} \mathcal{R}_3 \mathcal{T}_{32} \mathcal{R}_2 \mathcal{T}_{21} \mathcal{R}_1$$

*Cet exemple a été choisi car le livre de Nussbaum *Geometric Optics* contient un programme en Fortran codé exprès pour cette lentille. Ce serait dommage d'évaluer la matrice du système à la main.

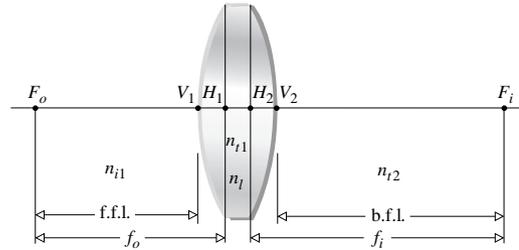


Figure 6.9 Plans principaux et distances focales.

où :

$$\mathcal{T}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,357 & 1 \\ 1,6116 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{T}_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,189 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{T}_{43} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,081 & 1 \\ 1,6053 & 1 \end{bmatrix}$$

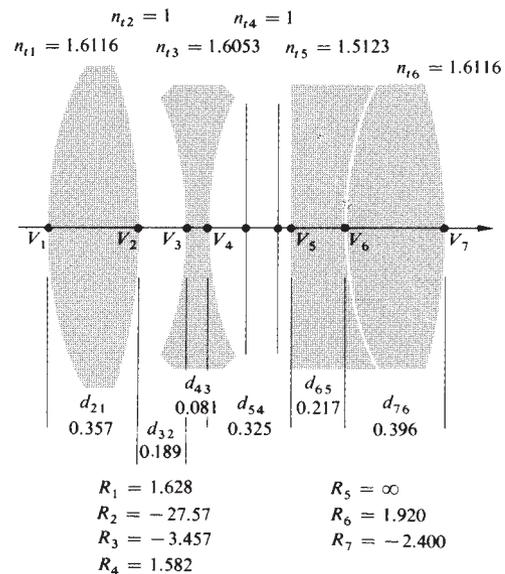


Figure 6.10 Objectif Tessar.

et ainsi de suite. De plus,

$$\mathcal{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1,6116 - 1}{1,628} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1 - 1,6116}{-27,57} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1,6053 - 1}{-3,457} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et ainsi de suite. Le produit des matrices, bien que conceptuellement simple, est un calcul horripilant, au terme duquel le lecteur obtiendrait probablement :

$$\mathcal{A}_{71} = \begin{bmatrix} 0,848 & -0,198 \\ 1,338 & 0,867 \end{bmatrix}$$

On en déduit $f = 5,06$, $\overline{V_1 H_1} = 0,77$, et $\overline{V_7 H_2} = -0,67$.

LENTILLES MINCES

Il est souvent utile d'appliquer la représentation matricielle à un système de lentilles minces. À cette fin, revenons à l'équation (6.31), qui décrit la matrice d'une lentille mince si $d_i \rightarrow 0$. La matrice \mathcal{F}_{21} devient dans ce cas la matrice identité ; d'où :

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Or, on a vu dans la section 5.7.2 que la puissance d'une lentille mince \mathcal{D} est la somme des puissances des dioptries qui la composent. Donc :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{D} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/f \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De plus, la matrice d'une association de deux lentilles minces distantes de d dans l'air est :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1/f_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/f_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 - d/f_2 & -1/f_1 + d/f_1 f_2 - 1/f_2 \\ d & -d/f_1 + 1 \end{bmatrix}$$

Il ressort que :

$$-a_{12} = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

et d'après les équations (6.36) et (6.37) :

$$\overline{O_1 H_1} = fd/f_2 \quad \overline{O_2 H_2} = -fd/f_1$$

À ce stade, l'intérêt de la méthode matricielle devrait apparaître manifeste au lecteur. Il serait très facile de trouver la focale et les points principaux d'un système composé de trois, quatre lentilles minces, ou plus.

Analyse matricielle des miroirs

Pour obtenir la matrice qui correspond à la réflexion, on se réfère à la figure 6.11 qui décrit un miroir sphérique concave, et l'on écrira les deux équations qui relient les rayons incident et réfléchi. Là encore, la forme finale de la matrice va dépendre de la convention choisie pour les signes et pour les vecteurs \mathbf{r}_i et \mathbf{r}_r (équations (6.16) et (6.17)). Plus précisément, il s'agit d'écrire une relation entre les angles des rayons et une autre entre les distances à l'axe de leur point d'impact sur le miroir.

Considérons d'abord la relation entre les angles. La loi de la réflexion énonce que $\theta_i = \theta_r$; d'où $\tan(\alpha_i - \theta_i) = y_i/R$, et

$$(\alpha_i - \theta_i) \approx y_i/R \quad (6.38)$$

Si ces angles sont positifs, y est positif et R négatif, en contradiction avec l'équation (6.38). Il faut donc réécrire l'équation

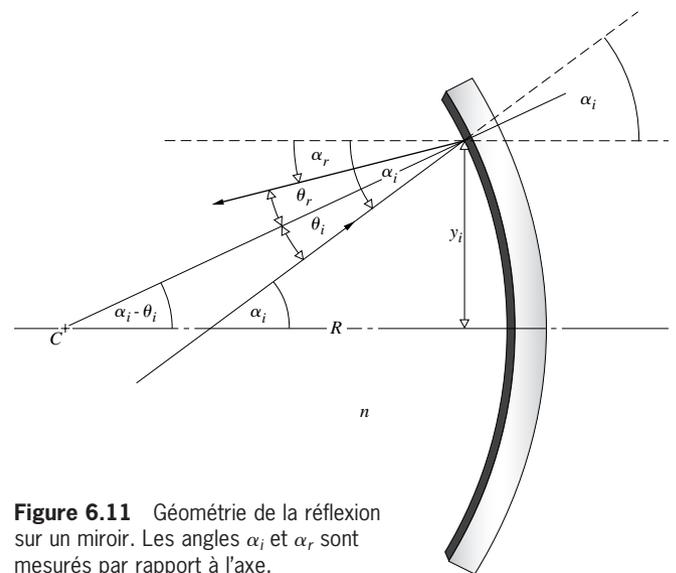


Figure 6.11 Géométrie de la réflexion sur un miroir. Les angles α_i et α_r sont mesurés par rapport à l'axe.

comme $(\alpha_i - \theta_i) = -y_i/R$. On introduit α_r dans l'analyse en remarquant que $\alpha_i = \alpha_r + 2\theta_i$ et $\theta_i = (\alpha_i - \alpha_r)/2$. En remplaçant ces deux expressions dans l'équation (6.38), on obtient $\alpha_r = -\alpha_i - 2y_i/R$, et en multipliant par n , l'indice du milieu (en général $n = 1$), on aboutit à :

$$n\alpha_r = -n\alpha_i - 2ny_i/R$$

La deuxième relation est simplement $y_r = y_i$, de sorte que :

$$\begin{bmatrix} n\alpha_r \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2n/R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n\alpha_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

Finalement, la matrice d'un miroir sphérique \mathcal{M} est donnée par :

$$\mathcal{M}_o = \begin{bmatrix} -1 & -2n/R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

sachant que $f = -2/R$ d'après l'équation (5.49).

Miroirs plans et cavités optiques planes

Pour un miroir plan ($R \rightarrow \infty$) dans l'air ($n = 1$), la matrice est

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le signe moins signifie que le sens de la lumière s'inverse après une réflexion. La figure 6.12 montre une **cavité optique** (p. 607) formée par deux miroirs plans en regard. La lumière quitte le point O , se dirige dans une direction positive vers le miroir 1, se réfléchit sur le miroir 1, se dirige dans une direction négative vers le miroir 2, et se réfléchit sur le miroir 2. Le système matriciel est :

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}_{|2} \mathcal{T}_{21} \mathcal{M}_{|1} \mathcal{T}_{12}$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d & 1 \end{bmatrix}$$

où le déterminant de la matrice vaut encore une fois un : $|\mathcal{A}| = 1$. Un rayon initial \mathbf{r}_i axial ($\alpha = 0$) est transformé par la matrice du système en un rayon final \mathbf{r}_f qui lui est identique. C'est-à-dire :

$$\mathcal{A}\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i$$

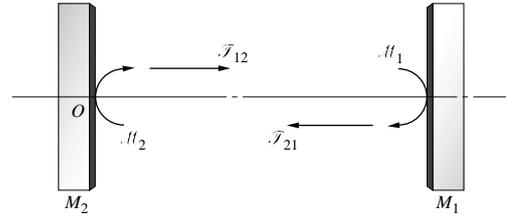


Figure 6.12 Représentation schématique d'une cavité plane formée par les miroirs plans M_1 et M_2 .

Ce type de relation mathématique est connu sous le nom d'**équation aux valeurs propres** qui, de manière générale, s'écrit :

$$\mathcal{A}\mathbf{r}_i = a\mathbf{r}_i$$

où a est une constante. En d'autres termes,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ y_i \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \alpha_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

Si $\alpha_i = 0$, alors $y_i = ay_i$ et il s'ensuit que $a = 1$. Le système agit comme une matrice identité laissant le rayon initial indifférencié après deux réflexions. Les rayons lumineux axiaux traversent ce qu'on appelle une **cavité résonante** sans s'en échapper.

Les cavités optiques peuvent être conçues de différentes manières (figure 13.12, p. 610). Si, après plusieurs aller-retour, un rayon lumineux retourne à sa position initiale, la cavité est dite *stable* ; c'est pourquoi la problématique d'équation aux valeurs propres est importante. L'exercice 6.24 traite d'une *cavité confocale* composée de deux miroirs sphériques concaves l'un en face de l'autre.

6.3 Aberrations

On a déjà évoqué le fait que la théorie au premier ordre n'était pas une bonne approximation – suivre la marche exacte d'un certain nombre de rayons ou mesurer la performance d'un prototype ne manquerait pas de révéler des incompatibilités avec la description paraxiale du système. Les écarts aux conditions idéales de Gauss s'appellent des **aberrations**. Il y en a deux types : les **aberrations chromatiques** (car n est une fonction de la longueur d'onde) et les **aberrations monochromatiques**.

Ces dernières se subdivisent en deux sous-groupes. Il y a celles qui détériorent l'image, i.e. l'*aberration sphérique*, la *coma* et l'*astigmatisme* et il y a celles qui déforment l'image comme la *distorsion* et la *courbure de champ*.

On a vu que les surfaces sphériques ne sont capables de produire une imagerie parfaite que dans la région paraxiale. Il s'agit maintenant de déterminer les défauts provenant de l'utilisation de ces mêmes surfaces avec des diaphragmes de dimension finie. Par un choix judicieux des paramètres physiques du système optique (par exemple, puissance, forme, épaisseur, type de verre, distance des lentilles, ainsi que position des pupilles), on peut minimiser ces aberrations. C'est ainsi qu'on pourra annuler les défauts les plus graves, en modifiant ici la forme d'une lentille, là en changeant de place un diaphragme. Ainsi, on espère qu'une déformation de la surface d'onde, acquise au passage d'une surface, sera contrebalancée par celle qu'engendre une autre surface située en aval.

Dès le début des années 1950, des programmes d'ordinateur pour les tracés de rayons voyaient le jour, et à partir de 1954, on commença à concevoir des logiciels d'optimisation de sorte que la conception optique automatisée devint un standard dans l'industrie à travers le monde entier dans les années 1960. Aujourd'hui, les logiciels peuvent concevoir et analyser toutes sortes de systèmes optiques compliqués.

6.3.1 Les aberrations monochromatiques

Le traitement paraxial est basé sur l'approximation que $\sin \varphi$, tel que dans la figure 5.6, peut être assimilé à φ , c'est-à-dire que le système est restreint à fonctionner dans une région très étroite, proche de l'axe optique. Si l'on prend en compte les rayons qui passent au bord de la lentille, l'approximation $\sin \varphi \approx \varphi$ n'est plus satisfaite. Il serait alors incorrect d'écrire la loi de Snell-Descartes simplement comme $n_i \theta_i = n_t \theta_t$. Si l'on retient maintenant les deux premiers termes du développement de Taylor :

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots \quad [5.7]$$

on aboutit à la *théorie au troisième ordre*. Ludwig von Seidel (1821–1896) a montré, dans les années 1850, que les *aberrations primaires* sont au nombre de cinq (aberration sphérique, coma, astigmatisme, courbure de champ et distorsion). Il fut le premier à les étudier en détail, c'est pourquoi on les appelle les *aberrations de Seidel*. Comme le développement de $\sin \varphi$ contient des termes d'ordre supérieur, il existe des *aberrations*

d'ordre supérieur dont les contributions sont plus faibles, mais dont il faut tenir compte. La différence entre les résultats exacts déduits de la marche d'un rayon et les aberrations primaires déduites de la théorie du premier ordre est la somme des contributions d'ordre supérieur. On restreint ici notre discussion aux aberrations primaires.

Aberration sphérique

Retournons un instant à la section 5.2.2 (p. 159), où on a caractérisé la conjugaison par un dioptre sphérique. On a trouvé dans l'approximation paraxiale :

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad [5.8]$$

Si les approximations pour ℓ_o et ℓ_i sont améliorées (problème 6.26), on trouve l'expression au troisième ordre :

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} + h^2 \left[\frac{n_1}{2s_o} \left(\frac{1}{s_o} + \frac{1}{R} \right)^2 + \frac{n_2}{2s_i} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s_i} \right)^2 \right] \quad (6.40)$$

Le terme additionnel, qui varie en fonction de h^2 , représente clairement l'écart à la théorie du premier ordre. Comme le montre la figure 6.13, les rayons qui arrivent sur le dioptre à des distances (h) de plus en plus éloignées de l'axe sont focalisés de plus en plus près du sommet. En bref, l'aberration sphérique ou AS, est la variation de la distance focale en fonction de la hauteur d'incidence. De la même manière, pour une lentille convergente comme celle de la figure 6.14, les rayons

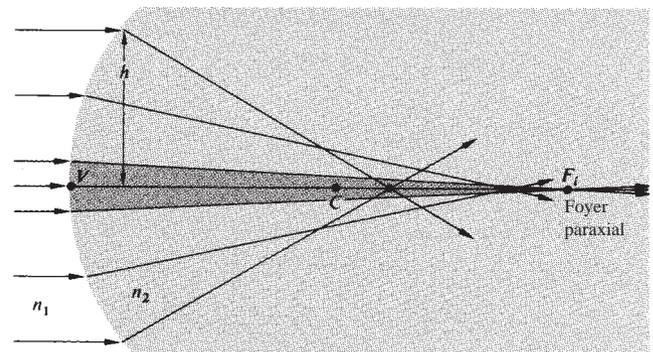


Figure 6.13 Aberration sphérique due à la réfraction sur une seule surface.

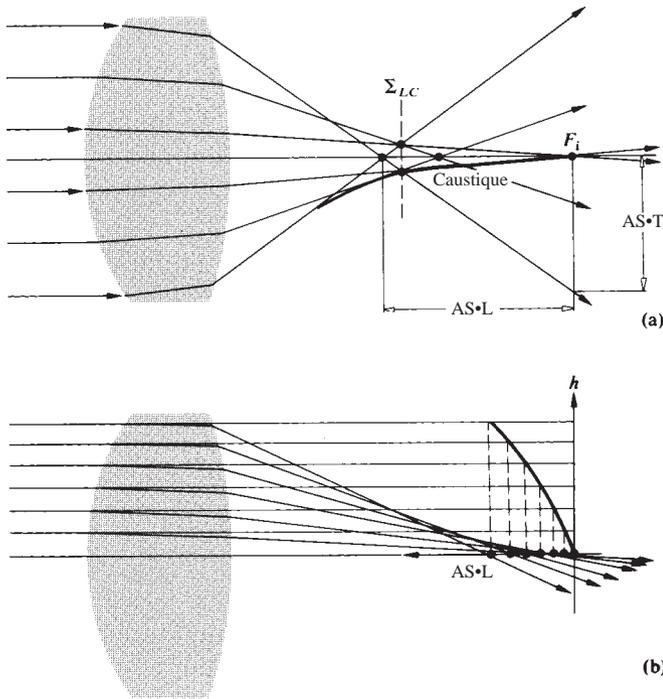


Figure 6.14 Aberration sphérique d'une lentille. L'enveloppe des rayons réfractés est appelée une caustique. Σ_{LC} est à l'intersection des rayons marginaux et de la caustique.

marginaux sont plus déviés, de sorte qu'ils sont focalisés en avant des rayons paraxiaux. Il faut garder à l'esprit que l'AS s'applique à des points objets situés sur l'axe optique. La distance entre l'intersection axiale d'un rayon et le foyer paraxial, F_i , s'appelle l'**aberration sphérique longitudinale** ou $AS \cdot L$. Dans notre cas, l'AS est *positive*. En revanche, les rayons marginaux d'une lentille divergente vont en général croiser l'axe optique derrière le foyer paraxial, auquel cas l'AS est *negative*.

Pour mieux apprécier les aberrations relatives à leurs effets sur la surface d'onde, considérons la lumière provenant d'une source ponctuelle et traversant un système optique. Idéalement, lorsque la surface d'onde dans la pupille de sortie est une sphère centrée sur le point image (P) donné par l'optique gaussienne, alors l'image est parfaite ; dans le cas contraire, elle est aberrante (figure 6.15). L'**aberration d'une onde** est l'écart entre les surfaces d'onde réelle et idéale. On la spécifie souvent par sa valeur maximum, en microns, en nanomètres ou en longueurs d'onde. Ainsi, l'écart crête à crête de la surface d'onde de la figure 6.15 à la sphère idéale convergeant

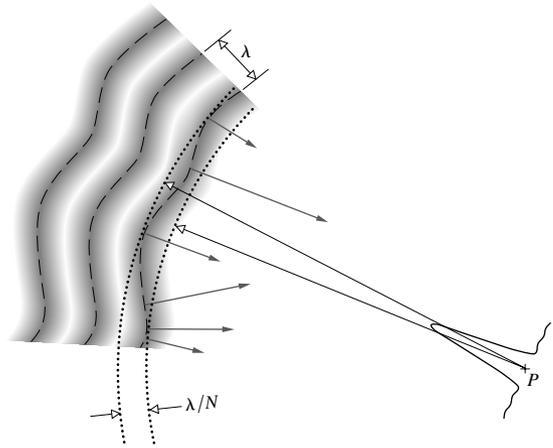


Figure 6.15 Un front d'onde qui dévie d'une sphère (convergeant vers l'image gaussienne) est dit aberrant. La mesure de la déviation crête à crête donne une indication de la dégradation que l'image va subir.

en P vaut une fraction de longueur d'onde, λ/N . J.W. Strutt, mieux connu sous le nom de Lord Rayleigh, suggéra, pour estimer la qualité d'un système optique, le critère suivant : un instrument optique produit une image notablement dégradée si l'écart aberrant crête à crête à 550 nm (jaune-vert) excède $\lambda/4$.

L'idée qu'un système optique puisse former une image ponctuelle est, bien entendu, physiquement irréaliste (ne serait-ce que parce que son éclairement serait infini). Dans les meilleures conditions, une lentille formera, d'un point source (par exemple, une étoile), une image qui sera un petit disque circulaire entouré d'anneaux à peine discernables (voir la photo p. 487 et la figure 10.23), qui est la figure d'Airy. À la figure 6.15, elle est représentée en P par un pic en éclairement entouré de maxima plus faibles, correspondant à la section des anneaux.

La présence d'aberration sphérique entraîne le déplacement d'une partie de la lumière en dehors du disque central vers les anneaux périphériques, qui deviennent plus proéminents. Par exemple, Rayleigh a établi qu'une AS d'un quart de longueur d'onde diminue l'éclairement central de 20 %. On peut voir à travers la figure 6.15 que les rayons (perpendiculaires à la surface d'onde distordue) s'écartent de la tache centrale vers les anneaux.

Revenons à la figure 6.14. Si l'on place un écran en F_i , l'image d'une étoile sera une tache lumineuse centrée sur l'axe et délimitée par le cône des rayons marginaux. Si l'objet n'est plus ponctuel, l'aberration sphérique va réduire le contraste de l'image et dégrader les détails.

La distance à l'axe du point d'impact d'un rayon marginal avec l'écran est appelée **aberration sphérique transverse** (ou **latérale**), ou AS·T. Évidemment, on réduit l'AS en limitant l'ouverture, mais on restreint alors la quantité de lumière pénétrant dans le système. Si l'écran est placé dans la position Σ_{LC} , la tache image, appelée **cercle de moindre diffusion**, aura le plus petit diamètre possible ; c'est la meilleure position pour l'écran. Si une optique présente une aberration sphérique importante, il faut la refocaliser en diminuant son ouverture, par exemple, car le plan de meilleure mise au point se rapproche du foyer paraxial.

À ouverture et focale fixées, l'aberration sphérique varie en fonction de la distance objet et de la forme de la lentille. Pour une lentille convergente, les rayons non paraxiaux sont fortement réfractés. Si l'on imagine qu'une lentille ressemble approximativement à deux prismes joints en leur base, il est évident que le *rayon incident subit un minimum de déviation quand il fait le même angle que le rayon émergent* (section 5.5.1). Un exemple frappant est illustré par la figure 6.16, où on montre que le simple fait de retourner une lentille permet de réduire drastiquement l'AS. Quand l'objet est à « l'infini », une lentille simple concave ou convexe dont la face arrière est plane présentera un minimum d'aberration sphérique. Si les distances objet et image sont égales, ($s_o = s_i = 2f$), une lentille biconvexe minimisera l'AS. La combinaison d'une lentille convergente et d'une autre divergente (comme dans un doublet achromatique) permet aussi de réduire l'AS.

Dans la section 5.2.1 on a vu qu'une lentille asphérique ne présente pas d'aberration sphérique pour certaines conjugaisons. Huygens semble avoir été le premier à démontrer qu'une telle conjugaison existe aussi pour les dioptries sphériques. Ce sont les points de la figure 6.17a qui montrent des rayons qui, émis en P , semblent provenir de P' . On laisse au lecteur le soin de montrer que les positions adéquates de P et P' pour annuler l'AS sont celles données sur la figure. À l'instar des lentilles asphériques, on peut concevoir des lentilles sphériques corrigées de l'AS

pour la paire de points P et P' . Il suffit de rajouter un dioptre de rayon PA centré en P pour former un ménisque positif ou négatif. Le microscope à immersion tire profit de ce principe. L'objet à étudier se trouve en P et l'on l'immerge dans de l'huile d'indice n_2 , comme le montre la figure 6.18. P et P' sont les points conjugués pour lesquels le premier dioptre est exempt d'AS, P' et P'' sont ceux du ménisque.

Après avoir placé le Télescope Spatial Hubble (HST) en orbite en avril 1990, il ne fallut pas attendre longtemps pour constater que quelque chose n'allait pas. Les clichés étaient flous malgré les efforts pour ajuster l'orientation et la position du miroir secondaire (p. 235). Pour une étoile lointaine, considérée comme un point source, la taille du disque image central était proche de la limite de diffraction (environ 0,1 seconde d'arc de diamètre), mais il ne s'y trouvait que 12 % de l'énergie, au lieu des 70 % espérés (84 % étant la limite idéale). Le disque était entouré d'un halo de diamètre d'environ 1,5 secondes d'arc contenant 70 % de la lumière. L'énergie restante était distribuée hors du halo à cause de la microrugosité des miroirs et de la diffraction par les supports du miroir secondaire (figure 6.19b). La situation était typique d'un système entaché d'aberration sphérique.

Les scientifiques déterminèrent plus tard qu'une erreur de polissage du miroir principal (p.188) en était la cause ; il était trop mince d'une demi-longueur d'onde sur les bords. Les rayons de la région centrale se focalisaient sur l'axe optique en avant de ceux provenant des bords. Les opticiens de Perkin-Elmer, l'entreprise qui a fabriqué l'hyperboloïde de 2,4 m, l'avaient superbement poli, mais pas à la bonne courbure. Une série de bévues, à commencer par une erreur de 1,3 mm dans le positionnement d'un composant du dispositif de test, a contribué au fiasco. Le télescope, qui avait coûté 1,6 milliard de dollars, souffrait d'une aberration sphérique longitudinale rédhibitoire de 38 mm (figure 6.19a).

En 1993, les astronautes de la navette spatiale *Endeavor* ont réparé le télescope avec succès ; ils y ont installé une nouvelle

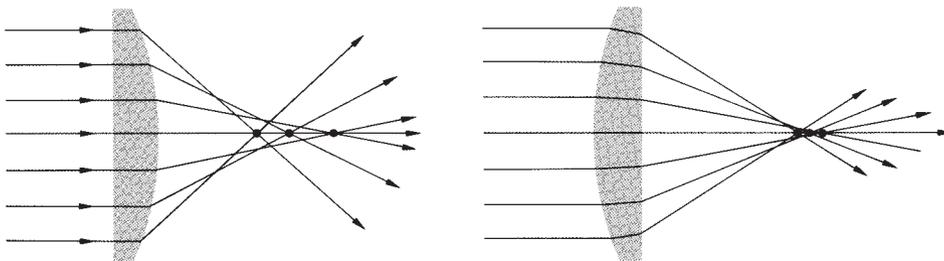


Figure 6.16 Aberration sphérique d'une lentille plan-convexe.

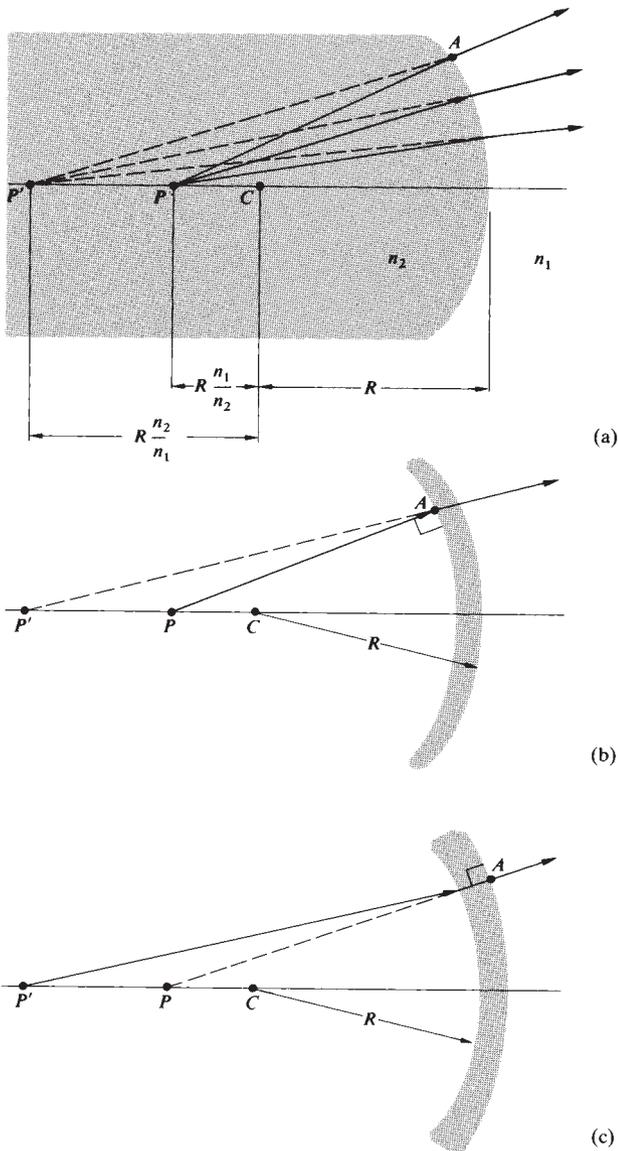


Figure 6.17 Points conjugués pour lesquels l'aberration sphérique est nulle.

caméra planétaire grand champ (munie de sa propre optique corrigeant la demi-longueur d'onde sur les bords), et le module Costar (Corrective Optics Spatial Telescope Axial Replacement). Le module Costar corrige les surfaces d'onde aberrantes du télescope à l'entrée des trois autres instruments scientifiques. Une paire de petits miroirs (10 mm et 30 mm) est insérée sur le chemin du faisceau se dirigeant vers l'ouverture de

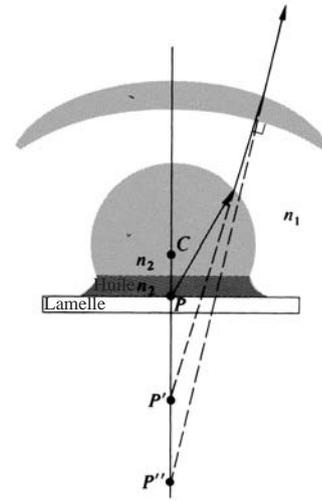
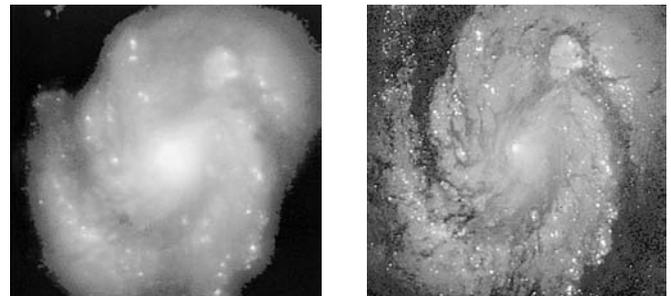


Figure 6.18 Objectif d'un microscope à immersion d'huile.

chacun des instruments. Un des miroirs redirige la lumière vers l'autre miroir, un asphérique asymétrique complexe. Ce miroir hors axe contrebalance l'aberration sphérique du primaire. À présent, 70 % de l'énergie lumineuse se trouve dans le disque central, et les images célestes sont 6,5 fois plus brillantes qu'avant. Les ingénieurs de la NASA soulignent qu'avec cette vision plus claire que jamais (voir la photo) et l'amélioration photométrique qui en résulte, le HST pourrait voir une luciole à 20 000 km. (Auquel cas, il faudrait que l'insecte reste immobile pendant 90 minutes à son maximum d'émission). Le HST pourrait aussi distinguer deux de ces vers lumineux s'ils étaient éloignés de plus de 3 mètres l'un de l'autre.

Le plus grand radiotélescope du monde se trouve à l'observatoire d'Arecibo, à Puerto Rico. C'est une antenne sphérique



Images de la galaxie M-100 obtenues par le HST avec (avant réparation) et sans (après réparation) aberration sphérique. (NASA.)

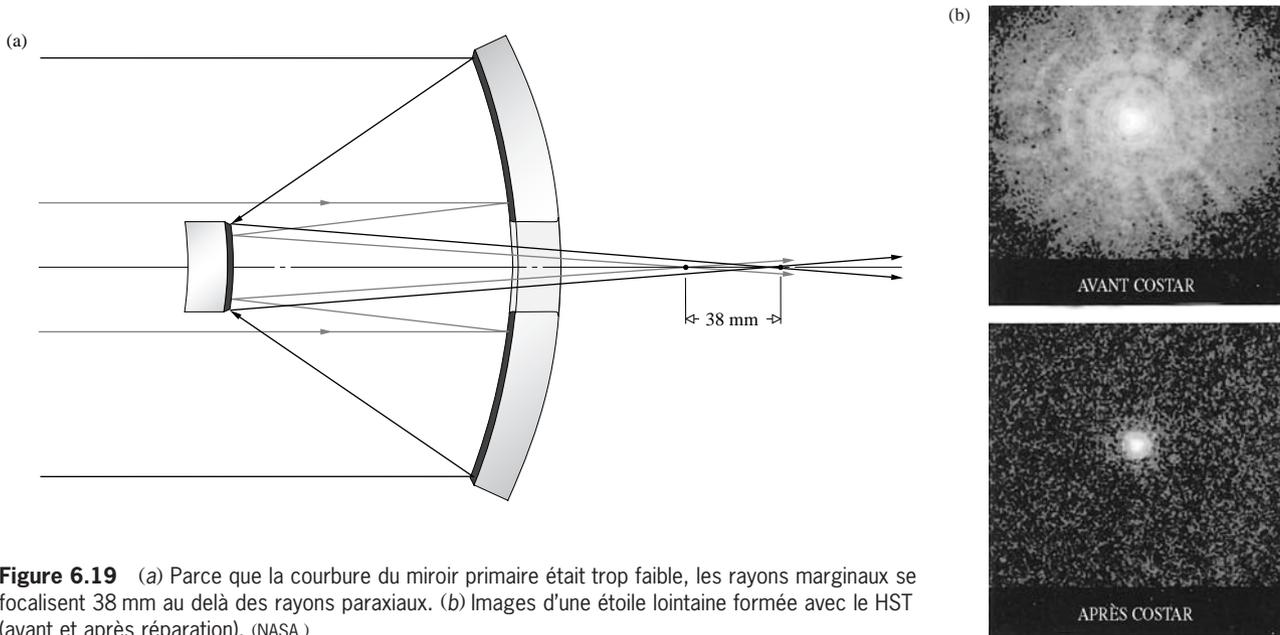


Figure 6.19 (a) Parce que la courbure du miroir primaire était trop faible, les rayons marginaux se focalisent 38 mm au delà des rayons paraxiaux. (b) Images d'une étoile lointaine formée avec le HST (avant et après réparation). (NASA.)

fixe de 300 m de diamètre construite dans une cavité naturelle fonctionnant à des longueurs d'onde comprises entre 3 cm et 6 m. En comparaison, les radiotélescopes à balayage (p. 187) sont en général paraboliques car ils permettent de focaliser les radiosources dans une petite tache axiale image. Le miroir de 300 m ne pouvait être mobile, et les concepteurs firent un compromis ; le miroir primaire serait sphérique pour collecter des radiosources dans diverses directions, par focalisation des faisceaux sur les axes secondaires définis par les sources. L'absence de mobilité de l'assemblage est compensée par le récepteur suspendu au-dessus de l'antenne, et qui peut se déplacer sur quelques mètres, permettant de suivre les radiosources jusqu'à 20° de l'axe vertical de l'instrument. Cependant, bien que le miroir soit omnidirectionnel, il est aussi imparfait dans toutes les directions ; il souffre d'aberration sphérique comme la lentille convexe (figure 6.14). Pour y remédier, on détecte le signal à différentes positions axiales et l'on le recombine, mais cette solution est inefficace et l'instrument a rarement été utilisé au maximum de ses possibilités.

En 1997, le télescope d'Arecibo a beaucoup été amélioré, avec l'installation d'un ensemble de miroirs asphériques hors axe (figure 6.20) qui compensent l'aberration sphérique de l'instrument, de la même manière que pour le Télescope Spatial Hubble. Un dôme récepteur Grégorien de 90 t, du nom de James Gregory qui introduisit un miroir secondaire concave en

1661 (p. 233), est suspendu à 137 m de hauteur. Il contient un miroir secondaire de 22 m de diamètre sur lequel se réfléchissent les radiations-EM du primaire, avant d'aller sur un miroir tertiaire de 8 m de diamètre qui les focalise dans le récepteur. Les dioptries sont conçus de sorte que le chemin optique de chaque rayon soit identique et en phase (dans un cercle de 3,175 mm) au point focal.

L'instrument peut fonctionner comme émetteur radar avec une puissance émise de 1 mégawatt. Le télescope peut ainsi résoudre des détails de 800 m sur la surface de Vénus grâce à l'émission d'un signal radar et la réception du signal réfléchi. Il pourrait détecter un objet de la taille d'une balle de golf sur la Lune.

Coma

La **coma** est une aberration primaire monochromatique qui affecte l'image d'un point situé hors axe, même si la distance à l'axe est faible. Son origine vient du fait que les plans principaux ne sont des plans que dans la région paraxiale, et sont en fait des surfaces courbes (figure 6.1). En l'absence d'AS, un faisceau de rayons parallèles va converger au point axial F_i . En revanche, la focale, et donc le grandissement transversal, vont différer pour des rayons hors axe. Cela n'a aucune importance

quand le point image est sur l'axe, mais lorsque le faisceau est oblique, la coma est immédiatement perceptible.

La figure 6.21a montre la dépendance de M_T en fonction de h , la hauteur d'incidence d'un rayon sur la lentille. Ici les rayons méridiens convergent plus près de l'axe dans le plan image que les rayons proches du *rayon de champ* (i.e. le rayon qui passe par les points principaux). Dans ces circonstances, le plus petit grandissement est associé aux rayons marginaux qui forment la plus petite image ; la coma est négative. Ainsi, la coma dans les figures 6.21b et c est positive car les rayons marginaux convergent plus loin de l'axe.

Sur la figure 6.22, on a dessiné plusieurs rayons non méridiens, depuis un point objet hors axe S , pour illustrer la formation de l'image comatique d'un point. On remarque que, lorsqu'un rayon décrit un cercle sur la lentille (1-2-3-4-1-2-3-4), son impact sur Σ_i décrit ce que H. Dennis Taylor a appelé un *cercle comatique*. Notre cas correspond à une coma positive, de sorte que plus le cercle sur la lentille est grand, plus le cercle comatique est éloigné de l'axe. Quand le cercle sur la lentille s'appuie sur les rayons marginaux, la distance entre les points 0 et 1 dans l'image est la **coma tangentielle**, et la distance entre

les points 0 et 3 dans Σ_i est appelée **coma sagittale** (figure 6.22). Un peu plus de la moitié de l'énergie de l'image se trouve approximativement dans la région triangulaire entre les points 0 et 3. L'aigrette de coma, qui doit son nom à sa forme en queue de comète, est souvent perçue comme la pire de toutes les aberrations, principalement à cause de son asymétrie.

Il n'y a pas de raisons de se soucier des interférences en optique géométrique, mais il est probable qu'il y en aura quand la lumière aura atteint l'écran (figure 6.22). L'aigrette de coma, tout comme le point image en optique de Gauss, est une simplification. En fait, le point image est un ensemble disque-anneaux et l'aigrette de coma est en réalité une figure de diffraction asymétrique compliquée. Plus il y a de coma, plus le cône va s'éloigner de la figure d'Airy pour former une structure allongée de taches et d'arcs qui rappelle vaguement la structure disque-anneaux d'où elle est issue (figure 6.23).

À l'instar de l'AS, la coma dépend de la forme de la lentille. Ainsi un ménisque positif fortement concave avec un objet à l'infini a une coma négative importante. En modifiant le ménisque en, respectivement, une lentille plan-convexe (), équiconvexe (), convexe-plan (), ou un ménisque convexe (), la

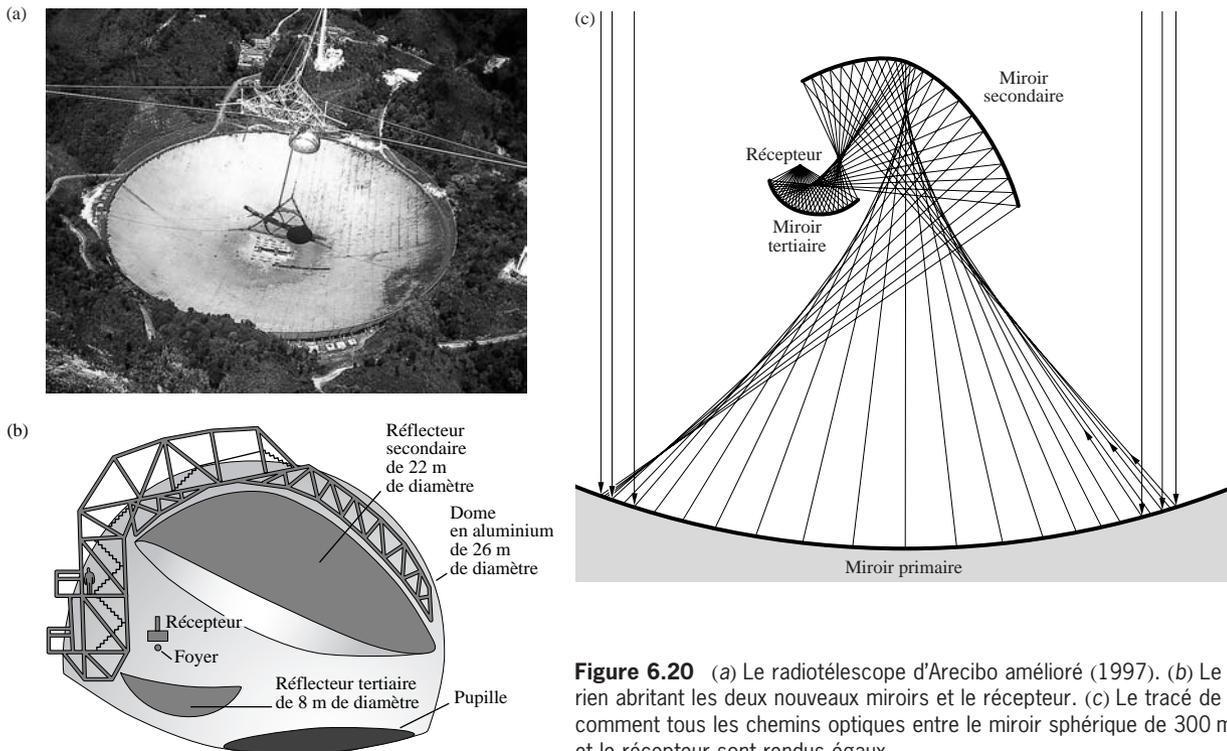


Figure 6.20 (a) Le radiotélescope d'Arecibo amélioré (1997). (b) Le dôme grégorien abritant les deux nouveaux miroirs et le récepteur. (c) Le tracé de rayons montre comment tous les chemins optiques entre le miroir sphérique de 300 m de diamètre et le récepteur sont rendus égaux.

coma est successivement négative, nulle et enfin positive. Le fait qu'un système à lentille unique puisse être corrigé de la coma est un point capital. La configuration convexe-plan qui l'annule ($s_o = \infty$) est proche de celle qui minimise l'AS.

Il est important de souligner qu'une *lentille corrigée pour un point objet à l'infini* ($s_o = \infty$) n'est pas forcément satisfaisante pour une autre position de l'objet. Il est alors intéressant,

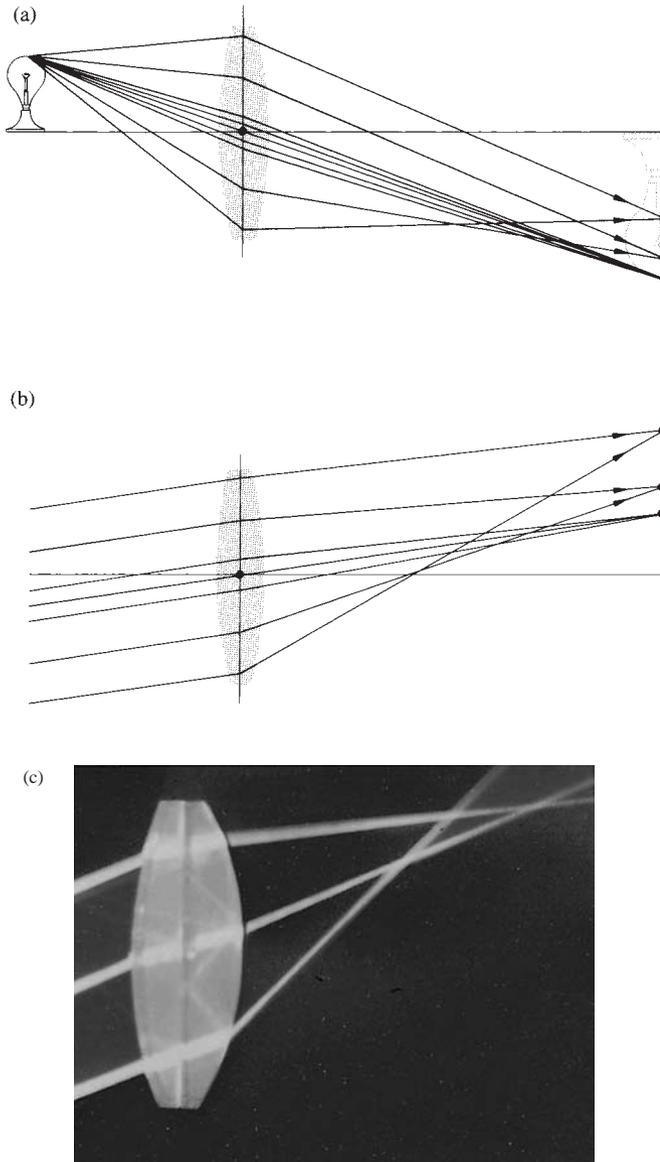


Figure 6.21 (a) Coma négative. (b) et (c) Coma positive. (Photo E.H.)

pour travailler à distance finie, de combiner deux lentilles corrigées à l'infini, comme dans la figure 6.24. Il est peu probable de trouver des lentilles standard avec la correction pour une paire de points conjugués particuliers et la focale désirée, ce qui rend pertinente l'approche de lentilles accolées dos à dos.

On peut aussi supprimer la coma en positionnant judicieusement la pupille, comme l'a démontré William Hyde Wollaston (1766-1828) en 1812. L'ordre des aberrations primaires dans la liste (AS, coma, astigmatisme, courbure de champ, et

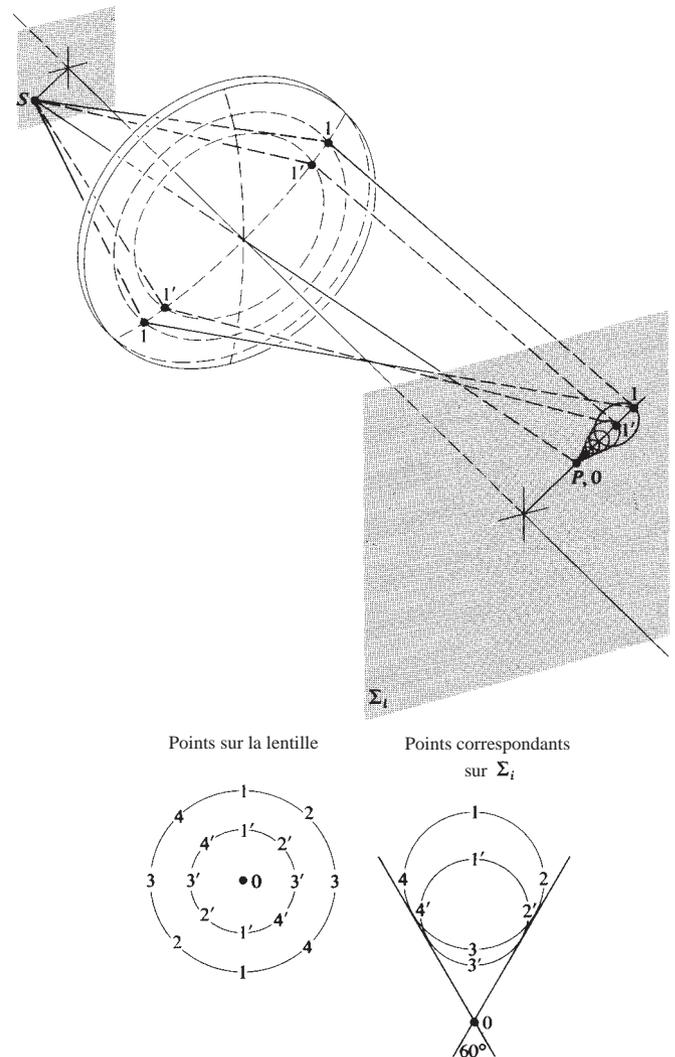


Figure 6.22 Image d'un point source monochromatique en présence de coma. Le centre de la lentille forme l'image du point source au sommet du cône.

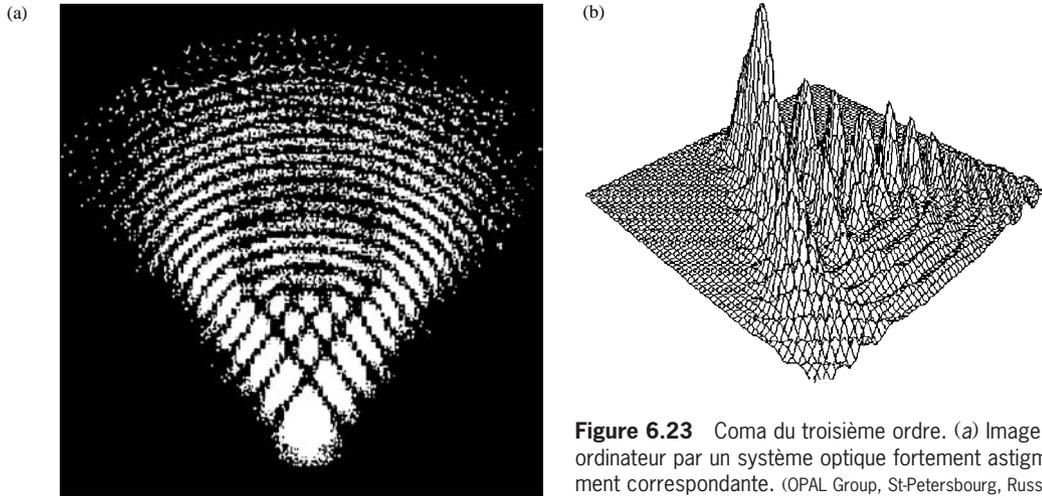


Figure 6.23 Coma du troisième ordre. (a) Image d'un point source générée par ordinateur par un système optique fortement astigmatique. (b) Distribution d'éclairement correspondante. (OPAL Group, St-Petersbourg, Russie.)

distorsion) a son importance car chacune d'entre elles, excepté l'AS et la courbure de champ, n'est affectée par la position de la pupille que si l'une des aberrations qui la précède est présente dans le système. Ainsi, alors que l'AS est indépendante de la position de la pupille, la coma ne l'est pas si l'AS est présente. Ce fait est illustré par la figure 6.25. Quand la pupille est en Σ_1 , le rayon 3 est le rayon principal de champ donc il y a de l'AS mais pas de coma. Si l'on déplace la pupille en Σ_2 , le rayon 4 devient le rayon principal de champ, et les rayons 3 et 5 se coupent au-dessus du rayon 4 ; la coma est positive. Si la pupille est en Σ_3 , les rayons 1 et 3 se coupent sous le rayon principal de champ, donc la coma est négative. De cette manière, on peut introduire des lentilles avec une quantité de coma déterminée afin d'annuler la coma du système entier.

La **condition des sinus** (ou relation d'Abbe) est une relation importante qu'il nous faut introduire, même si l'on ne la démontre pas. Elle fut découverte indépendamment en 1873

par Abbe et Helmholtz, bien que R. Clausius l'ait introduite 10 ans plus tôt sous une forme différente. Elle postule que :

$$n_o y_o \sin \alpha_o = n_i y_i \sin \alpha_i \quad (6.41)$$

où n_o, y_o, α_o et n_i, y_i, α_i sont respectivement l'indice, la hauteur et l'angle de réfraction dans les plans objet et image, quelle que soit l'ouverture* (figure 6.9). En l'absence de coma,

$$M_T = \frac{y_i}{y_o} \quad [5.24]$$

doit être constant pour tous les rayons. Imaginons qu'on lance un rayon marginal et un rayon paraxial à travers le système. Le premier satisfait l'équation (6.41) alors que le second va satisfaire sa version paraxiale (dans laquelle $\sin \alpha_o = \alpha_{op}$, $\sin \alpha_i = \alpha_{ip}$). Comme M_T doit rester constant pour toute la lentille, les valeurs du grandissement doivent être égales pour les rayons marginaux et paraxiaux, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\sin \alpha_o}{\sin \alpha_i} = \frac{\alpha_{op}}{\alpha_{ip}} = \text{constant} \quad (6.42)$$

connue comme la **condition des sinus**. Un critère nécessaire pour justifier l'absence de coma d'un système est que celui-ci

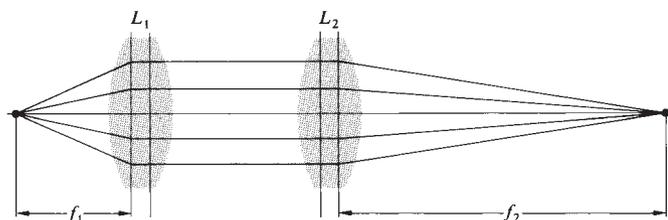


Figure 6.24 Conjugaison de deux points à distances finies grâce à la combinaison de deux lentilles travaillant à l'infini.

*Pour être plus précis, le théorème des sinus est valable pour toute valeur de α_o mais seulement dans le plan sagittal (du latin *sagitta* qui veut dire flèche) ; ce point est abordé dans la prochaine section.

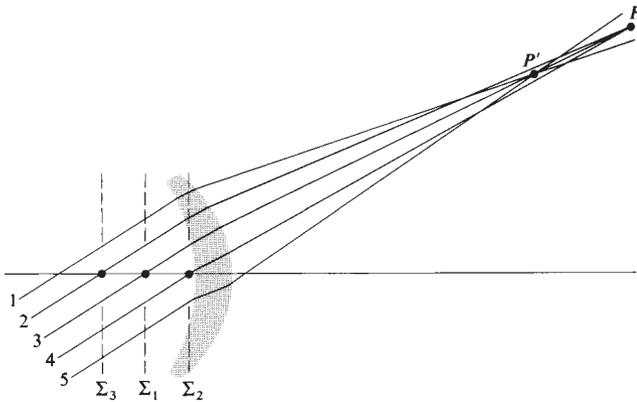


Figure 6.25 Effet de la position de la pupille sur la coma.

remplisse la condition des sinus. En l'absence d'AS, remplir la condition des sinus est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit corrigé de la coma.

Il est assez facile d'observer la coma. En fait n'importe qui ayant focalisé les rayons du Soleil avec une simple lentille positive n'aura pas manqué d'en noter les effets. Il suffit d'incliner la lentille, de sorte que les rayons collimatés en provenance du Soleil forment un angle avec l'axe optique, pour qu'apparaisse la formation de la queue de comète caractéristique de la coma.

Astigmatisme

Lorsqu'un point objet se trouve à une distance appréciable de l'axe optique, le cône de lumière incident va frapper la lentille de manière asymétrique, mettant en évidence une troisième aberration primaire appelée **astigmatisme**. Ce mot vient de *a-*, privatif, et du mot grec *stigma*, qui signifie point. Pour faciliter sa description, imaginez le plan méridien (aussi appelé *plan tangentiel*) qui contient à la fois le rayon principal de champ (i.e. celui qui passe par le centre de l'ouverture) et l'axe optique. Le *plan sagittal*, perpendiculaire au plan méridien, contient aussi le rayon principal (figure 6.26). Cependant, contrairement à celle du plan méridien qui reste inchangée de bout en bout d'un système complexe, la courbure du plan sagittal est susceptible de changer lors de la déviation du rayon de champ sur les différents dioptries. Il serait donc plus précis de dire qu'il y a une multitude de plans sagittaux concomitants à chaque région du système. Malgré cela, tous les rayons non méridiens qui partent du point objet sont appelés **rayons sagittaux**.

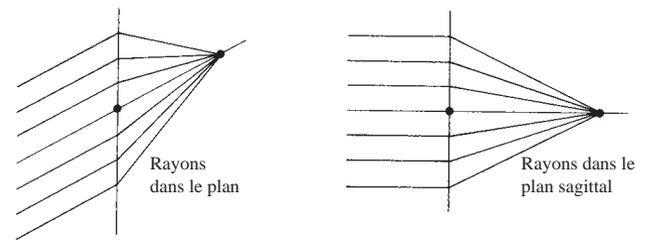
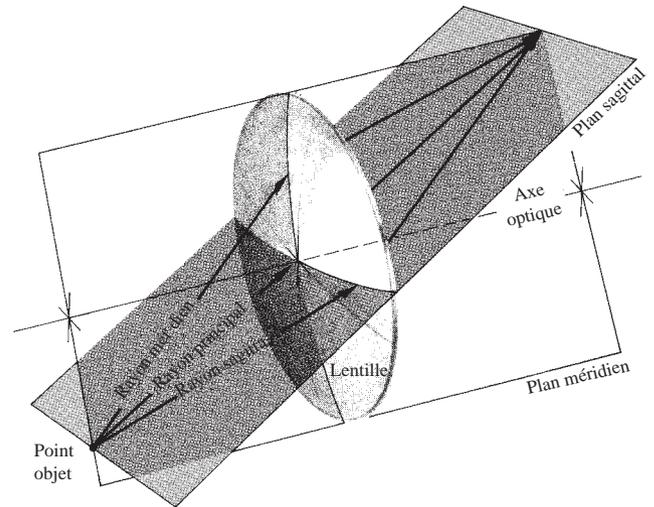


Figure 6.26 Plans sagittal et méridien.

Pour un point objet sur l'axe, le cône de rayons est symétrique par rapport aux dioptries sphériques de la lentille ; il n'y a pas lieu de distinguer le plan méridien du plan sagittal. En l'absence d'aberration sphérique toutes les focales sont les mêmes et donc tous les rayons sont focalisés au même point. En revanche, la configuration oblique d'un faisceau de rayons parallèles diffère dans les plans méridien et sagittal. Les focales dans ces plans vont donc être différentes. En effet, les rayons méridiens sont plus inclinés par rapport à la lentille que les rayons sagittaux, et ont une focale plus courte. On peut montrer* grâce au principe de Fermat que la *différence de focale* dépend de la puissance de la lentille et de l'angle d'inclinaison des rayons. Cet *écart d'astigmatisme* s'accroît rapidement avec l'obliquité des rayons, c'est-à-dire lorsque le point objet s'éloigne de l'axe ; cette différence est bien entendu nulle lorsque le point objet est sur l'axe.

*Voir A. W. Barton, *A Text Book on Light*, p. 124.

Avec deux focales différentes, un faisceau de rayons subira une forte modification après réfraction (figure 6.27). Le faisceau est circulaire au moment où il quitte la lentille, mais il va graduellement devenir elliptique suivant l'axe du plan sagittal jusqu'à dégénérer en une *ligne* (au troisième ordre) au *foyer tangentiel ou méridien* F_T . En fait, plus il y a d'astigmatisme, plus la figure de diffraction, allongée et complexe, ressemble à une ligne. Tous les rayons du point objet traversent cette « ligne », dénommée *image primaire*. Au-delà, la section transverse du faisceau s'ouvre pour redevenir circulaire. À cette position, l'image est appelée *cercle de moindre diffusion*. Ensuite la section se redéforme en une « ligne », l'*image secondaire*, dans le plan méridien au *foyer sagittal* F_S .

L'image d'un point source par un système optique souffrant d'un léger astigmatisme ($\approx 0,2\lambda$) au voisinage du cercle de moindre confusion, ressemble fortement à la figure d'Airy, mais en plus asymétrique. Quand l'astigmatisme croît (au-delà d'environ $0,5\lambda$), l'asymétrie bi-axe devient apparente. L'image devient une distribution complexe de régions claires et obscures (qui ressemble à la figure de diffraction de Fresnel pour une ouverture rectangulaire, p. 516), qui n'a pratiquement plus rien à voir avec la structure classique émergeant d'une ouverture circulaire. Tout cela suppose l'absence d'AS et de coma.

Lorsque le diamètre du cercle de moindre diffusion augmente avec l'écart d'astigmatisme (i.e. l'objet s'éloigne de

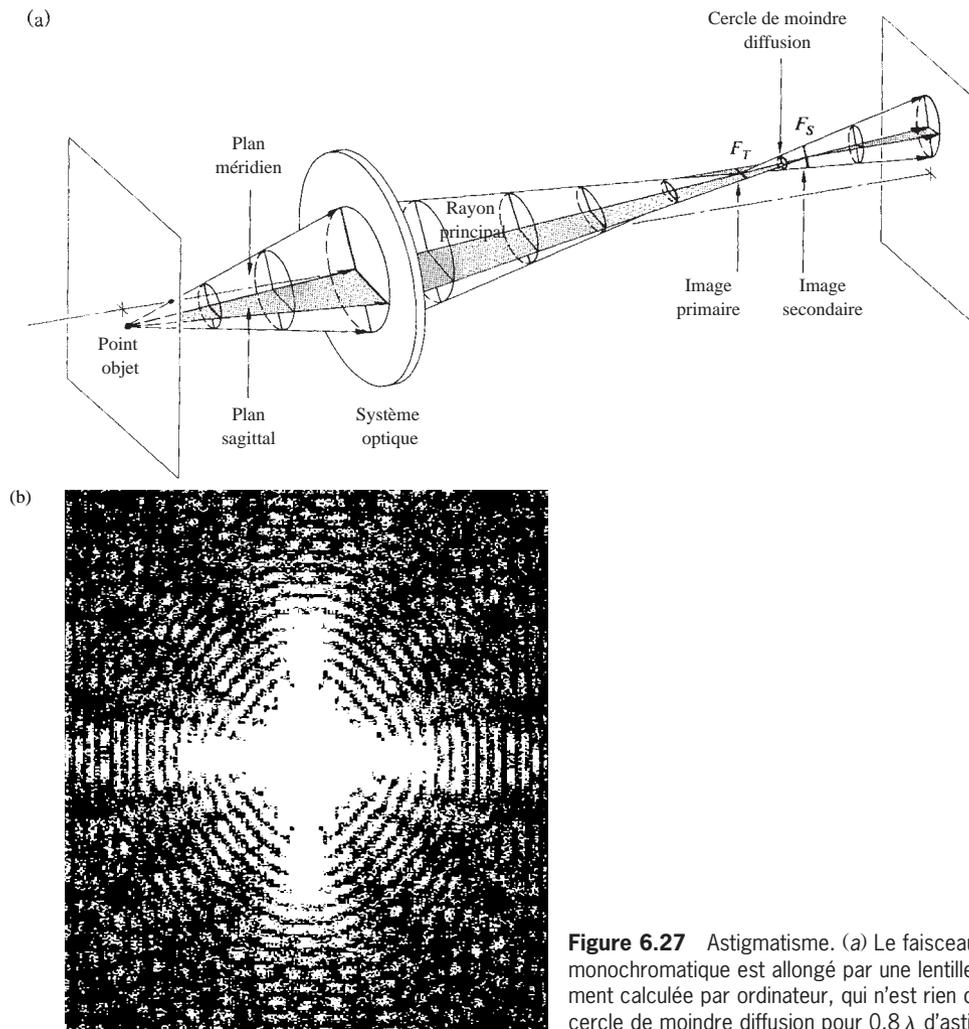


Figure 6.27 Astigmatisme. (a) Le faisceau provenant d'un point source monochromatique est allongé par une lentille astigmatique. (b) Distribution de l'éclairage calculée par ordinateur, qui n'est rien d'autre que la figure de diffraction près du cercle de moindre diffusion pour $0,8\lambda$ d'astigmatisme. (OPAL Group, St-Petersbourg, Russie.)

l'axe), l'image se détériore, perdant de la netteté sur les bords. Remarquez que l'orientation de l'image « ligne » secondaire se modifie avec la position de l'objet, tout en pointant toujours vers l'axe optique (i.e. elle est radiale). De la même façon, l'orientation de l'image « ligne » primaire change, tout en restant normale à l'image secondaire. Cet effet est révélé par la figure 6.28 quand l'objet est constitué d'éléments radiaux et tangentiels. Les images primaire et secondaire sont faites de tirets transversaux et radiaux, dont la taille augmente avec la distance à l'axe. Les tirets radiaux pointent comme des flèches vers le centre de l'image – d'où le nom *sagitta*.

On peut vérifier facilement l'existence des focales sagittale et tangentielle avec un montage assez simple. On commence par placer une lentille positive de courte focale (entre 10 et 20 mm) sur le faisceau d'un laser He-Ne. On positionne ensuite une lentille test positive de longue focale, suffisamment loin pour que le faisceau divergent remplisse cette lentille. En utilisant comme objet une grille de câbles fins qu'on place entre les deux lentilles, on aligne les câbles horizontalement (x) et verticalement (y). L'astigmatisme devient observable dès qu'on tourne la lentille test d'environ 45° autour de son axe vertical. Le plan xz est le plan méridien (z étant l'axe de la lentille, maintenant à 45° de l'axe du laser), et le plan sagittal est celui que forme y avec l'axe du laser. Lorsqu'on rapproche la grille de la lentille test, il y a une position où les câbles horizontaux sont focalisés sur un écran alors que les câbles verticaux ne le sont pas), cela est la position du foyer sagittal. Chaque point objet est transformé en une courte ligne dans le plan horizontal (méridien), ce qui explique que seuls les fils horizontaux soient au point. Si l'on rapproche légèrement la

grille de la lentille, les lignes verticales vont être au point et les lignes horizontales deviennent floues, ce qui met en évidence la focale tangentielle. Il serait intéressant de faire pivoter la grille dans son plan.

À la différence de l'astigmatisme de la vision (p. 219), qui trouve son origine dans l'asymétrie des surfaces du système optique, l'aberration du troisième ordre du même nom concerne les lentilles sphériques symétriques.

À l'exception notable du miroir plan, les miroirs souffrent des mêmes aberrations que les lentilles. Par exemple, bien qu'un miroir parabolique soit exempt d'AS pour un point objet situé à l'infini, son imagerie hors axe est déplorable à cause de l'astigmatisme et de la coma. Son usage est donc restreint à des systèmes de petit champ comme les télescopes. Un miroir concave sphérique a de l'AS, de la coma et de l'astigmatisme. En fait, on ne changerait pas les caractéristiques de la figure 6.27 si l'on remplaçait la lentille par un miroir sphérique éclairé par un faisceau oblique. À propos, un tel miroir souffre nettement moins d'AS qu'une lentille convexe de même focale.

Courbure de champ

Imaginons un système optique affranchi de toutes les aberrations précédentes. Il y aurait alors une correspondance bi-univoque entre les points de l'objet et ceux de l'image (imagerie stigmatique). On a déjà mentionné (section 5.2.3) le fait que l'image d'un objet plan perpendiculaire à l'axe ne sera un plan que dans la région paraxiale. Pour des ouvertures plus importantes, l'obtention d'une image sur une surface courbe est la manifestation de l'aberration primaire appelée **courbure de champ de Petzval**, du nom du mathématicien Hongrois Josef Max Petzval (1807–1891). On peut apprécier cet effet grâce aux figures 5.19 (p. 167) et 6.29. Un objet en forme de portion de sphère σ_o est transformé par une lentille en une image qui est aussi une portion de sphère σ_i , toutes deux centrées en O . Si l'on redresse σ_o pour en faire un plan σ'_o alors tous les points image se déplacent vers la lentille le long du rayon principal correspondant, formant une *surface de Petzval* Σ_P , qui est parabolique. Alors que la surface de Petzval, pour une lentille positive, s'incurve vers l'intérieur en direction de l'objet, c'est l'inverse qui se produit pour une lentille négative. Bien entendu, une combinaison appropriée de lentilles positives et négatives pourra annuler la courbure de champ. La distance Δx entre un point image, à une hauteur y_i sur la surface de Petzval, et le plan image paraxial est donnée par :

$$\Delta x = \frac{y_i^2}{2} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j f_j} \quad (6.43)$$

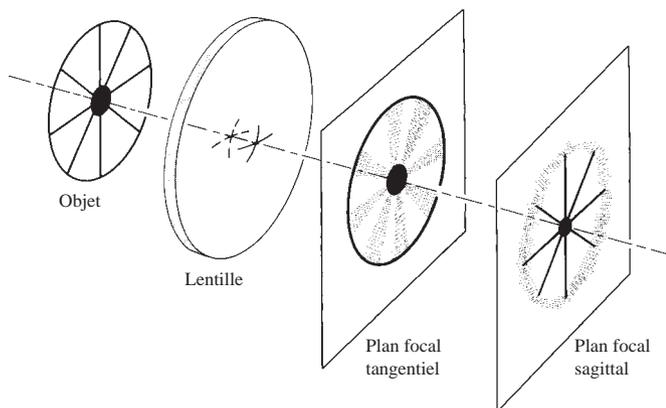


Figure 6.28 Images dans les plans focaux tangentiel et sagittal.

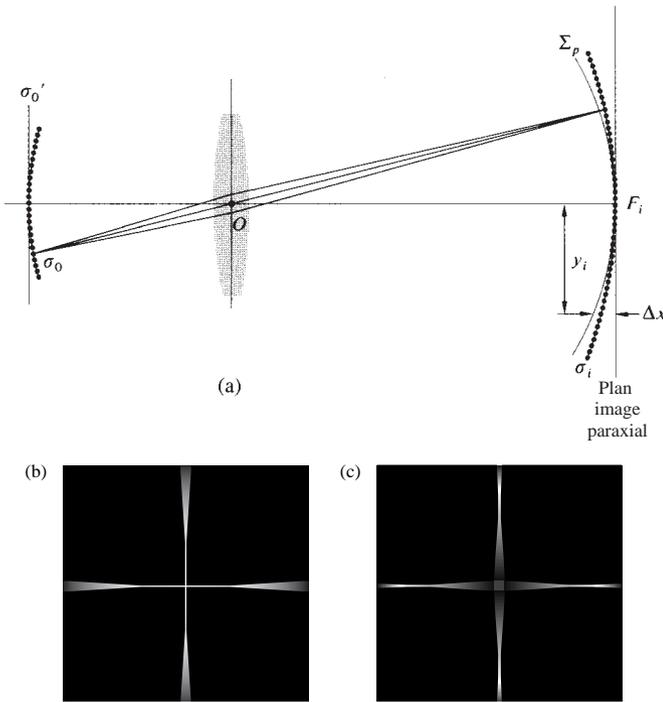


Figure 6.29 Courbure de champ. (a) Quand l'objet correspond à σ_0' , l'image correspondra à la surface Σ_P . (b) L'image formée sur un écran plan près du plan paraxial image sera au point uniquement en son centre. (c) Rapprocher l'écran de la lentille permettra de mettre au point les bords.

où n_j et f_j sont les indices et les focales des m lentilles minces du système. Cela implique que la surface de Petzval ne soit pas altérée par les changements de position ou de forme des lentilles ou par la position de la pupille, à valeurs de n_j et f_j fixés. Dans le cas de deux lentilles minces ($m = 2$) séparées d'une distance arbitraire, on remarque qu'on peut annuler Δx pourvu que :

$$\frac{1}{n_1 f_1} + \frac{1}{n_2 f_2} = 0$$

ou, de manière équivalente,

$$n_1 f_1 + n_2 f_2 = 0 \tag{6.44}$$

Cette relation est la **condition de Petzval**. Pour illustrer son utilisation, associons deux lentilles minces, l'une positive et l'autre négative, telles que $f_1 = -f_2$ et $n_1 = n_2$. Comme :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \tag{6.8}$$

$$f = \frac{f_1^2}{d}$$

le système peut satisfaire la condition de Petzval et avoir un champ plan, tout en ayant une focale positive bien définie.

Dans les instruments visuels, on peut tolérer une courbure résiduelle, car l'œil s'y adapte plus ou moins. En revanche, la courbure de champ est rédhibitoire pour les objectifs photographiques puisque l'image hors axe va rapidement devenir floue quand le plan du film est en F_i . Un moyen efficace pour supprimer la courbure d'une lentille positive est de placer près du plan focal un correcteur de champ négatif. C'est une pratique courante pour obtenir un champ plan avec des objectifs de projection ou des objectifs photographiques lorsqu'il est difficile de satisfaire à la condition de Petzval (figure 6.30). À cette position, le correcteur a peu d'effets sur les autres aberrations.

L'astigmatisme est intimement lié à la courbure de champ. En présence de cette dernière, il y aura deux surfaces image paraboliques, la tangentielle, Σ_T , et la sagittale, Σ_S (figure 6.31). Pour une hauteur (y_i) donnée, un point sur Σ_T se situe toujours trois fois plus loin de Σ_P que son correspondant sur Σ_S , tous les deux étant du même côté de la surface de Petzval (figure 6.31). En l'absence d'astigmatisme, Σ_S et Σ_T sont confondues avec Σ_P . Il est possible de modifier les formes de Σ_S et Σ_T en changeant la cambrure ou la position des lentilles, ou encore l'emplacement du diaphragme d'ouverture. La configuration de la figure 6.31b est connue comme celle de champ *artificiellement plat*. C'est l'effet obtenu, généralement

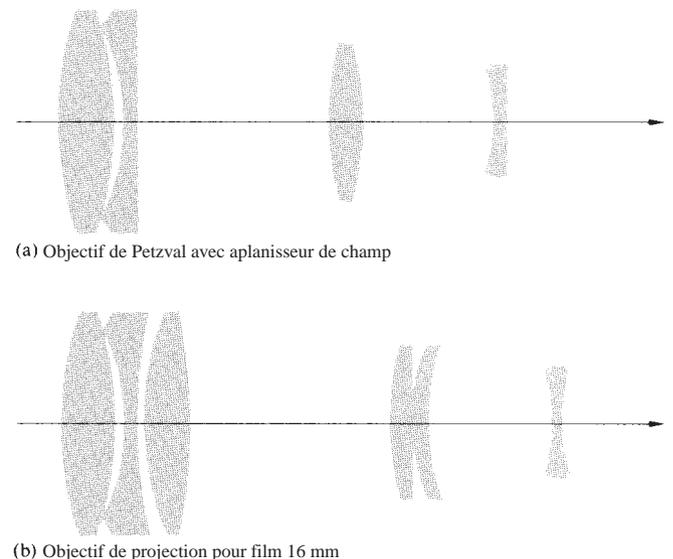


Figure 6.30 Un correcteur de champ.

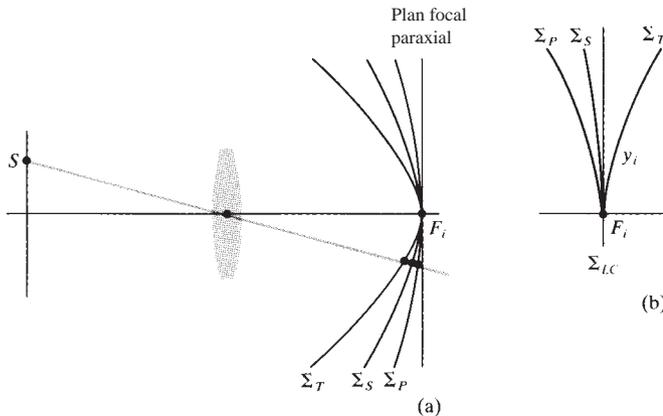


Figure 6.31 Surfaces images de Petzval, tangentielle et sagittale.

dans un appareil photographique bon marché, en plaçant le diaphragme en avant du ménisque qui sert d'objectif. La surface de moindre diffusion, Σ_{LC} , est plane et l'image est tolérable, avec une légère perte de définition sur les bords due à l'astigmatisme. Cela signifie que, bien qu'ils restent sur Σ_{LC} , ces cercles ont un diamètre croissant en fonction de l'angle de champ. Les objectifs photographiques modernes de bonne qualité sont en général des *anastigmats*, conçus de sorte que Σ_S et Σ_T se coupent pour un angle hors axe, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas d'astigmatisme pour cette valeur de champ. Le Triplet de Cooke, le Tessar et le Biotar (figure 5.104) sont des anastigmats, tout comme le Sonnar de Zeiss, qui est assez ouvert et dont l'astigmatisme résiduel est illustré graphiquement sur la figure 6.32. On remarquera la bonne planéité de

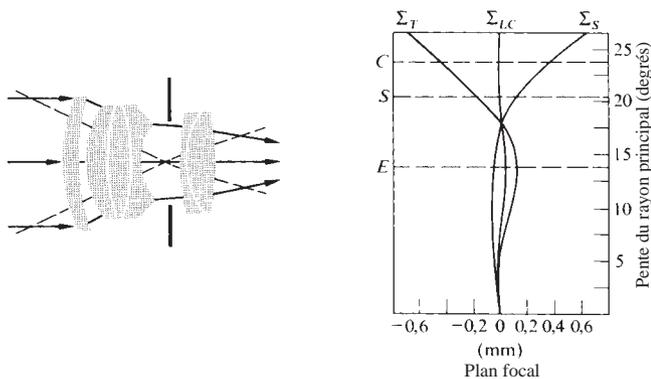


Figure 6.32 Un sonnar. Les lettres C, S et E indiquent les limites du format d'un film 35 mm (C : Coins ; S : Sides ou demi-longueur et E : Edge ou demi-largeur) La famille des sonnar est entre le double Gauss et le triplet.

champ et la faible quantité d'astigmatisme sur presque la totalité de la surface du film.

Retournons à la caméra Schmidt de la figure 5.113 (p. 237), maintenant qu'on est en mesure d'en apprécier le fonctionnement. Avec la pupille au centre de courbure du miroir sphérique, les rayons principaux qui, par définition, passent par C , sont en incidence normale sur le miroir. De plus, tout pinceau de rayons en provenance d'un point objet est symétrique par rapport au rayon principal. En effet, ce dernier joue le rôle d'axe, de sorte qu'il n'y a plus de points hors axe et, en principe, plus d'astigmatisme ni de coma. Au lieu d'essayer d'aplanir la surface image, le concepteur a géré la courbure en utilisant une plaque photographique de forme adéquate.

Distorsion

La dernière des cinq aberrations primaires monochromatiques est la **distorsion**. Son origine vient d'une variation du grandissement transverse, M_T , en fonction de la distance à l'axe, y_i , du point image. Cette distance peut différer de celle prévue par la théorie paraxiale pour laquelle M_T est constant. En d'autres termes, un système présente de la distorsion lorsque sa focale et son grandissement varient en fonction de l'angle de champ. En l'absence de toutes les autres aberrations, la distorsion se manifeste comme une déformation de l'image dans son ensemble, bien que chaque point soit net. Par exemple, un carré observé par un système optique avec de la **distorsion positive** ou **distorsion en coussinet** aura une image déformée, comme dans la figure 6.33b. Chaque point image est décalé radialement vers l'extérieur d'autant plus qu'il est éloigné de l'axe central (i.e. M_T s'accroît avec y_i). De la même manière, la **distorsion négative**, ou **distorsion en barillet** ou **en tonneau**, correspond à la situation où chaque point image se déplace radialement vers l'intérieur (figure 6.33c). On peut se rendre compte facilement de l'effet de la distorsion en observant, au moyen d'une lentille aberrante, une feuille de papier quadrillé.

Les lentilles assez minces n'ont pratiquement pas de distorsion alors que les lentilles épaisses, positives ou négatives, présentent de la distorsion, positive ou négative, respectivement. L'introduction d'un diaphragme dans un système de lentilles minces s'accompagne invariablement de distorsion, comme le montre la figure 6.34. Une exception est le cas où le diaphragme d'ouverture est sur la lentille, de sorte que le rayon de champ se confond alors avec le rayon principal (i.e. il passe par les points principaux qui sont ici confondus en O).

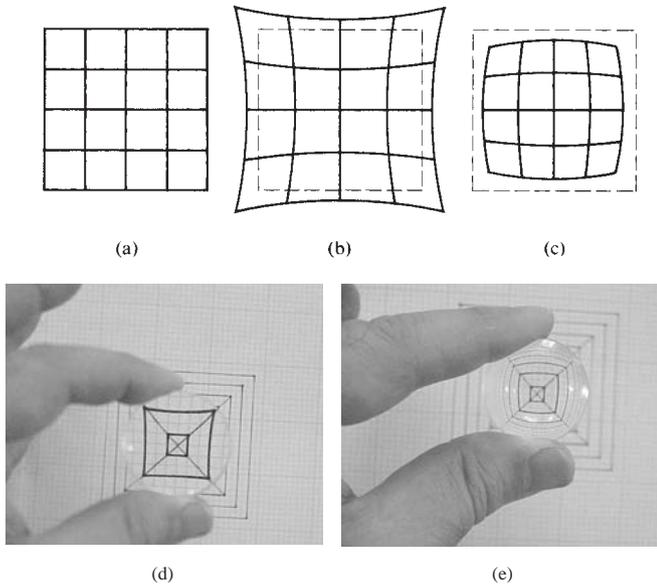


Figure 6.33 (a) Objet non distordu. (b) Quand le grandissement sur l'axe optique est inférieur à celui hors axe, la distorsion est en coussinet. (c) Dans le cas contraire, la distorsion est en barillet. (d) Distorsion en coussinet d'une lentille mince. (e) Distorsion en barillet d'une lentille mince. (Photo E.H.)

Si l'on met le diaphragme devant une lentille positive, comme c'est le cas dans la figure 6.34b, la distance objet mesurée le long du rayon de champ est plus longue que

lorsque le diaphragme est sur la lentille ($S_2A > S_2O$). Ainsi, x_o sera plus grand et [équation (5.26)] M_T plus petit, d'où la distorsion en barillet. En d'autres termes, avec un diaphragme à l'avant, M_T aura une valeur inférieure à celle qu'il aurait sans diaphragme. La différence est une mesure de cette aberration, qui existe quelle que soit la taille de l'ouverture. De la même manière, placer une pupille en arrière de la lentille (figure 6.34c) fait décroître x_o le long du rayon de champ (i.e. $S_2O > S_2B$), accroissant M_T et faisant apparaître de la distorsion en coussinet. *Interchanger l'objet et l'image a donc pour effet de changer le signe de la distorsion pour une lentille et une pupille données.* Les conclusions sur les différentes positions de la pupille sont inversées pour une lentille négative.

Tout cela suggère l'utilisation d'un diaphragme d'ouverture à mi-chemin entre deux lentilles identiques. La distorsion de la première lentille annule la contribution de la seconde. Cette approche a été utilisée dans un grand nombre d'objectifs photographiques (figure 5.104). Si l'objectif est parfaitement symétrique et s'il fonctionne suivant le schéma de la figure 6.34d, alors les distances objet et image seront égales, de sorte que $M_T = 1$ (de plus, la coma et le chromatisme sont aussi supprimés). Ce principe est exploité pour des objectifs (conjugaison à distance finie) de photocopieuses. Cependant, même quand M_T diffère de 1, rendre le système approximativement symétrique par rapport au diaphragme est une pratique courante car elle réduit drastiquement les aberrations.

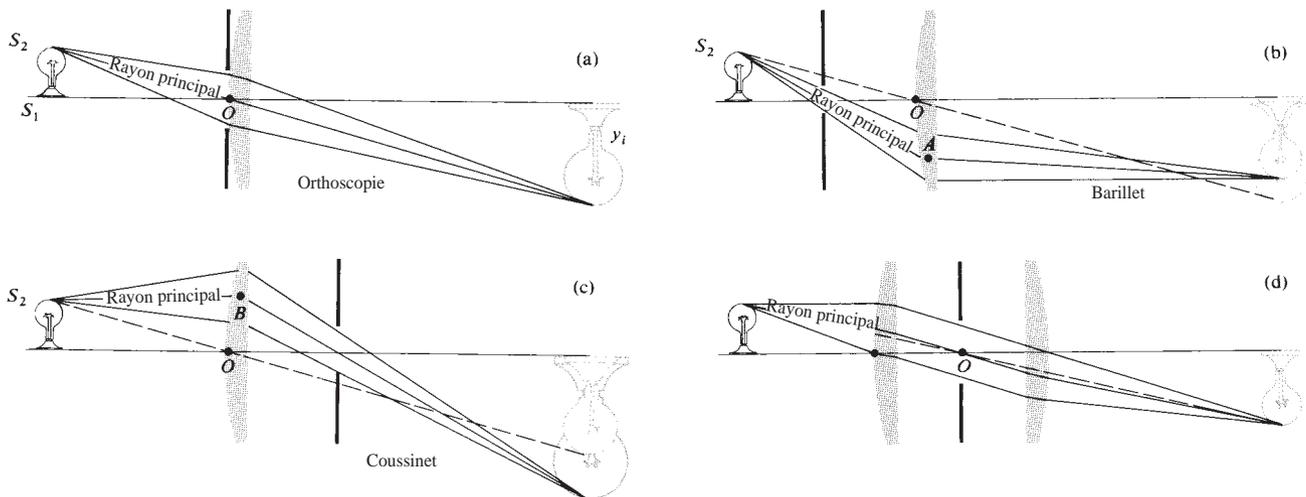


Figure 6.34 Effet de la position de la pupille sur la distorsion.

La distorsion peut apparaître dans des combinaisons de lentilles comme celle de la figure 6.35. Pour un point objet éloigné, les bords de l'achromat jouent le rôle de pupille. Cette combinaison se comporte comme une lentille négative avec une pupille en avant, ce qui génère de la distorsion négative ou en coussinet.

Imaginons un rayon de champ qui pénètre dans un système optique et en ressort dans la même direction, comme dans la figure 6.34d. Le point d'intersection entre le rayon et l'axe est le centre optique du système mais, comme il s'agit du rayon de champ, il est aussi le centre du diaphragme d'ouverture. C'est la situation décrite par la figure 6.34a, le diaphragme étant accolé à la lentille mince. Dans ces deux cas, les axes du rayon marginal en entrée et en sortie sont parallèles, ce qui annule la distorsion ; on dit que le système est *orthoscopique*. Cela implique que les pupilles d'entrée et de sortie correspondent aux plans principaux (si le système est dans un seul milieu, figure 6.2). Il ne faut pas oublier que le rayon de champ est maintenant un rayon principal. *Un système de lentilles minces sera exempt de distorsion si son centre optique est confondu avec le centre du diaphragme d'ouverture.* Dans les caméras de type « sténopé » (ou « pinhole »), les rayons reliant les conjugués objet et image sont des droites passant par le centre du diaphragme d'ouverture. Les rayons incidents et émergents sont bien évidemment parallèles (puisqu'ils sont confondus), de sorte qu'il n'y a pas de distorsion.

6.3.2 Aberrations chromatiques

Les cinq aberrations de Seidel ont été considérées en lumière monochromatique. Si la source a une certaine largeur de bande, cela aura un effet sur ces aberrations, mais sans conséquences, à moins que le système ait été parfaitement corrigé en lumière monochromatique. Il existe cependant des **aberrations chromatiques** qui se produisent en lumière polychromatique et

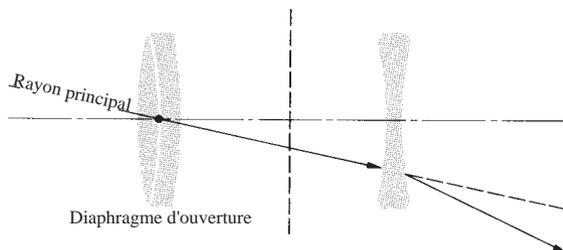


Figure 6.35 Distorsion d'une lentille composée.

dont les effets ne sont pas négligeables. L'équation de la réfraction [équation (6.12)] est une fonction de l'indice de réfraction, lui-même fonction de la longueur d'onde. Des rayons de différentes couleurs vont traverser le système avec diverses trajectoires, ce qui constitue l'origine de l'aberration chromatique.

Puisque l'équation de la lentille mince :

$$\frac{1}{f} = (n_l - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad [5.16]$$

fait intervenir la longueur d'onde via $n_l(\lambda)$, la focale doit aussi en dépendre. En général (figure 3.40, p. 77), $n_l(\lambda)$ est une fonction décroissante de la longueur d'onde dans le visible, de sorte que $f(\lambda)$ est une fonction croissante de λ . Le résultat est illustré sur la figure 6.36 où les rayons d'un faisceau de lumière blanche collimaté se focalisent en différents points de l'axe, en fonction de la longueur d'onde. La distance axiale entre deux points de focalisation dans un intervalle spectral donné (par exemple, bleu à rouge) est appelée **aberration chromatique axiale** (ou *longitudinale*), AC·A en abrégé.

Il est assez facile d'observer les aberrations chromatiques, ou AC, avec une simple lentille épaisse convergente. Lorsqu'elle est éclairée par une source ponctuelle polychromatique (une bougie par exemple), la lentille va produire une image entourée d'un halo. Si l'on rapproche le plan d'observation de la lentille, la périphérie de l'image va tendre vers le rouge orangé. Si l'on l'éloigne, le halo périphérique va tendre vers le bleu-violet. La position du cercle de moindre diffusion (i.e. le plan Σ_{LC}) correspond à la meilleure image. La coloration est encore plus frappante en regardant directement la source à travers la lentille.

L'image d'un point hors axe polychromatique est constituée de celles formées aux diverses longueurs d'onde, à différentes distances de l'axe (figure 6.37). Plus précisément, le grandissement transversal dépend de la longueur d'onde parce

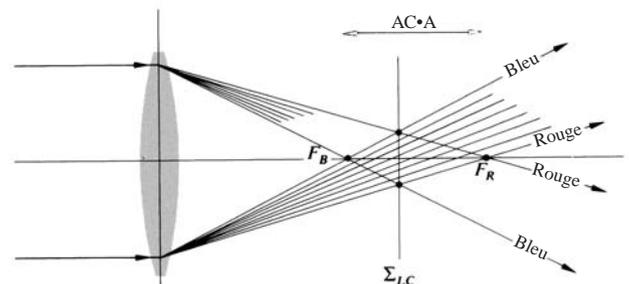


Figure 6.36 Aberration chromatique axiale.

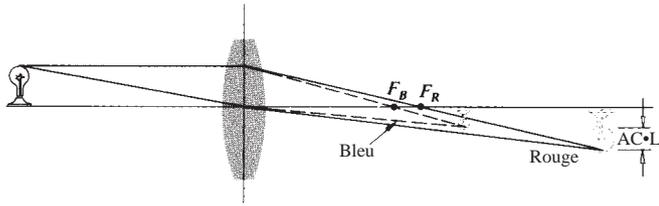


Figure 6.37 Aberration chromatique latérale.

que la focale f en dépend. La distance, perpendiculairement à l'axe, entre deux images (en général, une dans le bleu et l'autre dans le rouge) est une mesure de l'**aberration chromatique latérale**, $AC \cdot L$. Ainsi, une lentille aberrante chromatiquement et éclairée en lumière blanche va continûment remplir un volume de l'espace avec un enchevêtrement d'images de tailles et de couleurs différentes.

Lorsque le point de focalisation bleu, F_B , est à gauche du rouge, F_R , l' $AC \cdot A$ est dite positive, comme dans la figure 6.36. À l'inverse, une lentille négative génère une $AC \cdot A$ négative, la mise au point dans le bleu étant à droite de la rouge. Une lentille, qu'elle soit concave ou convexe, ressemble à un prisme, c'est-à-dire qu'elle s'amincit ou s'épaissit en fonction de la distance radiale depuis l'axe. Les rayons sont alors déviés soit vers l'axe, soit en dehors de l'axe, respectivement. Dans les deux cas, les rayons sont réfractés vers la « base » la plus épaisse de la section prismatique. Or la déviation angulaire d'un prisme est une fonction de n , et donc décroît avec λ . Ainsi, la lumière bleue est celle qui dévie le plus et qui se focalise le plus près de la lentille. En d'autres termes, pour une lentille convexe, le foyer rouge est le plus éloigné vers la droite ; et pour une lentille concave, c'est le plus éloigné vers la gauche.

L'œil humain est entaché d'une quantité substantielle d'aberration chromatique, compensée par des mécanismes psychophysiques élaborés. Il est malgré tout possible de la détecter grâce à une source ponctuelle pourpre qui, si l'on l'approche très près de l'œil, apparaîtra bleu au centre avec un halo rouge autour ; si l'on l'éloigne, il apparaîtra rouge au centre avec un halo bleu autour.

Doublets minces achromatiques

Ce qui précède laisse à penser qu'une combinaison de deux lentilles minces, l'une positive et l'autre négative, peut résulter en un système où F_R et F_B sont confondus (figure 6.38).

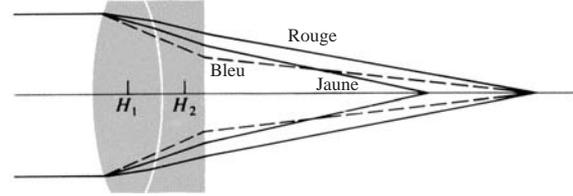


Figure 6.38 Doublet achromatique. La marche des rayons est exagérée à propos.

Une telle combinaison est dite *achromatisée* pour ces deux longueurs d'onde particulières. Le but est d'éliminer la dispersion totale (i.e. faire en sorte que chaque couleur soit déviée d'une quantité égale). Pour deux lentilles séparées d'une distance d ,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad [6.8]$$

Au lieu d'écrire systématiquement le second terme de l'équation de la lentille mince [équation (5.16), p. 164], on va utiliser la notation abrégée suivante : $1/f_1 = (n_1 - 1)\rho_1$ et $1/f_2 = (n_2 - 1)\rho_2$ pour les deux lentilles. On a alors :

$$\frac{1}{f} = (n_1 - 1)\rho_1 + (n_2 - 1)\rho_2 - d(n_1 - 1)\rho_1(n_2 - 1)\rho_2 \quad (6.45)$$

On peut ainsi connaître la focale du doublet pour le rouge (f_R) et celle pour le bleu (f_B) en introduisant les valeurs appropriées des indices, c'est-à-dire n_{1R} , n_{2R} , n_{1B} , et n_{2B} , respectivement. On veut avoir $f_R = f_B$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{f_R} = \frac{1}{f_B}$$

et en utilisant l'équation (6.45),

$$(n_{1R} - 1)\rho_1 + (n_{2R} - 1)\rho_2 - d(n_{1R} - 1)\rho_1(n_{2R} - 1)\rho_2 = (n_{1B} - 1)\rho_1 + (n_{2B} - 1)\rho_2 - d(n_{1B} - 1)\rho_1(n_{2B} - 1)\rho_2 \quad (6.46)$$

Le cas particulier $d = 0$ est important car les lentilles sont alors accolées. En prenant $d = 0$ dans l'équation (6.46), on a

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = - \frac{n_{2B} - n_{2R}}{n_{1B} - n_{1R}} \quad (6.47)$$

On spécifie généralement la focale de la lentille résultante (f_y) dans le jaune, qui est à mi-chemin entre le rouge et le bleu. Dans

le jaune, on a donc $1/f_{1Y} = (n_{1Y} - 1)\rho_1$ et $1/f_{2Y} = (n_{2Y} - 1)\rho_2$. D'où :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{(n_{2Y} - 1) f_{2Y}}{(n_{1Y} - 1) f_{1Y}} \quad (6.48)$$

Égaliser les équations (6.47) et (6.48) conduit à :

$$\frac{f_{2Y}}{f_{1Y}} = - \frac{(n_{2B} - n_{2R})/(n_{2Y} - 1)}{(n_{1B} - n_{1R})/(n_{1Y} - 1)} \quad (6.49)$$

Les termes :

$$\frac{n_{2B} - n_{2R}}{n_{2Y} - 1} \quad \text{et} \quad \frac{n_{1B} - n_{1R}}{n_{1Y} - 1}$$

sont les **pouvoirs dispersifs** des deux matériaux dont sont constituées les lentilles. Leur inverse, V_2 et V_1 , est appelé la *constringence*, ou **nombre d'Abbe**. Un matériau est d'autant plus dispersif que son nombre d'Abbe est petit. Plus précisément,

$$\frac{f_{2Y}}{f_{1Y}} = - \frac{V_1}{V_2}$$

ou $f_{1Y}V_1 + f_{2Y}V_2 = 0$ (6.50)

Comme le pouvoir dispersif est positif, le nombre d'Abbe l'est aussi. Ce résultat confirme a priori l'usage de deux lentilles, l'une négative et l'autre positive, pour obtenir l'équation (6.50), c'est-à-dire pour que f_R soit égal à f_B .

On a maintenant assez d'éléments pour concevoir un *doublet achromatique* ; mais avant cela, il nous faut préciser quelques points additionnels. La désignation des longueurs d'onde « rouge », « jaune » et « bleu » est trop imprécise pour des applications pratiques. Il est d'usage de faire référence à des lignes spectrales particulières dont les longueurs d'onde sont connues avec une grande précision. C'est le cas des **raies de Fraunhofer**, qui servent de référence sur l'ensemble du spectre. Quelques-unes d'entre elles dans le visible figurent dans le tableau 6.1. Les raies F , C , et d (i.e. D_3) sont les plus utilisées (pour le bleu, le rouge et le jaune), les tracés paraxiaux étant couramment effectués en lumière- d . Les fabricants de verre ont l'habitude de présenter leurs produits en fonction du nombre d'Abbe comme dans la figure 6.39, où l'indice de réfraction est fonction de :

$$V_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C} \quad (6.51)$$

(Voir le tableau 6.2) L'équation (6.50) se réécrit :

$$f_{1d}V_{1d} + f_{2d}V_{2d} = 0 \quad (6.52)$$

Tableau 6.1 Principales raies de Fraunhofer

Désignation	Longueur d'onde (Å)*	Source
C	6562,816 Rouge	H
D_1	5895,923 Jaune	Na
D	Centre du doublet 5892,9	Na
D_2	5889,953 Jaune	Na
D_3 or d	5875,618 Jaune	He
b_1	5183,618 Vert	Mg
b_2	5172,699 Vert	Mg
c	4957,609 Vert	Fe
F	4861,327 Bleu	H
f	4340,465 Violet	H
g	4226,728 Violet	Ca
K	3933,666 Violet	Ca

*1 Å = 0,1 nm.

où les nombres indicés 1 et 2 désignent l'une ou l'autre des lentilles, et où la lettre indicée (d) fait référence à la raie d .

En son temps, Newton avait conclu de façon erronée que le pouvoir dispersif était identique pour tous les matériaux, sur la base d'expériences incomplètes faites avec le très faible nombre de verres disponibles à cette époque. Si c'était vrai, cela reviendrait à dire que [équation (6.52)] $f_{1d} = -f_{2d}$, auquel cas la puissance du doublet serait nulle. En conséquence de quoi, Newton dirigea ses efforts vers les télescopes réflectifs au détriment des télescopes réfractifs, ce qui s'avéra être un bon choix. L'achromat fut inventé aux alentours de 1733 par Chester Moor Hall, Esq., mais il tomba dans l'oubli jusqu'à ce qu'il soit réinventé et breveté en 1758 par l'opticien londonien John Dollond.

À la figure 6.40, on présente différentes configurations de doublet achromatique, qui dépendent du type de verre utilisé et des aberrations qu'on souhaite contrôler. Toutefois, méfiez-vous des doublets disponibles sur étagère et d'origine inconnue, car certains d'entre eux ont délibérément été conçus avec des aberrations destinées à compenser celles du système d'où ils proviennent. Le doublet le plus connu est probablement l'achromat collé de Fraunhofer, constitué d'une lentille biconvexe en crown* accolée à une lentille concave-plan (ou presque plan) en flint. L'utilisation du crown pour la lentille frontale est courante du fait de sa bonne résistance à l'usure. Comme le système est

*Traditionnellement, les verres qui vérifient $n_d > 1,60$, $V_d > 50$, ainsi que $n_d < 1,60$, $V_d > 55$ sont appelés *crowns*, et les autres *flints*.

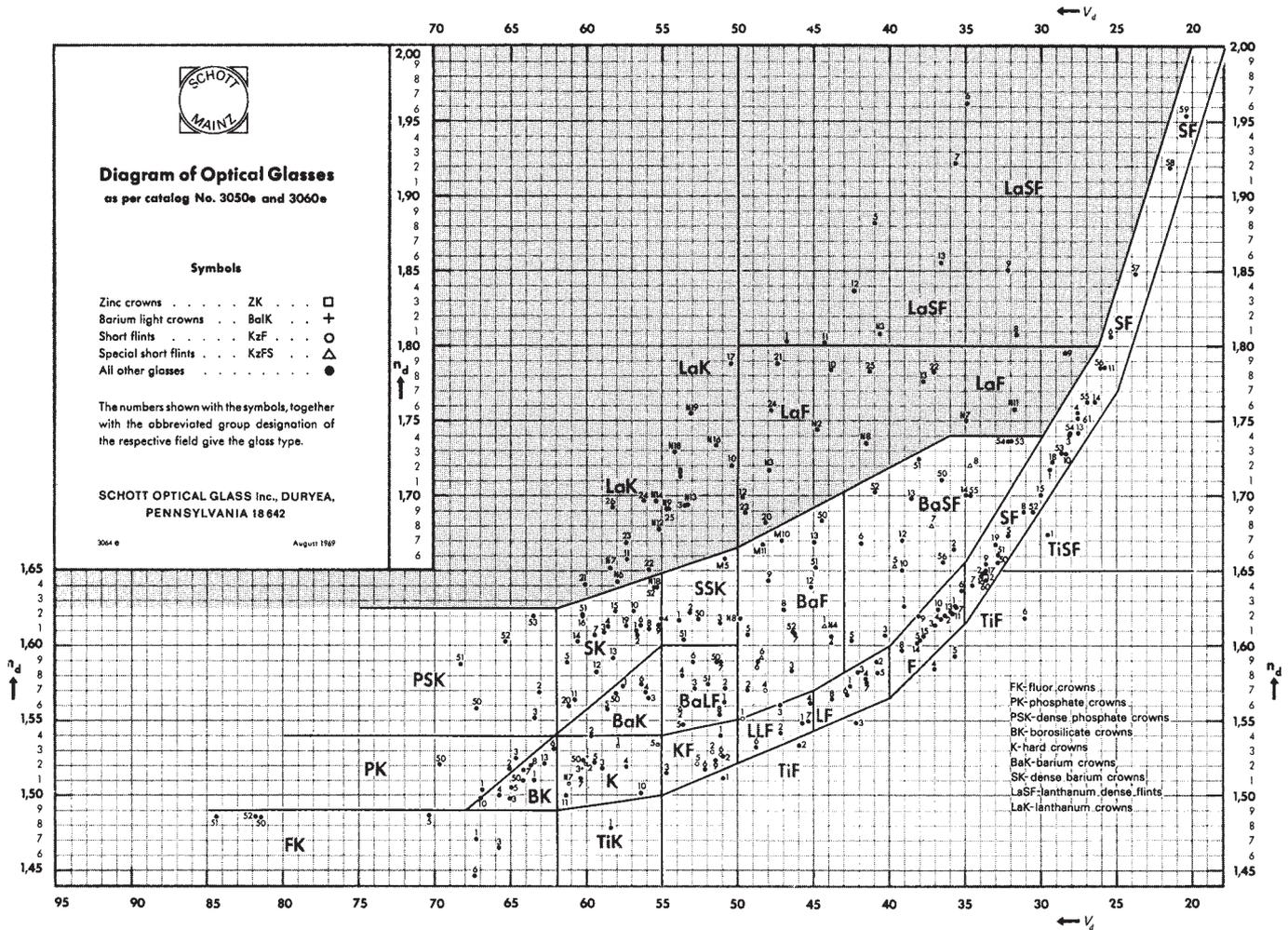


Figure 6.39 Indice de réfraction en fonction du nombre d'Abbe pour différents verres. Les verres de la zone grisée sont appelés verres de terres rares ; ils sont caractérisés par un fort indice de réfraction et une faible dispersion.

proche d'une lentille convexe-plan, on peut supprimer l'aberration sphérique et la coma grâce à un choix judicieux de verres. Pour concevoir un achromat de 50 cm de focale, on aura un choix possible de verres en résolvant le système comprenant l'équation (6.52) et les équations de la combinaison de lentilles

$$\frac{1}{f_{1d}} + \frac{1}{f_{2d}} = \frac{1}{f_d}$$

pour avoir

$$\frac{1}{f_{1d}} = \frac{V_{1d}}{f_d(V_{1d} - V_{2d})} \quad (6.53)$$

et

$$\frac{1}{f_{2d}} = \frac{V_{2d}}{f_d(V_{2d} - V_{1d})} \quad (6.54)$$

Pour éviter de trop faibles valeurs de f_{1d} et de f_{2d} qui impliqueraient de très petits rayons de courbure, il faut que la différence $V_{1d} - V_{2d}$ soit grande (un minimum de 20 est pertinent). Grâce à la figure 6.39 (ou une autre équivalente) on choisit BK1 et F2. D'après le catalogue, on a $n_C = 1,50763$, $n_d = 1,51009$, $n_F = 1,51566$ et $n_C = 1,61503$, $n_d = 1,62004$, $n_F = 1,63208$, respectivement. Le nombre d'Abbe est en général donné avec une bonne précision, il n'est donc pas nécessaire de le calculer.

Tableau 6.2 Verres optiques

Type	Nom	n_D	V_D
511:635	Borosilicate crown – BSC-1	1,511 0	63,5
517:645	Borosilicate crown – BSC-2	1,517 0	64,5
513:605	Crown – C	1,512 5	60,5
518:596	Crown	1,518 0	59,6
523:586	Crown – C-1	1,523 0	58,6
529:516	Crown flint – CF-1	1,528 6	51,6
541:599	Baryum crown léger – LBC-1	1,541 1	59,9
573:574	Baryum crown – LBC-2	1,572 5	57,4
574:577	Baryum crown	1,574 4	57,7
611:588	Baryum crown dense – DBC-1	1,611 0	58,8
617:550	Baryum crown dense – DBC-2	1,617 0	55,0
611:572	Baryum crown dense – DBC-3	1,610 9	57,2
562:510	Baryum flint léger – LBF-2	1,561 6	51,0
588:534	Baryum flint léger – LBF-1	1,588 0	53,4
584:460	Baryum flint – BF-1	1,583 8	46,0
605:436	Baryum flint – BF-2	1,605 3	43,6
559:452	Flint extra léger – ELF-1	1,558 5	45,2
573:425	Flint léger – LF-1	1,572 5	42,5
580:410	Flint léger – LF-2	1,579 5	41,0
605:380	Flint dense – DF-1	1,605 0	38,0
617:366	Flint dense – DF-2	1,617 0	36,6
621:362	Flint dense – DF-3	1,621 0	36,2
649:338	Flint extra dense – EDF-1	1,649 0	33,8
666:324	Flint extra dense – EDF-5	1,666 0	32,4
673:322	Flint extra dense – EDF-2	1,672 5	32,2
689:309	Flint extra dense – EDF	1,689 0	30,9
720:293	Flint extra dense – EDF-3	1,720 0	29,3

D'après T. Calvert, « Optical Components, » *Electromechanical Design*, Mai 1971. Le type est donné par $(n_D - 1) \cdot (10 V_D)$, où n_D est arrondi à la troisième décimale. D'autres verres sont fournis par Smith, *Modern Optical Engineering*, figure 7.5.

Plus précisément, $V_{1d} = 63,46$ et $V_{2d} = 36,37$, respectivement. La puissance de chacune des deux lentilles est donnée par les équations (6.53) et (6.54) :

$$\mathcal{D}_{1d} = \frac{1}{f_{1d}} = \frac{63,46}{0,50(27,09)}$$

et

$$\mathcal{D}_{2d} = \frac{1}{f_{2d}} = \frac{36,37}{0,50(-27,09)}$$

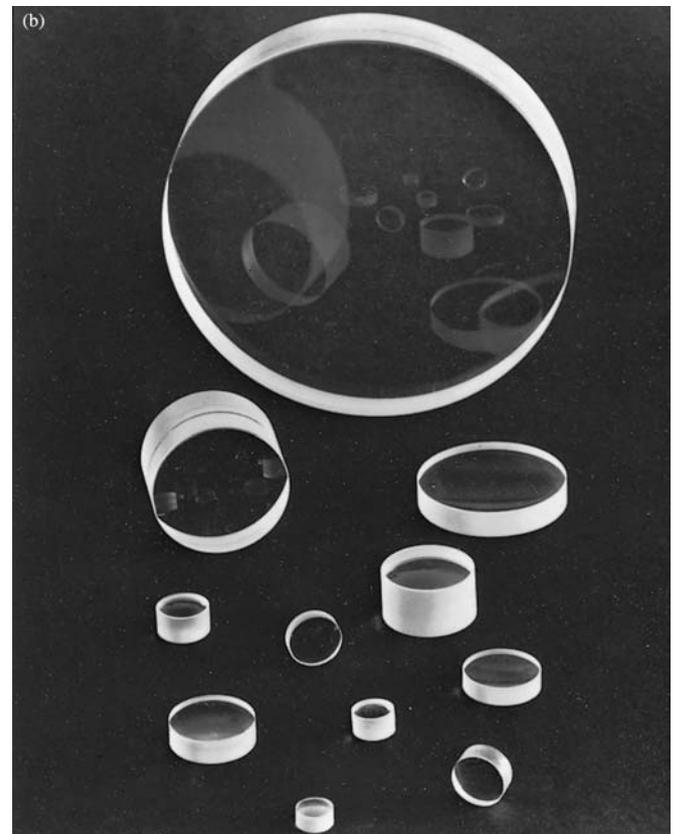
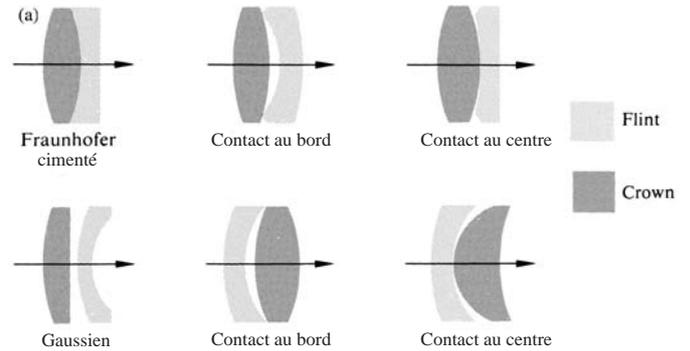


Figure 6.40 (a) Doublets achromatiques. (b) Doublets et triplets. (Melles Griot.)

On a $\mathcal{D}_{1d} = 4,685$ D et $\mathcal{D}_{2d} = -2,685$ D, leur somme valant 2 D, c'est-à-dire $1/0,5$ par construction. Par souci de simplicité, on peut imposer que la première lentille soit équiconvexe,

de sorte que ses rayons R_{11} et R_{12} soient égaux en valeur absolue. Donc :

$$\rho_1 = \frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} = \frac{2}{R_{11}}$$

ou, de manière équivalente :

$$\frac{2}{R_{11}} = \frac{\mathcal{D}_{1d}}{n_{1d} - 1} = \frac{4,685}{0,51009} = 9,185$$

Alors, $R_{11} = -R_{12} = 0,2177$ m. Comme les lentilles sont collées, $R_{12} = R_{21}$. De même pour la seconde lentille :

$$\rho_2 = \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}} = \frac{\mathcal{D}_{2d}}{n_{2d} - 1}$$

$$\text{ou} \quad \frac{1}{-0,2177} - \frac{1}{R_{22}} = \frac{-2,685}{0,62004}$$

et $R_{22} = -3,819$ m. Pour résumer, les rayons de courbure de la lentille en crown sont $R_{11} = 21,8$ cm et $R_{12} = -21,8$ cm, alors que ceux de la lentille en flint sont $R_{21} = -21,8$ cm et $R_{22} = -381,9$ cm.

Remarquons, que pour une combinaison de lentilles minces, les plans principaux coïncident, de sorte qu'achromatiser la focale corrige à la fois de l'AC·A et de l'AC·L. Pour un doublet de lentilles épaisses, même si les focales dans le rouge et dans le bleu sont identiques, les différentes longueurs d'onde peuvent avoir plusieurs plans principaux. Donc, même si le grandissement est identique pour toutes les longueurs d'onde, les foyers peuvent ne pas coïncider ; en d'autres termes le doublet est corrigé de l'AC·L mais pas de l'AC·A.

Dans l'analyse précédente, seuls les rayons C et F étaient focalisés au même point, et la raie d a été introduite pour établir la focale du doublet. Il n'est pas possible pour toutes les longueurs d'onde traversant un achromat d'être focalisées au même point. Le chromatisme résiduel est appelé *spectre secondaire*. Éliminer le spectre secondaire peut s'avérer particulièrement pénible si l'on impose l'utilisation de verres courants. La combinaison de la fluorine (CaF_2) et d'un verre approprié permet d'achromatiser un doublet pour trois longueurs d'onde et de réduire fortement le spectre secondaire. Plus souvent, on utilisera des triplets pour corriger trois ou même quatre longueurs d'onde. On met facilement en évidence le spectre secondaire avec des jumelles en regardant un objet blanc éloigné. Ses bords sont entourés d'une auréole en magenta et vert ; essayez de mettre au point devant et derrière l'objet.

Doublets achromatiques à lentilles séparées

Il est aussi possible d'achromatiser un doublet comportant deux lentilles non accolées, constituées d'un même verre. Retournons à l'équation (6.46) et posons $n_{1R} = n_{2R} = n_R$ et $n_{1B} = n_{2B} = n_B$. Après quelques manipulations algébriques élémentaires, il vient :

$$(n_R - n_B)[(\rho_1 + \rho_2) - \rho_1 \rho_2 d(n_B + n_R - 2)] = 0$$

$$\text{ou} \quad d = \frac{1}{(n_B + n_R - 2)} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

En prenant comme référence le jaune, il vient $1/f_{1Y} = (n_{1Y} - 1)\rho_1$ et $1/f_{2Y} = (n_{2Y} - 1)\rho_2$; on peut alors remplacer ρ_1 et ρ_2 d'où

$$d = \frac{(f_{1Y} + f_{2Y})(n_Y - 1)}{n_B + n_R - 2}$$

avec $n_{1Y} = n_{2Y} = n_Y$. En supposant $n_Y = (n_B + n_R)/2$, on a

$$d = \frac{f_{1Y} + f_{2Y}}{2}$$

ou en lumière d :

$$d = \frac{f_{1d} + f_{2d}}{2} \quad (6.55)$$

Cette configuration est celle de l'oculaire de Huygens (section 5.7.4). Comme la focale est la même dans le bleu et le rouge, mais que les plans principaux correspondants ne sont pas forcément identiques, les deux couleurs n'ont pas systématiquement le même point foyer. Par conséquent, l'oculaire de Huygens est bien corrigé de l'aberration chromatique latérale, mais pas de l'aberration chromatique axiale.

Pour qu'un système soit entièrement corrigé des deux aberrations chromatiques, les rayons bleus et rouges doivent émerger parallèles entre eux (pas d'AC·L) et couper l'axe au même point (pas d'AC·A), c'est-à-dire qu'ils doivent être confondus. Puisque c'est le cas pour les achromats minces, il en résulte que des systèmes multiéléments devraient, en règle générale, en comporter pour éviter que les rayons bleus et rouges se séparent les uns des autres (figure 6.41). Il y a malgré tout des exceptions, comme le triplet de Taylor (section 5.7.7). Les deux couleurs pour lesquelles il est achromatisé sont séparées dans la lentille, mais elles sont ensuite recombinaisonnées et émergent ensemble.

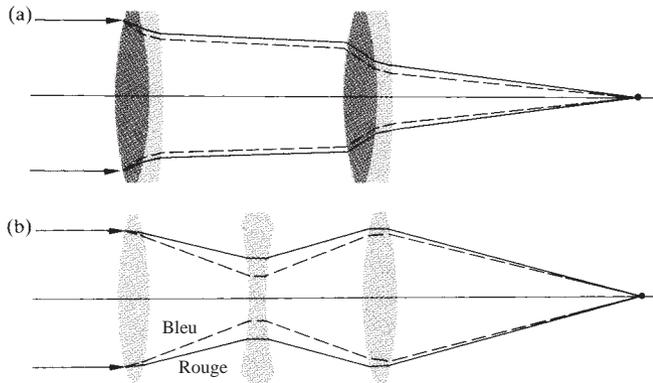


Figure 6.41 Objectifs achromatisés.

6.4 Systèmes GRIN

Une lentille homogène ordinaire a deux caractéristiques qui définissent la façon dont elle reconfigure un front d'onde : la différence entre son indice de réfraction et celui du milieu ambiant, et le rayon de courbure de ses interfaces. Mais on a déjà vu que lorsque la lumière se propage dans un milieu inhomogène, les fronts d'onde ralentissent dans les régions optiques denses et accélèrent dans les régions moins denses, ce qui fait dévier les rayons. Il doit donc être possible de fabriquer une lentille dans un matériau inhomogène qui possède un GRADIENT pour son INDICE de réfraction ; de tels composants, connus sous le nom de **lentille GRIN**, sont particulièrement intéressants car ils fournissent au concepteur des leviers supplémentaires pour contrôler les aberrations.

Pour saisir le fonctionnement d'une lentille GRIN, considérons la lentille de la figure 6.42 où par simplicité on suppose que $f > r$. C'est un disque plan dont l'indice de réfraction $n(r)$ décroît radialement suivant une loi qui reste à définir, depuis sa valeur maximale n_{\max} sur l'axe. La longueur de chemin optique (OPL) pour un rayon sur l'axe vaut $(OPL)_o = n_{\max}d$, alors que pour un rayon incident à la hauteur r , $(OPL)_r \approx n(r)d$. Puisque le composant doit transformer un front d'onde plan en un plan d'onde sphérique, tous les OPLs, indépendamment de la trajectoire suivie, doivent être égaux (p. 156) :

$$(OPL)_r + \overline{AB} = (OPL)_o$$

et

$$n(r)d + \overline{AB} = n_{\max}d$$

Mais $\overline{AF} \approx \sqrt{r^2 + f^2}$; de plus, $\overline{AB} = \overline{AF} - f$ et donc :

$$n(r) = n_{\max} - \frac{\sqrt{r^2 + f^2} - f}{d}$$

En développant la racine carrée au premier ordre, $n(r)$ s'écrit :

$$n(r) = n_{\max} - \frac{r^2}{2fd}$$

Cette expression nous dit que si l'indice de réfraction diminue radialement et de façon parabolique depuis l'axe optique, le disque GRIN focalise en F un faisceau incident collimaté comme une lentille positive. Bien que l'approche soit simpliste, elle nous permet d'établir qu'un matériau à profil d'indice de réfraction parabolique focalise un faisceau collimaté.

Aujourd'hui, une grande variété de lentilles GRIN est disponible dans le commerce, et des dizaines de millions d'entre elles sont utilisées dans les imprimantes laser, les photocopieurs

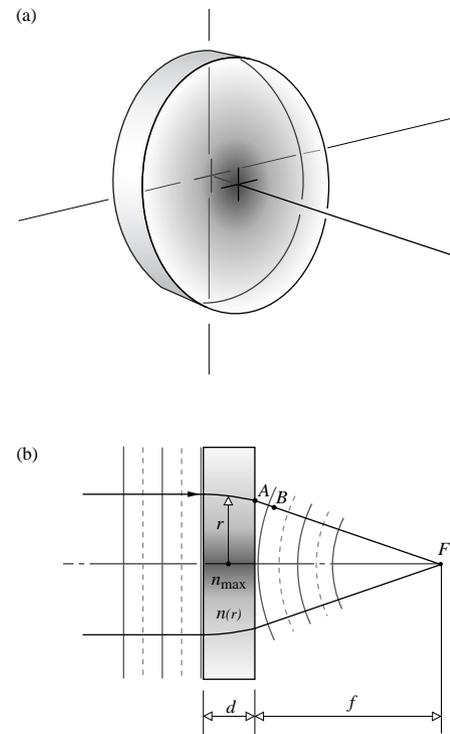


Figure 6.42 Disque en verre transparent dont l'indice de réfraction décroît radialement depuis le centre. (b) Formation de l'image d'un point à l'infini sur l'axe par une lentille GRIN.

et les télescopes. Les plus fréquentes sont les lentilles cylindriques de quelques millimètres de diamètre, similaires aux fibres optiques de la figure 5.72b. En lumière monochromatique leurs performances sont proches de la limite de diffraction. En lumière polychromatique, elles ont des avantages considérables par rapport aux asphériques.

On fabrique généralement les barreaux GRIN de petit diamètre par diffusion ionique. Un morceau de verre homogène est immergé dans un bain de sel fondu pendant plusieurs heures pendant lesquelles le processus de diffusion/échange d'ions a lieu. Des ions d'un type migrent en dehors du verre tandis que d'autres prennent leur place, ce qui modifie l'indice de réfraction. Le processus se propage radialement en direction de l'axe optique, et sa durée est à peu près proportionnelle au carré du diamètre du barreau. La focale est déterminée par la variation d'indice, Δn , et la lentille obtenue est d'autant plus ouverte que Δn est élevé. Δn est souvent limité à moins de 0,10 pour des raisons de production. La plupart des cylindres GRIN ont un profil d'indice de la forme :

$$n(r) = n_{\max}(1 - ar^2/2)$$

La figure 6.43 présente un barreau GRIN de longueur L en éclairage monochromatique. Les rayons méridiens ont un chemin optique sinusoïdal dans le plan d'incidence, qui est perpendiculaire à la face d'entrée. La période spatiale de ces sinusoïdes est $2\pi/\sqrt{a}$, où \sqrt{a} , la **constante de variation d'indice**, est fonction de λ et dépend du matériau GRIN employé. La coupe de la figure 6.43a indique comment une lentille GRIN radiale forme de l'objet une image redressée, réelle et agrandie. On obtient un grand nombre d'images différentes en modifiant la distance objet et la longueur de la lentille L . Il est même possible d'obtenir les plans objet et image sur les faces du barreau (figures 6.43b et c).

On spécifie souvent les lentilles GRIN par leur longueur, ou de manière équivalente, par leur **pitch** (figure 6.44). Un barreau GRIN de pitch 1,0 a une longueur égale à une période de la sinusoïde : $L = 2\pi/\sqrt{a}$. Un barreau de pitch 0,25 a une longueur d'un quart de sinusoïde ($\pi/2\sqrt{a}$).

Les lentilles GRIN avec des faces sphériques sont une alternative aux barreaux GRIN à faces planes. Leurs caractéristiques sont similaires aux bi-asphériques mais sans les difficultés de réalisation des surfaces complexes. En général, on empile des plaques de verre d'indices de réfraction appropriés qui vont fondre à haute température, diffuser les uns dans les autres et former ainsi un bloc de verre à profil

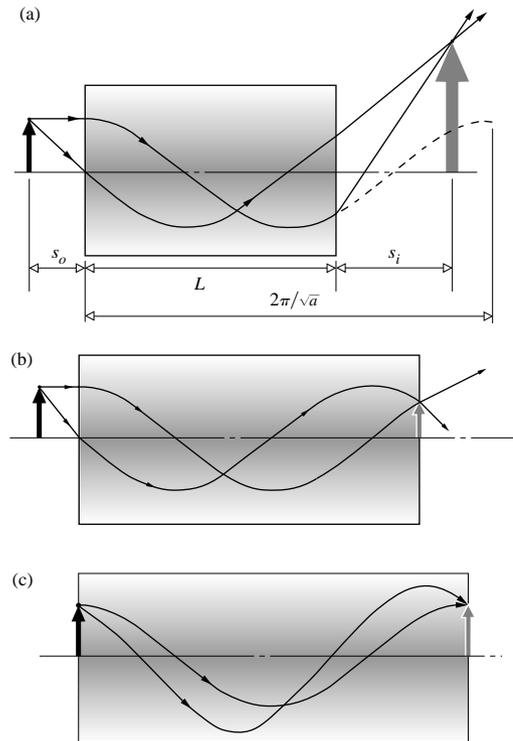


Figure 6.43 (a) Un barreau GRIN radial produisant une image réelle, droite et agrandie. (b) L'image se forme sur la face arrière du barreau. (c) Conjugaison utilisée dans les photocopieuses.

continu d'indice ; le profil obtenu peut être linéaire, quadratique, voire cubique (figure 6.45a). Si l'on usine un tel bloc sous la forme d'une lentille, le polissage dégage radialement les strates du bloc et met en contact la surface de la lentille avec différents indices. Les rayons incidents à diverses hauteurs rencontrent des milieux d'indices de réfraction différents et sont donc déviés en conséquence. L'aberration sphérique de la figure 6.45c est évidente car les bords de la lentille réfractent trop. Diminuer graduellement l'indice de réfraction sur les bords permet de corriger la lentille GRIN de l'aberration sphérique.

Généralement, l'introduction d'un élément GRIN dans la conception d'un objectif permet de simplifier le système en réduisant le nombre de lentilles, parfois d'un tiers, à performance globale identique.

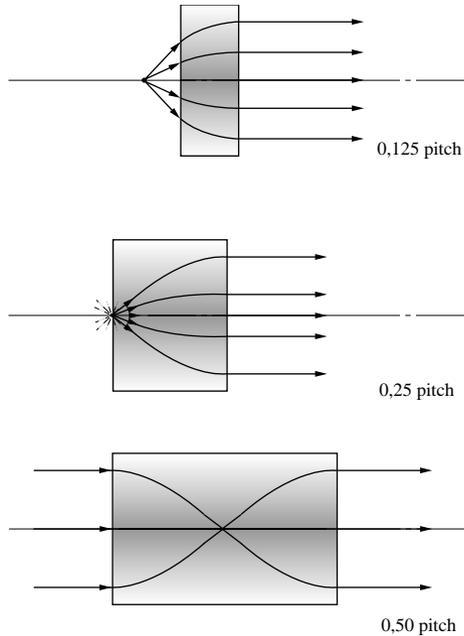


Figure 6.44 Lentilles GRIN de différents « pitch » dans plusieurs configurations.

6.5 Remarques pour conclure

Pour des raisons pratiques et des contraintes de production, la majorité des systèmes optiques se limite à des lentilles de surfaces sphériques. Bien sûr, on utilise aussi des lentilles toriques, cylindriques, ainsi que des asphériques. Dans les faits, des instruments très sophistiqués, comme les caméras de reconnaissance aérienne ou les systèmes de poursuite, comportent plusieurs asphériques. Mais les lentilles sphériques sont encore très largement employées et il faut gérer leurs aberrations. Comme on l'a vu, le concepteur (aidé de son fidèle ordinateur) doit manier les variables du système (indices, pupilles, etc.) pour compenser les aberrations. Il doit le faire en respectant les spécifications et les ordres de priorité du système. Ainsi, on peut tolérer beaucoup plus de distorsion et de courbure de champ dans un télescope ordinaire que dans un bon objectif photographique. De même, il n'est pas nécessaire de se soucier d'aberration chromatique quand on travaille avec un laser.

Quoi qu'il en soit, ce chapitre ne fait qu'effleurer les difficultés. Les photographies aériennes ci-contre montrent à l'évidence qu'ils sont solubles pour la plupart.

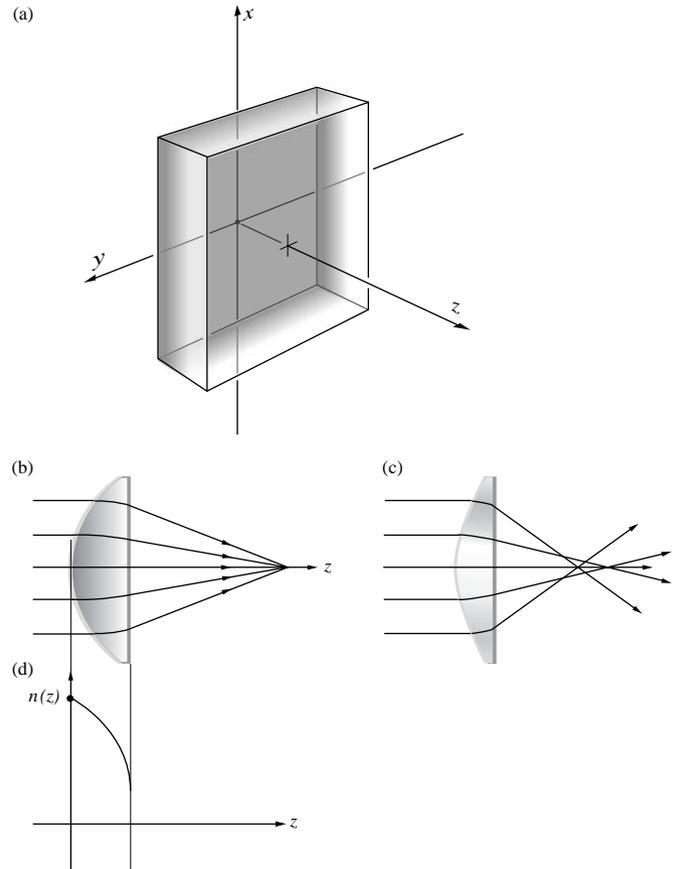
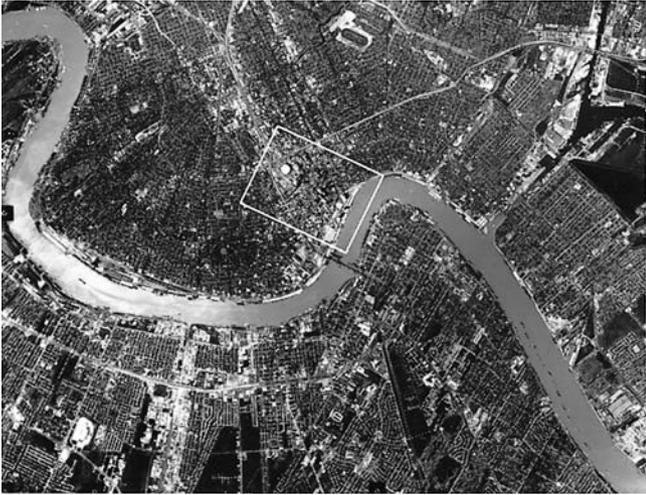


Figure 6.45 (a) Pavé de verre GRIN axial d'indice de réfraction $n(z)$. (b) Une lentille axiale-GRIN dépourvue d'aberration sphérique. (c) Lentille ordinaire avec de l'AS. (d) Son profil d'indice.

(a) La Nouvelle-Orléans et le fleuve Mississippi photographiés à 12 500 m d'altitude avec une caméra Metritek-21 de Itek ($f = 21$ cm). Résolution au sol, 1 m ; échelle, 1/59 492. (b) Échelle de la photo, 1/10 000. (c) Échelle de la photo, 1/2 500. (Litton/Itek Optical Systems.)



(a)



(b)



(c)

EXERCICES ET PROBLEMES

Les solutions complètes des exercices (excepté ceux ayant un astérisque) figurent à la fin de l'ouvrage.

6.1* Détailler les calculs menant à l'équation (6.8).

6.2 D'après le manuel militaire MIL-HDBK-141 (23.3.5.3), l'oculaire de Ramsden (figure 5.94) est constitué de deux lentilles plan-convexes de même focale f' séparées d'une distance $2f'/3$. Déterminer la focale f de cette combinaison et situer la position des plans principaux et du diaphragme de champ.

6.3 Donner l'expression de l'épaisseur d_l d'une lentille biconvexe de sorte que sa focale soit infinie.

6.4 Soit un ménisque positif de rayons 6 et 10, d'épaisseur 3 (peu importe les unités), et d'indice 1,5. Déterminer sa focale et la position de ses points principaux (comparer avec la figure 6.3).

6.5* Montrer que si les points principaux d'une lentille biconvexe d'épaisseur d_l sont confondus à mi-chemin entre les deux sommets, alors la lentille est nécessairement une sphère. On suppose que la lentille baigne dans l'air.

6.6 En utilisant l'équation (6.2), trouver l'expression de la focale d'une sphère transparente homogène de rayon R . Situer ses points principaux.

6.7* On remplit d'eau une bouteille de verre sphérique de 20 cm de diamètre dont la paroi est d'épaisseur négligeable. La bouteille se trouve sur le siège arrière d'une voiture un jour ensoleillé. Quelle est sa focale ?

6.8* Utiliser les résultats des deux exercices précédents pour calculer le grandissement d'une sphère en plastique transparent de 0,20 m de diamètre (et d'indice de réfraction 1,4) si l'objet est situé à 4 m du centre. Décrire l'image en détail.

6.9* Soit une lentille épaisse d'indice 1,50, et de rayons +23 cm et +20 cm, de sorte que les sommets se trouvent à gauche de leur centre de courbure. Étant donné que son épaisseur vaut 9 cm, trouver la focale de cette lentille. Montrer que de telles lentilles afocales vérifient $R_1 - R_2 = d/3$. Faire un schéma pour expliquer ce qui arrive à un faisceau de rayons parallèles à l'axe lors de son passage dans ce système optique.

6.10 La lumière du Soleil est focalisée à 29,6 cm de la face arrière d'une lentille épaisse dont les points principaux H_1 et H_2 sont situés à +0,2 cm et à -0,4 cm, respectivement, de cette face. Déterminer la position de l'image d'une bougie placée à 49,8 cm devant cette lentille.

6.11* Démontrer que la séparation entre les plans principaux d'une lentille épaisse vaut à peu près un tiers de son épaisseur. La géométrie la plus simple est celle d'une lentille plan-convexe dans laquelle on trace un rayon qui passe par le foyer objet. Que peut-on dire de la relation entre la focale et l'épaisseur pour ce genre de lentille ?

6.12 Une lentille biconvexe en crown de 4 cm d'épaisseur et fonctionnant à une longueur d'onde de 900 nm a un indice de réfraction de $3/2$. En prenant 4 cm et 15 cm pour valeurs des rayons, situer ses points principaux et calculer sa focale. Si l'on place un écran de télévision à 1 m devant la lentille, où sera son image réelle ?

6.13* Soit deux lentilles épaisses convexes identiques et séparées d'une distance de 20 cm entre leurs sommets adjacents. En fixant leurs rayons de courbure à 50 cm, leur indice de réfraction à 1,5 et leur épaisseur à 5 cm, calculer la focale de l'ensemble.

6.14* Un système est composé de deux lentilles minces séparées de 10 cm. La première a une focale de +20 cm, et la seconde de -20 cm. Déterminer la focale du système et situez ses points principaux. Faire un schéma du système.

6.15* Une lentille convexe d'indice $3/2$ a une épaisseur de 1,2 cm et un rayon de courbure de 2,5 cm. Déterminer la matrice de cette lentille quand la lumière est incidente sur la surface courbe.

6.16* Un ménisque positif d'indice 2,4 est immergé dans un milieu d'indice 1,9. La lentille a une épaisseur axiale de 9,6 mm et des rayons de courbure de 50 mm et 100 mm. Calculer la matrice du système quand la lumière est incidente sur la face convexe et montrer que son déterminant vaut 1.

6.17* Montrer que le déterminant de la matrice du système correspondant à l'équation (6.31) vaut 1.

6.18 Montrer que les équations (6.36) et (6.37) sont équivalentes aux équations (6.3) et (6.4), respectivement.

6.19 Montrer que la surface plane d'une lentille plan-concave ou plan-convexe n'intervient pas dans l'écriture de sa matrice.

6.20 Établir l'expression de la matrice d'une lentille épaisse biconvexe d'indice 1,5, de rayons 0,5 et 0,25 et d'épaisseur 0,3 (peu importe les unités). Vérifier que $|\mathcal{A}| = 1$.

6.21* L'expression de la matrice d'une lentille double convexe dans l'air est donnée par :

$$\begin{bmatrix} 0,6 & -2,6 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Sachant que le premier rayon vaut 0,5 cm, que son épaisseur vaut 0,3 cm, et que son indice vaut 1,5, trouver la valeur de l'autre rayon.

6.22* Une lentille plan-concave ($n = 1,50$) dans l'air a un rayon de courbure de 10 cm et une épaisseur de 1 cm. Déterminer sa matrice et vérifier que son déterminant vaut 1. Quel doit être, en radians, l'angle par rapport à l'axe d'un rayon incident dont le point d'impact sur la lentille est à 2 cm de l'axe, pour que le rayon émerge parallèlement à l'axe optique et à la même hauteur ?

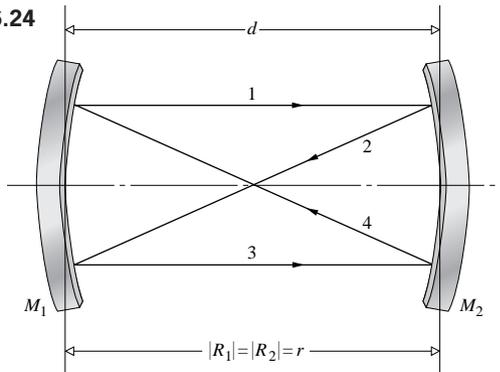
6.23* Déterminer, pour la lentille de l'exercice 6.20, sa focale et la position des foyers par rapport à ses sommets V_1 et V_2 .

6.24* La figure P.6.24 représente deux miroirs sphériques concaves identiques formant une cavité dite confocale. Montrer, sans spécifier la valeur de d , qu'après deux réflexions dans la cavité, la matrice du système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{2d}{r} - 1\right)^2 - \frac{2d}{r} & \frac{4}{r} \left(\frac{d}{r} - 1\right) \\ 2d \left(1 - \frac{d}{r}\right) & 1 - 2\frac{d}{r} \end{bmatrix}$$

Dans le cas où $d = r$, montrer qu'après quatre réflexions, la lumière repasse par le même chemin.

Figure P.6.24

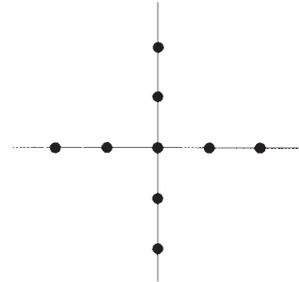


6.25 En se référant à la figure 6.17a, montrer que quand $\overline{P'C} = Rn_2/n_1$ et $\overline{PC} = Rn_1/n_2$, tous les rayons partant de P semblent venir de P' .

6.26 En partant de l'expression exacte donnée par l'équation (5.5), montrer qu'on aboutit à l'équation (6.40) plutôt qu'à l'équation (5.8) lorsqu'on approxime ℓ_o et ℓ_i plus finement.

6.27 En supposant que la figure P.6.27 soit observée par un système optique entaché d'aberration sphérique, faites un schéma de l'image obtenue.

Figure P.6.27



6.28* La figure P.6.28 montre la distribution d'éclairement dans l'image d'un point source monochromatique pour trois systèmes optiques différents ; chacun ayant un seul type d'aberration. Identifier l'aberration mise en cause dans chaque cas (a, b et c) et justifier sa réponse.

Figure P.6.28a

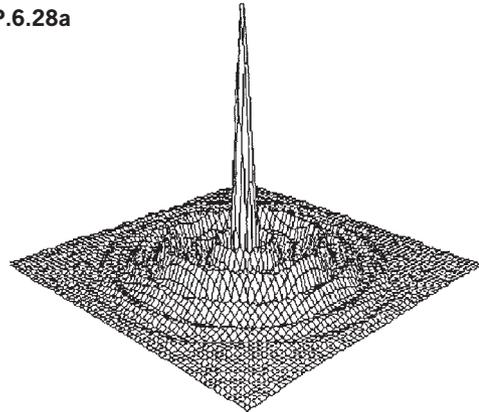


Figure P.6.28b

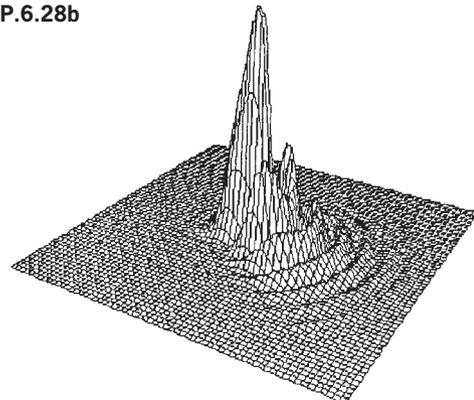
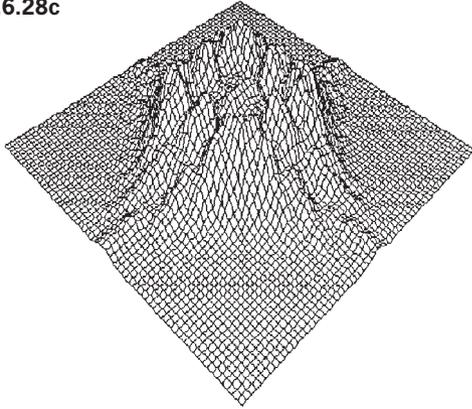


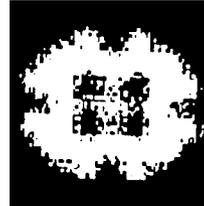
Figure P.6.28c



6.29* La figure P.6.29 montre la distribution d'éclairement dans l'image d'un point source monochromatique pour deux systèmes optiques différents ; chacun ayant un seul type d'aberration. Identifier l'aberration mise en cause dans chaque cas (a, b et c) et justifier sa réponse.

Figure P.6.29

(a)



(b)



Superposition des ondes

Dans les chapitres suivants, nous étudierons les phénomènes de polarisation, d'interférence et de diffraction. Ils partagent la même base conceptuelle, car ils traitent tous principalement des différents aspects d'un même processus. En bref, nous nous intéresserons à ce qui se passe lorsque deux ondes lumineuses se superposent dans une région de l'espace. Les circonstances précises qui créent cette superposition déterminent la perturbation optique finale. Nous essayerons également de comprendre dans quelle mesure les propriétés spécifiques de chaque onde constituante (amplitude, phase, fréquence, etc.) influencent la forme de la perturbation résultante.

Souvenons-nous que chaque composante du champ d'une onde électromagnétique (E_x , E_y , E_z , B_x , B_y , et B_z) satisfait l'équation d'onde différentielle scalaire tridimensionnelle,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad [2.60]$$

Une caractéristique essentielle remplie par cette équation est qu'elle est *linéaire* ; $\psi(\vec{r}, t)$ et ses dérivées n'apparaissent qu'en puissances du premier ordre. Par conséquent, si $\psi_1(\vec{r}, t)$, $\psi_2(\vec{r}, t)$... $\psi_n(\vec{r}, t)$ sont des solutions individuelles de l'équation (2.60), toute combinaison linéaire de celles-ci sera à son tour une solution, donc :

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^n C_i \psi_i(\vec{r}, t) \quad (7.1)$$

satisfait à l'équation d'onde, où les coefficients C_i ne sont que des constantes arbitraires. Connue sous le nom de **principe de superposition**, cette propriété suggère que la perturbation résultante en tout point d'un milieu est la somme algébrique des ondes individuelles dont elle est constituée (figure 7.1). Pour l'instant, intéressons-nous seulement aux systèmes linéaires pour lesquels le principe de superposition est applicable. Gardons bien à l'esprit néanmoins que les ondes de

grande amplitude, que ce soit des ondes acoustiques ou la vibration d'une corde, peuvent produire une réponse non linéaire. Le faisceau focalisé d'un laser de forte puissance (où

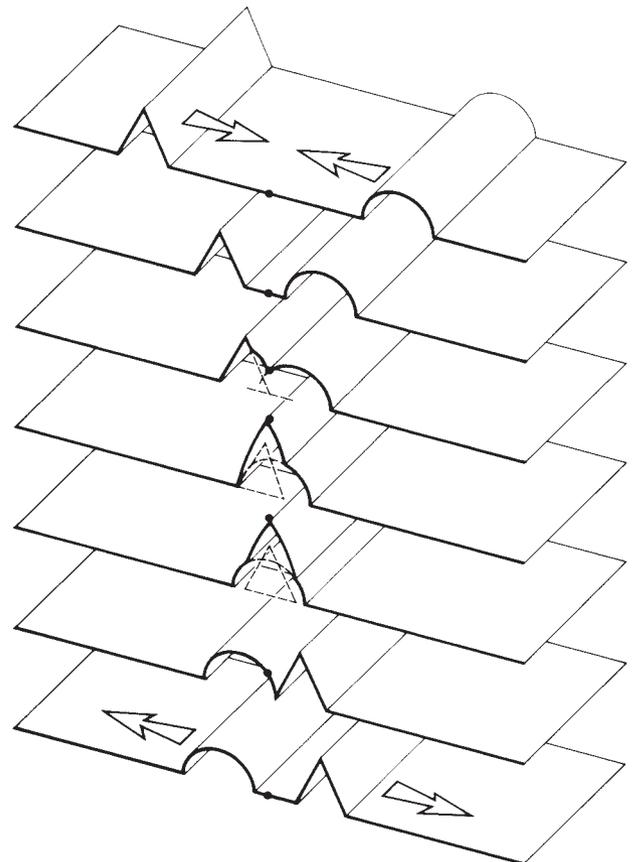


Figure 7.1 Superposition de deux perturbations.

le champ électrique peut atteindre 10^{10} V/cm) est aisément capable de produire des effets non linéaires (chapitre 13). En comparaison, le champ électrique associé à la lumière solaire sur la Terre n'a qu'une amplitude de 10 V/cm.

Dans de nombreux exemples, nous n'aurons pas besoin de prendre en compte la nature vectorielle de la lumière, et nous nous limiterons pour l'instant à ces cas-là. Si par exemple les ondes lumineuses se propagent toutes le long d'un même axe et partagent un plan de vibration commun qui est constant, on peut décrire chacune d'entre elles en termes d'une seule composante de champ électrique. À chaque instant elles seraient toutes parallèles ou antiparallèles, et l'on peut donc les traiter comme des scalaires. On en dira plus à ce sujet par la suite, mais, pour le moment, considérons que la perturbation optique est une fonction scalaire $E(\vec{r}, t)$, solution de l'équation d'onde différentielle. Cette approche conduit à une théorie scalaire simple et grandement utile si l'on reste prudent dans sa mise en application.

7.1 Addition d'ondes de même fréquence

Il existe plusieurs façons équivalentes d'additionner mathématiquement deux ou plusieurs ondes de mêmes fréquence et longueur d'onde, qui se superposent. Examinons ces différentes approches afin de pouvoir appliquer la plus adaptée à une situation donnée.

7.1.1 La méthode algébrique

Une solution de l'équation d'onde différentielle peut s'écrire sous la forme :

$$E(x, t) = E_0 \sin [\omega t - (kx + \varepsilon)] \quad (7.2)$$

où E_0 est l'amplitude de la perturbation harmonique qui se propage le long de l'axe des x positifs. Afin de séparer les parties spatiale et temporelle de la phase, posons :

$$\alpha(x, \varepsilon) = -(kx + \varepsilon) \quad (7.3)$$

ainsi :

$$E(x, t) = E_0 \sin [\omega t + \alpha(x, \varepsilon)] \quad (7.4)$$

Supposons alors qu'il coexiste dans l'espace deux de ces ondes :

$$E_1 = E_{01} \sin (\omega t + \alpha_1) \quad (7.5a)$$

$$\text{et} \quad E_2 = E_{02} \sin (\omega t + \alpha_2) \quad (7.5b)$$

chacune ayant la même fréquence et la même vitesse. La perturbation résultante est la superposition linéaire de ces ondes :

$$E = E_1 + E_2$$

Avant d'aller plus loin, il est important de savoir ce que l'on cherche. La somme doit prendre la forme de l'équation (7.4), car on ne peut additionner deux signaux de même fréquence et obtenir un signal résultant de fréquence différente. Cela se comprend très bien si l'on se souvient que la fréquence d'un photon correspond à son énergie et qu'elle ne change pas. Nous devons donc toujours nous attendre à obtenir une fonction sinusoïdale de pulsation ω , avec une amplitude (E_0) et une phase (α) à déterminer.

En additionnant et en développant les équations (7.5a) et (7.5b), on obtient :

$$E = E_{01} (\sin \omega t \cos \alpha_1 + \cos \omega t \sin \alpha_1) \\ + E_{02} (\sin \omega t \cos \alpha_2 + \cos \omega t \sin \alpha_2)$$

Après avoir séparé les termes dépendant du temps, on arrive à :

$$E = (E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2) \sin \omega t \\ + (E_{01} \sin \alpha_1 + E_{02} \sin \alpha_2) \cos \omega t \quad (7.6)$$

Comme les quantités entre parenthèses sont constantes dans le temps, posons :

$$E_0 \cos \alpha = E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2 \quad (7.7)$$

$$\text{et} \quad E_0 \sin \alpha = E_{01} \sin \alpha_1 + E_{02} \sin \alpha_2 \quad (7.8)$$

Ce n'est pas une substitution évidente, mais elle se justifie dans la mesure où on trouve E_0 et α . Dans ce but, et en se rappelant que $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, élevons au carré et additionnons les équations (7.7) et (7.8) pour obtenir :

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos (\alpha_2 - \alpha_1) \quad (7.9)$$

C'est l'expression recherchée pour l'amplitude (E_0) de l'onde résultante. Pour obtenir la phase, divisons l'équation (7.8) par (7.7) :

$$\tan \alpha = \frac{E_{01} \sin \alpha_1 + E_{02} \sin \alpha_2}{E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2} \quad (7.10)$$

Étant donné que ces deux dernières expressions sont satisfaites pour E_0 et α , la forme des équations (7.7) et (7.8) est valide. La perturbation totale [équation (7.6)] devient alors :

$$E = E_0 \cos \alpha \sin \omega t + E_0 \sin \alpha \cos \omega t$$

ou :

$$E = E_0 \sin(\omega t + \alpha) \quad (7.11)$$

où on peut utiliser l'équation (7.9) pour déterminer E_0 et l'équation (7.10) pour calculer α . Une perturbation unique résulte de la superposition des ondes sinusoïdales E_1 et E_2 . L'onde résultante [équation (7.11)] est harmonique et de même fréquence que les ondes qui la composent, bien que son amplitude et sa phase soient différentes.

Notons que, si $E_{01} \gg E_{02}$ dans l'équation (7.10), $\alpha \approx \alpha_1$ et que, si $E_{02} \gg E_{01}$, $\alpha \approx \alpha_2$; l'onde résultante est en phase avec la composante qui domine (regardez à nouveau la figure 4.11). L'éclairement étant proportionnel au carré de l'amplitude de l'onde, d'après l'équation (3.44), il découle de l'équation (7.9) que l'éclairement résultant n'est pas simplement la somme des éclaircissements individuels ; il y a une contribution additionnelle $2E_{01}E_{02} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$, connue sous le nom de **terme d'interférence**. Le facteur crucial est la différence de phase $\delta \equiv (\alpha_2 - \alpha_1)$ entre les deux ondes E_1 et E_2 qui interfèrent. Quand $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$, l'amplitude résultante est un maximum, tandis que $\delta = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ produit un minimum au point correspondant (problème 7.3). Dans le premier cas, les ondes sont dites en phase, et les crêtes coïncident. Dans le second cas, les ondes sont déphasées de 180° et un creux de l'une correspond à une crête de l'autre, comme le montre la figure 7.2. La *différence de phase* peut provenir d'une différence dans les trajets suivis par les deux ondes, ou d'une différence de phase initiale, c'est-à-dire,

$$\delta = (kx_1 + \varepsilon_1) - (kx_2 + \varepsilon_2) \quad (7.12)$$

ou

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (7.13)$$

Ici x_1 et x_2 sont les distances entre les deux sources et le point d'observation, et λ la longueur d'onde dans le milieu ambiant. Si les ondes sont initialement en phase à l'émission, alors $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, et :

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2) \quad (7.14)$$

Ce résultat s'appliquerait également au cas où deux perturbations issues de la même source emprunteraient des routes différentes avant d'arriver au point d'observation. Comme $n = c/v = \lambda_0/\lambda$,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} n(x_1 - x_2) \quad (7.15)$$

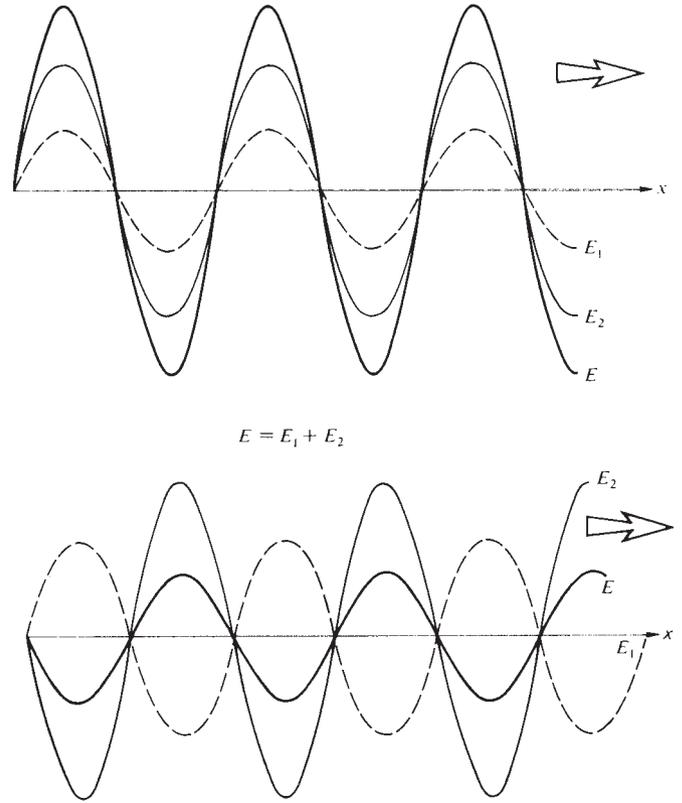


Figure 7.2 La superposition de deux ondes harmoniques, en phase et en opposition de phase.

La quantité $n(x_1 - x_2)$ est la **différence de chemin optique** et on la représentera par l'abréviation OPD ou par le symbole Λ . C'est la différence entre les deux trajets optiques [équation (4.9)]. Il est possible dans des situations plus complexes, que chaque onde traverse différentes épaisseurs de milieux divers (problème 7.6). Notons également que $\Lambda/\lambda_0 = (x_1 - x_2)/\lambda$ est le nombre de cycles dans le milieu correspondant à cette différence de chemin ; on dira qu'un trajet est plus long que l'autre de tant de longueurs d'onde. Comme chaque longueur d'onde est associée à un changement de phase de 2π radians, $\delta = 2\pi(x_1 - x_2)/\lambda$, ou :

$$\delta = k_0 \Lambda \quad (7.16)$$

k_0 étant le module du vecteur d'onde dans le vide ; c'est-à-dire, $2\pi/\lambda_0$. On dira aussi qu'un trajet est δ radians plus long que l'autre.

Les ondes pour lesquelles $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ est *constant*, indépendamment de sa valeur, sont dites **cohérentes**, condition que nous supposons remplie la plupart du temps.

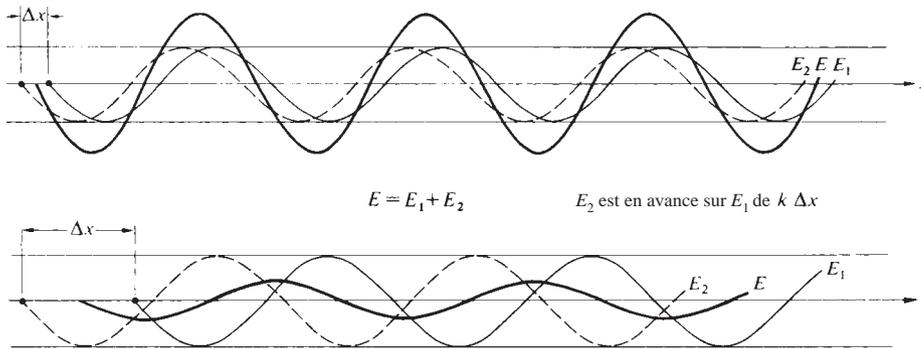


Figure 7.3 Ondes déphasées de $k\Delta x$ radians.

Un cas particulier intéressant est la superposition de deux ondes qui parcourent des distances légèrement différentes (Δx) dans la même direction :

$$E_1 = E_{01} \sin [\omega t - k(x + \Delta x)]$$

et :
$$E_2 = E_{02} \sin (\omega t - kx)$$

où en particulier $E_{01} = E_{02}$ et $\alpha_2 - \alpha_1 = k \Delta x$. On laisse le soin au problème 7.7 de montrer que dans ce cas les équations (7.9), (7.10) et (7.11) conduisent à une onde résultante :

$$E = 2E_{01} \cos \left(\frac{k \Delta x}{2} \right) \sin \left[\omega t - k \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \quad (7.17)$$

Cela met en évidence le rôle prépondérant joué par la différence de longueur de trajet, Δx , spécialement quand les ondes sont émises en phase ($\epsilon_1 = \epsilon_2$). Il existe beaucoup d'exemples pratiques où ces conditions sont remplies, comme nous le verrons plus tard. Si $\Delta x \ll \lambda$, la résultante a une amplitude proche de $2E_{01}$, tandis que si $\Delta x = \lambda/2$, comme $k = 2\pi/\lambda$, le terme en cosinus est nul et $E = 0$. Rappelons que la première situation (p. 21) correspond à une **interférence constructive**, et la seconde à une **interférence destructive** (figure 7.3).

Afin de souligner les nombreuses applications potentielles de ces idées dans la pratique, considérons la figure 7.4. Elle représente un avion de chasse éclairé par un radar hostile au sol. Au désespoir du pilote (s'il n'est pas dans un F-117 furtif, p. 106) l'avion réfléchit une partie non négligeable de l'énergie radar vers l'antenne émettrice. Heureusement, tout n'est pas perdu ; ayant détecté le faisceau, l'avion capte sa fréquence et son amplitude, et émet de lui-même une onde radar déphasée de $\lambda/2$. Se propageant vers la source à peu près dans la même direction, les deux ondes (réfléchi et transmise) interfèrent de manière destructive [via l'équation (7.17)], supprimant ainsi

l'écho radar dans la direction spécifique du détecteur ennemi. Bien sûr, s'il y avait plusieurs récepteurs au sol, le pilote se trouverait en situation délicate.

Superposition d'ondes multiples

En répétant la méthode utilisée pour obtenir équation (7.11), on peut montrer que la **superposition d'un nombre quelconque d'ondes harmoniques cohérentes, de fréquence identique et se propageant dans la même direction aboutit à une onde harmonique de même fréquence** (figure 7.5). Nous avons choisi de représenter les deux ondes ci dessus par des fonctions en sinus, mais on obtiendrait les mêmes résultats avec des fonctions en cosinus. Donc, de manière générale, la somme de ces N ondes :

$$E = \sum_{i=1}^n E_{0i} \cos (\alpha_i \pm \omega t)$$

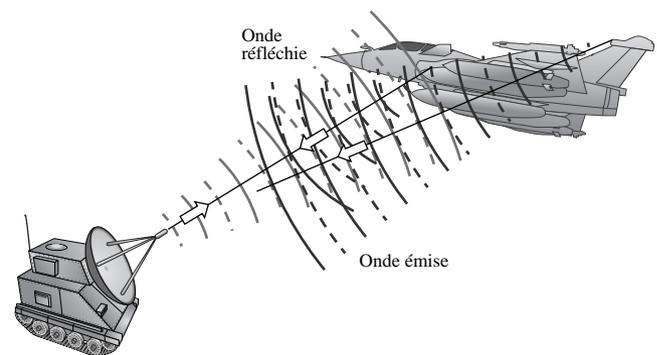


Figure 7.4 L'avion de chasse français Rafale utilise une « méthode d'annulation active » pour tromper la détection radar. Il envoie un signal déphasé d'une demi-longueur d'onde par rapport à l'onde radar qu'il réfléchit. Les ondes réfléchi et émise s'annulent dans la direction du récepteur adverse.

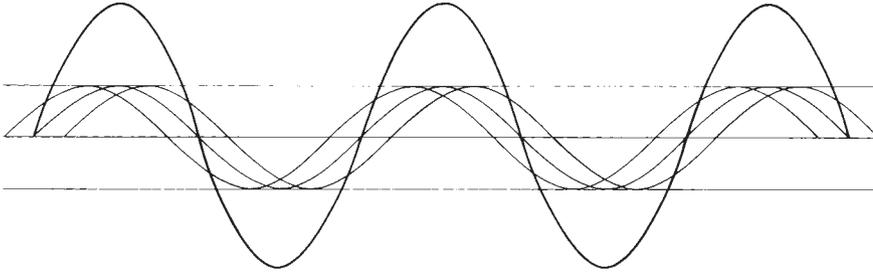


Figure 7.5 La superposition de trois ondes harmoniques produit une onde harmonique de même fréquence.

est donnée par $E = E_0 \cos(\alpha \pm \omega t)$ (7.18)

où :

$$E_0^2 = \sum_{i=1}^N E_{0i}^2 + 2 \sum_{j>i}^N \sum_{i=1}^N E_{0i} E_{0j} \cos(\alpha_i - \alpha_j) \quad (7.19)$$

et :

$$\tan \alpha = \frac{\sum_{i=1}^N E_{0i} \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^N E_{0i} \cos \alpha_i} \quad (7.20)$$

Faisons une pause et assurons-nous que ces relations sont réellement exactes.

Considérons un nombre (N) d'émetteurs atomiques constituant une source ordinaire (une lampe à incandescence, la flamme d'une bougie ou une lampe à décharge). Ces sources émettent un flux correspondant à un « torrent » de photons, qui se comportent dans leur ensemble comme une onde électromagnétique. Pour conserver une approche ondulatoire, il est pratique d'imaginer que le photon est en quelque sorte associé à une onde impulsionnelle oscillante, de courte durée. Chaque atome est effectivement une source indépendante de trains de photons (paragraphe 3.4.4) qui durent de 1 à 10 ns. En d'autres termes, les atomes émettent des trains d'ondes, dont la phase n'est constante que pendant 10 ns au maximum. Après quoi, un nouveau train d'onde est alors émis, avec une phase totalement aléatoire par rapport à la précédente, et une durée qui ne dépassera pas 10 ns et ainsi de suite. Pour résumer, chaque atome émet donc une perturbation (composée d'un courant de photons) qui change rapidement et aléatoirement de phase.

D'une façon générale, la phase de l'onde émise par un atome $\alpha_i(t)$, restera constante par rapport à celle d'un autre atome $\alpha_j(t)$, pendant moins de 10 ns, avant de changer de manière aléatoire ; les atomes sont cohérents au maximum sur 10^{-8} s. Comme l'éclairement est proportionnel à la moyenne temporelle de E_0^2 , et qu'on l'évalue généralement sur un intervalle de temps comparativement long, il s'ensuit que la seconde somme

de l'équation (7.19) aboutit à des termes proportionnels à $\langle \cos[\alpha_i(t) - \alpha_j(t)] \rangle$, qui seront tous nuls en moyenne en raison des rapides changements de phase. Il ne reste que la première somme dans la moyenne temporelle, et ses termes sont constants. Si chaque atome émet des trains d'ondes de même amplitude E_{01} , alors :

$$E_0^2 = N E_{01}^2 \quad (7.21)$$

L'éclairement issu de N sources similaires ayant des phases rapidement et aléatoirement variables vaut N fois l'éclairement donné par chacune de ces sources. De façon plus générale, il est égal à la somme des éclairagements individuels.

Le filament d'une torche électrique, dont les atomes émettent de façon aléatoire, envoi de la lumière qui (en tant que superposition de ces trains d'onde essentiellement « incohérents ») change elle-même rapidement et aléatoirement de phase. Deux filaments ou plus émettront par conséquent de la lumière essentiellement incohérente (i.e. pour des durées supérieures à 10 ns), et l'éclairement combiné sera simplement la somme des éclairagements dus à chaque ampoule individuelle. C'est également vrai pour les flammes de bougies, les flashes, et toutes les sources thermiques (c'est différent avec des lasers). **Il ne faut pas s'attendre à obtenir des interférences en superposant les ondes lumineuses de deux lampes de chevet.**

À l'autre extrême, où les sources sont cohérentes et en phase au point d'observation (i.e. $\alpha_i = \alpha_j$), l'équation (7.19) devient :

$$E_0^2 = \sum_{i=1}^N E_{0i}^2 + 2 \sum_{j>i}^N \sum_{i=1}^N E_{0i} E_{0j}$$

ou, de manière équivalente,

$$E_0^2 = \left(\sum_{i=1}^N E_{0i} \right)^2 \quad (7.22)$$

Si l'on suppose à nouveau que chaque amplitude vaut E_{01} , on obtient :

$$E_0^2 = (N E_{01})^2 = N^2 E_{01}^2 \quad (7.23)$$

Dans ce cas de sources cohérentes et en phase, il faut d'abord sommer les amplitudes puis les élever au carré afin d'obtenir l'éclairement résultant. La superposition cohérente d'ondes a souvent comme effet d'altérer la distribution spatiale de l'énergie sans modifier cette dernière. S'il y a des zones où l'éclairement est supérieur à la somme des éclairements dus aux sources individuelles, il y a d'autres endroits où l'éclairement sera inférieur.

7.1.2 La méthode complexe

Il est souvent mathématiquement pratique d'utiliser la représentation complexe quand on traite de la superposition de perturbations harmoniques. On peut alors écrire :

$$E_1 = E_{01} \cos(kx \pm \omega t + \varepsilon_1)$$

ou
$$E_1 = E_{01} \cos(\alpha_1 \mp \omega t)$$

ou encore :

$$\tilde{E}_1 = E_{01} e^{i(\alpha_1 \mp \omega t)} \quad (7.24)$$

en n'oubliant pas qu'on ne s'intéresse qu'à la partie réelle (paragraphe 2.5). Supposons que N de ces ondes se superposent, à la même fréquence et dans la direction des x positifs. L'onde résultante est donnée par :

$$\tilde{E} = E_0 e^{i(\alpha + \omega t)}$$

qui est l'équivalent de l'équation (7.18) ou après sommation des ondes composantes,

$$\tilde{E} = \left[\sum_{j=1}^N E_{0j} e^{i\alpha_j} \right] e^{+i\omega t} \quad (7.25)$$

La quantité :

$$E_0 e^{i\alpha} = \sum_{j=1}^N E_{0j} e^{i\alpha_j} \quad (7.26)$$

est l'amplitude complexe de l'onde globale, c'est-à-dire la somme des amplitudes complexes des ondes qui la composent. Comme :

$$E_0^2 = (E_0 e^{i\alpha})(E_0 e^{i\alpha})^* \quad (7.27)$$

nous pouvons toujours calculer l'éclairement résultant à partir des équations (7.26) et (7.27). Par exemple, si $N = 2$,

$$E_0^2 = (E_{01} e^{i\alpha_1} + E_{02} e^{i\alpha_2})(E_{01} e^{-i\alpha_1} + E_{02} e^{-i\alpha_2})$$

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + E_{01} E_{02} [e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} + e^{-i(\alpha_1 - \alpha_2)}]$$

ou
$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01} E_{02} \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

ce qui est identique à l'équation (7.9).

7.1.3 Addition de phaseurs

On peut représenter graphiquement la sommation décrite dans l'équation (7.26) comme une addition de vecteurs dans le plan complexe (se reporter à la discussion de la p. 22). En langage d'ingénierie électrique, on appelle **phaseur** une amplitude complexe, caractérisée par son module et sa phase, et que l'on écrit simplement $E_0 \angle \alpha$. Considérons alors une perturbation décrite par :

$$E_1 = E_{01} \sin(\omega t + \alpha_1)$$

Dans la figure 7.6a l'onde est représentée par un vecteur de longueur E_{01} tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre à une pulsation ω , de telle sorte que sa projection sur l'axe vertical est $E_{01} \sin(\omega t + \alpha_1)$. Si l'on préfère les expressions en cosinus, on prendra la projection sur l'axe horizontal. À propos, le vecteur tournant est bien sûr un phaseur $E_{01} \angle \alpha_1$, et les notations R et I désignent les axes réels et imaginaires. De même, on a tracé une seconde onde :

$$E_2 = E_{02} \sin(\omega t + \alpha_2)$$

avec E_1 sur la figure 7.6b. Leur somme algébrique, $E = E_1 + E_2$, est la projection sur l'axe I du phaseur qui résulte de l'addition vectorielle des phaseurs constitutifs, comme dans la figure 7.6c. La loi des cosinus appliquée au triangle de côtés E_{01} , E_{02} , et E_0 conduit à :

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01} E_{02} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

On a utilisé le fait que $[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = -\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$. Ce résultat est identique à l'équation (7.9), comme cela se doit. En utilisant le même diagramme, on peut voir que $\tan \alpha$ est également donnée par l'équation (7.10). On cherche plus souvent à trouver E_0 plutôt que $E(t)$, et comme E_0 n'est pas affecté par une rotation à vitesse constante de tous les phaseurs, il sera souvent pratique de poser $t = 0$ et d'éliminer cette rotation.

Certains schémas assez élégants, comme la courbe de vibrations et la spirale de Cornu (Chapitre 10), utiliseront la

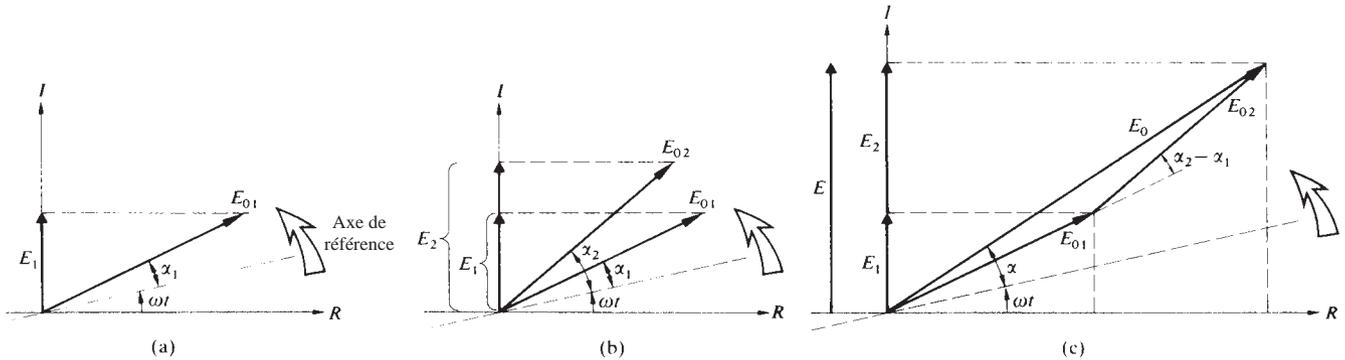


Figure 7.6 Addition de phaseurs.

technique d'addition de phaseurs. Comme autre exemple, étudions brièvement l'onde qui résulte de l'addition suivante :

$$E_1 = 5 \sin \omega t$$

$$E_2 = 10 \sin (\omega t + 45^\circ)$$

$$E_3 = \sin (\omega t - 15^\circ)$$

$$E_4 = 10 \sin (\omega t + 120^\circ)$$

et

$$E_5 = 8 \sin (\omega t + 180^\circ)$$

avec ω en degrés par seconde. Les phaseurs appropriés $5 \angle 0^\circ$, $10 \angle 45^\circ$, $1 \angle -15^\circ$, $10 \angle 120^\circ$, et $8 \angle 180^\circ$ sont tracés sur la figure 7.7. On notera que chaque angle de phase, qu'il soit positif ou négatif, est défini par rapport à l'horizontale. On a

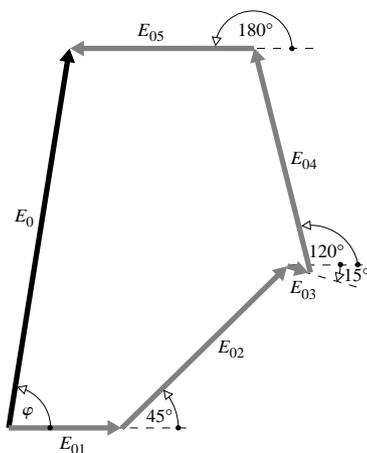


Figure 7.7 Somme des phaseurs E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , et E_5 .

seulement besoin de mesurer $E_0 \angle \varphi$ avec une règle et un rapporteur pour obtenir $E = E_0 \sin (\omega t + \alpha)$. Il est évident que cette technique offre un énorme avantage en vitesse et en simplicité, malgré son manque de précision.

Pour illustrer la méthode, la figure 7.8 décrit la superposition de deux ondes d'amplitudes différentes, de même fréquence et déphasées d'une grandeur α . Notons que l'amplitude de chaque onde (E_{01} ou E_{02}) est l'amplitude du phaseur correspondant. La longueur du phaseur somme (E_0) est égal à l'amplitude de l'onde résultante, et son angle de phase est légèrement inférieur à α . Dans une situation similaire à celle de la figure 7.5, on représente quatre ondes de

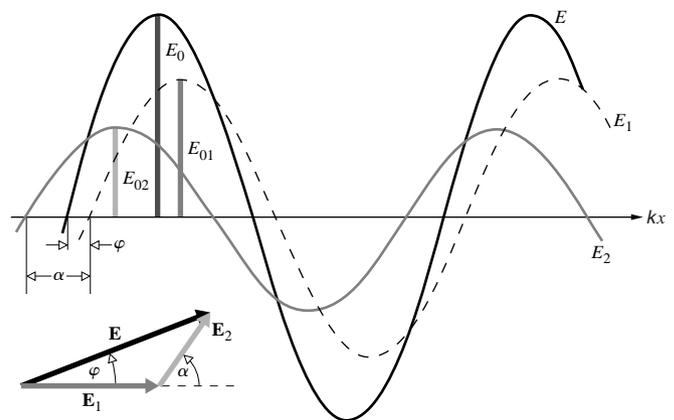


Figure 7.8 Somme de deux fonctions sinusoïdales de même fréquence par addition de phaseurs. Ici E_1 est pris comme phaseur de référence, et comme E_2 est en avance de phase sur E_1 (i.e. son pic se produit plus tôt) l'angle α est positif. Donc φ est positif et la résultante E est aussi en avance sur E_1 .

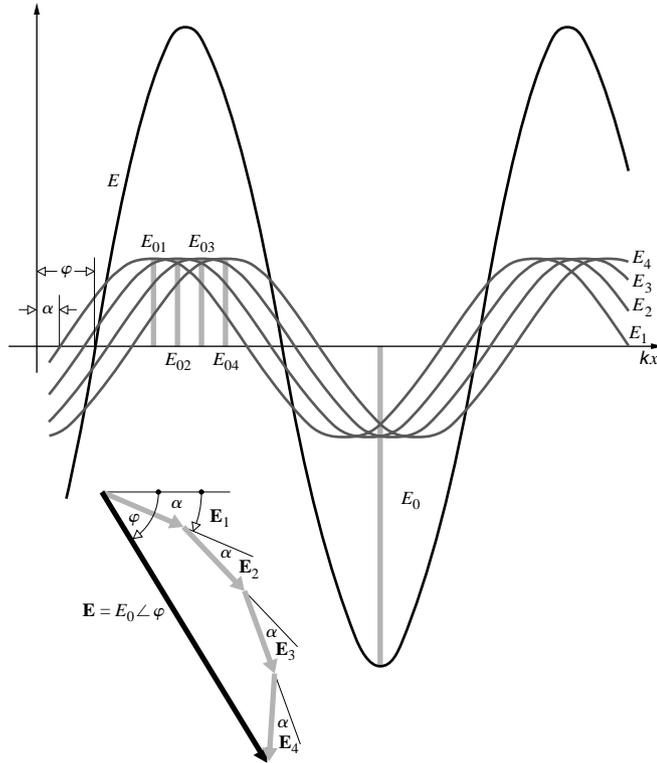


Figure 7.9 Somme de quatre ondes sinusoïdales de même fréquence. Afin de pouvoir exploiter par la suite la méthode des phaseurs, on prend cette fois l'axe des abscisses pour origine de la phase, à partir de laquelle on référence le reste des éléments. L'onde E_1 retarde de α par rapport à l'origine ; ce qui fait que l'amplitude de l'onde est nulle pour une valeur de kx supérieure à 0. De plus, chaque onde retarde par rapport à la précédente de ce même angle α . En conséquence, on trace le phaseur \mathbf{E}_1 en dessous de la référence horizontale, qui retarde ainsi de α . Tous les autres phaseurs retardent successivement les uns par rapport aux autres de la même quantité. Notons que la longueur du phaseur résultant est égale à l'amplitude de l'onde résultante.

fréquence identique (figure 7.9), chacune décalée par rapport à la précédente d'une même valeur α , qui est faible. Le phaseur résultant est $\mathbf{E} = E_0 \angle \varphi$, et il a l'amplitude et la phase de l'onde résultante. Son amplitude est importante mais il est à noter que si l'on augmentait le nombre des ondes contributives, leurs phaseurs mis bout à bout, formeraient une spirale et E_0 commencerait à décroître. Cela est très visible sur le diagramme des phaseurs mais moins évident dans la représentation ondulatoire.

7.1.4 Ondes stationnaires

Nous avons vu précédemment (p. 21) que la somme de solutions de l'équation d'onde différentielle est elle-même une solution. Donc, en général :

$$\psi(x, t) = C_1 f(x - vt) + C_2 g(x + vt)$$

vérifie l'équation d'onde différentielle. Examinons en particulier le cas où deux ondes harmoniques de même fréquence se propagent dans des directions opposées, ce qui se produit en pratique quand une onde sous incidence normale est réfléchiée à la surface d'un miroir, une onde sonore sur un mur, ou une onde électromagnétique sur une feuille conductrice. Considérons une onde qui arrive en se propageant vers la gauche,

$$E_I = E_{0I} \sin(kx + \omega t + \varepsilon_I) \tag{7.28}$$

Elle frappe un miroir en $x = 0$, et est réfléchiée vers la droite sous la forme :

$$E_R = E_{0R} \sin(kx - \omega t + \varepsilon_R) \tag{7.29}$$

L'onde qui résulte à droite du miroir est $E = E_I + E_R$. Les deux ondes (l'une se propageant vers la droite, l'autre vers la gauche) coexistent dans la région située entre la source et le miroir. Nous pouvons calculer la somme ci-dessus et arriver à une solution générale,* similaire à celle du paragraphe 7.1. Cependant, on peut gagner sur la compréhension physique du phénomène en adoptant une approche légèrement plus restrictive.

On peut annuler la phase initiale en déclenchant notre horloge à l'instant où $E_I = E_{0I} \sin kx$. Il faut que la solution mathématique satisfasse aux hypothèses physiques que sont **les conditions aux limites**. Par exemple, si l'on envisage une corde dont une extrémité est attachée à un mur en $x = 0$, ce point doit toujours avoir un déplacement nul. On doit superposer les deux ondes, l'une incidente, l'autre réfléchiée, de manière à obtenir une résultante nulle en $x = 0$. De même à la frontière d'une feuille parfaitement conductrice, il faut que la composante parallèle à la surface de l'onde électromagnétique résultante soit nulle. Si l'on suppose que $E_{0I} = E_{0R}$, les conditions aux limites impliquent qu'en $x = 0$, $E = 0$, pour toute valeur de t et comme $\varepsilon_I = 0$, les équations (7.28) et (7.29) entraînent que $\varepsilon_R = 0$. En d'autres termes, en $x = 0$, $E_I = E_{0I} \sin(+\omega t)$ et $E_R = E_{0I} \sin(-\omega t)$; ces deux ondes sont déphasées de 180° , $E_I = -E_R$, et elles s'annulent à tout instant. La résultante est alors :

$$E = E_{0I} [\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)]$$

*Voir, par exemple, J. M. Pearson, *A Theory of Waves*.

En appliquant l'identité :

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

on obtient :

$$E(x, t) = 2E_{0t} \sin kx \cos \omega t \quad (7.30)$$

C'est l'expression d'une onde *stationnaire*, à opposer à celle d'une *onde propagative* (figure 7.10). Son profil ne se déplace

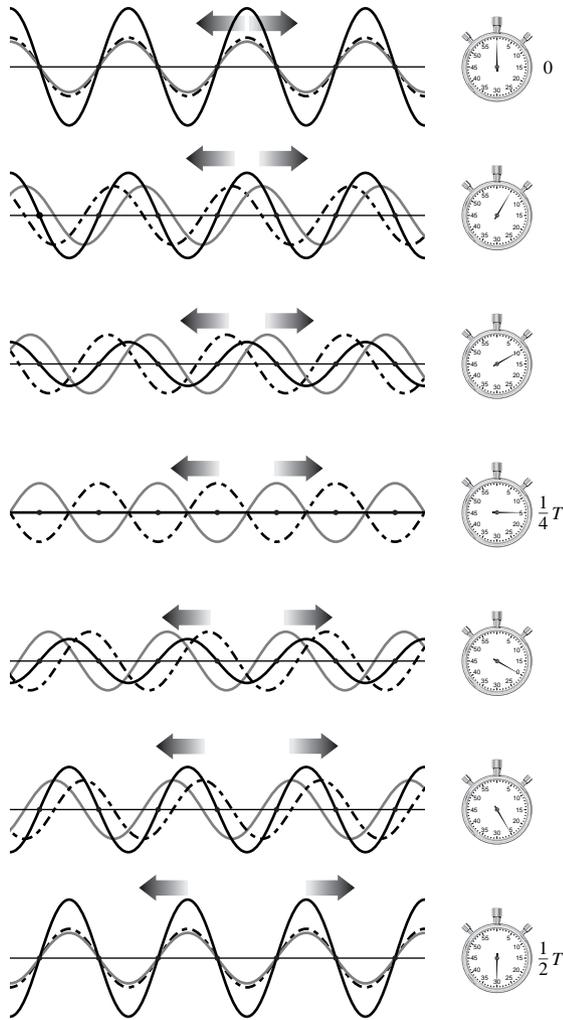


Figure 7.10 Création d'ondes stationnaires. Deux ondes, de mêmes amplitude et longueur d'onde, se propageant dans deux directions opposées, forment une onde stationnaire, qui oscille sur place.

pas à travers l'espace, et il n'est clairement pas de la forme $f(x \pm vt)$. En tout point $x = x'$, l'amplitude est constante et égale à $2E_{0t} \sin kx'$, et $E(x', t)$ varie de manière harmonique comme $\cos \omega t$. En certains points, à savoir, $x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, \dots$, la perturbation sera tout le temps nulle. Ces points sont appelés des *nœuds* ou des *points nodaux* (figure 7.11). À mi-chemin entre deux nœuds successifs, c'est-à-dire en $x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4, \dots$, l'amplitude atteint une valeur maximum de $\pm 2E_{0t}$, et ces points sont appelés des « *ventres* ». Pour une valeur quelconque de x , la perturbation $E(x, t)$ sera nulle chaque fois que $\cos \omega t = 0$, c'est-à-dire quand $t = (2m + 1)\tau/4$, où $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ et où τ est la période des ondes qui se superposent.

La figure 7.12 illustre la représentation d'une onde stationnaire par les phaseurs. Comme il y a deux ondes harmoniques, commençons avec deux phaseurs \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 . Les ondes sont en opposition de phase à l'interface $x = 0$, et donc les deux phaseurs doivent avoir comme valeurs initiales $E_{01} \angle 0$ et $E_{02} \angle \pi$. Auparavant (paragraphe 2.6) nous avons vu qu'un phaseur, tournant dans le sens des aiguilles d'une montre à une pulsation ω , est équivalent à une onde se propageant vers la gauche (les x négatifs), et de même un phaseur tournant dans le sens des aiguilles d'une montre correspond à une onde se propageant vers la droite (x croissants). Soit \mathbf{E}_1 le phaseur représentant l'onde qui se propage vers la gauche, et \mathbf{E}_2 celle qui se propage vers la droite. Le phaseur résultant est $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{E} = E_0 \angle \varphi$, où E_0 est l'amplitude de la courbe (i.e. la perturbation résultante) à chaque instant, ce que l'on obtient en mettant bout à bout \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 . Pour reprendre la figure 7.11, faisons en sorte que les ondes aient la même amplitude, $E_{01} = E_{02}$. En gardant les deux phaseurs bout à bout et en faisant tourner \mathbf{E}_1 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, et \mathbf{E}_2 en sens inverse, on construit \mathbf{E} en fonction de t . On remarquera que les triangles formés par les trois phaseurs sont toujours isocèles, \mathbf{E} étant vertical. Ce dernier ne tourne pas du tout et l'onde résultante qu'il représente ne progresse pas à travers l'espace ; c'est une onde stationnaire.

Revenons à la figure 7.10, si la réflexion n'est pas parfaite, comme c'est souvent le cas, l'amplitude de la résultante ne sera pas nulle aux nœuds (figure 7.13). On peut s'en convaincre facilement avec les phaseurs \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 , où cette fois $E_{01} > E_{02}$. Désormais \mathbf{E} tourne dans le même sens (inverse des aiguilles d'une montre) que le plus grand des deux phaseurs initiaux, à savoir \mathbf{E}_1 . La résultante contient une composante qui se propage le long de l'onde stationnaire et s'éloigne vers la gauche avec une amplitude équivalente à $E_{01} - E_{02}$. Sous de telles conditions, il y aura un transfert d'énergie net, ce qui n'est pas le cas pour une onde purement stationnaire. Il est

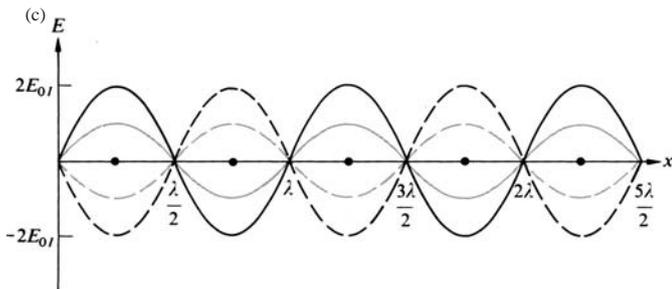
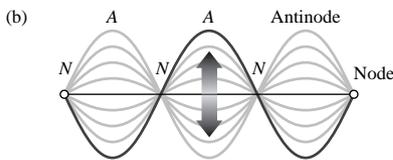
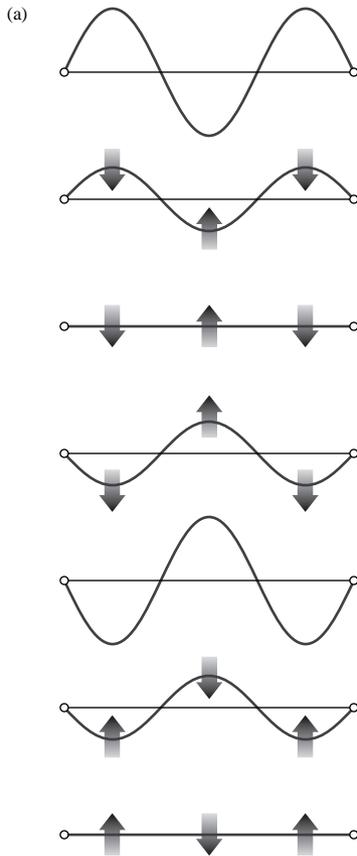
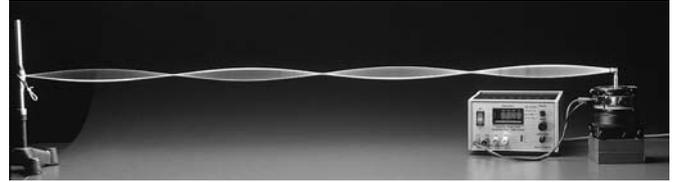


Figure 7.11 Onde stationnaire représentée à des instants différents.



Ondes stationnaires sur une corde vibrante. (Photo PASCO.)

également possible d'écrire une expression pour l'onde partiellement stationnaire résultante, qui est de la forme $E = E_0(x) \cos[\omega t - \varphi(x)]$ où l'amplitude varie d'un point à l'autre, pendant qu'à chaque valeur de x l'onde oscille dans le temps en cosinus. On peut vérifier à partir du diagramme de phaseur (figure 7.13b), en appliquant la loi des cosinus que, en fonction de la position, l'amplitude est $E_0(x) = (E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos 2kx)^{1/2}$.

Bien que l'analyse menée ci-dessus soit essentiellement unidimensionnelle, il existe aussi des ondes stationnaires en deux et trois dimensions. Le phénomène est extrêmement courant ; les ondes stationnaires sur les cordes de guitare et sur les plongeurs sont unidimensionnelles, mais elles sont bidimensionnelles sur la surface d'un tambour ou dans un seau d'eau agité (voir photo), et tridimensionnelles quand on chante dans une cabine de douche. En fait, il se crée des ondes stationnaires dans des cavités à l'intérieur de la tête chaque fois que l'on chante et où que l'on soit.



Un seau qui a été utilisé pour laver un sol présente des fines particules de poussières en suspension dans l'eau. Placé sur un évier légèrement cylindrique, le seau s'est balancé doucement selon un axe fixe, ce qui a créé des ondes stationnaires et a donné lieu à cette répartition des particules sous forme de petites dunes lors de leur dépôt au fond du seau, comme on peut le voir sur cette photo. (Photo E.H.)

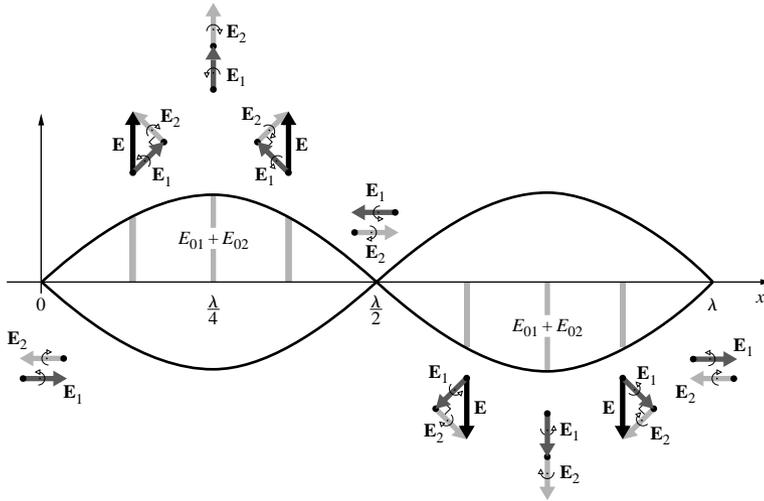


Figure 7.12 Génération d'une onde stationnaire du point de vue de l'addition de phaseurs. Les deux phaseurs tournent à la même pulsation mais dans des directions opposées. Les ondes ont ici à même amplitude, ce qui entraîne une annulation totale aux nœuds.

Si l'on produit un système d'onde stationnaire à partir d'un oscillateur, ce système n'absorbera efficacement l'énergie que si les vibrations coïncident avec un de ses modes d'onde stationnaire. Ce processus de résonance se produit chaque fois que votre maison tremble au passage d'un avion, d'un camion. Si la source continue de fournir de l'énergie, l'onde continuera de se développer jusqu'à ce que les pertes inhérentes du système soient égales à l'apport d'énergie, et que l'équilibre soit atteint. Cette capacité à maintenir et à simplifier une alimentation est

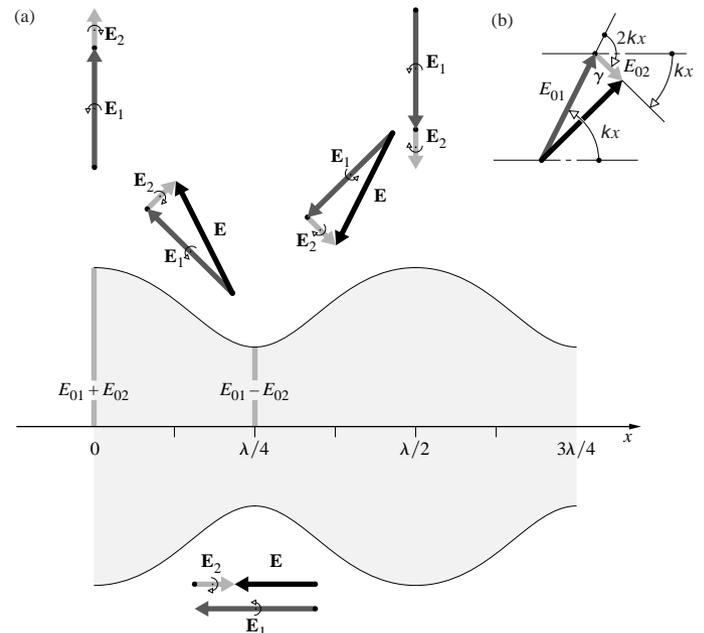


Figure 7.13 (a) Génération d'une onde stationnaire partielle du point de vue de l'addition de phaseurs. Les deux ondes ont cette fois des amplitudes différentes, ce qui produit des nœuds non nuls. La perturbation a donc une composante propagative, qui se dirige dans la direction de l'onde la plus importante. (b) L'onde peut s'écrire sous la forme $E = E_0(x) \cos [\omega t - \varphi(x)]$. En appliquant la loi des cosinus, l'amplitude est donnée par $E_0(x) = (E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos 2kx)^{1/2}$.



Profil d'ondes stationnaires sur le côté d'une voiture, occasionné par les vibrations de son moteur. L'échelle est en microns, où $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{m}$. La photo a été réalisée en utilisant une technique holographique (Photo H0L03/FTPO.)

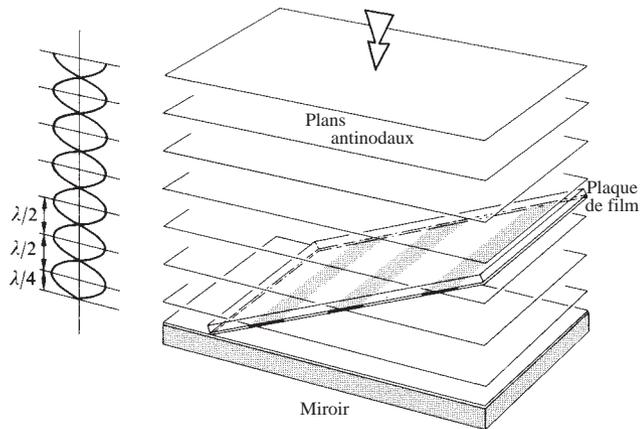


Figure 7.14 Expérience de Wiener.

une caractéristique très importante des systèmes d'onde stationnaire. Le canal auditif de l'oreille n'est rien d'autre qu'une telle cavité résonante. Il amplifie (de près de 100 %) les sons dans une gamme allant de ≈ 3 kHz à ≈ 4 kHz. De même, un laser tire sa puissante émission d'une cavité à ondes stationnaires (p. 608).

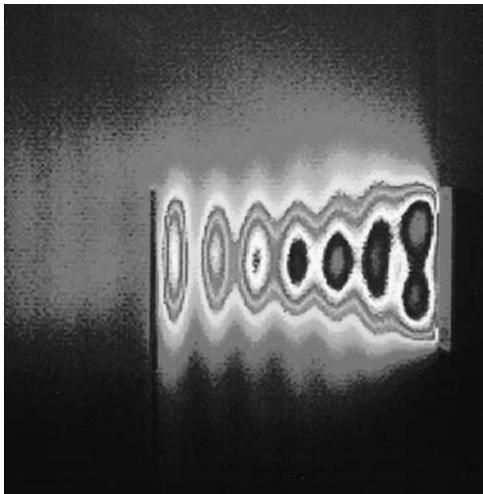
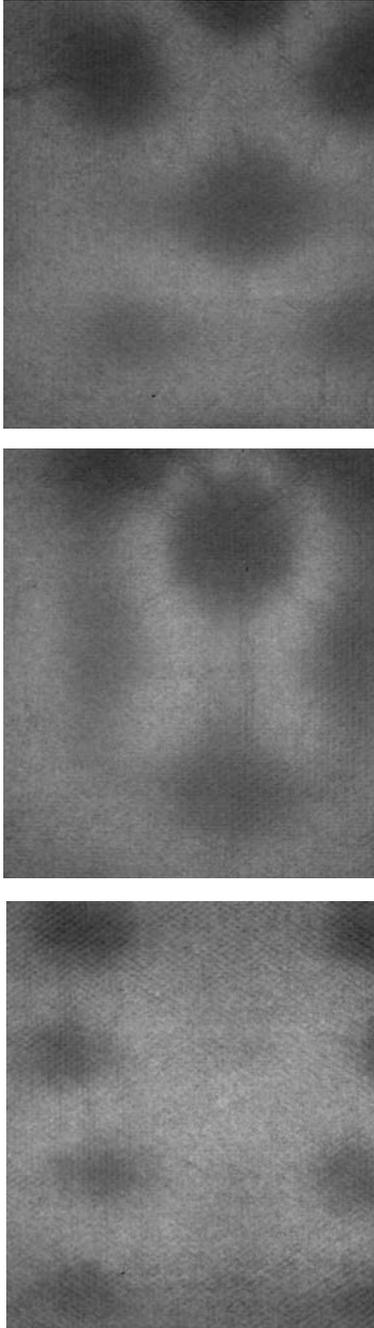


Figure d'ondes stationnaires à deux dimensions formée entre une source et un réflecteur. Les ondes électromagnétiques provenant d'une antenne à 3,9 GHz arrivent de la droite. Elles se réfléchissent sur une tige de métal et reviennent vers l'antenne. La figure est rendue visible par l'absorption du rayonnement micro-onde et l'enregistrement des températures résultantes avec une caméra IR. (Photo H. H. Pohle, Phillips Laboratory, Kirtland Air Force Base.)



Lévitation ultrasonique. Des ondes ultrasoniques, l'une se propageant vers le haut, et l'autre vers le bas, forment une figure d'ondes stationnaires. Ici, une gouttelette d'eau est suspendue dans une région nodale. (Photo NASA.)

C'est en mesurant les distances entre les nœuds d'ondes stationnaires que Hertz fut capable d'établir la longueur d'onde de la radiation dans ses expériences historiques (paragraphe 3.6.1). Quelques années plus tard, en 1890, Otto Wiener fut le premier à démontrer l'existence des ondes lumineuses stationnaires. Le dispositif qu'il utilisa est décrit à la figure 7.14, qui représente un faisceau collimaté et quasi monochromatique en incidence normale sur un miroir à face argentée. Une couche sensible transparente, d'épaisseur inférieure à $\lambda/20$, et déposée sur une lame de verre était inclinée par rapport au miroir d'un angle d'environ 10^{-3} radians. De cette façon, le film interceptait le système d'ondes planes stationnaires. Après développement, l'émulsion était noircie sur une série de bandes parallèles équidistantes, correspondant aux régions où la couche photographique avait intercepté les plans antinodaux. Fait important, il n'y avait pas de noircissement de l'émulsion à la surface du miroir. On peut montrer que les nœuds et les ventres du champ magnétique d'une onde électromagnétique stationnaire alternent avec ceux du champ électrique (problème 7.11). On peut supposer que du fait qu'à



Coupes d'une onde stationnaire électromagnétique à trois dimensions à des hauteurs différentes dans un four micro-ondes. (Photos Alistair Steyn-Ross, University of Waikato.)

$t = (2m + 1)\tau/4$, $E = 0$ pour toute valeur de x , et donc pour qu'il y ait conservation de l'énergie, il s'ensuit que B est différent de 0. En accord avec la théorie, Hertz avait précédemment (1888) démontré l'existence d'un point nodal du champ électrique à la surface de son réflecteur. En conséquence, Wiener put conclure que les régions noircies étaient associées aux ventres du champ \vec{E} . **C'est le champ électrique qui déclenche le processus photochimique dans la plaque photographique.**

D'une manière analogue, Drude et Nernst ont prouvé que c'est le champ \vec{E} qui est responsable de la fluorescence. Ces observations sont toutes très compréhensibles, puisque la force exercée sur un électron par la composante du champ \vec{B} d'une onde électromagnétique est généralement négligeable par rapport à celle exercée par le champ \vec{E} . C'est pour ces raisons qu'on qualifie le champ électrique de *perturbation optique* ou *champ lumineux*.

Les ondes stationnaires produites par deux perturbations se propageant dans des directions opposées représentent un cas particulier du plus vaste sujet des interférences à deux ondes (p. 405). Considérons les deux sources ponctuelles de la figure 7.15. Quand le point P , situé à mi-chemin, est éloigné des sources, l'angle ϕ est faible, les deux ondes se superposent et il en résulte une figure d'interférence complexe (qui sera traitée en détail au Chapitre 9). Il suffit, ici de dire que, autour des sources, l'espace est plein de franges brillantes et sombres, où les interférences sont alternativement constructives et destructives. À mesure que P se rapproche et que ϕ augmente, les

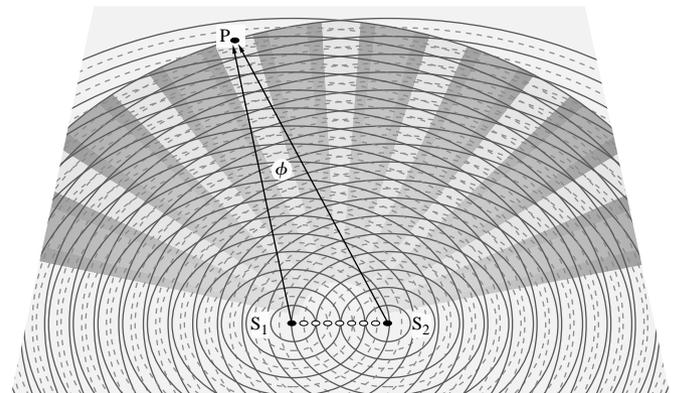


Figure 7.15 Deux points sources monochromatiques. En tout point P l'onde résultante est maximale quand un pic (—) coïncide avec un pic (—) ou un creux (--) coïncide avec un creux (--). Elle est minimale quand un pic coïncide avec un creux. Les maxima formés le long de la ligne $\overline{S_1S_2}$ correspondent aux ondes stationnaires.

franges s'affinent, jusqu'à ce que P soit sur la ligne joignant les sources et que $\phi = 180^\circ$. Il se forme alors des ondes stationnaires, et les « franges » sont les plus fines possibles, à savoir qu'elles mesurent une demi-longueur d'onde pic à pic.

7.2 Addition d'ondes de fréquences différentes

Notre analyse s'est jusqu'ici limitée à la superposition d'ondes ayant toutes la même fréquence. Or, il n'existe pas de perturbations réellement monochromatiques, et il est bien plus réaliste, comme nous le verrons, de parler de lumière quasi monochromatique, constituée d'une bande étroite de fréquences, et dont l'étude nous conduira aux concepts importants de largeur de bande et de temps de cohérence.

La disponibilité de modulateurs de lumière efficaces (paragraphe 8.11.3) rend possible des couplages entre systèmes électroniques et optiques qui ont eu et auront encore de nombreux effets sur l'ensemble de la technologie. De plus, avec l'avènement des techniques électro-optiques, la lumière a pris un rôle significatif dans le transport de l'information. Cette section a pour but de développer certaines notions mathématiques nécessaires à la compréhension de ces nouveaux axes.

7.2.1 Battements

Nous commençons par le cas particulièrement simple de deux ondes de fréquences différentes se propageant dans la même direction. Considérons la perturbation qui résulte de la combinaison des ondes :

$$E_1 = E_{01} \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

et
$$E_2 = E_{01} \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

où $k_1 > k_2$ et $\omega_1 > \omega_2$. Ces ondes ont des amplitudes égales et des angles de phase initiaux nuls. La résultante

$$E = E_{01} [\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)]$$

peut être reformulée :

$$E = 2E_{01} \cos \frac{1}{2} [(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t] \times \cos \frac{1}{2} [(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t]$$

en utilisant l'identité :

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$$

Définissons maintenant les quantités $\bar{\omega}$ et \bar{k} , qui sont respectivement la **fréquence angulaire moyenne** et le **nombre de propagation moyen**. De même, les quantités ω_m et k_m sont respectivement appelées la **fréquence angulaire de la modulation** et le **nombre de propagation de la modulation**. Posons :

$$\bar{\omega} \equiv \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) \quad \omega_m \equiv \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) \quad (7.31)$$

$$\text{et} \quad \bar{k} \equiv \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \quad k_m \equiv \frac{1}{2} (k_1 - k_2) \quad (7.32)$$

ainsi :

$$E = 2E_{01} \cos(k_m x - \omega_m t) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \quad (7.33)$$

On peut considérer que la perturbation totale est une onde de fréquence angulaire $\bar{\omega}$ qui se propage avec une amplitude $E_0(x, t)$ variable dans le temps, ou modulée, et telle que :

$$E(x, t) = E_0(x, t) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \quad (7.34)$$

où :

$$E_0(x, t) = 2E_{01} \cos(k_m x - \omega_m t) \quad (7.35)$$

Dans toutes les applications considérées ici, ω_1 et ω_2 auront toujours des valeurs élevées. Et si elles sont du même ordre de grandeur, $\omega_1 \approx \omega_2$, alors $\bar{\omega} \gg \omega_m$ et $E_0(x, t)$ variera lentement, tandis que $E(x, t)$ variera très rapidement (figure 7.16). L'éclairement est proportionnel à :

$$E_0^2(x, t) = 4E_{01}^2 \cos^2(k_m x - \omega_m t)$$

ou :
$$E_0^2(x, t) = 2E_{01}^2 [1 + \cos(2k_m x - 2\omega_m t)]$$

Notons que $E_0^2(x, t)$ oscille autour d'une valeur moyenne égale à $2E_{01}^2$ avec une fréquence angulaire de $2\omega_m$ ou simplement $(\omega_1 - \omega_2)$, connue sous le nom de **fréquence de battement angulaire**. E_0 varie donc à la fréquence de modulation tandis que E_0^2 varie à la fréquence double, à savoir celle du battement.

Lorsque les amplitudes des deux ondes harmoniques en superposition sont différentes, il se produit encore des battements, mais l'annulation est incomplète ; il y a moins de contraste. La figure 7.17 représente un tel tracé et indique comment les deux phaseurs \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 lui donnent naissance. Rappelez-vous que le phaseur résultant $\mathbf{E} = E_0(x, t) \angle \phi$ fournit l'**amplitude** et la **phase relative** de la résultante. L'enveloppe lentement oscillante est un graphe de $E_0(x, t)$ modulé dans le temps. En revanche, le phaseur résultant ne nous donne pas la valeur instantanée de la porteuse oscillante.

Les deux ondes se propagent dans la même direction, et leurs phaseurs tournent donc dans le même sens : un à ω_1 et

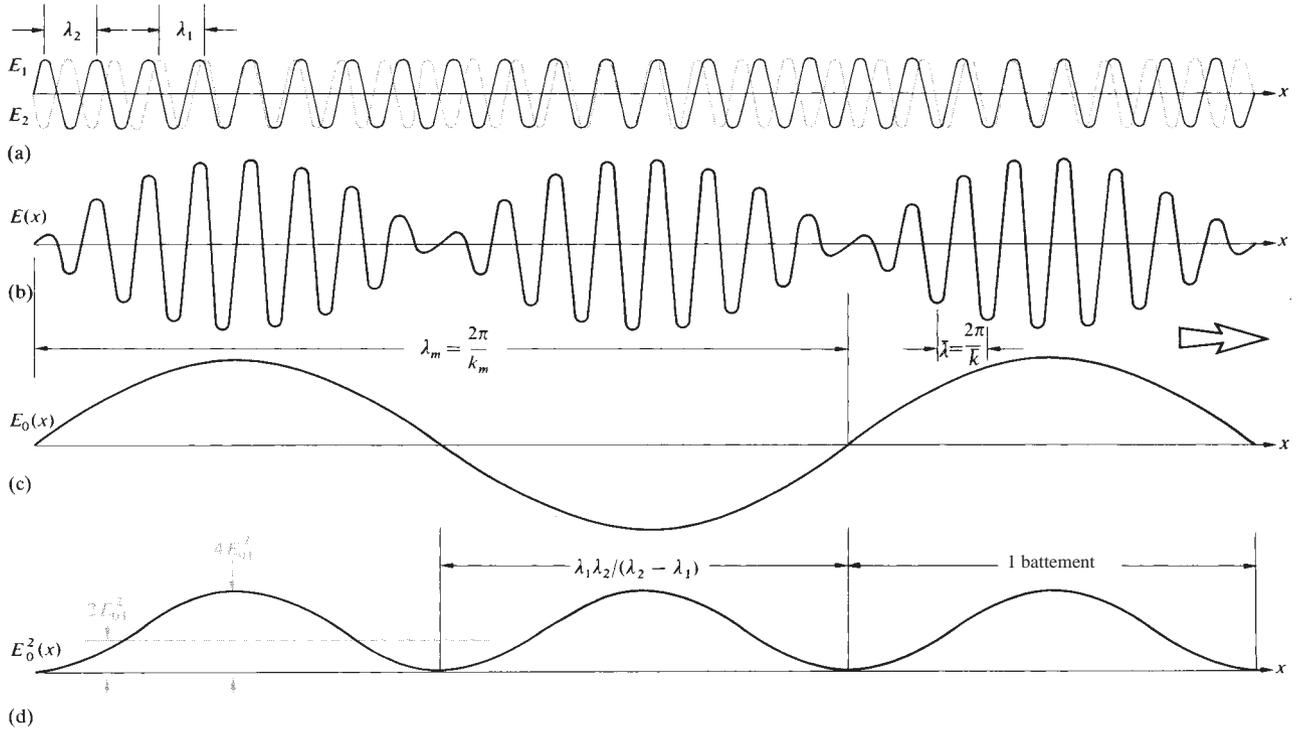


Figure 7.16 La superposition de deux ondes harmoniques de même amplitude et de fréquences différentes produit un phénomène de battement.

l'autre à ω_2 . Plutôt que de laisser les deux phaseurs tourner à leur propre fréquence, nous pouvons simplifier un petit peu les choses. Supposons que $\omega_1 > \omega_2$ et plaçons le phaseur \mathbf{E}_1 , dont la fréquence est la plus élevée au bout du phaseur \mathbf{E}_2 , de plus basse fréquence (figure 7.17b). Retraçons \mathbf{E}_2 le long de la ligne horizontale de référence de phase zéro. L'angle α que fait \mathbf{E}_1 (figure 7.17c) avec l'horizontale (c'est-à-dire avec \mathbf{E}_2) à chaque instant est sa phase par rapport à \mathbf{E}_2 , et donc \mathbf{E}_1 tourne à une vitesse angulaire $(\omega_1 - \omega_2)$ et $\alpha = (\omega_1 - \omega_2)t$. L'amplitude $E_0(x, t)$ de la résultante (l'enveloppe de la porteuse) oscille entre les valeurs $E_{02} + E_{01}$ et $E_{02} - E_{01}$. L'angle que fait \mathbf{E} avec l'horizontale (φ) est la phase de l'onde résultante par rapport à \mathbf{E}_2 , et elle oscille graduellement à mesure que \mathbf{E}_1 tourne en décrivant un cercle.

Notons que, dans le cas de la figure 7.16, où $E_{01} = E_{02}$, E_0 oscille entre 0 et $2E_{01}$. En outre, $2\varphi = \alpha$, et le phaseur résultant \mathbf{E} – qui correspond à l'amplitude de la perturbation – tourne à une vitesse angulaire de $\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$. Toutes ces valeurs sont en accord avec l'équation (7.33).

Les battements sont courants dans les sons. Les accordeurs de pianos ont toujours fait leur travail en faisant battre les sons

des cordes vibrantes avec celui d'un diapason. Mais l'effet fut observé pour la première fois avec la lumière en 1955 par Forrester, Gudmundsen, et Johnson.* Pour obtenir deux ondes lumineuses de fréquences légèrement différentes, ils utilisèrent l'effet Zeeman. Lorsque les atomes d'une lampe à décharge, dans leur cas, c'était du mercure, sont soumis à un champ magnétique, leurs niveaux énergétiques se divisent. En conséquence, la lumière émise possède deux composantes en fréquence, ν_1 et ν_2 , qui diffèrent en fonction de la valeur du champ appliqué. Quand ces composantes se recombinent à la surface d'un tube photoélectrique, il apparaît la fréquence de battement $\nu_1 - \nu_2$. Le champ magnétique avait été précisément ajusté afin que $\nu_1 - \nu_2 = 10^{10}$ Hz, ce qui correspond en pratique à un signal micro-onde de 3 cm de longueur d'onde. Le courant photoélectrique enregistré avait la même forme que la courbe $E_0^2(x)$ de la figure 7.16d.

Depuis cette date, l'avènement du laser a rendu considérablement plus facile l'observation des battements lumineux. On peut

*A. T. Forrester, R. A. Gudmundsen, et P. O. Johnson, « Photo-electric Mixing of Incoherent Light ». *Phys. Rev.* **99**, 1691 (1955).

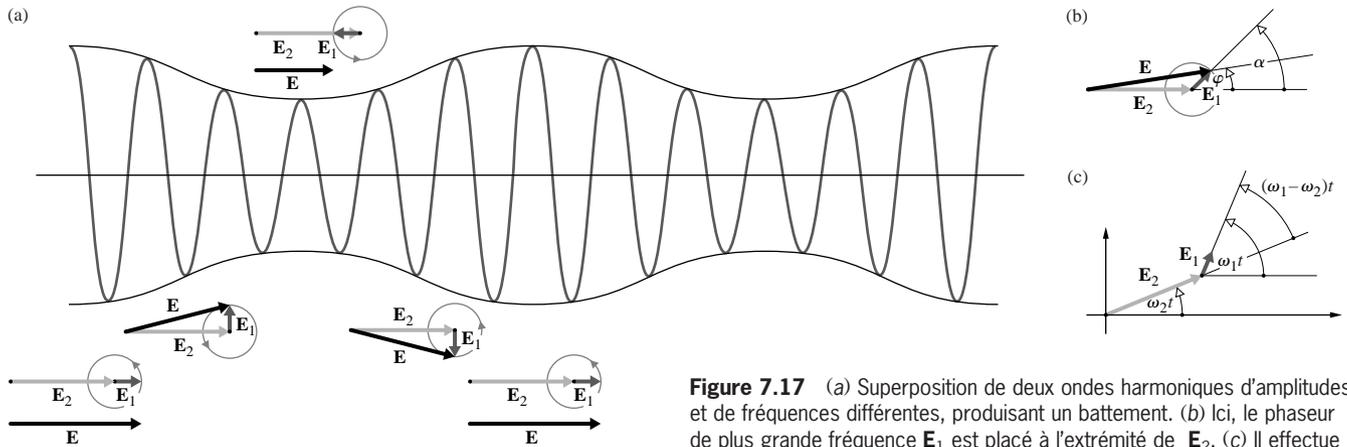


Figure 7.17 (a) Superposition de deux ondes harmoniques d'amplitudes et de fréquences différentes, produisant un battement. (b) Ici, le phaseur de plus grande fréquence E_1 est placé à l'extrémité de E_2 . (c) Il effectue une rotation à une fréquence qui est égale à la différence des fréquences.

observer des fréquences de battement allant de quelques Hz à 10^{14} Hz dans des détecteurs. L'observation des battements représente désormais un moyen particulièrement simple et sensible pour détecter de faibles différences de fréquences. Le laser en anneau (paragraphe 9.8.3), fonctionnant comme un gyroscope, utilise les battements pour mesurer les différences induites par la rotation du système. L'effet Doppler qui produit un décalage de fréquence quand la lumière est réfléchiée par un objet en mouvement correspond à un autre domaine d'applications des battements. En éclairant une cible, qu'elle soit solide, liquide ou même gazeuse, puis en faisant battre l'onde réfléchiée avec l'onde émise, on obtient une mesure précise de la vitesse de la cible. De manière similaire, mais cette fois à l'échelle atomique, la lumière laser se décale en phase sous l'effet de l'interaction avec les ondes sonores se propageant dans un matériau (ce phénomène est appelé diffusion Brillouin). Ainsi, $2\omega_m$ devient une mesure de la vitesse du son dans le milieu.

7.2.2 Vitesse de groupe

La relation spécifique qui existe entre ω et k détermine v , la vitesse de phase d'une onde. Dans un milieu non dispersif – et le vide est le seul environnement réellement non dispersif – $v = \omega/k$ [équation (2.33)], et le graphe de ω en fonction de k est une droite. La fréquence et la longueur d'onde varient de telle sorte que v demeure constante. Toutes les ondes EM se propagent avec la même vitesse de phase dans un milieu non dispersif. En revanche, dans un milieu dispersif (tous les milieux, excepté le vide), chaque onde se propage à une vitesse qui dépend de sa fréquence.

Lorsqu'un certain nombre d'ondes harmoniques de fréquences différentes se superposent, l'enveloppe résultante se propagera à une vitesse différente de celle des ondes qui la composent. Cela montre l'importance de la notion de *vitesse de groupe*, et sa relation avec la vitesse de phase. Ce concept a pour la première fois été mis en évidence (1839) par le grand physicien et mathématicien irlandais Sir William Rowan Hamilton, bien qu'il soit passé presque inaperçu jusqu'à ce que Stokes ne le réintroduise en 1876 dans le contexte de l'hydrodynamique. Vu que l'on peut attribuer certaines caractéristiques à la forme d'une pulsation, comme son front de montée, nous prendrons comme vitesse de groupe celle à laquelle cette caractéristique se propage.

La perturbation étudiée dans le paragraphe précédent,

$$E(x, t) = E_0(x, t) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \quad [7.34]$$

est une *onde porteuse* de haute fréquence angulaire ($\bar{\omega}$), *modulée en amplitude* par une fonction cosinus. Supposons pour le moment que l'onde de la figure 7.16b ne soit pas modulée, c'est-à-dire que $E_0 = \text{constante}$. Chaque petit pic de la porteuse se propagera vers la droite avec la vitesse de phase usuelle. En d'autres termes,

$$v = - \frac{(\partial\varphi/\partial t)_x}{(\partial\varphi/\partial x)_t} \quad [2.32]$$

D'après l'équation (7.34) la phase est donnée par $\varphi = (\bar{k}x - \bar{\omega}t)$, d'où :

$$v = \bar{\omega}/\bar{k} \quad (7.36)$$

C'est la vitesse de phase de la porteuse, qu'elle soit modulée ou non. Dans le cas précédent, les pics changeaient simplement périodiquement d'amplitude quand ils se déplaçaient.

Évidemment, il faut se préoccuper d'un autre mouvement, à savoir la propagation de l'enveloppe de modulation. Retournons à la figure 7.16a et supposons que les ondes constitutives $E_1(x, t)$ et $E_2(x, t)$ se propagent à la même vitesse $v_1 = v_2$. Traçons les deux fonctions harmoniques, de fréquences et de longueurs d'onde différentes, sur des feuilles séparées de plastique transparent. Si on les superpose (comme sur la figure 7.16a), la résultante donne un battement stationnaire. Si l'on déplace les deux feuilles vers la droite à la même vitesse pour simuler des ondes propagatives, les battements vont bien évidemment se déplacer avec la même vitesse. On appelle **vitesse de groupe**, ou v_g la vitesse avec laquelle l'enveloppe de modulation avance. Dans cet exemple, la vitesse de groupe est égale à la vitesse de phase de la porteuse (la vitesse moyenne, $\bar{\omega}/\bar{k}$). Ainsi, $v_g = v = v_1 = v_2$. Cela s'applique spécifiquement aux milieux non dispersifs dans lesquels la vitesse de phase est indépendante de la longueur d'onde.

Pour aboutir à une solution plus générale, étudions l'expression de l'enveloppe de modulation :

$$E_0(x, t) = 2E_{01} \cos(k_m x - \omega_m t) \quad [7.35]$$

La vitesse avec laquelle cette onde se propage est encore donnée par l'équation (2.32), mais on peut désormais ne pas tenir compte de l'onde porteuse. La modulation avance à une vitesse qui dépend de la phase de l'enveloppe ($k_m x - \omega_m t$), et :

$$v_g = \frac{\omega_m}{k_m}$$

ou
$$v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Il ne faut pas oublier que, dans un milieu ordinaire, ω dépend de λ ou, de manière équivalente, de k . On appelle *relation de dispersion* la fonction $\omega = \omega(k)$. Si la bande de fréquence $\Delta\omega$ centrée autour de $\bar{\omega}$ est petite, le rapport $\Delta\omega/\Delta k$ est approximativement égal à la dérivée de la relation de dispersion évaluée en $\bar{\omega}$, c'est-à-dire,

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\bar{\omega}} \quad (7.37)$$

La modulation ou le signal se propage à une vitesse v_g qui peut être supérieure, égale ou inférieure à v , la vitesse de phase de la porteuse.

À strictement parler, il n'existe pas, dans la réalité, des ondes dont l'extension spatiale soit parfaitement bien définie. Quelle que soit sa longueur, toute onde réelle est donc en fait une impulsion. Comme nous allons le voir (p. 322), une impulsion est la superposition d'un grand nombre d'ondes sinusoïdales (appelées composantes de Fourier) ; chacune ayant son amplitude et sa phase spécifiques. Par conséquent, ce ne sont plus seulement deux ondes qu'il faut considérer comme dans la fig (7.16), mais jusqu'à un millier peut-être, toutes de fréquences différentes. Si, comme c'est certainement possible, les sinusoïdes s'annulent partout entre elles, excepté dans une zone où elles sont en phase, ou presque, la perturbation résultante ressemblera à une impulsion localisée, souvent appelée *paquet d'onde* (figure 7.18). Ici encore, il est naturel de penser à la vitesse de groupe. L'équation (7.37) sera plus ou moins vraie,

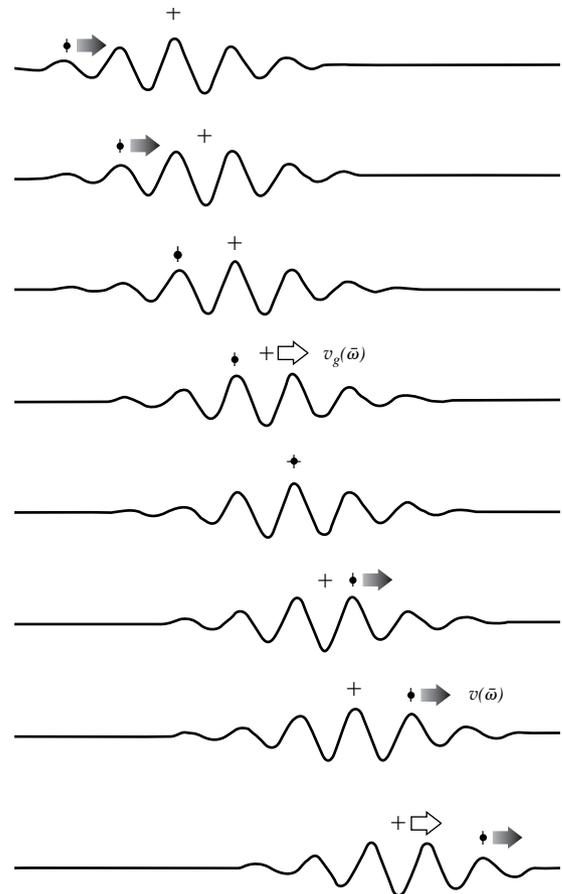


Figure 7.18 Une impulsion dans un milieu dispersif.

pour n'importe quelle superposition d'ondes sinusoïdales, tant que Δk , la largeur du domaine en k , est étroite. Comme on va le voir, une gamme étroite de k (ou de manière équivalente de λ) signifie que le paquet est étendu dans l'espace. Au contraire, si l'impulsion est très courte spatialement, elle est constituée d'un grand nombre de composantes sinusoïdales sur une large gamme de valeurs de k . Comme dans un milieu dispersif, chaque composante se déplace à une vitesse de phase qui lui est propre, une telle impulsion change de forme au fur et à mesure qu'elle se propage, ce qui fait de v_g un concept peu précis à traiter expérimentalement.

On rappelle que, aux alentours d'une résonance (ν_0), un milieu typique a un indice $n(\nu)$ dont le graphe ressemble à celui de la figure 7.19. L'énergie rayonnante située en fréquence dans la région centrale, où la pente de la courbe est négative, est très fortement absorbée, ce qui définit la *bande d'absorption*. De part et d'autre de cette bande, $n(\nu)$ est une fonction croissante de ν , c'est le domaine de la *dispersion normale*. À l'intérieur de la bande d'absorption, $n(\nu)$ est une fonction décroissante de ν , c'est le domaine de la *dispersion anormale*.

Un graphe de la relation de dispersion (figure 7.20) donne une courbe passant par l'origine, convexe vers le haut pour la dispersion normale et convexe vers le bas pour la dispersion anormale (p. 73). Dans les deux cas, la pente d'une droite tracée de l'origine à tout point (ω, k) sur la courbe est la vitesse de phase à cette fréquence. De même, la pente de la courbe au

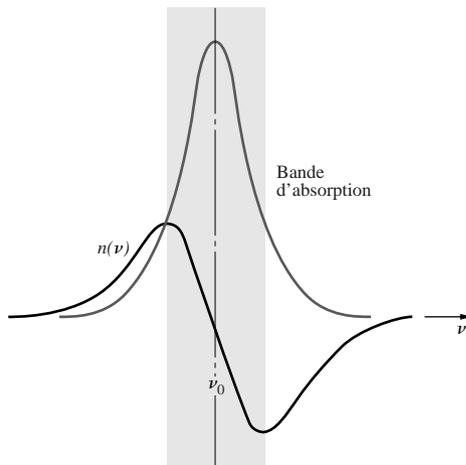


Figure 7.19 Représentation typique de la dépendance en fréquence de l'indice de réfraction au voisinage d'une résonance atomique. On a aussi représenté la courbe d'absorption qui est centrée sur la fréquence de résonance.

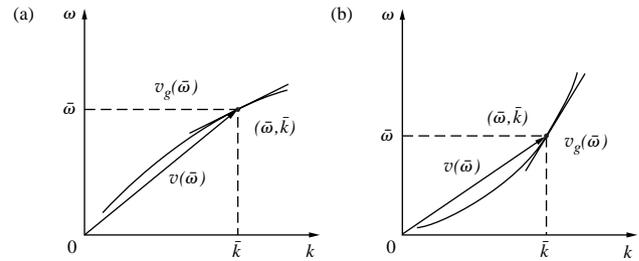


Figure 7.20 Représentation graphique de la relation de dispersion. (a) En dispersion normale, $v(\bar{\omega}) > v_g(\bar{\omega})$, alors qu'en dispersion anormale (b), $v_g(\bar{\omega}) > v(\bar{\omega})$. La vitesse de phase v , d'une onde de pulsation ω , est la pente de la droite tracée entre l'origine et ce point. La vitesse de groupe est la pente de la tangente à la courbe en $(\bar{\omega}, \bar{k})$, où $\bar{\omega}$ est la pulsation moyenne des ondes qui constituent le paquet.

point $(\bar{\omega}, \bar{k})$ est $(d\omega/dk)_{\bar{\omega}}$, et c'est la vitesse de groupe pour l'ensemble des composantes centrées en $\bar{\omega}$. En dispersion normale, les ondes à haute fréquence (par exemple dans le bleu) « voient » des indices plus élevés et se propagent moins vite que les ondes de fréquence plus basse (par exemple dans le rouge). De plus, la pente de la courbe de dispersion (v_g) est toujours inférieure à la pente de la droite (v), c'est-à-dire $v_g < v$, tandis que, en dispersion anormale, $v_g > v$.

Comme $\omega = kv$, l'équation (7.37) devient :

$$v_g = v + k \frac{dv}{dk} \quad (7.38)$$

Par conséquent, dans un milieu non dispersif idéal où v est indépendant de λ , $dv/dk = 0$ et $v_g = v$. En particulier, dans le vide $\omega = kc$, $v = c$, et $v_g = c$.

Les milieux réels sont toujours plus ou moins dispersifs ($v_1 \neq v_2$, comme dans le cas de la figure 7.21). Étant donné que $n(k)$ est connu, $\omega = kc/n$, et il est alors utile de reformuler v_g :

$$v_g = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2} \frac{dn}{dk}$$

ou
$$v_g = v \left(1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk} \right) \quad (7.39)$$

Dans les zones de dispersion normale d'un milieu optique, l'indice de réfraction augmente avec la fréquence ($dn/dk > 0$), et donc $v_g < v$. On devrait donc également définir un *indice de réfraction de groupe* :

$$n_g \equiv c/v_g \quad (7.40)$$

qu'il faut précautionneusement distinguer de n .

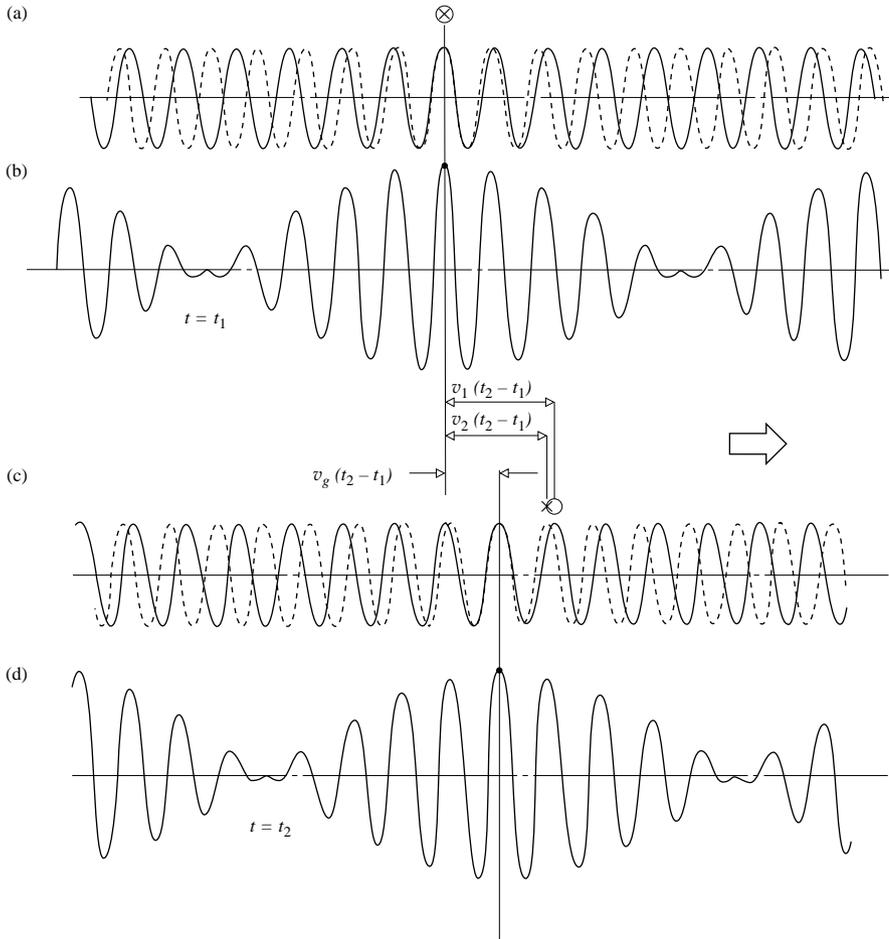


Figure 7.21 Vitesses de groupe et de phase. En (a) les deux ondes coïncident au point indiqué par \otimes . Et en (b) le pic de l'onde modulée se produit en ce point. Mais les ondes se propagent à différentes vitesses en (c) et les deux pics originaux (marqués par \times et \circ) se séparent. Une paire différente coïncide maintenant en (d) pour former le plus haut point de l'onde modulée, qui se propage donc à une vitesse différente. Ici $v_1 > v_2 > v_g$, et comme $\lambda_1 > \lambda_2$ c'est un cas de dispersion normale.

En 1885, A. A. Michelson mesura n_g dans du disulfate de carbone en utilisant des impulsions de lumière blanche, et il obtint 1,758, à comparer avec $n = 1,635$.

Revenons à la figure 7.18 où le milieu est normalement dispersif. On prendra comme vitesse de phase la vitesse de la porteuse, c'est-à-dire celle de l'onde à peu près sinusoïdale de fréquence $\bar{\omega}$. Parce que les pics de la porteuse se propagent plus vite que l'ensemble de l'impulsion, ils paraissent rentrer par la gauche, la balayer puis disparaître par la droite. Bien que chaque pic de la porteuse change de hauteur au fur et à mesure qu'il progresse à l'intérieur de l'impulsion, $v(\bar{\omega})$ est la vitesse de ces pics et est donc à proprement parler la vitesse à phase constante. En revanche, l'enveloppe de modulation se déplace à une vitesse $v_g(\bar{\omega}) = (d\omega/dk)_{\bar{\omega}}$, qui, dans ce cas particulier, est égal à un quart de $v(\bar{\omega})$. Chaque point de l'enveloppe (par

exemple le maximum au centre de l'impulsion) se déplace à une vitesse $v_g(\bar{\omega})$, qui est la vitesse à amplitude constante.

Lumière superluminale

Le titre de cette section annonce le sujet que nous allons traiter : la lumière « qui va plus vite que la lumière », ce qui semble certainement étrange, mais ce concept a fait les grands titres des journaux et, dans les dernières années, il est devenu partie intégrante du discours scientifique populaire.

La théorie de la relativité générale affirme qu'en aucune circonstance un signal (c'est-à-dire une instrumentation de communication qui transporte de l'énergie) ne peut se propager à une vitesse supérieure à c . Pourtant nous avons déjà vu que sous certaines conditions (paragraphe 3.5.1), c'est ce qui se

passé avec la vitesse de phase. En fait, dès 1904, R. W. Wood démontra expérimentalement que de la lumière blanche, qui traversait une cuve de vapeur de sodium, pouvait avoir des vitesses de phase supérieures à c . Il étudia la zone de dispersion anormale autour de la résonance double du sodium où se trouvent les deux raies D, peu espacées (aux longueurs d'onde de 589,0 nm et 589,6 nm).

Pour des fréquences éloignées de celles de la résonance de la vapeur, l'indice de réfraction était légèrement supérieur à un, comme prévu. De plus, peu ou pas de lumière était transmise dans la gamme de fréquences de la bande d'absorption. Mais pour des fréquences proches des lignes D, l'indice $n(\nu)$ montrait des signes de dispersion anormale. Quand la fréquence s'approche de la résonance par le haut (du côté des basses longueurs d'onde), n décroît rapidement, devenant bien inférieur à un ($\nu > c$). Les vitesses de phase superluminales sont donc bien connues depuis longtemps.

La contradiction avec la relativité n'est qu'apparente ; cela venant du fait que, bien qu'une onde monochromatique puisse avoir une vitesse supérieure à c , elle ne peut pas transporter d'information. Par opposition, tout signal sous la forme d'une onde modulée se propagera à la vitesse de groupe, toujours inférieure à c dans les milieux normalement dispersifs.*

Des années 1980 jusqu'à aujourd'hui, un grand nombre d'expérimentateurs[†] ont cherché à établir que la vitesse de groupe pouvait également dépasser c . Une impulsion lumineuse de fréquence ν aura un indice de réfraction de groupe donné par :

$$n_g = n(\nu) + \nu \frac{dn(\nu)}{d\nu}$$

(on laisse le soin au problème 7.25 de prouver que c'est le cas). Cela suggère que le domaine où il faut chercher pour trouver des impulsions superlumineuses est une zone de dispersion anormale, où $n(\nu)$ varie rapidement avec ν . Si l'on

*Dans les régions de dispersion anormale (paragraphe 3.5.1) où $dn/dk < 0$, v_g peut être plus grande que c . Ici, cependant, le signal se propage à une vitesse encore différente, connue sous le nom de vitesse de signal, v_s . Ainsi, $v_s = v_g$ excepté dans une bande d'absorption résonante. Dans tous les cas, v_s correspond à la vitesse du transfert d'énergie et ne peut jamais excéder c .

[†]S. Chu et S. Wong, « Linear Pulse Propagation in an Absorbing Medium », *Phys. Rev. Lett.* **48**, 738 (1982). L. J. Wang, A. Kuzmich, et A. Dogariu, « Gain-assisted superluminal light propagation », *Nature* **406**, 277 (2000). D. Mognai, A. Ranfagni, et R. Ruggeri, « Observation of Superluminal Behavior in Wave Propagation », *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4830 (2000).

veut que $n_g < 1$, il faut que $dn(\nu)/d\nu < 0$. Ce que l'on obtient à l'intérieur d'une bande d'absorption ; la pente de la courbe de $n(\nu)$ en fonction de ν est négative.

Le problème avec cette approche est que c'est également un domaine où l'absorption est considérable, et les impulsions aussi bien fortement déformées qu'atténuées, rendant les résultats ambigus. On peut contourner cette difficulté en utilisant un milieu à gain, qui amplifie ainsi la lumière. Cette démarche a récemment été suivie dans une petite cellule contenant du gaz de césium, dans laquelle le profil d'indice désiré a été produit en pompant des atomes de césium grâce à l'utilisation de deux faisceaux laser de fréquences différentes. Une région de dispersion anormale sans perte a donc été créée entre les deux lignes de gain résultantes (figure 7.22).

Une diode laser envoyait alors une très longue impulsion de $3,7 \mu\text{s}$ – presque gaussienne, ou en forme de cloche (p. 14) – vers la cellule. Une impulsion quasi identique apparaissait alors en sortie de cellule, avant même que le pic de l'impulsion incidente n'atteigne l'entrée. Le temps d'avance mesuré était de 62 ns, l'équivalent de l'impulsion sortante se produisant 20 m au-delà de l'impulsion entrante, c'est-à-dire ≈ 310 fois plus loin que si la pulsation avait traversé les 6 cm de longueur de la cellule dans le vide (ce qui ne prendrait que 0,2 ns).

Quand $dn(\nu)/d\nu$ a une valeur négative très importante, il se peut que n_g lui-même soit négatif, même si ce n'est pas intuitif. En fait, dans cette expérience $n_g = -310$. Pour réaliser ce que cela signifie, considérons qu'une impulsion met un temps $L/v_g = n_g L/c$ pour traverser un milieu de longueur L , à comparer au temps qu'elle prendrait (L/c) pour couvrir la même

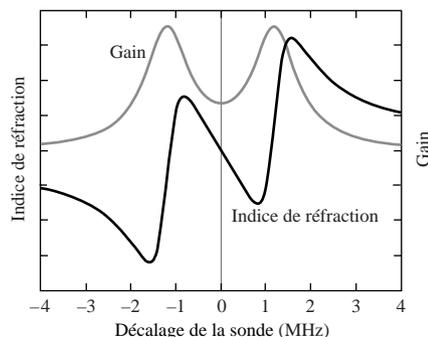


Figure 7.22 Dispersion anormale linéaire à gain assisté utilisée pour démontrer la vitesse de groupe superluminaire. Indice de réfraction et coefficient de gain pour un gaz de césium avec deux lignes de gain très rapprochées.

distance dans le vide. La différence entre ces deux intervalles, $\Delta t = L/v_g - L/c = (n_g - 1)L/c$, est la différence de temps que met l'impulsion pour traverser le milieu par rapport au vide. Cependant, quand $n_g < 1$, $\Delta t < 0$ et ce délai n'existe pas, l'impulsion arrive tôt ; elle apparaît sur le côté de sortie plus tôt que si elle avait traversé la distance L dans le vide.

Pour comprendre comment cela peut se produire, imaginons un paquet d'onde gaussien dont l'amplitude décroît vers zéro avant et après la région centrale. Physiquement, c'est complètement équivalent à un groupe nombreux d'ondes sinusoïdales se superposant toutes en phase au point où le pic de l'impulsion se produit à chaque instant. Parce que leurs longueurs d'onde sont différentes, ces composantes de Fourier se déphasent l'une par rapport à l'autre en fonction de la distance au pic. Ce fouillis d'ondes sinusoïdales s'annule de plus en plus de chaque côté du pic, formant les « ailes » longuement effilées de l'impulsion.

La philosophie à retenir est que, quelle que soit l'amplitude d'une aile en tout point, elle contient toujours exactement la même distribution d'ondes sinusoïdales que le pic principal. Ce qui fait la différence, dans les flancs de l'impulsion, est le fait que les composantes se superposent de telle façon que le résultat net est fortement atténué. Quand le front de montée traverse la cellule, les atomes de césium l'absorbent et réémettent les ondes sinusoïdales qui le composent, en décalant leurs phases relatives (en fonction de leur fréquence). Cela a pour effet de reconstituer un clone du paquet d'onde original. Cette impulsion composée apparaît à la sortie de la cellule comme si elle avait voyagé à une vitesse supérieure à c , tandis que la pulsation incidente disparaît dans le gaz.

Lumière subluminaire

En même temps que les chercheurs produisaient des paquets d'onde superluminaire, d'autres effectuaient des progrès incroyables en ralentissant, et même en stoppant, des impulsions lumineuses.*

*Lene Vestergaard Hau, S. E. Harris, Z. Dutton, et C. H. Behroozi, « Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas », *Nature* **397**, 594 (1999). Chien Liu, Z. Dutton, et C. H. Behroozi, and Lene Vestergaard Hau, « Observation of coherent optical information storage in an atomic medium using halted light pulses », *Nature* **409**, 490 (2001). D. F. Phillips, A. Fleischhauer, A. Mair, R. L. Walsworth, et M. D. Lukin, « Storage of Light in Atomic Vapor », *Phys. Rev. Lett.* **86**, 783 (2001). Voir aussi Kirk T. McDonald, « Slow light », *Am. J. Phys.* **68**, 293 (2000). Pour une synthèse, voir Barbara Gross Levi, « Researchers Stop, Store, and Retrieve Photons—or at Least the Information They Carry », *Phys. Today* **54**, 17 (2001).

On a pu ainsi faire descendre des atomes de sodium à des températures de quelques nano-kelvins en les refroidissant par un laser (p. 70), puis par évaporation. Quand le gaz descend en-dessous de 435 nK, il devient un condensat de Bose-Einstein (CBE) – un nuage dense d'atomes tous le même état quantique. Il est souhaitable d'augmenter la densité (qui atteint ici un maximum de 5×10^{12} atomes/cm³) car cela augmente la pente de la courbe $n(\nu)$ en fonction de ν .

Généralement, un gaz dense présentera un caractère marqué d'absorption dissipative aux alentours de chacune de ses résonances (c'est-à-dire des lignes spectrales), et c'est d'ailleurs là que l'on cherche à envoyer les impulsions laser (chacune centrée en ν_p). En d'autres termes (figure 7.23a), dans un gaz dense, la transition, de l'état d'équilibre $|1\rangle$ au premier niveau excité $|3\rangle$, résultera en une absorption dissipative de la lumière à cette fréquence (ν_0). Un atome absorbe un photon et est excité mais, avant de pouvoir réémettre, il entre en collision avec un atome voisin et perd cette énergie. En conséquence, le milieu est opaque aux pulsations centrées en ν_0 .

On peut contourner cette difficulté grâce à une technique appelée **transparence électromagnétiquement induite** (TEI). En utilisant un filtrage magnétique, on place d'abord tous les atomes dans l'état $|1\rangle$, puis on éclaire le gaz par un second faisceau laser dit de couplage (ν_c), réglé sur la transition entre un état d'équilibre hyperfin non peuplé $|2\rangle$ et le même état excité $|3\rangle$. Cela entraîne un couplage des deux états d'équilibre (un effet d'interférence quantique) qui ne permet pas à la lumière d'être absorbée dans une bande étroite autour de ν_0 ; cela supprime la transition $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$. En d'autres termes, avec le laser de couplage en fonctionnement et tous les atomes dans l'état $|1\rangle$, le système est dans un « état sombre », où ses atomes ne peuvent pas absorber la lumière de fréquence ν_0 . Quand le faisceau sonde (ν_p) arrive à l'intérieur de la bande de transmission

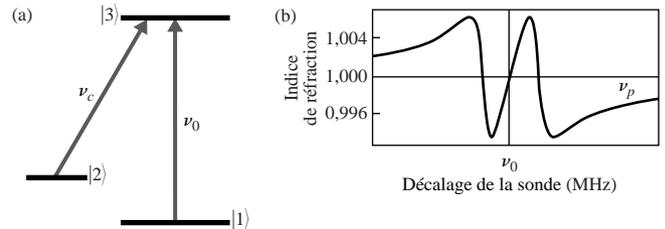


Figure 7.23 (a) Configuration de niveaux d'énergie impliquée dans la création de transparence induite électromagnétiquement. (b) La courbe de l'indice de réfraction du sodium en fonction de la fréquence montre la zone de dispersion normale, à forte pente, de part et d'autre autour de la fréquence de résonance.

autour de ν_0 , il « voit » un milieu essentiellement transparent. Il y a la dispersion habituelle, mais pas d'absorption ni de dissipation d'énergie ultérieures en dehors de l'impulsion. De plus, pour éviter la déformation de l'impulsion du signal, on rend cette dernière suffisamment longue dans le temps afin que son spectre de fréquence soit assez étroit pour tenir à l'intérieur de la bande de transparence.

La dépendance en fréquence de l'indice de réfraction est représentée en figure 7.23*b*. En ν_0 l'indice est de 1, et donc le second terme en

$$n_g = n(\nu) + \nu \frac{dn(\nu)}{d\nu}$$

domine. La partie pentue de la courbe, où $dn(\nu)/d\nu$ a une valeur positive importante, correspond à une région de dispersion normale avec un indice de groupe n_g immense. Les impulsions centrées en $\nu_p = \nu_0$ se propagent à travers le gaz avec des vitesses de groupe aussi basses que 17 m/s. Peu de temps après l'obtention de ces résultats, en couplant la raie D₂ du sodium avec sa raie de référence D₁, les chercheurs ont pu descendre la vitesse de groupe jusqu'à 0,44 m/s (environ 1,5 km/h).

En janvier 2001, deux équipes indépendantes d'Harvard (l'une utilisant du sodium refroidi et l'autre du rubidium chauffé) forcèrent des impulsions de lumière à avancer au pas, puis, en arrêtant le couplage laser – rendant de nouveau le milieu opaque – ils l'arrêtèrent complètement. Bien sûr, chaque fois que l'on cligne des yeux, on arrête la lumière dans sa trajectoire, mais cela était très différent ; la lumière était tout d'abord couplée à un système d'atomes et l'information caractérisant les composantes sinusoïdales de l'impulsion de signal (fréquence, amplitude et moment angulaire) était imprimée au gaz par l'ordonnement cohérent de ses spins atomiques. Cette information était alors retransmise au champ lumineux et l'impulsion de signal réapparaissait, suivant un processus décrit brièvement ci-après.

Quand l'impulsion de signal (dont la longueur en espace libre était de 3,4 km) entrait dans le gaz dense en « état sombre », elle était comprimée d'un facteur c/v_g . (On peut imaginer que cela se passait lorsque le front de montée de l'impulsion entrait dans le milieu et ralentissait ; le reste de l'impulsion qui se propageait vite se repliait sur lui-même. On pourrait comparer la situation à une file de coureurs, séparés de plusieurs enjambées, l'un derrière l'autre, sur une route sèche. Si le leader entre soudainement dans une grande flaque d'eau lui arrivant aux genoux, tout le monde suivant derrière, le temps que le dernier coureur atteigne l'eau, « l'impulsion » de coureurs sera beaucoup plus compacte et se déplacera beaucoup plus lentement.)

Tout avait été préalablement conçu afin que l'impulsion de signal comprimée, d'environ 27×10^3 photons, s'adapte juste

à l'intérieur du nuage de sodium ultrafroid (339 μm). Elle s'y propageait très lentement ; à ce moment, la plupart de l'énergie de l'impulsion sonde avait été transférée au champ lumineux couplé (via l'émission stimulée, p. 602) et avait quitté la cellule. Les atomes à l'intérieur de la région active de la pulsation étaient dans un état de superposition défini par les amplitudes et les phases des deux champs laser.

À l'instant où l'impulsion de signal disparaissait dans le nuage, et avant qu'elle ne puisse en sortir, on éteignait brutalement le faisceau de couplage. La très petite portion d'énergie encore associée à l'impulsion était transformée en excitation collective de spin du nuage gazeux. Les atomes imprimés retenaient l'information des caractéristiques physiques des composantes sinusoïdales pendant environ 1 ms. Quand on rallumait soudainement le faisceau de couplage, le gaz émettait une réplique de l'impulsion originelle. Ainsi, en agissant comme un système quantique cohérent, les atomes activés du gaz stockent un modèle de l'impulsion. Quand on réactive à nouveau l'état sombre, on rend disponible une énergie électromagnétique (via le faisceau de couplage), et les atomes reconstituent l'impulsion de signal.

Tout ce dont nous avons parlé dans ce paragraphe se rapporte aux impulsions de lumière et de leurs vitesses de groupe, qu'elles soient supérieures ou inférieures à c . Dans les deux cas, les photons ne se propagent qu'à la vitesse c et, soit ils existent, soit ils n'existent pas. Les photons n'accélèrent ni ne ralentissent jamais, et ils ne s'arrêtent certainement jamais, pour rester sans bouger.

7.3 Ondes périodiques anharmoniques

Nous avons d'ores et déjà introduit la notion fascinante selon laquelle toute onde réelle peut se décomposer en ondes sinusoïdales sélectionnées de manière appropriée. Voyons maintenant comment cela se fait pratiquement.

La figure 7.24 décrit une perturbation qui naît de la superposition de deux fonctions harmoniques d'amplitudes et de longueurs d'onde différentes. On peut remarquer qu'il se produit quelque chose d'assez évident, mais intéressant – la perturbation résultante est **anharmonique** – elle n'est pas sinusoïdale.

7.3.1 Séries de Fourier

Le premier enseignement de la figure 7.25 est qu'en choisissant judicieusement les amplitudes, les longueurs d'onde, et les phases relatives, on peut synthétiser certains profils d'onde

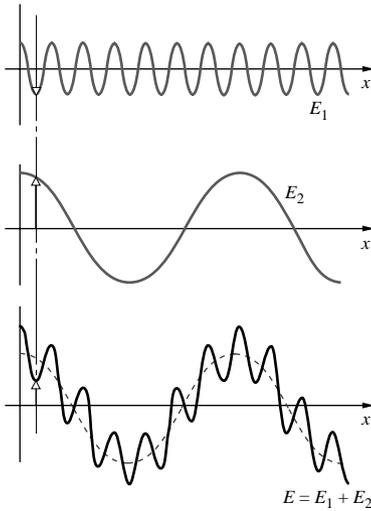


Figure 7.24 La superposition de deux ondes harmoniques de fréquences différentes produit une onde périodique anharmonique.

intéressants. Les sinusôides dans cette illustration ont deux longueurs d'onde, λ_1 et λ_2 différentes, et sont en opposition de phase après un cycle. Mais après N_1 cycles de l'une et N_2 cycles de l'autre, tels que $\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2$, elles seront à nouveau en phase et la résultante se répétera elle-même encore et encore ; la fonction synthétisée est périodique. Les composantes harmoniques qui constituent une fonction périodique n'ont pas besoin d'être toutes en phase à l'origine (figure 7.26a). Prenons note des amplitudes de chaque composante sinusôidale dans la figure 7.26b ; quand on les trace en fonction de leurs fréquences correspondantes, comme dans la figure 7.26c, le résultat est appelé le **spectre de fréquence**.

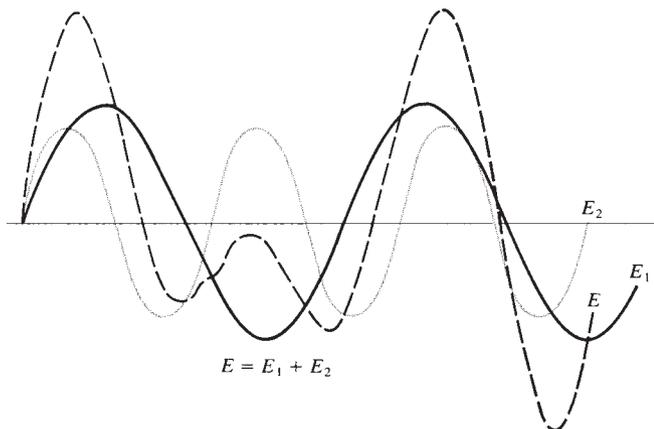


Figure 7.25 Superposition de deux ondes harmoniques de fréquences différentes. L'onde résultante est périodique mais anharmonique.

Une technique mathématique particulièrement élégante pour analyser les fonctions périodiques a été mise en place par le physicien français Jean-Baptiste Joseph, Baron de Fourier (1768-1830). Cette théorie est développée dans ce qui allait être connu sous le nom de **théorème de Fourier**, théorème qui établit qu'on peut synthétiser une fonction $f(x)$, ayant une période spatiale λ , par une somme de fonctions harmoniques dont les longueurs d'onde sont des sous-multiples entiers de λ (c'est-à-dire, λ , $\lambda/2$, $\lambda/3$, etc.). Cette représentation en série de Fourier à la forme mathématique suivante :

$$f(x) = C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \varepsilon_1\right) + C_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda/2}x + \varepsilon_2\right) + \dots \quad (7.41)$$

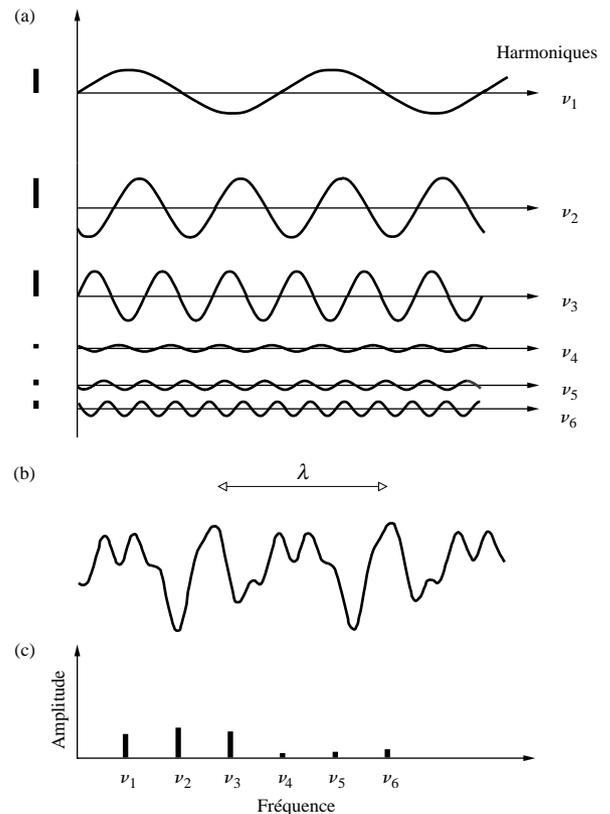


Figure 7.26 (a) Superposition de six ondes harmoniques d'amplitudes et de fréquences différentes. (b) Fonction périodique résultante. (c) Spectre en fréquences.

où les valeurs C sont des constantes, et bien évidemment le profil $f(x)$ peut correspondre à l'onde de propagation $f(x - vt)$. Pour aller plus loin dans la compréhension de cette synthèse, on peut observer que, si C_0 lui-même est bien sûr une pauvre représentation de la fonction originale, il convient pour les quelques points où il croise la courbe $f(x)$. De la même façon, le fait d'ajouter les termes suivants améliore quelque peu les choses, puisqu'on peut choisir la fonction :

$$[C_0 + C_1 \cos(2\pi x/\lambda + \varepsilon_1)]$$

pour croiser la courbe $f(x)$ plus fréquemment. Si la fonction synthétisée [la partie droite de l'équation (7.41)] comprend un nombre infini de termes, choisis afin d'avoir un nombre infini d'intersections avec la fonction anharmonique, il est probable que la série sera identique à $f(x)$.

Il est souvent plus pratique de reformuler l'équation (7.41) en utilisant l'identité trigonométrique :

$$C_m \cos(mkx + \varepsilon_m) = A_m \cos mkx + B_m \sin mkx$$

où $k = 2\pi/\lambda$, λ étant la longueur d'onde de $f(x)$, $A_m = C_m \cos \varepsilon_m$, et $B_m = -C_m \sin \varepsilon_m$. Donc :

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos mkx + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin mkx \quad (7.42)$$

On écrit le premier terme sous la forme $A_0/2$ du fait de la simplification mathématique que cela entraînera plus tard. Le processus de détermination des coefficients A_0 , A_m , et B_m pour une fonction périodique spécifique $f(x)$ est appelé **analyse de Fourier**.

Nous allons maintenant consacrer un certain temps pour établir une série d'expressions avec ces coefficients, lesquelles pourront être utilisées ultérieurement. Dans ce but, intégrons les deux côtés de l'équation (7.42) sur une longueur λ , n'importe où le long de l'axe des abscisses, par exemple de 0 à λ ou de $-\lambda/2$ à $+\lambda/2$ ou, plus généralement de x' à $x' + \lambda$. Puisque, sur une telle longueur,

$$\int_0^\lambda \sin mkx \, dx = \int_0^\lambda \cos mkx \, dx = 0$$

il n'y a qu'un terme non nul à évaluer, à savoir :

$$\int_0^\lambda f(x) \, dx = \int_0^\lambda \frac{A_0}{2} \, dx = A_0 \frac{\lambda}{2}$$

et donc :

$$A_0 = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) \, dx \quad (7.43)$$

Pour trouver A_m et B_m on utilisera l'orthogonalité des fonctions sinusoïdales (Problème 7.32), c'est-à-dire le fait que :

$$\int_0^\lambda \sin akx \cos bkx \, dx = 0 \quad (7.44)$$

$$\int_0^\lambda \cos akx \cos bkx \, dx = \frac{\lambda}{2} \delta_{ab} \quad (7.45)$$

$$\int_0^\lambda \sin akx \sin bkx \, dx = \frac{\lambda}{2} \delta_{ab} \quad (7.46)$$

où a et b sont des entiers positifs non nuls et δ_{ab} , connu comme étant le *delta de Kronecker*, est une notation abrégée égale à zéro quand $a \neq b$ et égal à 1 quand $a = b$. Pour trouver A_m on multiplie maintenant chaque côté de l'équation (7.42) par $\cos \ell kx$, ℓ étant un entier positif, puis on intègre sur une période spatiale. Il n'y a qu'un seul terme qui ne disparaît pas, et il s'agit de la seule contribution dans la première somme, qui correspond à $\ell = m$, auquel cas :

$$\int_0^\lambda f(x) \cos mkx \, dx = \int_0^\lambda A_m \cos^2 mkx \, dx = \frac{\lambda}{2} A_m$$

Donc :

$$A_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) \cos mkx \, dx \quad (7.47)$$

On peut utiliser cette expression pour évaluer A_m pour toutes les valeurs de m , $m = 0$ inclus, ce qui est évident après comparaison des équations (7.43) et (7.47). De même, en multipliant l'équation (7.42) par $\sin \ell kx$ et en l'intégrant, on obtient :

$$B_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) \sin mkx \, dx \quad (7.48)$$

En résumé, on peut représenter une fonction périodique $f(x)$ comme une série de Fourier :

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos mkx + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin mkx \quad [7.42]$$

où, on calcule les coefficients à partir de $f(x)$, en utilisant :

$$A_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) \cos mkx \, dx \quad [7.47]$$

et

$$B_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) \sin mkx \, dx \quad [7.48]$$

Certes, il existe quelques subtilités mathématiques liées à la convergence de la série et au nombre de singularités de $f(x)$, mais on ne s'en préoccupera pas ici.

En revanche, il faut tenir compte de certaines conditions de symétrie car elles conduisent à des simplifications de calculs. Par exemple, si une fonction $f(x)$ est *paire*, c'est-à-dire si $f(-x) = f(x)$, ou, si de manière équivalente, elle est symétrique par rapport à $x = 0$, sa série de Fourier ne contiendra que les termes en cosinus ($B_m = 0$ pour tout m) qui sont eux-mêmes des fonctions paires. De même, les fonctions *impaires* qui sont antisymétriques par rapport à $x = 0$, c'est-à-dire, $f(-x) = -f(x)$, auront des développements en série ne contenant que des fonctions sinus ($A_m = 0$ pour tout m). Dans les deux cas, il n'est pas nécessaire de calculer les deux séries de coefficients. Cela est particulièrement utile quand la localisation de l'origine ($x = 0$) est arbitraire, et que l'on peut la choisir afin de rendre les choses aussi simples que possible.

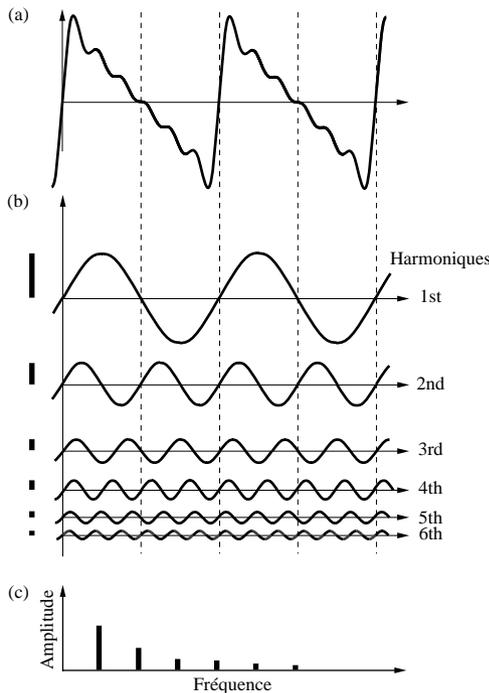


Figure 7.27 (a) Approximation d'une onde en dents de scie. Une telle onde comportant des milliers de composantes sinusoïdales devrait présenter des bords droits et des coins anguleux. (b) Le faible nombre d'harmoniques utilisé (6), d'amplitudes et de fréquences différentes, explique l'aspect ondulant de cette dent de scie. (c) Spectre en fréquence.

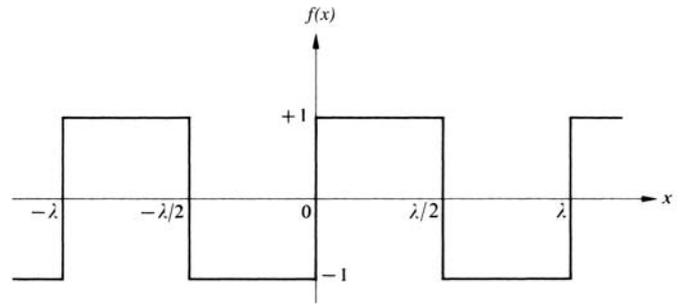


Figure 7.28 Profil d'une onde périodique en créneaux.

Néanmoins, il faut bien réaliser que beaucoup de fonctions usuelles ne sont ni impaires ni paires (par exemple, e^x).

La fonction « dents de scie » (figure 7.27) est impaire ; quelle que soit sa valeur à une certaine distance à droite de l'origine, elle est de signe opposée à celle de la fonction au point symétrique par rapport à l'origine. On peut donc la synthétiser avec seulement des sinusoïdes ; les composantes harmoniques sont toutes en phase et nulles à l'origine. Il n'y a ici que six composantes sinusoïdales, et notre fonction en dents de scie est donc assez ondulée ; le fait d'ajouter quelques douzaines de termes l'affinerait joliment.

Afin d'illustrer la technique, calculons la série de Fourier qui correspond à une onde carrée. Sélectionnons la localisation de l'origine comme en figure 7.28, auquel cas :

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{lorsque } 0 < x < \lambda/2 \\ -1 & \text{lorsque } \lambda/2 < x < \lambda \end{cases}$$

Comme $f(x)$ est impaire, $A_m = 0$, et :

$$B_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} (+1) \sin mkx \, dx + \frac{2}{\lambda} \int_{\lambda/2}^{\lambda} (-1) \sin mkx \, dx$$

donc :

$$B_m = \frac{1}{m\pi} [-\cos mkx]_0^{\lambda/2} + \frac{1}{m\pi} [\cos mkx]_{\lambda/2}^{\lambda}$$

En se souvenant que $k = 2\pi/\lambda$, on obtient :

$$B_m = \frac{2}{m\pi} (1 - \cos m\pi)$$

Les coefficients de Fourier sont donc :

$$B_1 = \frac{4}{\pi}, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{4}{3\pi}, \\ B_4 = 0, \quad B_5 = \frac{4}{5\pi}, \dots$$

et la série cherchée est simplement :

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin kx + \frac{1}{3} \sin 3kx + \frac{1}{5} \sin 5kx + \dots \right) \quad (7.49)$$

La figure 7.29 est un graphe de quelques sommes partielles de la série avec un nombre de termes croissant. On pourrait basculer dans le domaine temporel pour trouver $f(t)$ en changeant simplement kx en ωt . Considérons trois oscillateurs électroniques, dont les tensions de sortie varient de manière sinusoïdale et sont contrôlables en amplitude et en fréquence. Si on les relie en série avec leurs fréquences réglées à ω , 3ω , et 5ω et si l'on examine le signal total sur l'oscilloscope, on peut synthétiser n'importe laquelle de ces courbes. De la même manière, on pourrait frapper simultanément sur trois touches d'un piano avec la force appropriée sur chacune de ces touches pour créer un accord, ou onde sonore composée, qui aurait la courbe de la figure 7.29c comme profil. Curieusement, le système cérébro-auditif humain est capable de décomposer, par analyse de Fourier, une onde simple en ses harmoniques. Il existe probablement des personnes qui pourraient même nommer chaque note de l'accord.

Nous avons précédemment reporté toute considération détaillée sur les fonctions périodiques anharmoniques et restreint l'analyse aux ondes purement sinusoïdales. Nous avons désormais un argument solide pour justifier ce parti pris. À partir de maintenant nous pouvons envisager ce genre de perturbation comme la superposition d'harmoniques de différentes fréquences dont le comportement individuel peut être étudié séparément. En conséquence, nous pouvons écrire :

$$f(x \pm vt) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos mk(x \pm vt) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin mk(x \pm vt) \quad (7.50)$$

ou, de manière équivalente :

$$f(x \pm vt) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos [mk(x \pm vt) + \varepsilon_m] \quad (7.51)$$

pour toute *onde périodique anharmonique*.

Comme dernier exemple, décomposons l'onde créneau de la figure 7.30 en ses composantes de Fourier. On notera qu'avec le choix qui a été fait pour l'origine, la fonction est paire et tous les termes B_m sont nuls. Les coefficients de Fourier appropriés (Problème 7.33) sont alors :

$$A_0 = \frac{4}{a} \quad \text{et} \quad A_m = \frac{4}{a} \left(\frac{\sin m2\pi/a}{m2\pi/a} \right) \quad (7.52)$$

Contrairement à la fonction précédente, celle-ci a une valeur non nulle de A_0 . On peut déjà remarquer que $A_0/2$ est en fait la *valeur moyenne* de $f(x)$, et comme la courbe est complètement située au-dessus de l'axe, sa valeur moyenne ne sera pas nulle.

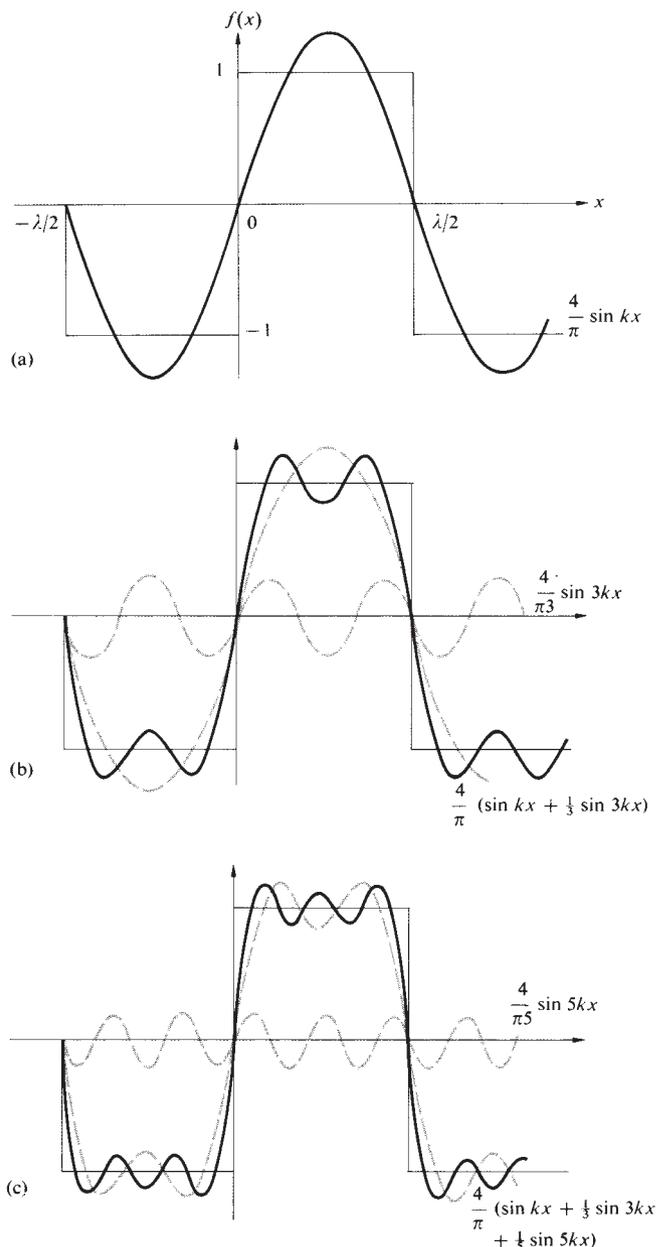


Figure 7.29 Suite.

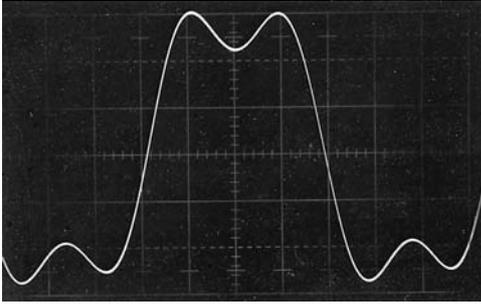


Figure 7.29 Synthèse du profil d'une onde périodique en créneau. On note que toutes les composantes sont en phase et nulles chaque fois que la fonction créneau est elle-même nulle. Comme toutes les ondes sinus sont en phase en $x = 0$, tous les coefficients B_m sont positifs. (Photo E. H.)

L'expression $(\sin u)/u$, que nous avons étudiée précédemment (p. 52), est appelée **sinus cardinal de u** , ou **sinc u** , et ses valeurs sont indiquées dans le tableau 1 en annexe. Comme la limite de sinc u est 1 quand u tend vers zéro, A_m peut représenter tous les coefficients, si l'on pose $m = 0, 1, 2, \dots$. On notera également que, comme la fonction sinc a des valeurs négatives, quelques coefficients A_m seront négatifs. Cela signifie que certains des cosinus d'ordre élevé seront déphasés de 180° par rapport au terme en cosinus avec $m = 1$.

Il y a trois éléments qui différencient les fonctions des figures 7.28 et 7.30, qui par ailleurs ont la même forme : l'emplacement de l'axe $x = 0$, l'emplacement de l'axe $f(x) = 0$, et la hauteur des créneaux. En conséquence, en plus d'avoir la même constante A_0 , les harmoniques doivent avoir la même relation avec les deux $f(x)$ quand on les trace. C'est pourquoi, le fait de déplacer l'axe $x = 0$ de sa position sur la figure 7.28 à celle qu'il occupe sur la figure 7.30 changera les sinus en cosinus dans l'analyse, mais laisse par ailleurs les harmoniques de la figure 7.29 inchangés. Les sinusoides qui forment le créneau de la figure 7.29 seront les cosinusoides qui forment celui de la figure 7.30. Avec l'axe vertical au milieu du pic carré, la figure 7.29 montre clairement qu'un cosinus sur deux devra être négatif en $x = 0$.

La largeur du créneau, $2(\lambda/a)$, peut être une fraction quelconque de la longueur d'onde totale, en fonction de la valeur choisie pour a . La série de Fourier est alors :

$$f(x) = \frac{2}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{a} \operatorname{sinc} m2\pi/a \cos mkx \quad (7.53)$$

Si l'on synthétisait la fonction temporelle correspondante $f(t)$, ayant une largeur de pic carré de $2(\tau/a)$, on obtiendrait la

même expression que l'équation (7.53), où ωt remplacerait simplement kx . Ici, ω est la *pulsation* de la fonction périodique $f(t)$ et dénommée **fondamental**. C'est la fréquence angulaire la plus basse du terme en cosinus et on l'obtient avec $m = 1$. Les fréquences angulaires $2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots$ sont les **harmoniques** du fondamental et sont associées à $m = 2, 3, 4, \dots$

De manière analogue à ce qui se passe dans le temps, p sera la *période spatiale* ou **pas**, $\kappa \equiv 1/p$ est la **fréquence spatiale**, et $k = 2\pi\kappa$ sera appelée la **fréquence spatiale angulaire**. Encore une fois on parle d'harmoniques, de fréquences $2k, 3k, 4k, \dots$ qui sont des cycles dans l'espace. Évidemment, les dimensions de κ sont des cycles par unité de longueur (en cycles par m ou m^{-1}), et celles de k sont des radians par unité de longueur. Une clôture pourra donc avoir une fréquence spatiale d'un piquet par mètre, tandis qu'un peigne aura un k de 4 dents par cm.

Clarifions quelques points afin d'éviter toute confusion sur l'utilisation des termes *fréquence spatiale* et *période spatiale* (ou pas). La figure 7.30 représente une fonction d'onde en créneaux périodique à une dimension qui s'étend dans l'espace le long de l'axe des x . Cela peut être la trace que l'on voit sur l'écran d'un oscilloscope ou le profil d'une perturbation peu ordinaire qui se déplacerait le long d'une corde tendue. Dans les deux cas, le motif se répète dans l'espace après une longueur qui est le pas, et l'inverse de ce paramètre est la fréquence spatiale.

Supposons maintenant que le motif corresponde à une distribution d'éclairement, avec une série de bandes brillantes et sombres, ce qu'on pourrait par exemple observer à travers une fente étroite et horizontale contre une palissade, ou, mieux encore, en balayant une ligne perpendiculaire à un groupe de bandes alternativement claires et opaques (figure 13.25) éclairé par de la lumière monochromatique. Encore une fois, le graphe aura un pas et une fréquence spatiale déterminés par sa cadence de répétition dans l'espace. Il ne faut pas oublier que le champ lumineux a lui aussi une fréquence spatiale (κ) et une période (λ), ainsi qu'une fréquence et une période temporelles, qui n'ont rien à voir avec le pas et la fréquence spatiale du

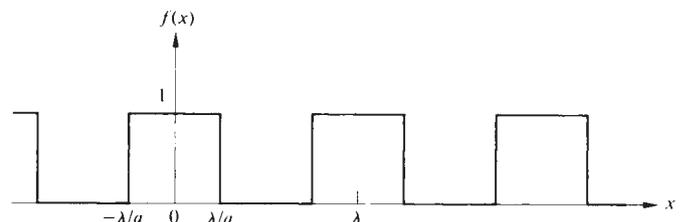


Figure 7.30 Fonction périodique anharmonique.

motif. Le motif peut avoir un pas (p) de 20 cm, et la lumière qui le crée une longueur d'onde (λ) de 500 nm. *Nous réserverons donc les symboles k et λ pour l'onde lumineuse elle-même et utiliserons k et p pour décrire les figures optiques spatiales.*

Retournons maintenant à la fonction créneau de la figure 7.30 pour laquelle $a = 4$, ce qui veut dire que le pic a une largeur de $p/2$. Dans cet exemple :

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos kx - \frac{1}{3} \cos 3kx + \frac{1}{5} \cos 5kx - \dots \right) \quad (7.54)$$

En fait, si le graphe de la fonction $f(x)$ est tel qu'une droite horizontale peut le diviser en segments de forme équivalente, au-dessus et en-dessous de cette droite, la série de Fourier ne contiendra que des harmoniques impairs.

Si l'on traçait la courbe représentant la somme partielle des termes jusqu'à $m = 9$, elle ressemblerait fortement à l'onde en créneaux. En revanche, si l'on réduit la largeur du pic, le nombre de termes de la série qu'il est nécessaire d'avoir pour produire la même ressemblance générale de $f(x)$ augmentera. On peut s'en rendre compte en analysant le rapport :

$$\frac{A_m}{A_1} = \frac{\sin m2\pi/a}{m \sin 2\pi/a} \quad (7.55)$$

On observera que, pour $a = 4$, le neuvième terme (c'est-à-dire $m = 9$) est relativement petit, $A_9 \approx 10\% A_1$. En comparaison, pour un pic 100 fois plus étroit (c'est-à-dire $a = 400$), $A_9 \approx 99\% A_1$. De même, alors qu'il suffit de prendre les termes jusqu'à $m = 4$ pour représenter la courbe de la figure 7.29b avec $a = 4$, il faut aller jusqu'à $m = 8$ pour obtenir à peu près la même qualité de profil quand $a = 8$. Rendre le pic plus étroit a pour effet d'introduire des harmoniques d'ordre plus élevé, qui à leur tour ont des pas plus petits. Il faut bien réaliser que ce n'est pas le nombre total de termes de la série qui est primordial mais plutôt le rapport entre les dimensions des plus petits détails à reproduire et les valeurs des pas disponibles.* S'il y a des détails fins dans le profil, la série doit contenir des contributions de relativement faibles pas (ou dans le domaine temporel, de courte période).

Il faut simplement prendre les valeurs négatives de A_m dans l'équation (7.53) comme les amplitudes des harmoniques qui sont en opposition de phase par rapport aux termes positifs. L'équivalence entre une amplitude négative et un déphasage de π rad vient du fait que $A_m \cos(kx + \pi) = -A_m \cos kx$.

*De manière évidente, on ne peut pas construire un château de blocks si ceux-ci ne sont pas bien plus petits que le château.

7.4 Ondes non périodiques

Quelle que soit leur durée, toutes les ondes réelles sont des impulsions, et il est donc important d'apprendre à analyser des fonctions non périodiques. De telles fonctions sont d'un grand intérêt pratique en physique, particulièrement en optique et en mécanique quantique.

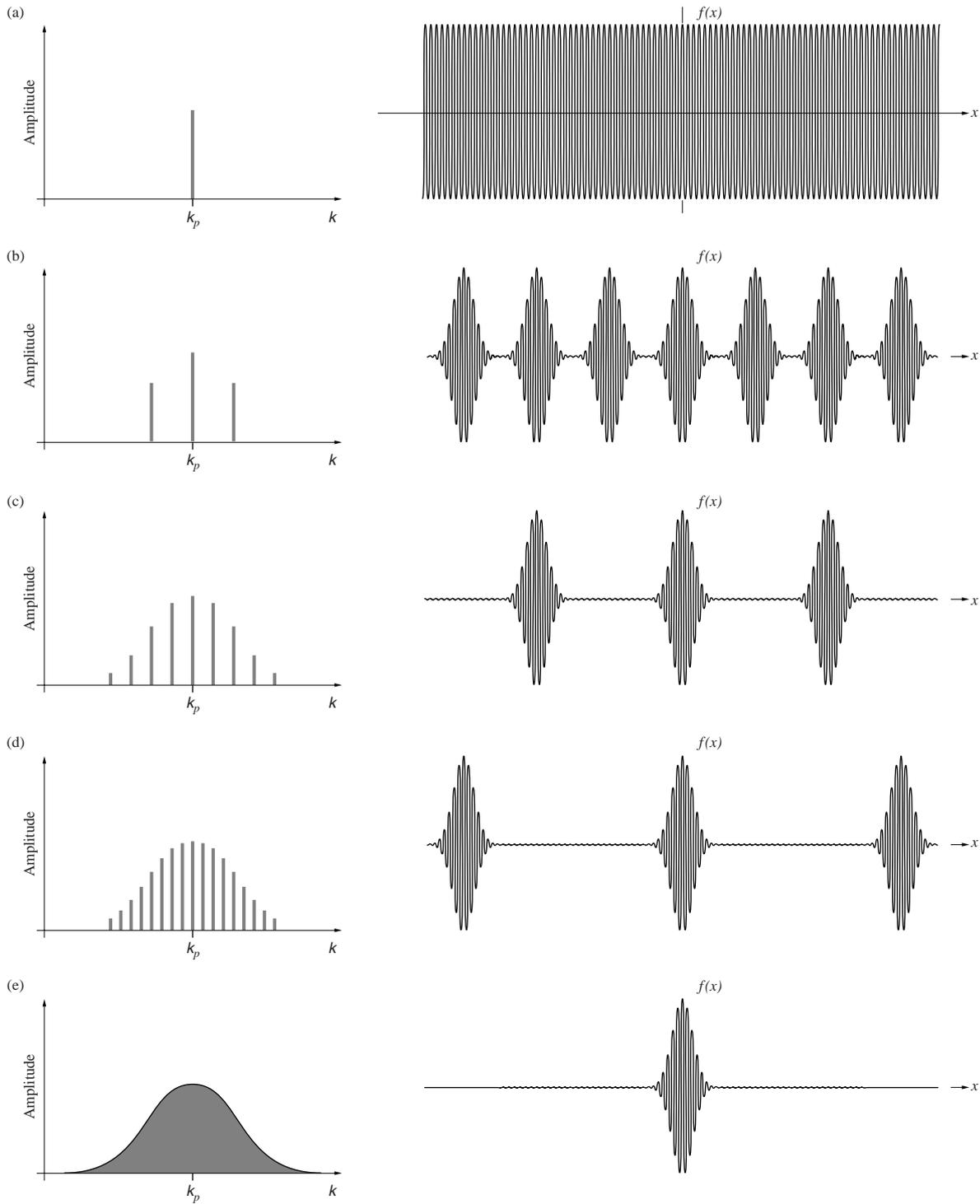
Nous avons déjà vu (figure 7.16) comment le fait d'additionner deux sinusoïdes produit des battements en se déphasant ; les sinus créent alors un minimum dans l'enveloppe, puis reviennent en phase pour produire un maximum. On voit que le fait de regrouper plus de composantes nécessitera une plus grande distance dans l'espace avant qu'elles puissent toutes revenir en phase pour former le prochain maximum de l'enveloppe (figure 7.31). Autrement dit, la présence d'un plus grand nombre de composantes pourra avoir pour effet d'éloigner les maxima. Il ne faut pas oublier également que la porteuse dans le tracé du battement était à la fréquence moyenne (appelons-la k_p , car elle s'avérera être la fréquence du pic présent) donc si l'on ajoute des sinusoïdes symétriquement autour de k_p , l'oscillation de la porteuse ne devrait pas changer de fréquence ; nous pouvons le voir sur la figure 7.31b et par le problème 7.18. Si l'on veut produire une impulsion unique à partir d'harmoniques (figure 7.31e), il faut déterminer exactement les fréquences à inclure et la quantité de chaque fréquence.

Retournons à la figure 7.30 et gardons la largeur du pic carré constante pendant qu'on augmente sans limite le pas π . Quand π tend vers l'infini, la fonction résultante n'apparaîtra plus comme périodique. On aura alors une impulsion carrée unique, les pics adjacents s'étant déplacés à l'infini. Cela suggère une manière de généraliser la méthode des séries de Fourier pour inclure les fonctions non périodiques.

7.4.1 Intégrales de Fourier

Afin d'étirer la fonction, posons initialement $a = 4$ et choisissons une valeur quelconque de π , disons $\pi = 1$ cm. Le pic a

Figure 7.31 Ici, on commence avec une sinusoïde unique à la fréquence spatiale (k_p), qui est appelée la fréquence porteuse (ou de pic). L'addition de deux composantes de fréquence supplémentaires symétriques par rapport à k_p , laisse la fréquence porteuse (ou moyenne) inchangée, mais produit des battements. L'ajout supplémentaire de deux paires de sinusoïdes sépare d'autant plus les impulsions sans changer leur forme. Comme on le verra à la figure 7.37, si les amplitudes des composantes forment une enveloppe gaussienne, les enveloppes des impulsions seront aussi gaussiennes.



alors une largeur d' $\frac{1}{2}$ cm, c'est-à-dire $2(\lambda\pi a)$, centrée en $x = 0$, comme le montre la figure 7.32a. On peut évaluer l'importance de chaque fréquence particulière mk , en analysant la valeur du coefficient de Fourier correspondant, dans ce cas A_m . On peut considérer les coefficients comme des poids attribués aux différents harmoniques. La figure 7.32a représente un certain nombre de valeurs de A_m (où $m = 0, 1, 2, \dots$) en fonction de mk pour l'onde en créneau présentée précédemment. Une telle courbe est un *spectre de fréquences spatiales*.

On peut considérer A_m comme une fonction $A(mk)$ de mk , qui ne peut être non nulle que pour les valeurs de $m = 0, 1, 2, \dots$ Si l'on prend la valeur 8 pour a pendant que l'on augmente π à 2 cm, la largeur du pic ne sera absolument pas affectée. La seule modification est le doublement de la distance entre pics. Il apparaît cependant un changement très intéressant dans le spectre de fréquences spatiales, qui est évident sur la figure 7.32b : la densité de composantes le long de l'axe mk a sensiblement augmenté. Néanmoins, $A(mk)$ est toujours nul quand $mk = 4\pi, 8\pi, 12\pi, \dots$ mais comme k est maintenant égal à π au lieu de 2π , il y aura plus de termes entre les zéros. Finalement, posons $a = 16$ et augmentons π à 4 cm. Encore une fois les pics individuels ne changent pas de forme, mais les termes du spectre de fréquence sont à présent encore plus denses. En effet, l'impulsion devient de plus en plus petite par rapport à p , et nécessite donc de hautes fréquences pour être synthétisée.

Observons que l'enveloppe de la courbe, qui était à peine discernable dans la figure 7.32a, est vraiment évidente sur la figure 7.32c. L'enveloppe est en fait identique dans tous les cas, si ce n'est un facteur d'échelle. Elle est uniquement déterminée par la forme du signal original et sera très différente pour d'autres configurations. On peut conclure que, tant que π augmente, et que la fonction prend l'apparence d'une impulsion carrée identique, la séparation entre les contributions $A(mk)$ du spectre diminuera. Les lignes spectrales discrètes, en décroissant en amplitude, vont graduellement se confondre, et il devient impossible de les résoudre individuellement. Dans le cas limite où p tend vers ∞ , les lignes spectrales vont devenir infiniment proches l'une de l'autre. Quand k devient extrêmement petit, m doit devenir en conséquence extrêmement grand afin que mk soit appréciable. Effectuons un changement de notation en remplaçant la fréquence angulaire des harmoniques mk par k_m . Bien qu'il comprenne des termes discrets, k_m sera transformé à la limite en k (c'est-à-dire une distribution continue de fréquences). La fonction $A(k_m)$ va devenir à la limite l'enveloppe de la figure 7.32. Il n'est évidemment plus significatif de parler de fréquence fondamentale et de ses harmoniques. L'impulsion étant synthétisée, $f(x)$ n'a plus de fréquence fondamentale apparente.

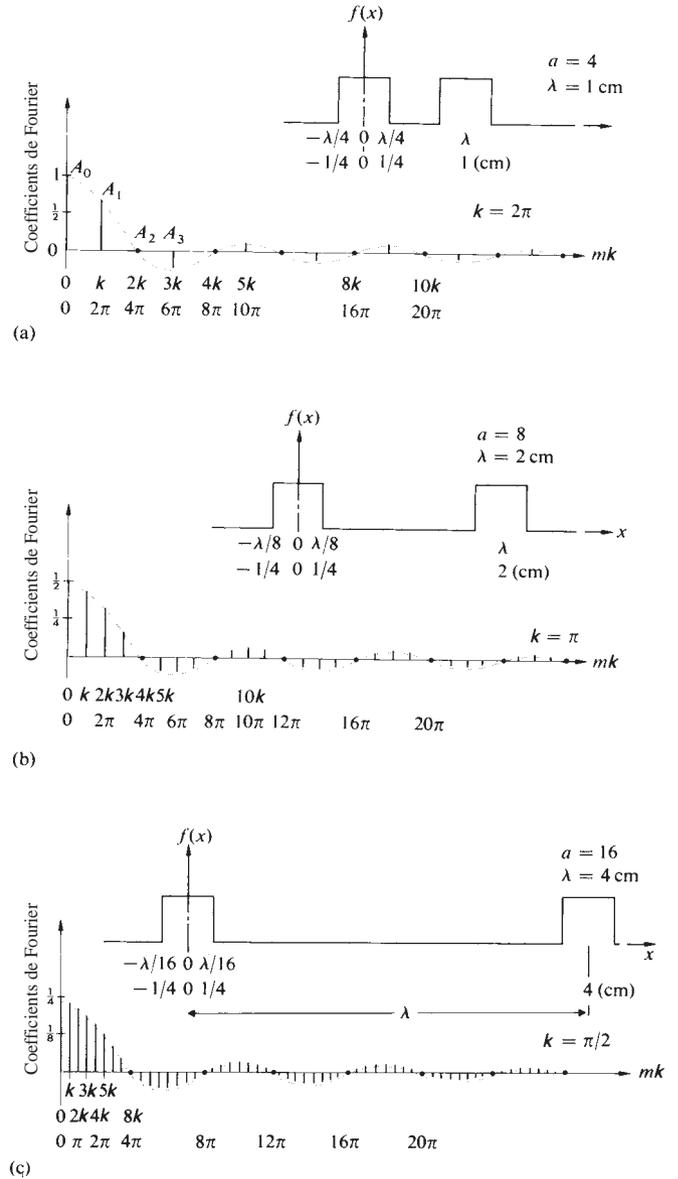


Figure 7.32 L'impulsion carrée représente un cas limite. Les coefficients négatifs correspondent à un déphasage de π radians. Au fur et à mesure que l'on ajoute des termes de fréquences à la synthèse, les pics situés des deux côtés de celui de l'origine se déplacent respectivement vers \pm l'infini. À la limite, lorsqu'il y a des composantes sur une gamme continue de fréquences, elles se combinent pour former une impulsion carrée unique centrée sur l'origine.

N'oublions pas qu'une intégrale est en réalité la limite d'une somme quand le nombre d'éléments tend vers l'infini et leur taille vers zéro. Il n'est donc pas surprenant que la *série de Fourier* doive être remplacée par l'**intégrale de Fourier** quand π tend vers l'infini. Cette intégrale, exposée ici sans preuve, est :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} A(k) \cos kx \, dk + \int_0^{\infty} B(k) \sin kx \, dk \right] \quad (7.56)$$

sous réserve que :

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx \, dx$$

et :

$$B(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin kx \, dx \quad (7.57)$$

La similarité avec la représentation en séries devrait être évidente. Les quantités $A(k)$ et $B(k)$ sont les amplitudes des contributions en sinus et en cosinus dans la gamme de fréquence spatiale angulaire comprise entre k et $k + dk$. Ce sont respectivement des **transformées de Fourier en cosinus** et **sinus**. Dans l'exemple précité d'une impulsion carrée, c'est la transformée en cosinus $A(k)$ qui correspondra à l'enveloppe de la figure 7.32.

Une étude minutieuse de la figure 7.32 et de l'équation (7.53) montre que, excepté pour le terme de fréquence nulle, les amplitudes des contributions varient en $(4/a) \operatorname{sinc} m2\pi/a$: l'enveloppe de la courbe est une fonction sinc. Il faut se rappeler que le premier terme de la série est $\frac{1}{2}A_0$, ce qui suggère une autre manière de représenter le spectre de fréquence. Vu que $\cos(mkx) = \cos(-mkx)$, on peut diviser par deux l'amplitude de chaque contribution au-delà de $m = 0$ et la tracer deux fois : la première fois avec une valeur positive de k et l'autre avec une valeur négative (figure 7.33). Ce stratagème mathématique produit une jolie courbe symétrique que l'on introduit ici car il est habituel de représenter ainsi les spectres de fréquence.

Comme nous le verrons au chapitre 11, les méthodes les plus puissantes de transformée de Fourier impliquent une représentation complexe qui crée automatiquement une distribution symétrique des termes positifs et négatifs en fréquence spatiale. Certains phénomènes optiques (comme la diffraction) apparaissent également de manière symétrique dans l'espace, et l'on peut établir une formidable relation avec le spectre de fréquence spatiale, à condition de regrouper les fréquences

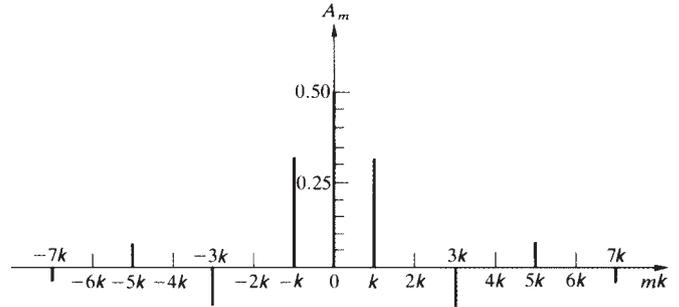


Figure 7.33 Spectre symétrique en fréquences pour l'onde de la figure 7.21a. On note que le terme en zéro est $A_0/2$, qui est en fait l'amplitude de la contribution d'ordre $m = 0$ de la série.

positives et négatives. Les fréquences négatives sont donc un procédé mathématique utile qui permet de décrire les systèmes physiques symétriques.

7.4.2 Impulsions et paquets d'ondes

Déterminons maintenant la représentation en intégrale de Fourier de l'impulsion carrée de la figure 7.34, décrite par la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} E_0 & \text{lorsque } |x| < L/2 \\ 0 & \text{lorsque } |x| > L/2 \end{cases}$$

Pour l'instant, nous limiterons l'étude aux valeurs positives de k . Comme $f(x)$ est une fonction paire, la transformée en sinus $B(k)$ sera nulle. En continuant,

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx \, dx = \int_{-L/2}^{+L/2} E_0 \cos kx \, dx$$

Donc :

$$A(k) = \frac{E_0}{k} \sin kx \Big|_{-L/2}^{+L/2} = \frac{2E_0}{k} \sin kL/2$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par L et en réarrangeant les termes, nous avons :

$$A(k) = E_0 L \frac{\sin kL/2}{kL/2}$$

ou l'équivalent :

$$A(k) = E_0 L \operatorname{sinc}(kL/2) \quad (7.58)$$

La transformée de Fourier de l'impulsion carrée est tracée en figure 7.34b et devrait être comparée à l'enveloppe de la figure

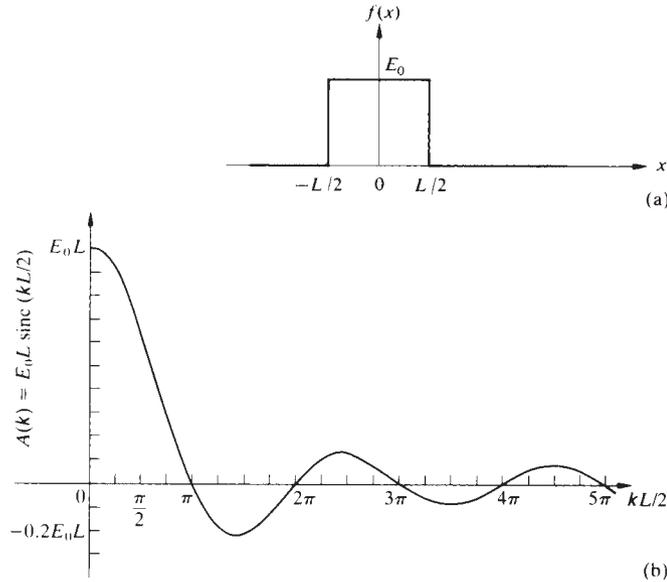


Figure 7.34 L'impulsion carrée et sa transformée.

7.32. Lorsque L augmente, l'espace entre les zéros successifs de $A(k)$ diminue et vice versa. De plus, quand $k = 0$, il découle de l'équation (7.58) que $A(0) = E_0 L$.

Il est donc facile d'écrire la représentation intégrale de $f(x)$ en utilisant l'équation (7.56) :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} E_0 L \operatorname{sinc}(kL/2) \cos kx \, dk \quad (7.59)$$

On laisse l'évaluation de cette intégrale au problème 7.37.

Le train d'onde cosinusoidal

Précédemment, on a souligné le fait que les ondes monochromatiques sont fictives, au moins physiquement, car elles ont, au moins, un commencement. La figure 7.35 représente une impulsion harmonique idéalisée avec une fréquence de porteuse k_p correspondant à la fonction :

$$E(x) = \begin{cases} E_0 \cos k_p x & \text{lorsque } -L \leq x \leq L \\ 0 & \text{lorsque } |x| > L \end{cases}$$

Nous avons choisi de travailler dans le domaine spatial mais nous aurions pu aussi bien traiter la perturbation comme une fonction du temps. C'est en effet, le profil spatial de l'onde

$E(x - vt)$ en $t = 0$ que nous étudions plutôt que son profil temporel en $x = 0$. La fréquence spatiale k_p est celle de la région harmonique de l'impulsion elle-même. En poursuivant l'analyse, on notera que $E(x)$ est une fonction paire, donc $B(k) = 0$ et :

$$A(k) = \int_{-L}^{+L} E_0 \cos k_p x \cos kx \, dx$$

ce qui est identique à :

$$A(k) = \int_{-L}^{+L} E_0 \frac{1}{2} [\cos(k_p + k)x + \cos(k_p - k)x] \, dx$$

qui donne après intégration :

$$A(k) = E_0 L \left[\frac{\sin(k_p + k)L}{(k_p + k)L} + \frac{\sin(k_p - k)L}{(k_p - k)L} \right]$$

ou, si l'on veut,

$$A(k) = E_0 L [\operatorname{sinc}(k_p + k)L + \operatorname{sinc}(k_p - k)L] \quad (7.60)$$

Quand il y a beaucoup d'ondes dans le train ($\lambda_p \ll L$), $k_p L \gg 2\pi$. Donc $(k_p + k)L \gg 2\pi$, et par conséquent $\operatorname{sinc}(k_p + k)L$ atteint de petites valeurs. En revanche, quand $k_p = k$, la seconde fonction sinc dans le crochet a la valeur maximale de 1. On voit donc, dans la partie (b) du tracé que la fonction donnée par l'équation (7.60) a un pic en $k = -k_p$. Si l'on limite le traitement aux valeurs positives de k , seule la partie de la courbe de gauche qui déborde sur les k positifs va intervenir. Comme on vient de le voir de telles contributions sont négligeables loin de $k = -k_p$, spécialement quand $L \gg \lambda_p$ et les pics sont à la fois étroits et largement espacés. La partie du pic de gauche chute alors rapidement en allant vers les k positifs, au-delà de $k = -k_p$. En conséquence, on peut négliger le premier sinc dans ce cas particulier, et écrire la transformée ainsi :

$$A(k) = E_0 L \operatorname{sinc}(k_p - k)L \quad (7.61)$$

(figure 7.35c). Même si le train d'onde est très long, comme il n'est pas infiniment long, il doit être synthétisé à partir d'un domaine continu de fréquences spatiales, et l'on peut donc le considérer comme composé d'un ensemble infini d'ondes harmoniques. Pour désigner de telles impulsions, on parle de **paquets d'onde** ou de **groupes d'onde**. Comme on pouvait s'y attendre, la contribution dominante est associée à $k = k_p$. Si l'on transposait l'analyse dans le domaine temporel, on obtiendrait les mêmes résultats, et la transformée serait centrée

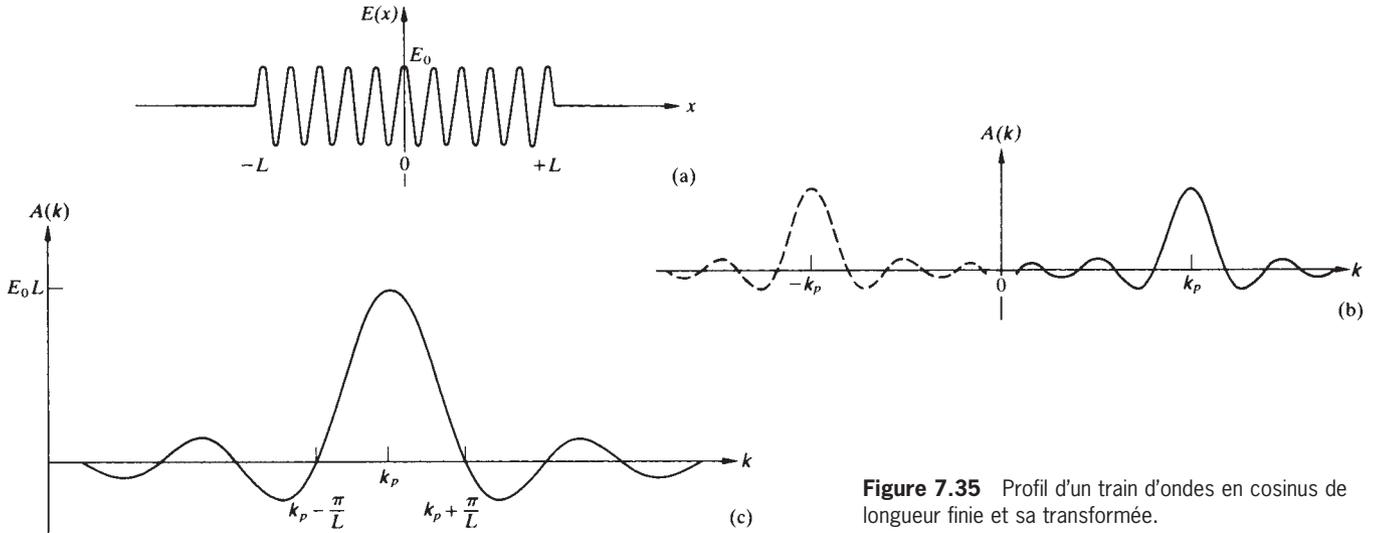


Figure 7.35 Profil d'un train d'ondes en cosinus de longueur finie et sa transformée.

autour de la fréquence angulaire temporelle ω_p . Évidemment, quand le train d'ondes devient infiniment long (c'est-à-dire $L \rightarrow \infty$), son spectre de fréquence rétrécit, et la courbe de la figure 7.35c se rapproche d'un pic unique en k_p (ou ω_p). C'est le cas limite de l'onde monochromatique idéalisée.

Puisqu'on peut considérer $A(k)$ comme l'amplitude des contributions de $E(x)$ dans l'intervalle de k à $k + dk$, $A^2(k)$ doit être relié à l'énergie de l'onde dans cette fourchette (problème 7.38). Nous reviendrons sur ce point au chapitre 11 quand nous aborderons le *spectre de puissance*. Pour le moment, on observera simplement (figure 7.35c) que la plus grande partie de l'énergie est transportée dans le domaine de fréquences spatiales qui va de $k_p - \pi/L$ à $k_p + \pi/L$, s'étendant entre les minima de chaque côté du pic central. Une augmentation de la longueur du train d'ondes aura pour conséquence une concentration de l'énergie dans un domaine de plus en plus étroit de k_p .

Le paquet d'ondes dans le domaine temporel, c'est-à-dire,

$$E(t) = \begin{cases} E_0 \cos \omega_p t & \text{quand } -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{quand } |t| > T \end{cases}$$

a pour transformée :

$$A(\omega) = E_0 T \operatorname{sinc}(\omega_p - \omega) T \quad (7.62)$$

où ω et k sont reliés par la vitesse de phase. Excepté pour le changement de notation de k à ω et de L à T , le spectre de fréquence est identique à celui de la figure 7.35c.

Largeur de bande en fréquence

Pour le paquet d'ondes étudié, le domaine de fréquences angulaires (ω ou k) que comprend sa transformée n'est certainement pas fini. Si nous parlons encore de *largeur* de la transformée ($\Delta\omega$ ou Δk), la figure 7.35c suggère l'utilisation de $\Delta k = 2\pi/L$ ou $\Delta\omega = 2\pi/T$. Par opposition, l'extension spatiale ou temporelle de l'impulsion est sans équivoque pour $\Delta x = 2L$ ou $\Delta t = 2T$, respectivement. Le produit de la largeur du paquet dans l'espace k et sa largeur dans l'espace x est $\Delta k \Delta x = 4\pi$ ou, de manière similaire, $\Delta\omega \Delta t = 4\pi$. Les quantités Δk et $\Delta\omega$ sont les **largeurs de bande en fréquences angulaires**. Si nous avons utilisé une impulsion de forme différente, le produit de la largeur de bande et de la longueur de l'impulsion aurait certainement été différent. L'ambiguïté vient du fait que nous n'avons pas encore choisi une des autres possibilités pour spécifier $\Delta\omega$ et Δk . Par exemple, au lieu d'utiliser les premiers minima de $A(k)$ (il existe des transformées qui n'ont pas de tels minima comme la fonction gaussienne du paragraphe 11.2), nous aurions pu choisir Δk comme étant la largeur de $A^2(k)$ à mi-hauteur ou à $1/e$ par rapport à sa valeur maximale. Quoi qu'il en soit, il suffira pour le moment d'observer que comme $\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu$,

$$\Delta\nu \approx 1/\Delta t \quad (7.63)$$

c'est-à-dire que la largeur de bande en fréquence a le même ordre de grandeur que l'inverse de la durée de l'impulsion (problème 7.39). Si le paquet d'ondes a une largeur de bande étroite, il s'étendra sur une large région de l'espace et du

temps. En conséquence, une radio réglée pour recevoir une largeur de bande $\Delta\nu$ ne sera pas capable de détecter des impulsions de durée plus courte que $\Delta t \approx 1/\Delta\nu$.

Ces considérations sont de la première importance en mécanique quantique où les paquets d'ondes décrivent des particules, et où l'équation (7.63) équivaut au principe d'incertitude d'Heisenberg.

7.4.3 Longueur de cohérence

Considérons maintenant la lumière émise par ce qu'on appellera, de façon assez libre, une source monochromatique, par exemple une lampe de sodium à décharge. On peut observer ses composantes en faisant passer le faisceau dans un analyseur de spectre. On trouve typiquement un grand nombre de composantes étroites, qui contiennent la plus grande partie de l'énergie et sont séparées par de larges régions d'obscurité. Chacune de ces bandes brillantes colorées est appelée **raie spectrale**. Il existe des analyseurs où la lumière entre par une fente, et chaque ligne est en fait une image colorée de cette fente. D'autres analyseurs représentent la distribution de fréquence sur l'écran d'un oscilloscope. Dans tous les cas, les raies spectrales individuelles ne sont pas infiniment étroites. Elles sont toujours constituées d'une bande de fréquence, quelle qu'en soit la finesse (figure 7.36).

Les transitions électroniques responsables de la génération de lumière ont une durée de l'ordre de 10^{-8} s à 10^{-9} s. Comme les trains d'ondes émis ont une durée de longueur finie, cela entraîne une **largeur de raie naturelle** (paragraphe 11.3.4). De plus, comme les atomes ont un mouvement aléatoire en fonction de la température, le spectre de fréquence sera altéré par l'effet Doppler. En outre, les atomes subissent des collisions qui interrompent les trains d'ondes et tendent à élargir encore la distribution de fréquence. De tous ces mécanismes, il résulte que chaque raie spectrale a une largeur de bande finie $\Delta\nu$, plutôt qu'une fréquence unique. La durée qui vérifie l'équation (7.63) est le **temps de cohérence** (dorénavant écrit Δt_c), et la longueur Δl_c , donné par :

$$\Delta l_c = c \Delta t_c \quad (7.64)$$

est la **longueur de cohérence**. Il devrait maintenant être clair que la longueur de cohérence est la longueur sur laquelle l'onde est bien sinusoidale, avec une phase bien définie. La durée correspondante est le temps de cohérence. Ces concepts sont extrêmement importants pour étudier les interactions entre ondes, et nous y reviendrons plus tard dans le cadre des interférences.

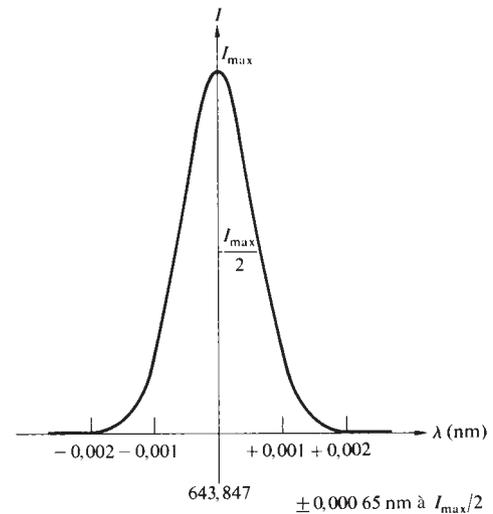


Figure 7.36 La raie spectrale rouge du cadmium ($\bar{\lambda} = 643,847$ nm) d'une lampe à basse pression.

Bien que le concept de train d'ondes lumineuses soit déjà familier, nous sommes désormais en position de tirer une conclusion sur sa configuration, grâce à une petite analyse de Fourier. On peut le faire en observant expérimentalement que la distribution en fréquence de la raie spectrale d'une source quasi monochromatique (non laser) peut être représentée par une fonction gaussienne en forme de cloche (paragraphe 2.1), ce qui veut dire que l'éclairement spectrique (en fonction de la fréquence) est une courbe gaussienne. Comme l'éclairement est proportionnel au carré de l'amplitude du champ électrique, et comme le carré d'une fonction gaussienne est une fonction gaussienne, l'amplitude nette du champ lumineux est donc également gaussienne.

Supposons désormais qu'un train d'ondes, parmi les N paquets identiques qui constituent le faisceau, ressemble à celui de la figure 7.37a, c'est-à-dire à une fonction harmonique modulée par une enveloppe gaussienne. Sa transformée de Fourier $A(\omega)$ est également gaussienne. Intéressons-nous à une seule d'entre elles, par exemple celle correspondant à ω' , et supposons que la même composante de fréquence harmonique se retrouve dans chaque train d'ondes. Souvenons-nous que cette composante est une sinusoïde infiniment longue et d'amplitude constante. Si tous les paquets sont identiques, l'amplitude de la composante de Fourier associée à ω' sera la même pour chaque paquet. En tout point du faisceau, ces composantes monochromatiques à ω' , une pour chaque train d'onde, auront une distribution de phase relative aléatoire qui change rapidement dans le

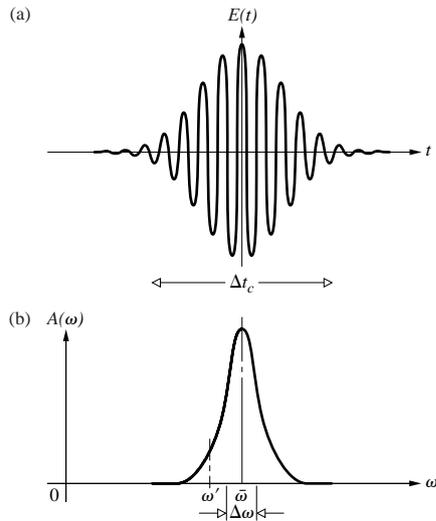


Figure 7.37 Train d'ondes cosinusoidal modulé par une enveloppe gaussienne et sa transformée, également gaussienne.

temps avec l'arrivée de chaque photon. L'association de ces contributions [équation (7.21)] aboutira donc en moyenne à une onde harmonique de fréquence ω' ayant une amplitude proportionnelle à $N^{1/2}$, et cela constitue la composante, à ω' , du champ net observé. La même chose sera valable pour toute autre fréquence constituant les paquets. Cela signifie que la part d'énergie présente à chaque fréquence dans le champ lumineux du faisceau total est la même que celle qui prévaut dans chacun des trains d'ondes pris séparément. De plus, nous connaissons tout sur cette distribution de l'énergie en fonction de la fréquence ; elle est gaussienne, donc la transformée du train d'ondes doit également être gaussienne. En d'autres termes, la raie spectrale observée correspond aussi au spectre de puissance d'un paquet individuel. Si l'éclairement est gaussien, le train d'ondes est gaussien.

En raison du caractère aléatoire des trains d'ondes, les composantes harmoniques individuelles de l'onde résultante n'auront pas les mêmes phases relatives que celles qu'elles avaient dans chaque paquet.

Le profil de la résultante différera donc de celui des paquets d'onde individuels, même si l'amplitude de chaque composante présente dans la résultante est simplement $N^{1/2}$ fois l'amplitude d'un paquet. La raie spectrale observée correspond bien sûr au spectre de puissance du faisceau résultant, mais elle correspond aussi au spectre de puissance d'un paquet individuel. Dans la plupart des circonstances, le nombre de groupes d'ondes qui se superposent de manière arbitraire est très élevé, ce qui signifie que l'enveloppe de la résultante est rarement nulle. Si la source est quasi monochromatique (c'est-à-dire si la largeur de bande est petite par rapport à la fréquence moyenne $\bar{\nu}$), on considérera la résultante comme étant « presque » sinusoïdale.

En résumé, on peut représenter l'onde lumineuse résultante comme dans la figure 7.38 et imaginer que la fréquence et l'amplitude varient aléatoirement ; la première dans l'intervalle $\Delta\nu$ centré en $\bar{\nu}$. En conséquence, la **stabilité de fréquence**, définie par $\Delta\nu/\bar{\nu}$, est une mesure utile de la pureté spectrale. Même un temps de cohérence aussi court que 10^{-9} s correspond à environ quelques millions de longueurs d'onde d'une porteuse optique ($\bar{\nu}$), de sorte que toute variation d'amplitude ou de fréquence s'effectuera très lentement en comparaison. De manière équivalente, on peut introduire un terme de phase dépendant du temps afin que la perturbation puisse s'écrire :

$$E(t) = E_0(t) \cos [\varepsilon(t) - 2\pi\bar{\nu}t] \quad (7.65)$$

où la séparation entre les crêtes de l'onde change en fonction du temps.

La durée moyenne du paquet d'ondes est Δt_c , donc deux points de l'onde de la figure 7.38 séparés de plus de Δt_c doivent appartenir à des trains d'onde différents. Les phases en ces points seront donc complètement décorrélées. Ainsi, si l'on voulait déterminer le champ électrique de l'onde globale

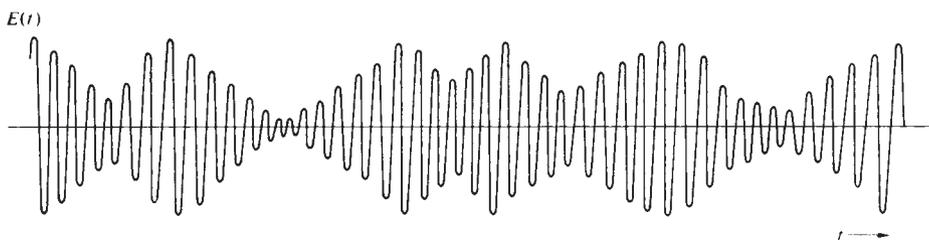


Figure 7.38 Une onde lumineuse quasi monochromatique.

lorsqu'elle arrive sur un détecteur idéal, on pourrait prédire sa phase sur des durées inférieures à Δt_c , mais pas au-delà. Au chapitre 12, nous considérerons le *degré de cohérence*, qui s'applique justement à cette durée intermédiaire.

La lumière blanche couvre un domaine de fréquences qui va de $0,4 \times 10^{15}$ Hz à environ $0,7 \times 10^{15}$ Hz, c'est-à-dire une largeur de bande d'environ $0,3 \times 10^{15}$ Hz. Le temps de cohérence est alors approximativement de 3×10^{-15} s, ce qui correspond [équation (7.64)] seulement aux trains d'onde ayant une dimension spatiale de quelques longueurs d'onde (Tableau 7.1). En conséquence, *la lumière blanche est une succession aléatoire de très petites impulsions*. Pour synthétiser de la lumière blanche, on doit superposer des harmoniques sur un large domaine continu de fréquences afin de créer des paquets d'ondes très courts. Inversement, on peut faire passer de la lumière blanche à travers un analyseur de Fourier, comme un réseau de diffraction ou un prisme, et ainsi reproduire réellement ses composantes.

La largeur de bande disponible dans le visible (≈ 300 THz) est si étendue que cela représente une sorte d'éden pour un ingénieur en communication. Par exemple, une chaîne de télévision classique occupe une bande d'environ 4 MHz dans le spectre électromagnétique ($\Delta\nu$ est la bande de l'électronique de commande de l'écran). Le visible peut donc transporter environ 75 millions de chaînes de télévision. Il est inutile de préciser que cela représente un domaine de recherche active (paragraphe 8.11).

TABLEAU 7.1 Longueurs de cohérence approximatives de quelques sources

Source	Longueur d'onde moyenne $\bar{\lambda}$ (nm)	Largeur* de raie* $\Delta\lambda$ (nm)	Longueur de cohérence Δl_c
IR thermique (8000–12 000 nm)	10 000	≈ 4000	$\approx 25\,000$ nm = $2,5\bar{\lambda}$
IR moyen (3000–5000 nm)	4000	≈ 2000	≈ 8000 nm = $2\bar{\lambda}$
Lumière blanche	550	≈ 300	≈ 900 nm = $1,6\bar{\lambda}$
Arc au mercure	546,1	$\approx 1,0$	$\approx 0,03$ cm
Lampe à décharge au Kr ⁸⁶	605,6	$1,2 \times 10^{-3}$	0,3 m
Laser He-Ne stabilisé	632,8	$\approx 10^{-6}$	≈ 400 m
Laser He-Ne spécial	1153	$8,9 \times 10^{-11}$	15×10^6 m

*Pour trouver la largeur de bande de fréquence correspondante, utiliser : $\Delta\nu/\Delta\lambda_0 = \nu/\bar{\lambda}_0$.

Les lampes à décharge ordinaires ont des largeurs de bande relativement étendues, ce qui aboutit à des longueurs de cohérence de quelques millimètres. En revanche, les lignes spectrales émises par des lampes d'isotopes à basse pression comme Hg¹⁹⁸ ($\lambda_{\text{air}} = 546,078$ nm) ou le standard international Kr⁸⁶ ($\lambda_{\text{air}} = 605,616$ nm) ont des largeurs de bande d'environ 1 000 MHz. Les longueurs de cohérence correspondantes sont approximativement de 0,3 m, et le temps de cohérence est d'environ 1 ns. La stabilité de fréquence est d'environ un pour un million ; ces sources sont certainement quasi monochromatiques.

La plus spectaculaire des sources actuelles est le laser. Sous des conditions optimales, si l'on réduit au minimum les variations de température et les vibrations, un laser fonctionnera réellement très près de sa limite théorique en stabilité de fréquence. Une stabilité de fréquence à court terme d'environ 8 pour 10^{14} a été obtenue* avec un laser continu à gaz He-Ne à $\lambda_0 = 1153$ nm. Cela correspond à une largeur de bande remarquablement étroite de 20 Hz. Des stabilités de fréquence plus communes et peu difficiles à atteindre sont de quelque 10^{-9} . Il existe des lasers CO₂ disponibles dans le commerce qui fournissent un ratio $\Delta\nu/\bar{\nu}$ à court terme ($\approx 10^{-1}$ s) de 10^{-9} et une valeur à long terme ($\approx 10^3$ s) de 10^{-8} .

7.4.4 La transformée de Fourier discrète

On peut effectuer l'analyse de Fourier de tout processus physique, et déterminer analytiquement sa transformée. Nous avons déjà introduit les bases pour procéder ainsi, et nous y reviendrons au chapitre 11. Mais avant de quitter le sujet, il est important d'étendre les notions de l'analyse de Fourier aux situations où il n'y a pas de représentation fonctionnelle des données. Souvent, on dispose d'une série de données, ou même d'une courbe obtenue sur un traceur ou sur un écran d'ordinateur. Dans tous les cas, on peut numériser l'information, c'est-à-dire qu'on peut associer des nombres aux points de la courbe, à intervalles donnés. Pour déterminer la teneur en fréquence d'une telle série de données, on utilise une technique numérique, connue sous le nom de **transformée de Fourier discrète**. Comme le traitement est effectué par ordinateur, notre propos se limitera à en comprendre le principe général et à en apprécier les résultats.

*T. S. Jaseja, A. Javan, et C. H. Townes, « Frequency Stability of Helium-Neon Lasers and Measurements of Length », *Phys. Rev. Letters* **10**, 165 (1963).

Jusqu'ici, nous avons étudié des fonctions du type $f(x)$, représentant par exemple un champ électrique, dont la valeur était connue pour tout x . Au lieu de cela, supposons que nous disposions d'un nombre N fini de points, situés en $0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ et des valeurs spécifiques correspondantes de la quantité étudiée : f_0, f_{x_1}, f_{x_2} , et ainsi de suite. Lorsque les échantillons sont tous espacés du même intervalle x_0 , on peut les représenter par la séquence $f_0, f_{x_0}, f_{2x_0}, \dots$. Dans le principe, on approxime chaque transformée de Fourier [équation (7.57)] par une somme qui est effectuée successivement, point par point, sur l'ensemble des données disponibles : $f_0, f_{x_0}, f_{2x_0}, \dots$. La figure 7.39 représente une impulsion dessinée à la main et la transformée de Fourier discrète correspondante, calculée par ordinateur (avec des valeurs de fréquences positives et négatives, comme dans la figure 7.33).

Il est facile (paragraphe 11.2.2) d'étendre l'analyse de Fourier aux fonctions à deux dimensions $f(x, y)$. Par exemple, alors que la figure 7.40b est la transformée de l'impulsion carrée unitaire à une dimension en fonction de la fréquence spatiale angulaire k , la figure 7.40d est la transformée de l'impulsion carrée unitaire à deux dimensions en fonction des fréquences spatiales angulaires k_x et k_y .

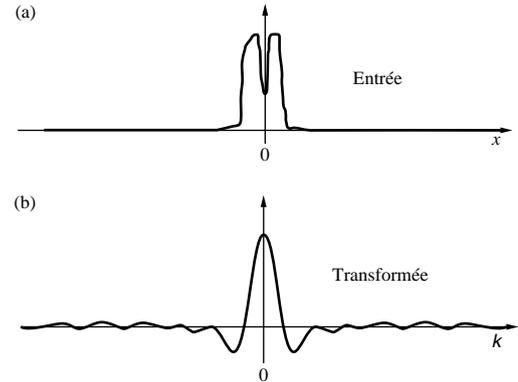


Figure 7.39 Un signal d'entrée et sa transformée de Fourier discrète.

Il est naturel pour les physiciens de relier ces processus à l'énergie, spécialement s'il faut faire des mesures. L'énergie associée à une onde harmonique est proportionnelle au carré de l'amplitude, et comme la transformée donne les amplitudes de toutes les composantes sinusoidales du signal d'entrée, le carré de la transformée fournit une mesure de la distribution

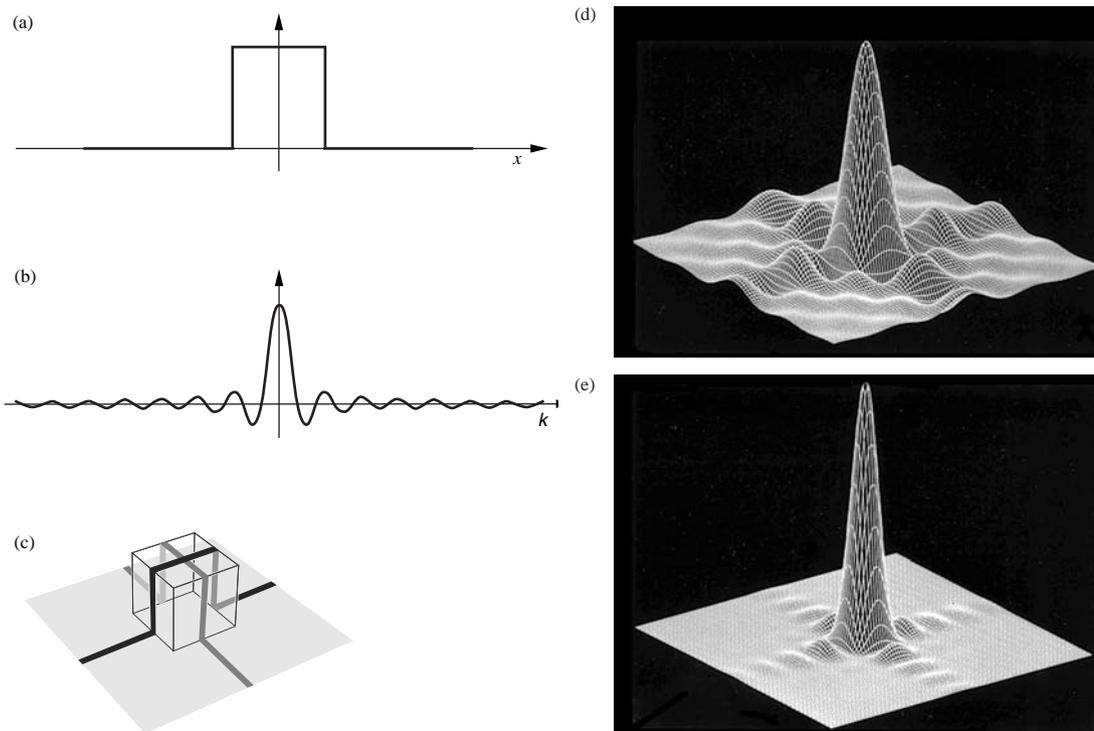


Figure 7.40

(a) Une impulsion carrée à une dimension et (b) sa transformée. (c) Une impulsion carrée à deux dimensions et (d) sa transformée. (e) Le spectre de puissance de la transformée en (d) tracé dans l'espace des k à deux dimensions. (Photos R. G. Wilson, Illinois Wesleyan University.)

spectrale d'énergie ou de puissance. Par conséquent, le carré de la transformée représente le **spectre de puissance** en fréquences spatiales. Comme la transformée est, le plus souvent, une quantité complexe, le spectre en puissance est *le produit de la transformée et de son complexe conjugué*.

La figure 7.40e est un graphe (dans l'espace des k) du spectre de puissance d'une impulsion carrée à deux dimensions. Remarquons qu'il est partout positif, ce qui n'est pas le cas de la transformée. Il est clair, à partir du spectre en puissance, que la majeure partie de l'énergie du signal est associée à des fréquences relativement basses ; la fréquence augmente radialement à partir du centre du graphe. Le spectre en puissance étant toujours positif, il est utile de le tracer comme un diagramme de points dans l'espace à deux dimensions ; chaque point correspond alors à la contribution d'une fréquence particulière. Nous écrirons plus tard (p. 556) la transformée en fonction des coordonnées (Y, Z) sur un plan d'observation à grande distance et établirons que la transformée au carré est identique à la distribution d'éclairement du motif de diffraction dans ce plan. On peut donc exprimer ainsi, le carré de la transformée (en W/m^2) sous forme de *distribution d'éclairement*. Bien qu'il y ait une distinction mathématique entre le spectre en puissance et la distribution d'éclairement, des présentations sans légende de chacun d'entre eux, (le premier dans l'espace k et le deuxième dans l'espace de coordonnées ordinaires) ne font pas apparaître de différence.

Lorsque les fonctions analytiques ne sont pas disponibles, on peut obtenir des résultats similaires avec la transformée de Fourier discrète. On enregistre, puis on numérise le champ de données à deux dimensions (par exemple l'image de Mona Lisa de la figure 7.41a), et l'on calcule la transformée discrète. Le graphe de la transformée d'un signal aussi compliqué est lui-même assez complexe, et l'on représente donc plutôt le spectre en puissance (figure 7.41b). La prise en compte des fréquences négatives fait que le tracé est symétrique par rapport à toutes les diagonales. La croix centrale, étroite et brillante, vient des bords nets du tableau (comme nous le verrons plus tard, le bord horizontal produit la ligne verticale et le bord vertical produit la ligne horizontale ; voir la figure 13.34). Si l'on filtre les termes de hautes fréquences spatiales qui transportent les détails fins (ceux éloignés du centre) et l'on reconstruit l'image à partir de ce qui reste, on obtient un léger flou (figure 7.41c). D'un autre côté, si l'on élimine les termes de basses fréquences spatiales en bloquant le centre de la transformée, les hautes fréquences restantes produiront une reconstruction aux détails nets (figure 7.41d).

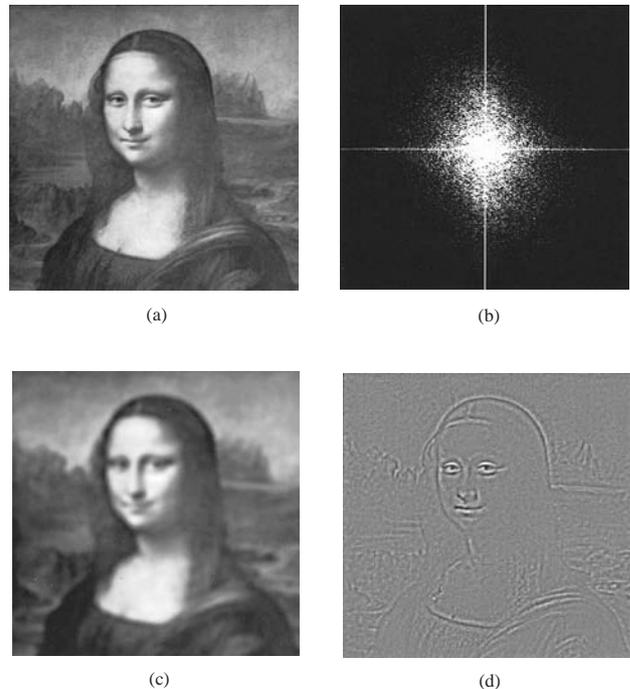


Figure 7.41 (a) Mona Lisa et (b) la portion centrale de son spectre de puissance. (c) La Joconde, dont on a enlevé les hautes fréquences spatiales. (d) La Joconde, dont on a enlevé les basses fréquences spatiales. (Photos Synoptics Image Processing Systems, Cambridge, UK.)

La forme des éléments à l'intérieur d'une image donnée détermine sa transformée et donc son spectre en puissance. On a obtenu les images de la figure 7.42 par ordinateur, en superposant un motif vertical sinusoïdal afin d'illustrer ce point. L'idée était de successivement isoler plusieurs sous-régions de l'image, pour étudier leurs transformées, et de les filtrer. La modulation périodique verticale forme une grille sinusoïdale ou **réseau** qui possède une seule fréquence spatiale (κ_0). Sa présence se révèle dans le spectre en puissance calculé des diverses parties de l'image, essentiellement sous la forme de deux taches brillantes sur l'axe horizontal en $\pm\kappa_0$. **Idéalement, le spectre en puissance d'un signal en forme de sinusoïde est extrêmement simple. Il est seulement constitué de deux pics, à la fréquence de la sinusoïde (en positif et en négatif).**

Le filtre (représenté par le carré blanc avec deux taches noires) a été utilisé pour créer les petites images insérées à l'intérieur de chaque photo. Il supprime les fréquences $+\kappa_0$ et $-\kappa_0$ de chaque spectre en puissance (les versions filtrées de

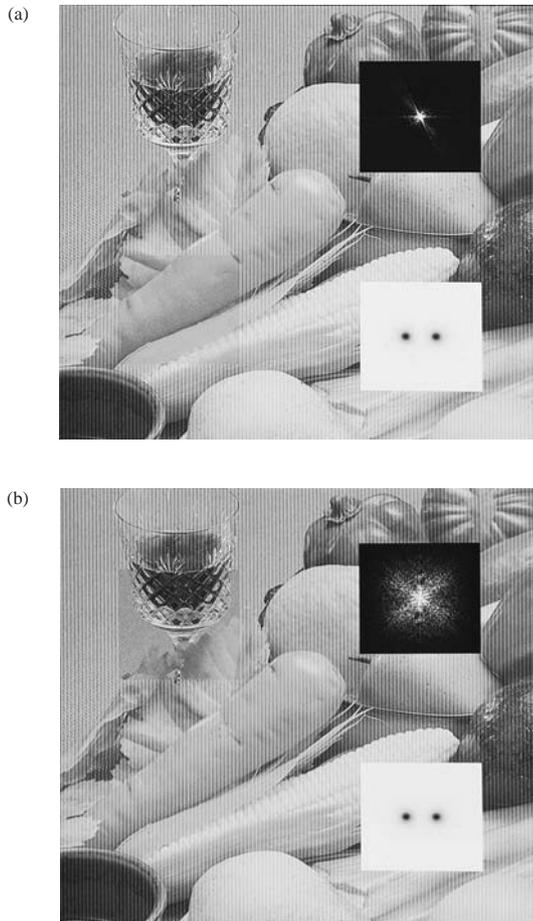


Figure 7.42 Deux images traitées par ordinateur. Les petites incrustations sur la droite ont été créées en filtrant la modulation sinusoïdale. L'incrustation blanche représente le filtre, et la noire est le spectre de puissance filtré dans les deux cas. (Photos MountainGate, Reno, Nevada.)

celui-ci sont représentées dans le coin supérieur droit) ; les images de ces sous-régions sont alors reformées en utilisant les spectres en puissance filtrés. Chacune des images « nettoyées », sans sinusoïde, est alors remise à sa place dans l'original. On remarquera à quel point ces deux spectres sont différents ; les facettes sur le verre dominent le spectre de la figure 7.42*b*. Clairement, le contenu en fréquence d'une image, qu'il soit exprimé sous forme de transformée de Fourier ou de spectre en puissance, fournit une nouvelle façon, remarquable, d'aborder une image.

Analyse de Fourier et diffraction

Une discussion sur l'analyse d'image par ordinateur, qui est une sorte d'optique virtuelle, peut en elle-même être fascinante, mais présage également d'un aspect plus fondamental de la diffraction, qui sera peu abordé dans ce chapitre. La diapositive photographique, par exemple celle de La Joconde, représentée en figure 7.43*a* est l'enregistrement à deux dimensions de la distribution de lumière correspondant à l'image du tableau. On

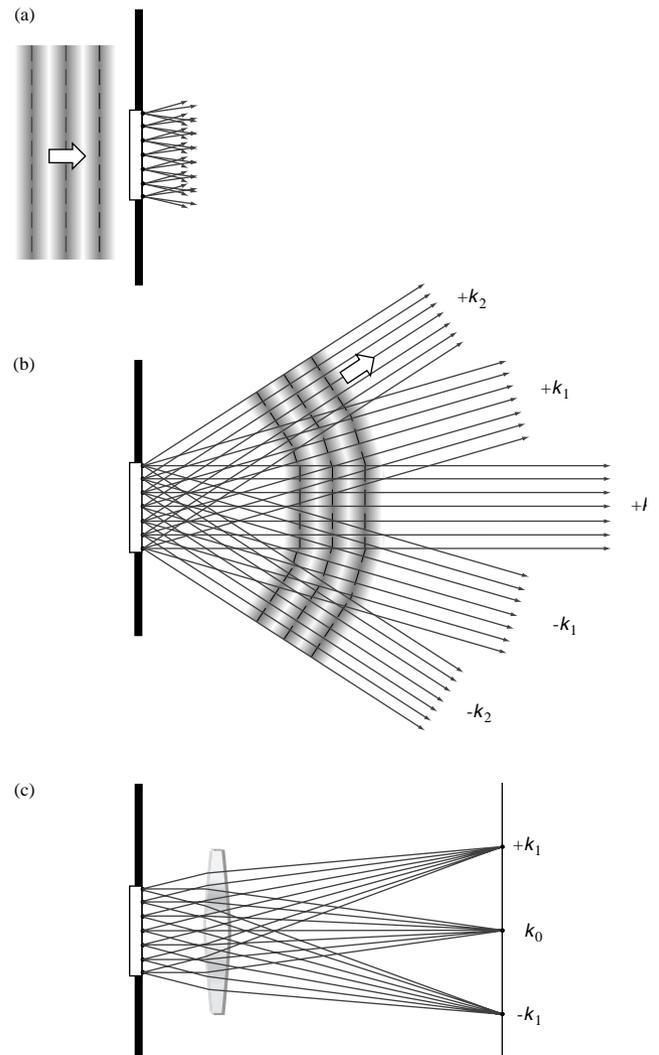


Figure 7.43 Éclairage d'une diapositive. (a) Ondes planes monochromatiques incidentes. (b) Rayons parallèles diffusés (ondes planes). (c) La projection du spectre de puissance sur un écran d'observation.

peut transformer l'information ainsi stockée en signal en éclairant la diapositive, ce qui est réalisé ici avec des ondes planes monochromatiques. Chaque point de la surface de la diapositive est un diffuseur, et les rayons en émergent dans un grand nombre de directions (figure 7.43b). Pour chaque onde plane qui se dirige dans une direction faisant un certain angle au-dessus de l'axe, il en existe une qui s'éloigne du même angle en-dessous de l'axe. Chaque onde plane (ou groupe de rayons parallèles) se propageant dans une direction particulière κ_i est une composante de fréquence spatiale de Fourier. Un inventaire de toutes ces composantes en ondes planes constitue la transformée du champ optique transmis par la diapositive. **La transformée de Fourier du champ électrique pris à l'endroit de la diapositive est une fonction de pondération qui donne l'importance relative de chaque composante en fréquence spatiale de ce champ, et donc de chaque faisceau collimaté quittant l'ouverture.** La somme totale de toutes les ondes planes correspond à l'ensemble de la lumière transmise et doit être équivalente au front d'onde complexe quittant la diapositive de Mona Lisa, qui lui aussi regroupe toute la lumière transmise.

Une autre façon élégante d'envisager ce qui se passe est de supposer que tout élément de l'image qui possède une fréquence spatiale le long d'une direction quelconque du plan de la photo se comporte comme un réseau sinusoïdal. Chacun de ces réseaux diffracte la lumière suivant deux faisceaux d'ondes planes se propageant symétriquement par rapport à l'axe, et suivant deux directions qui font, avec ce dernier, un angle proportionnel à la fréquence spatiale du réseau (p. 493).

La région de l'espace située à droite de la diapositive est occupée par des ondes qui se superposent à mesure que la distance à la diapositive augmente. Si l'on mettait un écran tout

près, on verrait une Mona Lisa presque nette, mais au fur et à mesure que l'on éloignerait l'écran, l'image deviendrait floue, jusqu'à devenir pratiquement méconnaissable. La région au-delà de la diapositive renferme une distribution de lumière complexe, qui est la figure de diffraction de la diapositive. Il y a mathématiquement deux régimes : la diffraction de Fresnel qui apparaît à proximité de l'ouverture (c'est-à-dire de la diapositive), puis la diffraction de Fraunhofer, loin de l'ouverture (p. 447).

Si l'on place une lentille à une distance de la diapositive égale à sa focale, comme dans la figure 7.43c, cela force les rayons parallèles (qui engendrent une diffraction de Fraunhofer à grande distance) à se focaliser sur un écran proche, où chaque point de la distribution d'éclairement à deux dimensions correspond à une valeur spécifique de fréquence spatiale. **L'amplitude du champ électrique en chaque endroit de la figure de diffraction de Fraunhofer correspond à la transformée de Fourier du signal d'entrée, c'est-à-dire de la distribution du champ électrique dans le plan de l'ouverture**, bien que ni l'une ni l'autre ne soit directement mesurable.

Le phénomène observable est la distribution d'éclairement à deux dimensions, qui équivaut au carré du module de la transformée de Fourier du champ à l'entrée (p. 556). C'est également une carte du contenu en fréquences spatiales de Mona Lisa, et il « coïncide » avec le spectre en puissance représenté sur la figure 7.41b. Comme nous le verrons (p. 629), il est possible de filtrer spatialement la transformée optique, altérant ainsi l'image reconstituée, comme cela a justement été fait par ordinateur pour obtenir les figures 7.41c et d.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Les solutions complètes des exercices (excepté ceux ayant un astérisque) figurent à la fin de l'ouvrage.

7.1 Déterminer la résultante issue de la superposition des ondes parallèles $E_1 = E_{01} \sin(\omega t + \varepsilon_1)$ et $E_2 = E_{02} \sin(\omega t + \varepsilon_2)$ lorsque $\omega = 120\pi \text{ s}^{-1}$, $E_{01} = 6$, $E_{02} = 8$, $\varepsilon_1 = 0$, et $\varepsilon_2 = \pi/2$. Tracer chaque fonction et la résultante.

7.2* Compte tenu du paragraphe 7.1, supposer que l'on commence l'étude pour trouver $E = E_1 + E_2$ avec deux fonctions cosinus $E_1 = E_{01} \cos(\omega t + \alpha_1)$ et $E_2 = E_{02} \cos(\omega t + \alpha_2)$. Pour simplifier un

peu les choses, poser $E_{01} = E_{02}$ et $\alpha_1 = 0$. Additionner algébriquement les deux ondes et utiliser l'identité trigonométrique $\cos \theta + \cos \Phi = 2 \cos \frac{1}{2}(\theta + \Phi) \cos \frac{1}{2}(\theta - \Phi)$ pour montrer que $E = E_0 \cos(\omega t + \alpha)$, où $E_0 = 2 E_{01} \cos \alpha_2/2$ et $\alpha = \alpha_2/2$. Montrer alors qu'on obtient les mêmes résultats à partir des équations (7.9) et (7.10).

7.3* Montrer que lorsque les deux ondes de l'équation (7.5) sont en phase, le carré de l'amplitude résultante est un maximum égal à $(E_{01} + E_{02})^2$, et un minimum égal à $(E_{01} - E_{02})^2$ lorsqu'elles sont en opposition de phase.

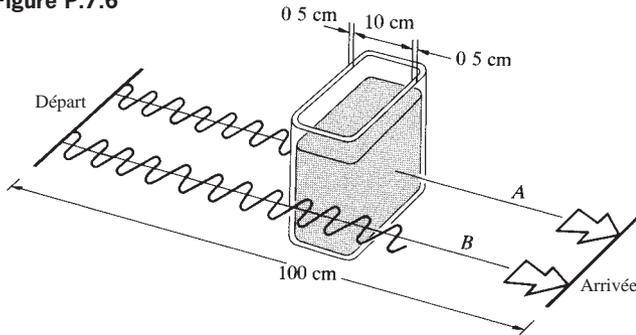
7.4* Montrer que la *longueur de chemin optique*, obtenue en additionnant les produits des indices et des épaisseurs des milieux traversés par un faisceau, c'est-à-dire, $\sum_i n_i x_i$, est équivalente à la longueur qu'effectuerait ce faisceau dans le vide pendant le même temps.

7.5 Répondre aux questions suivantes :

- Combien de longueurs d'onde, à $\lambda_0 = 500$ nm, la lumière franchirait-elle dans 1 m de vide ?
- Combien cela représente de longueurs d'onde si l'on introduit une lame de verre de 5 cm d'épaisseur ($n = 1,5$) sur le trajet ?
- Déterminer la différence de chemin optique Λ entre les deux cas.
- Vérifier que Λ/λ_0 correspond à la différence entre les solutions du (a) et du (b).

7.6* Déterminer la différence de chemin optique pour les deux ondes A et B de la figure P.7.6, les deux ayant des longueurs d'onde dans le vide de 500 nm ; la cuve de verre ($n = 1,52$) est remplie d'eau ($n = 1,33$). Tous les nombres ci-dessus sont exacts si les ondes sont en phase au départ, trouver leur différence de phases à la ligne finale.

Figure P.7.6



7.7* En utilisant les équations (7.9), (7.10), et (7.11), montrer que la résultante des deux ondes :

$$E_1 = E_{01} \sin [\omega t - k(x + \Delta x)]$$

et

$$E_2 = E_{01} \sin (\omega t - kx)$$

est :

$$E = 2E_{01} \cos \left(\frac{k \Delta x}{2} \right) \sin \left[\omega t - k \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \quad [7.17]$$

7.8 Additionner les deux ondes du problème 7.7 pour retrouver l'équation (7.17).

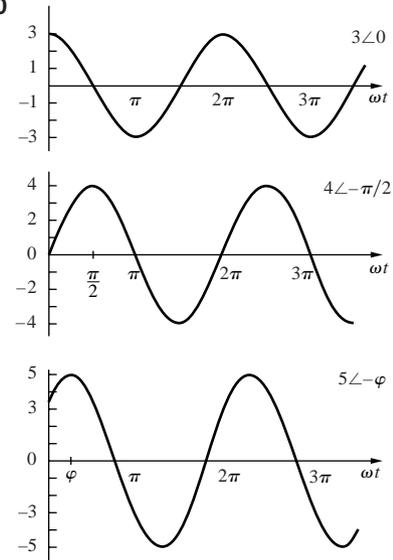
7.9 Utiliser la représentation complexe pour trouver la résultante $E = E_1 + E_2$, où

$$E_1 = E_0 \cos (kx + \omega t) \quad \text{et} \quad E_2 = -E_0 \cos (kx - \omega t)$$

Décrire l'onde résultante.

7.10* Soient les fonctions $E_1 = 3 \cos \omega t$ et $E_2 = 4 \sin \omega t$. Démontrer tout d'abord que $E_2 = 4 \cos (\omega t - \pi/2)$. Puis, en utilisant les phaseurs et en se référant à la figure P.7.10, montrer que $E_3 = E_1 + E_2 = 5 \cos (\omega t - \varphi)$; déterminer φ . Étudier les valeurs de E_3 pour lesquelles soit $E_1 = 0$ soit $E_2 = 0$. E_3 est-il en avance ou en retard de phase par rapport à E_1 ? Expliquer.

Figure P.7.10



7.11 Le champ électrique d'une onde plane stationnaire électromagnétique est donné par :

$$E(x, t) = 2E_0 \sin kx \cos \omega t \quad [7.30]$$

En déduire une expression de $B(x, t)$ (on pourra se reporter au paragraphe 3.2). Faire un schéma de l'onde stationnaire.

7.12* En se rapportant à l'expérience de Wiener (figure 7.14) en lumière monochromatique à la longueur d'onde 550 nm, si le film est incliné de $1,0^\circ$ par rapport à la surface réfléchissante, déterminer le nombre de bandes brillantes qui apparaît par centimètre à sa surface.

7.13* Des micro-ondes de fréquence 10^{10} Hz sont émises sur un réflecteur métallique. En négligeant l'indice de réfraction de l'air, déterminer l'espace entre deux nœuds successifs dans la figure d'ondes stationnaires résultant.

7.14* Une onde stationnaire est spécifiée par :

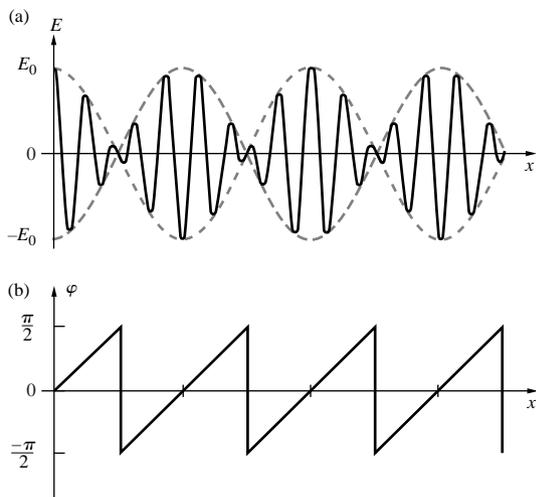
$$E = 100 \sin \frac{2}{3} \pi x \cos 5 \pi t$$

Déterminer deux ondes qui peuvent se superposer pour produire celle-ci.

7.15* On frappe deux diapasons, dont l'un résonne à 340 Hz, et l'autre à 342 Hz. Qu'entend-on ?

7.16* Utiliser la méthode des phaseurs, ainsi que la figure 7.17, pour expliquer comment deux ondes de même amplitude et de fréquences légèrement différentes produisent le battement représenté sur la figure 7.16 ou sur la figure P.7.16a. La courbe de la figure P.7.16b est un aperçu de la phase de la résultante mesurée par rapport à l'une des composantes. Expliquer ses principales caractéristiques. Quand est-elle nulle et pourquoi ? Quand la phase change-t-elle brusquement et pourquoi ?

Figure P.7.16



7.17* Comme nous l'avons vu, l'équation (7.33) décrit le battement. En déduire une version différente en sachant que les deux ondes en cosinus, d'égale amplitude, qui se superposent, ont des fréquences spatiales angulaires de $k_c + \Delta k$ et de $k_c - \Delta k$, et des fréquences temporelles angulaires de $\omega_c + \Delta\omega$ et de $\omega_c - \Delta\omega$. k_c et ω_c correspondent ici aux fréquences centrales. Montrer que l'onde résultante est alors :

$$E = 2E_{01} \cos(\Delta kx - \Delta\omega t) \cos(k_c x - \omega_c t)$$

Expliquer comment chaque terme est relié à :

$$E = 2E_{01} \cos(k_m x - \omega_m t) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \quad [7.33]$$

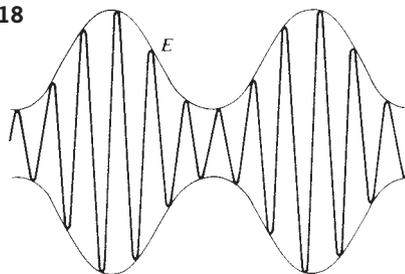
Prouver que la vitesse de l'enveloppe, définie par la longueur de l'enveloppe divisée par sa période, est égale à la vitesse de groupe, à savoir, $\Delta\omega/\Delta k$.

7.18 La figure P.7.18 montre une porteuse de fréquence ω_c modulée en amplitude par une onde sinusoïdale de fréquence ω_m , c'est-à-dire,

$$E = E_0(1 + a \cos \omega_m t) \cos \omega_c t$$

Montrer que cela équivaut à la superposition de trois ondes de fréquences ω_c , $\omega_c + \omega_m$, et $\omega_c - \omega_m$. Quand un grand nombre de fréquences de modulation sont présentes, on écrit E comme une série de Fourier et l'on somme sur toutes les valeurs de ω_m . Les termes $\omega_c + \omega_m$ constituent la *bande latérale supérieure*, et tous les termes $\omega_c - \omega_m$ forment la *bande latérale inférieure*. Quelle largeur de bande sera nécessaire pour transmettre l'intégralité de la gamme audible ?

Figure P.7.18



7.19 Si la relation de dispersion est de la forme $\omega = ak^2$, calculer les vitesses de phase et de groupe correspondantes.

7.20* En utilisant la relation $1/v_g = d\kappa/dv$, démontrer que :

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{v} - \frac{v}{v^2} \frac{dv}{dv}$$

7.21* Dans le cas des ondes lumineuses, démontrer que :

$$\frac{1}{v_g} = \frac{n}{c} + \frac{v}{c} \frac{dn}{dv}$$

7.22 La vitesse de propagation d'une onde de surface dans un liquide de profondeur largement supérieure à λ est donnée par :

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi Y}{\rho\lambda}}$$

où g = accélération de la gravité, λ = longueur d'onde, ρ = densité, Y = tension de surface. Calculer la vitesse de groupe d'une impulsion dans le cas limite des grandes longueurs d'onde (elles sont appelées *ondes gravitationnelles*).

7.23* Montrer que la vitesse de groupe peut s'écrire :

$$v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

7.24 Démontrer que la vitesse de groupe peut s'écrire :

$$v_g = \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)}$$

7.25* En se servant du problème précédent, prouver que :

$$n_g = n(\nu) + \nu \frac{dn(\nu)}{d\nu}$$

7.26* Déterminer la vitesse de groupe d'ondes dont la vitesse de phase est inversement proportionnelle à la longueur d'onde.

7.27* Montrer que la vitesse de groupe peut s'écrire :

$$v_g = \frac{c}{n} + \frac{\lambda c}{n^2} \frac{dn}{d\lambda}$$

7.28* Pour une onde se propageant dans une structure périodique pour laquelle $\omega(k) = 2\omega_0 \sin(k\ell/2)$, déterminer les vitesses de phase et de groupe. Écrire la première comme une fonction sinc.

7.29* Un gaz ionisé (ou plasma) est un milieu dispersif pour les ondes EM. L'équation de dispersion est donc :

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$$

où ω_p est la fréquence de plasma constante. Déterminer les expressions des vitesses de phase et de groupe et montrer que $v v_g = c^2$.

7.30 En utilisant l'équation de dispersion,

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \left(\frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} \right) \quad [3.71]$$

montrer que la vitesse de groupe est donnée par :

$$v_g = \frac{c}{1 + Nq_e^2/\epsilon_0 m_e \omega^2 2}$$

pour les ondes électromagnétiques de haute fréquence (par exemple, les rayons X). Ne pas oublier que, comme les f_j sont des facteurs de pondération, $\sum_j f_j = 1$. Quelle est la vitesse de phase ? Prouver que $v v_g \approx c^2$.

7.31* Trouver analytiquement la résultante issue de la superposition des deux fonctions $E_1 = 2E_0 \cos \omega t$ et $E_2 = \frac{1}{2}E_0 \sin 2\omega t$. Tracer E_1 , E_2 , et $E = E_1 + E_2$. La résultante est-elle périodique ; si oui, quelle est sa période en fonction de ω ?

7.32 Montrer que :

$$\int_0^\lambda \sin akx \cos bkx dx = 0 \quad [7.44]$$

$$\int_0^\lambda \cos akx \cos bkx dx = \frac{\lambda}{2} \delta_{ab} \quad [7.45]$$

$$\int_0^\lambda \sin akx \sin bkx dx = \frac{\lambda}{2} \delta_{ab} \quad [7.46]$$

où $a \neq 0$, $b \neq 0$, et a et b sont des entiers positifs.

7.33 Calculer les composantes de la série de Fourier pour la fonction périodique de la figure 7.20.

7.34* Soit la fonction $f(x) = A \cos(\pi x/L)$; déterminer sa série de Fourier.

7.35* On considère la fonction $f(\theta) = \theta^2$ dans l'intervalle $0 < \theta < 2\pi$, qui se répète selon une période de 2π . Montrer que le développement de Fourier de cette fonction est :

$$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{4}{m^2} \cos m\theta - \frac{4\pi}{m} \sin m\theta \right)$$

7.36* Montrer que le développement en série de Fourier de la fonction $f(\theta) = |\sin \theta|$ est :

$$f(\theta) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2m\theta}{4m^2 - 1}$$

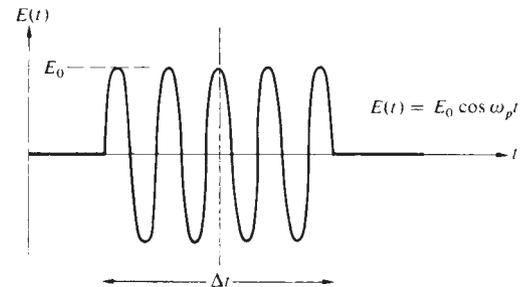
7.37 Changer la limite supérieure de l'équation (7.59) de ∞ en a et évaluer l'intégrale. Laisser la réponse sous la forme d'un *sinus intégral* :

$$\text{Si}(z) = \int_0^z \text{sinc } w dw$$

qui est une fonction dont les valeurs sont tabulées.

7.38 Écrire une expression pour la transformée $A(\omega)$ de l'impulsion harmonique de la figure P.7.38. Vérifier que $\text{sinc } u$ est supérieur ou égal à 50 % pour les valeurs de u inférieures à $\pi/2$. En gardant cela à l'esprit, montrer que $\Delta\nu \Delta t \approx 1$, où $\Delta\nu$ est la largeur de la transformée à mi-hauteur. Vérifier que $\Delta\nu \Delta t \approx 1$ mi-hauteur du spectre en puissance. Le but est ici de justifier les approximations faites dans le chapitre.

Figure P.7.38



7.39 En déduire une expression pour la longueur de cohérence (dans le vide) d'un train d'ondes qui a une largeur spectrale de $\Delta\nu$; exprimer la réponse en fonction de la *largeur de raie* $\Delta\lambda_0$ et de la longueur d'onde moyenne $\bar{\lambda}_0$ du train d'ondes.

7.40 Soit un photon dans le visible, émis pendant une transition atomique d'environ 10^{-8} s. Quelle est la longueur du paquet d'ondes ? Se servir des résultats du problème précédent (si on l'a fait) ; évaluer la largeur de raie ($\bar{\lambda}_0 = 500$ nm). Que peut-on dire sur sa monochromaticité, en se reportant à sa stabilité de fréquence ?

7.41 La première* expérience qui a permis de mesurer directement la largeur de bande d'un laser (dans ce cas, une diode laser $\text{Pb}_{0,88}\text{Sn}_{0,12}\text{Te}$ à émission continue) fut réalisée en 1969. Le laser, fonctionnant à $\lambda_0 = 10\ 600$ nm, était couplé avec un laser CO_2 , et l'on observa des largeurs de bande aussi fines que 54 kHz. Calculer la stabilité de fréquence correspondante ainsi que la longueur de cohérence pour le laser $\text{Pb}_{0,88}\text{Sn}_{0,12}\text{Te}$.

7.42* Pour stabiliser un laser He-Ne à $2 \cdot 10^{-10}$, on a breveté une technique basée sur l'utilisation d'un champ magnétique. À 632,8 nm, quelle serait la longueur de cohérence d'un laser ayant une telle stabilité de fréquence ?

.....
*D. Hinkley et C. Freed, *Phys. Rev. Letters* **23**, 277 (1969).

7.43 Imaginer que l'on module un faisceau laser continu (considéré comme monochromatique à $\lambda_0 = 632,8$ nm) sous la forme d'impulsions de 0,1 ns, en utilisant un obturateur. Calculer la largeur de raie résultante $\Delta\lambda$, la largeur de bande $\Delta\nu$, et la longueur de cohérence. Trouver la largeur de bande et la largeur de raie que l'on obtiendrait si l'on pouvait moduler le faisceau à 10^{15} Hz.

7.44* On suppose qu'on éclaire avec de la lumière solaire un filtre ayant une bande passante de $1,0 \text{ \AA}$ centrée à 600 nm. Calculer la longueur de cohérence de l'onde émergente.

7.45* Un filtre laisse passer de la lumière à la longueur d'onde moyenne $\bar{\lambda}_0 = 500$ nm. Si les trains d'ondes sortant du filtre ont une longueur d'environ $20\bar{\lambda}_0$, quelle est la largeur de bande spectrale de la lumière en sortie ?

7.46* Supposons que l'on diffracte de la lumière blanche au moyen d'un réseau et qu'on fasse passer une petite zone du spectre obtenu à travers une fente. En raison de la largeur de la fente, il en ressort une bande de longueurs d'onde de 1,2 nm de large centrée sur 500 nm. Déterminer la largeur de bande en fréquence et la longueur de cohérence de cette lumière.

8

Polarisation

8.1 La nature de la lumière polarisée

Nous avons établi que la lumière pouvait être traitée comme une onde électromagnétique transversale. Jusqu'ici nous avons seulement considéré la lumière à **polarisation linéaire** ou **plane**, c'est-à-dire une lumière pour laquelle l'orientation du champ électrique est constante, bien que sa grandeur et son signe varient en fonction du temps (figure 3.14). Dans ce cas, le champ électrique ou perturbation optique se trouve dans le **plan de vibration**, plan fixe qui contient \vec{E} et \vec{k} , le vecteur champ électrique et le vecteur de propagation dans la direction du mouvement.

Imaginons deux ondes lumineuses harmoniques polarisées linéairement et de même fréquence, se propageant au même endroit et dans la même direction. Si leurs vecteurs champ électrique sont colinéaires, les perturbations se superposent et vont se combiner pour former une onde polarisée linéairement. Son amplitude et sa phase seront étudiées en détail au chapitre suivant, sous diverses conditions, où nous considérerons le phénomène d'interférence. Par contre, si les deux ondes lumineuses ont des champs électriques perpendiculaires entre eux, l'onde résultante pourra être polarisée linéairement ou non. La forme exacte que prend la lumière (c'est-à-dire son *état de polarisation*) et les moyens dont nous disposons pour l'observer, la produire, la changer et l'utiliser constituent le sujet de ce chapitre.

8.1.1 Polarisation linéaire

Les deux perturbations optiques orthogonales introduites plus haut peuvent être écrites comme :

$$\vec{E}_x(z, t) = \hat{i} E_{0x} \cos(kz - \omega t) \quad (8.1)$$

et
$$\vec{E}_y(z, t) = \hat{j} E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \quad (8.2)$$

où ε est la différence de phase relative entre les ondes, chacune d'elles se déplaçant dans la direction de l'axe z . Retenons que puisque la phase est de la forme $(kz - \omega t)$, l'addition d'un déphasage ε positif signifie que la fonction cosinus dans l'équation (8.2) n'atteindra la même valeur que le cosinus dans l'équation (8.1) qu'un certain temps (ε/ω) après. En conséquence, E_y est en retard de phase par rapport à E_x pour $\varepsilon > 0$. Bien évidemment, si ε est une grandeur négative ($\varepsilon < 0$), E_y est en avance de phase par rapport à E_x . La perturbation optique résultante est le vecteur somme de ces deux ondes perpendiculaires :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t) \quad (8.3)$$



Beaucoup d'animaux peuvent voir les variations de polarisation comme nous voyons les variations de couleur. La pieuvre pygmée fait partie de cette catégorie. Les variations de réflexion de sa surface en lumière polarisée suggèrent que cette pieuvre « communique » avec ses congénères, de la même façon que les oiseaux exposent leurs couleurs. (Photo Thomas W. Coronin et Nadav Shashar, Université du Maryland.)

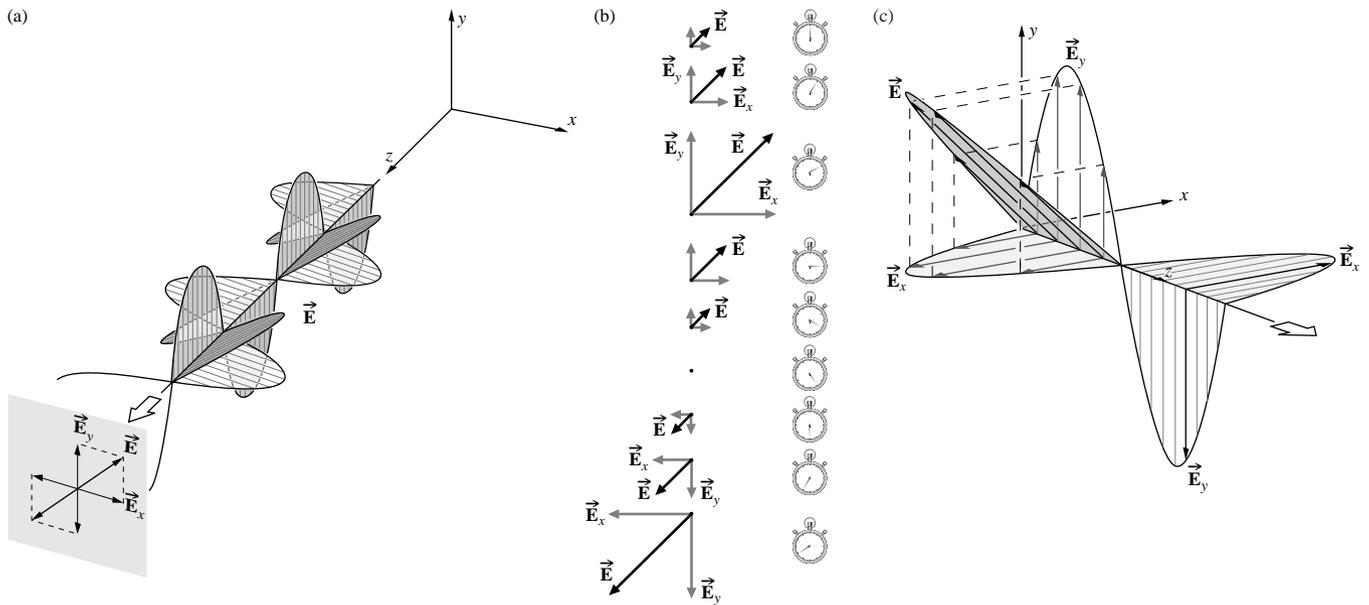


Figure 8.1 Lumière polarisée linéairement. (a) Champ E polarisé linéairement dans le premier et le troisième quadrants. (b) Le même champ oscillant vu de face (c) Lumière polarisée linéairement dans le deuxième et le quatrième quadrant.

Si ε est nul ou un multiple entier de $\pm 2\pi$, les ondes sont en phase. Dans ce cas, l'équation (8.3) devient :

$$\vec{E} = (\hat{i}E_{0x} + \hat{j}E_{0y}) \cos(kz - \omega t) \quad (8.4)$$

L'onde résultante a une amplitude fixe égale à $(\hat{i}E_{0x} + \hat{j}E_{0y})$; en d'autres termes, elle est également polarisée linéairement (figure 8.1). Dans le plan d'observation, on voit une seule résultante \vec{E} osciller sinusoidalement le long d'un axe incliné (figure 8.1b). Quand l'onde avance le long de l'axe z d'une longueur d'onde, le champ \vec{E} effectue un cycle oscillatoire complet. On peut également inverser ce processus, ce qui veut dire que l'on peut décomposer toute onde polarisée linéairement en deux composantes orthogonales.

Supposons maintenant que ε soit un multiple entier et impair de $\pm\pi$. Les deux ondes sont déphasées de 180° , et :

$$\vec{E} = (\hat{i}E_{0x} - \hat{j}E_{0y}) \cos(kz - \omega t) \quad (8.5)$$

Cette onde est encore polarisée linéairement, mais le plan de vibration a subi une rotation (pas nécessairement de 90°) par rapport à celui de la condition précédente, comme l'indique la figure 8.2.

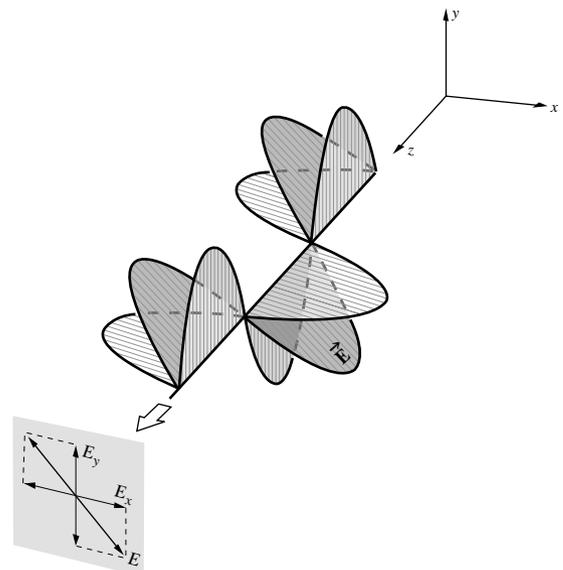


Figure 8.2 Lumière polarisée linéairement dans le premier et le quatrième quadrant.

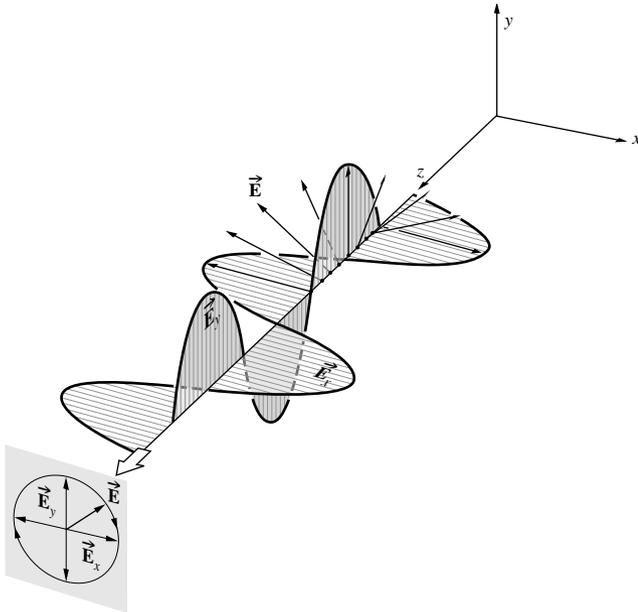


Figure 8.3 Lumière à polarisation circulaire droite. (a) Ici, le champ électrique, qui a une amplitude constante, tourne dans le sens des aiguilles d'une montre à une fréquence égale à la fréquence d'oscillation. (b) Deux antennes perpendiculaires émettant avec une différence de phase de 90° produisent des ondes électromagnétiques à polarisation circulaire.

8.1.2 Polarisation circulaire

Un autre cas intéressant apparaît quand les deux ondes constituantes ont la même amplitude (c'est-à-dire $E_{0x} = E_{0y} = E_0$), et que par ailleurs leur différence de phase relative $\varepsilon = -\pi/2 + 2m\pi$ où $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. En d'autres termes, $\varepsilon = -\pi/2$ ou toute autre valeur augmentée ou réduite de $-\pi/2$ par tout nombre entier multiple de 2π . En conséquence :

$$\vec{E}_x(z, t) = \hat{i}E_0 \cos(kz - \omega t) \quad (8.6)$$

$$\text{et} \quad \vec{E}_y(z, t) = \hat{j}E_0 \sin(kz - \omega t) \quad (8.7)$$

L'onde résultante est :

$$\vec{E} = E_0[\hat{i} \cos(kz - \omega t) + \hat{j} \sin(kz - \omega t)] \quad (8.8)$$

(figure 8.3). Notons qu'à présent l'amplitude scalaire de \vec{E} , c'est-à-dire $(\vec{E} \cdot \vec{E})^{1/2} = E_0$, est une constante. Mais la direction de \vec{E} varie en fonction du temps et n'est pas réduite, comme précédemment, à un seul plan. La figure 8.4 dépeint ce qui arrive en un point arbitraire z_0 sur l'axe. A $t=0$, \vec{E} est le long de l'axe de référence en figure 8.4a, et donc :

$$\vec{E}_x = \hat{i}E_0 \cos kz_0 \quad \text{et} \quad \vec{E}_y = \hat{j}E_0 \sin kz_0$$

A $t = kz_0/\omega$, $\vec{E}_x = \hat{i}E_0$, $\vec{E}_y = 0$, et \vec{E} est le long de l'axe x . Le vecteur champ électrique résultant \vec{E} tourne dans le sens des aiguilles d'une montre (sens dextrogyre) à une fréquence

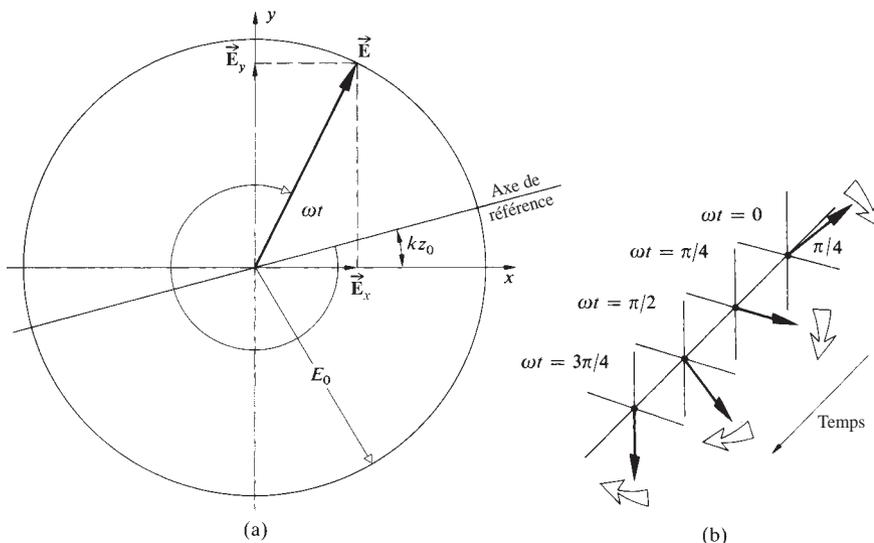


Figure 8.4 Rotation du vecteur électrique dans une onde à polarisation circulaire droite. Notons que la vitesse de rotation est ω et $kz = \pi/4$.

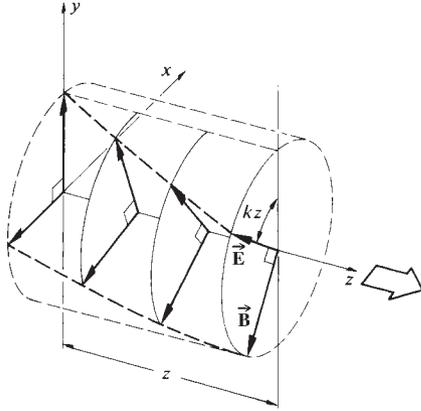


Figure 8.5 Lumière à polarisation circulaire droite. En regardant le long de l'axe z vers l'origine, on voit le vecteur champ électrique tourner dans le sens des aiguilles d'une montre au fur et à mesure que l'onde avance vers l'observateur.

angulaire ω , pour un observateur vers qui l'onde se dirige et qui la regarde venir. Une telle onde est **polarisée circulairement à droite** (figure 8.5), et on l'appelle en général, plus simplement, *lumière circulaire droite*. Le vecteur \vec{E} effectue une rotation complète pendant que l'onde avance d'une longueur d'onde. En comparaison, si $\varepsilon = \pi/2, 5\pi/2, 9\pi/2, \dots$ (c'est-à-dire $\varepsilon = \pi/2 + 2m\pi$, où $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$), alors :

$$\vec{E} = E_0[\hat{i} \cos(kz - \omega t) - \hat{j} \sin(kz - \omega t)] \quad (8.9)$$

L'amplitude est la même, mais \mathbf{E} tourne à présent dans le *sens inverse des aiguilles d'une montre*, et l'onde est **circulaire gauche**.

Une onde polarisée linéairement peut être la synthèse de deux ondes circulaires opposées et d'amplitude égale. En particulier, si l'on ajoute l'onde circulaire droite de l'équation (8.8) à l'onde circulaire gauche de l'équation (8.9) on obtient :

$$\vec{E} = 2E_0\hat{i} \cos(kz - \omega t) \quad (8.10)$$

qui a un vecteur amplitude constant de $2E_0\hat{i}$ et est donc polarisée linéairement.

8.1.3 Polarisation elliptique

Si on veut les décrire mathématiquement, on peut considérer les lumières linéaire et circulaire comme des cas particuliers de lumière à **polarisation elliptique**, ou plus simplement de

lumière elliptique. Cela signifie que, en général, le vecteur champ électrique \vec{E} résultant va à la fois effectuer une rotation et changer d'amplitude. Dans de tels cas, l'extrémité du vecteur \vec{E} va tracer une ellipse, dans un plan fixe perpendiculaire à \vec{k} , pendant que l'onde se propage. On peut mieux s'en rendre compte en écrivant une expression de la courbe décrite par l'extrémité du vecteur \vec{E} . Dans ce but, rappelons que :

$$E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \quad (8.11)$$

et
$$E_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \quad (8.12)$$

L'équation recherchée ne doit pas être fonction du temps ni de la position le long de l'axe de propagation ; pour nous débarrasser de la dépendance en $(kz - \omega t)$, développons l'expression de E_y en :

$$E_y/E_{0y} = \cos(kz - \omega t) \cos \varepsilon - \sin(kz - \omega t) \sin \varepsilon$$

et combinons-la avec E_x/E_{0x} pour obtenir :

$$\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \varepsilon = -\sin(kz - \omega t) \sin \varepsilon \quad (8.13)$$

Il découle de l'équation (8.11) que :

$$\sin(kz - \omega t) = [1 - (E_x/E_{0x})^2]^{1/2}$$

L'équation (8.13) aboutit donc à :

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \varepsilon \right)^2 = \left[1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 \right] \sin^2 \varepsilon$$

Finalement, en réarrangeant les termes, nous obtenons :

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 - 2 \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right) \left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right) \cos \varepsilon = \sin^2 \varepsilon \quad (8.14)$$

C'est l'équation d'une ellipse dont le grand axe fait un angle α avec le système de coordonnées (E_x, E_y) (figure 8.6) et :

$$\tan 2\alpha = \frac{2E_{0x}E_{0y} \cos \varepsilon}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \quad (8.15)$$

L'équation (8.14) serait plus reconnaissable si les axes principaux de l'ellipse étaient alignés aux axes de coordonnées, c'est-à-dire, $\alpha = 0$ ou encore $\varepsilon = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \dots$, auquel cas nous obtenons la forme plus familière :

$$\frac{E_y^2}{E_{0y}^2} + \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} = 1 \quad (8.16)$$

De plus, si $E_{0y} = E_{0x} = E_0$, on peut réduire l'expression à :

$$E_y^2 + E_x^2 = E_0^2 \quad (8.17)$$

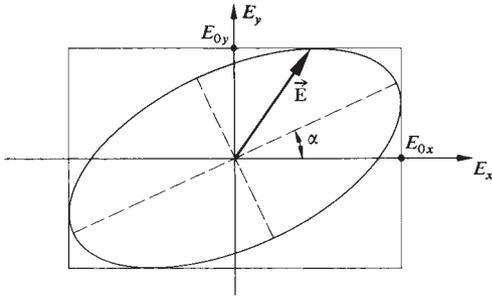


Figure 8.6 Lumière à polarisation elliptique. L'extrémité du vecteur champ électrique effectue une trajectoire elliptique au cours d'une rotation.

Qui, conformément à nos résultats précédents, est un cercle. Si ϵ est un multiple pair de π , l'équation (8.14) donne :

$$E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x \quad (8.18)$$

et de manière similaire pour les multiples impairs de π ,

$$E_y = -\frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x \quad (8.19)$$

Ce sont toutes les deux des droites ayant des pentes de $\pm E_{0y}/E_{0x}$; en d'autres termes, il s'agit de lumière polarisée linéairement.

La figure 8.7 résume par un diagramme la plupart de ces conclusions. Ce diagramme est très important, la légende du bas est « E_x en avance de phase sur E_y de : $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \dots$, » : ce sont les valeurs positives de ϵ à utiliser dans l'équation (8.2). La même série de courbes sera obtenue si « E_y est en avance de phase sur E_x de : $2\pi, 7\pi/4, 3\pi/2, 5\pi/4, \dots$, » et cela se produit quand ϵ est égal à $-2\pi, -7\pi/4, -3\pi/2, -5\pi/4$, et ainsi de suite. La figure 8.7b illustre comment une avance de phase de E_x sur E_y de $\pi/2$ est équivalent à une avance de phase de E_y sur E_x de $3\pi/2$ (où la somme de ces deux angles est 2π). Ce sera une préoccupation permanente dès que nous changerons les phases relatives des deux composantes orthogonales dont est constituée l'onde.

Nous avons à présent la possibilité de caractériser une onde lumineuse donnée selon son **état de polarisation** spécifique. Nous dirons qu'une lumière polarisée linéairement ou dans un plan est dans l'état \mathcal{P} , et qu'une lumière circulaire droite ou gauche est respectivement dans l'état \mathcal{R} ou \mathcal{L} . De même, une polarisation elliptique correspondra à un état \mathcal{E} . Nous avons déjà vu qu'un état \mathcal{P} peut être représenté par une superposition des états \mathcal{R} et \mathcal{L} [équation (8.10)], ce qui est également vrai pour un état \mathcal{E} . Dans ce cas, comme on le voit sur la figure 8.8, les amplitudes des deux ondes circulaires sont différentes (voir le traitement analytique en problème 8.3).

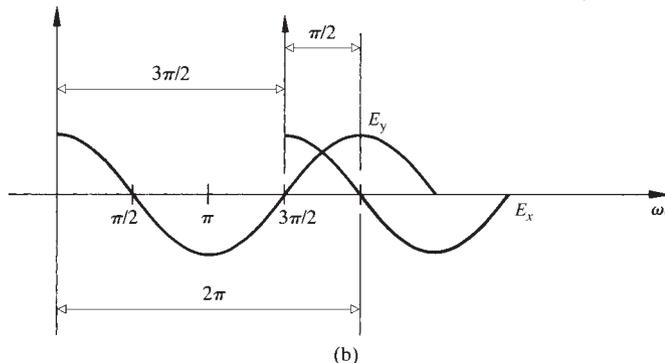
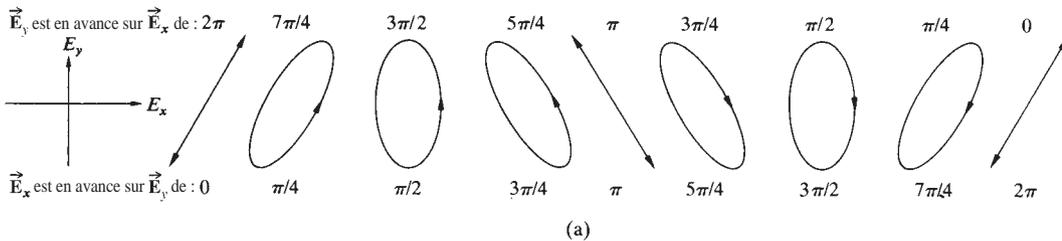


Figure 8.7 (a) Diverses configurations de polarisation. La lumière serait circulaire avec $\epsilon = \pi/2$ ou $3\pi/2$ si $E_{0x} = E_{0y}$, mais, ici, afin de généraliser, on a choisi $E_{0y} > E_{0x}$. (b) E_x est en avance sur E_y (ou E_y est en retard sur E_x) de $\pi/2$, ou, ce qui revient au même, E_y est en avance sur E_x (ou E_x est en retard sur E_y) de $3\pi/2$.

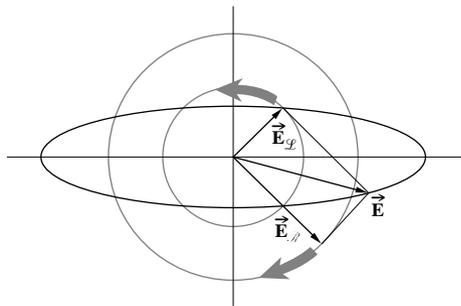


Figure 8.8 Polarisation elliptique en tant que superposition d'un état \mathcal{R} et d'un état \mathcal{L} .

8.1.4 La lumière naturelle

Une source de lumière naturelle est constituée d'un très grand nombre d'émetteurs atomiques aléatoirement orientés. Chaque atome excité émet un train d'ondes polarisé pendant approximativement 10^{-8} s. Toutes les émissions ayant la même fréquence vont se combiner pour former une seule onde polarisée, qui ne durera pas plus de 10^{-8} s. De nouveaux trains d'ondes sont constamment émis, et la polarisation globale change de manière totalement imprévisible. Si ces changements se produisent à un rythme tel qu'il est impossible de détecter un seul état de polarisation, on considère qu'on a affaire à de la lumière naturelle. On la désigne également sous le nom de *lumière non polarisée*, terme impropre en réalité car la lumière est composée d'une succession de différents états de polarisation qui varient rapidement. *Lumière aléatoirement polarisée* est sans doute une meilleure façon de la dénommer. On peut mathématiquement représenter la lumière naturelle en fonction de deux ondes arbitraires, incohérentes, orthogonales, polarisées linéairement et d'amplitudes égales (c'est-à-dire des ondes pour lesquelles la différence relative de phase varie rapidement et aléatoirement). N'oublions pas qu'on doit décrire une onde plane monochromatique idéalisée comme un train d'ondes infini. Si cette perturbation est résolue en deux composantes orthogonales perpendiculaires à la direction de propagation, elles doivent, en retour, avoir la même fréquence, être infiniment étendues, et donc être mutuellement cohérentes (c'est-à-dire $\varepsilon = \text{constante}$). En d'autres termes, une onde plane parfaitement monochromatique est toujours polarisée. En fait, les équations (8.1) et (8.2) ne sont que les composantes cartésiennes d'une onde plane harmonique transversale ($E_z = 0$). Qu'elle soit naturelle ou artificielle, la lumière n'est généralement ni complètement polarisée ni complètement non

polarisée, ces deux cas étant des extrêmes. La plupart du temps, le vecteur champ électrique varie d'une manière ni tout à fait régulière ni tout à fait irrégulière, et une telle perturbation optique est partiellement polarisée. Un moyen utile de décrire ce phénomène est de l'envisager comme étant le résultat d'une superposition de lumières naturelles et polarisées.

8.1.5 Moment angulaire et description du photon

Nous avons déjà vu qu'une onde électromagnétique incidente sur un objet peut lui transmettre de son énergie et de sa quantité de mouvement. De plus, si l'onde plane incidente est polarisée circulairement, nous pouvons nous attendre à ce que les électrons dans la matière soient entraînés dans un mouvement circulaire en réponse à la force générée par le champ \vec{E} tournant. Nous pouvons aussi décrire le champ comme étant composé de deux états \mathcal{P} perpendiculaires déphasés de 90° ; ceux-ci vont simultanément faire osciller les électrons dans deux directions perpendiculaires avec une différence de phase de $\pi/2$. Le mouvement qui en résulte est à nouveau circulaire. En effet, le couple de torsion exercé par le champ \vec{B} est en moyenne nul le long d'une orbite, et le champ \vec{E} fait tourner les électrons à une vitesse angulaire ω égale à la pulsation de l'onde électromagnétique. L'onde va donc transmettre un moment angulaire au milieu dans lequel les électrons sont plongés et auquel ils sont liés. On peut traiter ce problème assez simplement sans entrer dans les détails de la dynamique. La puissance délivrée au système est l'énergie qui lui est transférée par unité de temps, $d\mathcal{E}/dt$. De plus, la puissance produite par un moment Γ agissant sur un corps en rotation est simplement $\omega\Gamma$ (ce qui est l'équivalent de vF pour les mouvements linéaires), donc :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \omega\Gamma \quad (8.20)$$

Comme le couple de torsion est égal à la dérivée du moment angulaire L , il en résulte qu'en moyenne :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \omega \frac{dL}{dt} \quad (8.21)$$

Une particule chargée qui absorbe une quantité d'énergie \mathcal{E} de l'onde circulaire incidente va simultanément absorber une quantité de moment angulaire L telle que :

$$L = \frac{\mathcal{E}}{\omega} \quad (8.22)$$

Si l'onde incidente est dans un état \mathcal{R} , son vecteur \vec{E} tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, pour quelqu'un qui regarde la source. C'est la direction dans laquelle une charge positive tournerait dans un milieu absorbant, et le vecteur moment angulaire pointe donc dans la direction opposée à la direction de propagation* comme on le voit sur la figure 8.9.

Selon le modèle de la mécanique quantique, une onde électromagnétique transfère de l'énergie par paquets quantifiés, ou photons avec $\mathcal{E} = h\nu$. Donc $\mathcal{E} = h\omega$ (où $h \equiv h/2\pi$), et le moment angulaire *intrinsèque* ou *spin* d'un photon est soit $-\hbar$ soit $+\hbar$, où les signes indiquent respectivement un sens de rotation à droite ou à gauche. Notons que *le moment angulaire d'un photon est complètement indépendant de son énergie*. Quand une particule chargée émet ou absorbe une radiation électromagnétique, avec des changements dans son énergie et dans sa quantité de mouvement, elle va subir un changement de $\pm\hbar$ dans son moment angulaire[†].

On peut considérer que l'énergie transférée à une cible par une onde électromagnétique incidente, monochromatique est transportée sous la forme d'un courant de photons identiques.

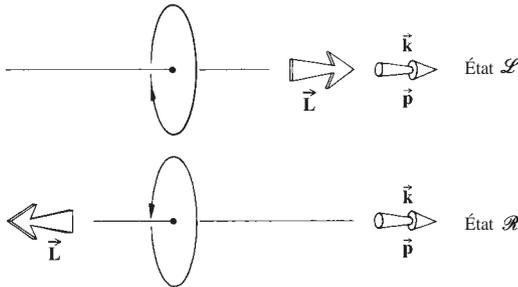


Figure 8.9 Moment angulaire d'un photon.

* Cette terminologie est quelque peu maladroite. Pourtant son utilisation en optique est bien établie, même si elle va à l'encontre des conventions les plus raisonnables adoptées dans le cadre de la physique des particules élémentaires.

[†] À titre d'exemple important mais simple, considérons l'atome d'hydrogène. Il est composé d'un proton et d'un électron, ayant chacun un spin de $\hbar/2$. L'atome a une énergie légèrement supérieure lorsque les spins des deux particules ont la même direction. Il est pourtant possible, mais très rare, environ tous les 10^7 ans, que l'un des spins se retourne et devienne antiparallèle à l'autre. Le changement de moment angulaire est alors de \hbar , et il est dû à l'émission d'un photon qui emporte le faible excès d'énergie. C'est l'origine de l'émission micro-onde à 21 cm, si importante en astronomie.

On peut anticiper qu'il y aura un transport quantifié correspondant de moment angulaire. Une onde plane qui est purement circulaire gauche va transmettre son moment angulaire à la cible comme si tous ses photons avaient leurs spins alignés dans la direction de propagation. Le fait de remplacer la lumière par une lumière circulaire droite inverse l'orientation du spin des photons, de même que le couple exercé par eux sur la cible. En 1935, avec l'utilisation d'un pendule de torsion extrêmement sensible, Richard A. Beth a pu se livrer à de telles mesures*.

Jusqu'ici nous n'avons eu aucune difficulté à décrire une lumière purement circulaire droite ou gauche à partir de la notion de photon, mais qu'est-ce que la lumière polarisée linéairement ou elliptiquement ? Classiquement, la lumière dans un état \mathcal{P} peut être synthétisée par la superposition cohérente de quantités égales de lumière dans les états \mathcal{R} et \mathcal{L} (avec une différence de phase appropriée). Tout photon isolé montrerait un spin totalement parallèle ou antiparallèle à \vec{k} . Un faisceau de lumière linéairement polarisée va interagir avec la matière comme s'il était composé, à cet instant, d'un nombre égal de photons « droits » ou « gauches ». Il faut faire un point ici, car on ne peut pas dire que le faisceau soit réellement composé d'un nombre égal de photons droits ou gauches : les photons sont tous identiques. Par contre, chacun des photons, pris individuellement, existe dans un des deux états de spin de manière équiprobable. Si l'on mesure le moment angulaire des photons du faisceau, on trouverait aussi souvent $-\hbar$ que $+\hbar$. C'est tout ce que l'on peut observer. On ne peut pas dire ce que fait le photon avant la mesure (si seulement il existe avant la mesure). En résumé, un faisceau de lumière polarisé linéairement ne transmettra aucun moment angulaire à une cible.

Au contraire, si tous les photons occupent les deux états de spin avec une probabilité différente, un moment angulaire, par exemple $+\hbar$, va apparaître plus souvent que l'autre, $-\hbar$. Dans ce cas, il y aura un moment angulaire total positif qui sera transmis à la cible. Le résultat final est une lumière elliptique, qui est une superposition de quantités inégales de lumières \mathcal{R} et \mathcal{L} avec une relation de phase particulière entre elles.

8.2 Polariseurs

Maintenant que nous avons une idée de ce qu'est la lumière polarisée, l'étape logique suivante est de comprendre comment la produire, la modifier et la manipuler afin qu'elle corresponde

* Richard A. Beth, « Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light », *Phys. Rev.* **50**, 115 (1936).

à nos besoins. Un dispositif optique qui, recevant de la lumière naturelle, produit une forme quelconque de lumière polarisée est un **polariseur**. Par exemple, rappelons-nous qu'une représentation possible de la lumière non polarisée est la superposition de deux états \mathcal{P} orthogonaux, incohérents et d'amplitude égale. Un instrument qui sépare ces deux composantes, et n'en transmet qu'une seule, est un *polariseur linéaire*. Selon la forme de la lumière produite nous pourrions également avoir un *polariseur circulaire* ou *elliptique*. Tous ces dispositifs ont des efficacités très diverses avec, au bas de l'échelle, ce que nous pouvons appeler des *polariseurs partiels*.

Les polariseurs se présentent sous différentes configurations, mais ils sont tous basés sur l'un des quatre mécanismes physiques fondamentaux suivants : le *dichroïsme*, ou absorption sélective ; la *réflexion* ; la *dispersion* ; et la *biréfringence*, ou double réfraction. Il y a cependant une propriété sous-jacente qu'ils partagent tous : *il doit y avoir une forme d'asymétrie associée au procédé*. Cela est compréhensible, puisque le polariseur doit sélectionner un état particulier de polarisation et se débarrasser des autres. En réalité, l'asymétrie peut être imperceptible suivant l'incidence ou l'angle de vue, mais en général, il s'agit d'une anisotropie évidente dans le matériau du polariseur lui-même.

8.2.1 Loi de Malus

Avant de continuer, nous devons savoir déterminer expérimentalement, si un dispositif est un polariseur linéaire, ou non.

Par définition, si de la lumière naturelle arrive sur un polariseur linéaire idéal, comme sur la figure 8.10, seule la lumière dans un état \mathcal{P} sera transmise. L'orientation de cet état \mathcal{P} sera parallèle à une direction spécifique appelée *axe de transmission* du polariseur. Seule la composante du champ électrique

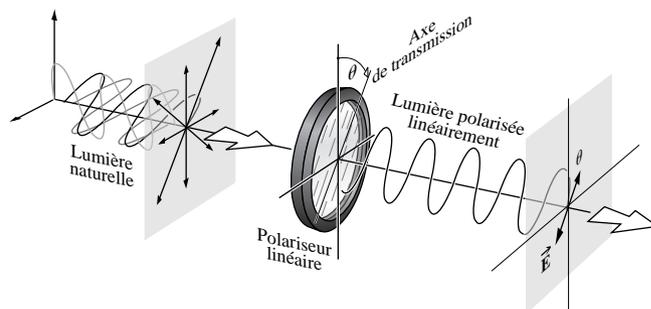


Figure 8.10 Lumière naturelle incidente sur un polariseur linéaire incliné d'un angle θ par rapport à la verticale.

qui est parallèle à l'axe de transmission va passer à travers le dispositif sans affectation majeure. Si le polariseur de la figure 8.10 tourne autour de l'axe z , la lecture du détecteur (par exemple, une cellule photoélectrique) sera inchangée du fait de la symétrie complète de la lumière non polarisée. Gardons à l'esprit que, à cause de la très haute fréquence de la lumière, le détecteur ne mesurera que l'éclairement. Puisque l'éclairement est proportionnel au carré de l'amplitude du champ électrique [équation (3.44)], nous ne nous occuperons que de cette amplitude.

Supposons à présent que nous introduisons un second polariseur linéaire idéal, ou **analyseur**, dont l'axe de transmission est vertical (figure 8.11). Si, l'amplitude du champ électrique transmise par le premier polariseur est E_{01} , seule sa composante $E_{01} \cos \theta$, qui est parallèle à l'axe de transmission de l'analyseur sera transmise au détecteur (en supposant qu'il n'y a pas eu d'absorption). Selon l'équation (3.44) l'éclairement du détecteur est alors donné par :

$$I(\theta) = \frac{c\epsilon_0}{2} E_{01}^2 \cos^2 \theta \quad (8.23)$$

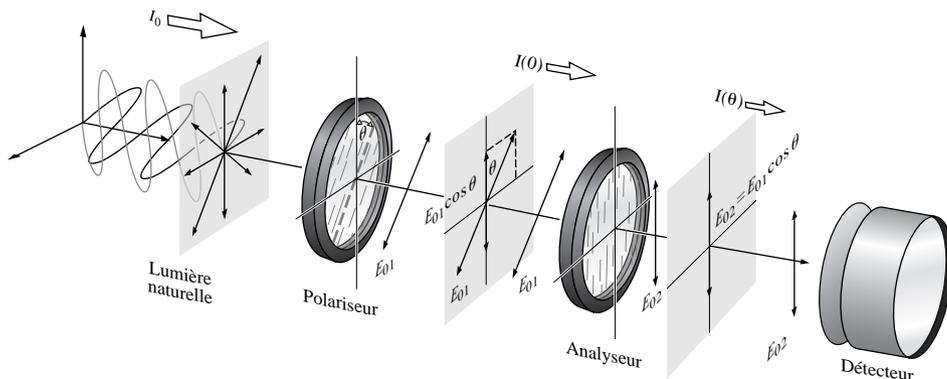


Figure 8.11 Un polariseur linéaire et un analyseur : loi de Malus. De la lumière naturelle d'éclairement I_0 est incidente sur un polariseur linéaire incliné d'un angle θ par rapport à la verticale. L'éclairement en sortie du premier polariseur est $I_1 = I_0$. L'éclairement en sortie du second polariseur linéaire (qui forme un angle θ avec le premier) est $I(\theta)$.

On obtient l'éclairement maximal, $I(\theta) = c\epsilon_0 E_{01}^2/2 = I_1$, lorsque l'angle θ entre les axes de transmission de l'analyseur et du polariseur est nul. L'équation 8.23 peut alors être réduite :

$$I(\theta) = I(0) \cos^2 \theta \quad (8.24)$$

Il s'agit de la loi de Malus, publiée pour la première fois en 1809 par Étienne Malus, ingénieur militaire et capitaine dans l'armée de Napoléon.

Rappelons-nous que $I(0)$ est l'éclairement de l'analyseur. Donc, si l'éclairement du premier polariseur de la figure 8.11 est de 1000 W/m^2 en lumière naturelle, et si c'est un polariseur idéal, 500 W/m^2 de lumière linéaire seront transmis à l'analyseur ; c'est-à-dire $I(0)$. On peut alors utiliser l'équation (8.24) pour calculer l'éclairement transmis $I(\theta)$ en fonction de θ . Supposons maintenant que le faisceau incident de 1000 W/m^2 , soit polarisé parallèlement à l'axe de transmission du premier polariseur. Dans ce cas $I(0) = 1000 \text{ W/m}^2$.

Notons que $I(90^\circ) = 0$. Cela vient du fait que le champ électrique qui est passé à travers le polariseur est perpendiculaire à l'axe de transmission de l'analyseur (les deux dispositifs ainsi arrangés sont dits *croisés*). Le champ est donc parallèle à ce que l'on appelle l'axe d'extinction de l'analyseur et n'a pas de composante le long de l'axe de transmission. Nous pouvons utiliser le montage de la figure 8.11 et la loi de Malus pour déterminer si un dispositif particulier est un polariseur linéaire.

Comme nous allons le voir à présent, le type le plus courant de polariseur linéaire est actuellement le filtre Polaroid. Bien que l'on puisse sans doute confirmer la loi de Malus avec des Polaroids ordinaires, il faut veiller à utiliser de la lumière dans une fenêtre allant de $\approx 450 \text{ nm}$ à $\approx 650 \text{ nm}$. Les Polaroids ordinaires ne sont pas très bons dans l'infrarouge.

8.3 Dichroïsme

Au sens le plus large, le terme **dichroïsme** se réfère à l'absorption sélective de l'une des deux composantes \mathcal{P} d'un faisceau incident. Le polariseur dichroïque lui-même est physiquement anisotropique, absorbant fortement l'une des composantes du champ tout en étant transparent pour l'autre.

8.3.1 Le polariseur à grille

Le dispositif le plus simple de cette catégorie est une grille de fils conducteurs parallèles, comme sur la figure 8.12. Imaginons

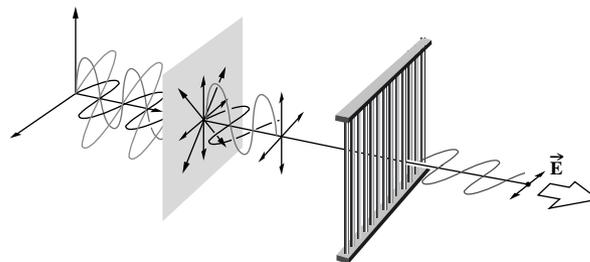


Figure 8.12 Polariseur à grille. La grille élimine les composantes verticales (i.e. celles qui sont parallèles aux fils) du champ E et laisse passer les composantes horizontales.

qu'une onde électromagnétique non polarisée arrive sur la grille depuis la gauche, on peut décomposer le champ électrique en deux polarisations orthogonales, l'une étant parallèle aux fils et l'autre perpendiculaire à ceux-ci. La composante y du champ entraîne les électrons de conduction le long de chaque fil, produisant ainsi un courant. Les électrons entrent en collision avec les atomes de la grille, leur donnant de l'énergie et chauffant ainsi la grille (Effet Joule). L'énergie est ainsi transférée du champ à la grille. De plus, les électrons, accélérant le long de l'axe y , émettent à la fois vers l'avant et vers l'arrière. Comme nous devons nous y attendre, l'onde incidente tend à être annulée par l'onde réémise vers l'avant ; il en résulte une transmission faible voire inexistante de la composante y du champ. La radiation se propageant vers l'arrière apparaît simplement comme une onde réfléchie. Par contre, les électrons ne sont pas libres de se propager très loin suivant l'axe x , et la composante du champ de l'onde correspondante n'est presque pas altérée lors de son passage à travers la grille. **L'axe de transmission de la grille est perpendiculaire aux fils.** C'est une erreur fréquente de penser que la composante y du champ se glisse d'une manière ou d'une autre entre les fils.

On peut facilement confirmer nos conclusions en utilisant des micro-ondes et une grille de fils électriques ordinaires. Il n'est cependant pas aisé de fabriquer une grille pour polariser la lumière, mais cela a déjà été fait ! En 1960, George R. Bird et Maxfield Parrish, Jr. fabriquèrent une grille avec 2160 fils par mm.* Cette prouesse a été accomplie par évaporation d'un courant d'atomes d'or (ou d'aluminium) sous incidence rasante sur la réplique d'un réseau de diffraction en plastique (voir paragraphe 10.2.7). Le métal s'accumulait le long des

*G. R. Bird et M. Parrish, Jr., « The Wire Grid as a Near-Infrared Polarizer », *J. Opt. Soc. Am.* **50**, 886 (1960).

bords de chaque pas de la grille pour former des « fils » microscopiques dont la largeur et l'espacement étaient inférieurs à une longueur d'onde.

Les grilles sont certes utiles, particulièrement dans l'infra-rouge, mais on les mentionne ici davantage pour des raisons pédagogiques que pratiques. Il existe d'autres polariseurs dichroïques plus classiques, basés sur le même principe.

8.3.2 Cristaux dichroïques

Certains matériaux sont dichroïques par nature à cause d'une anisotropie dans leur structure cristalline. Le plus connu d'entre eux est sans doute un minéral que l'on trouve à l'état naturel, la *tourmaline*, pierre semi-précieuse utilisée en bijouterie. Il existe en fait plusieurs tourmalines, qui sont des silicates de bore de compositions chimiques différentes [par exemple $\text{NaFe}_3\text{B}_3\text{Al}_6\text{Si}_6\text{O}_{27}(\text{OH})_4$]. Pour cette substance, il existe une direction spécifique à l'intérieur du cristal, connue sous le nom d'*axe principal* ou *optique*, qui est déterminé par sa configuration atomique. L'échantillon absorbe fortement la composante de champ électrique qui est perpendiculaire à son axe principal. Plus le cristal est épais, plus l'absorption est complète (figure 8.13). Une lame taillée dans un cristal de tourmaline parallèlement à son axe principal de quelques millimètres d'épaisseur, va servir de polariseur linéaire. Dans cet exemple, l'axe principal du cristal devient l'axe de transmission du polariseur. Cependant, l'utilité de la tourmaline est limitée par le fait que ses cristaux sont assez petits. Par ailleurs, même la lumière transmise subit une certaine absorption. Pour compliquer les choses, cette absorption indésirable est fortement dépendante de la longueur d'onde, et les échantillons vont donc être colorés. Un cristal de tourmaline éclairé par de la lumière blanche naturelle pourra apparaître vert (il présente aussi d'autres couleurs) quand on le regarde perpendiculairement à l'axe principal, et quasiment noir quand on le regarde le long de cet axe, où tous les champs \vec{E} lui sont perpendiculaires (d'où le terme dichroïque, qui signifie *deux couleurs*).

Il existe d'autres substances aux caractéristiques similaires. Un cristal d'hypersthène, un silicate de ferromagnésium, peut paraître vert lorsqu'on l'éclaire en lumière blanche polarisée dans une direction donnée, et rose pour une direction de polarisation différente.

On peut s'expliquer qualitativement le mécanisme qui provoque le dichroïsme d'un cristal en considérant la structure microscopique d'un échantillon (on pourra retourner au paragraphe 3.5). Rappelons-nous que les atomes dans un cristal sont fortement liés les uns aux autres par les forces d'interaction

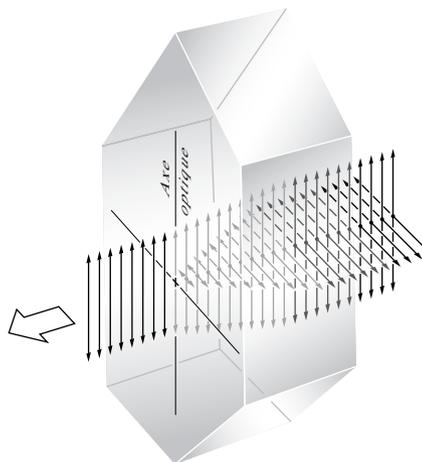


Figure 8.13 Un cristal dichroïque. Le champ E parallèle à l'axe optique est transmis sans aucune atténuation. Les stries naturelles que l'on voit très distinctement sur la photo des cristaux de tourmaline correspondent à l'axe optique. (Photo E.H.)

courtes pour former un treillage périodique. On peut considérer que les électrons, qui sont responsables des propriétés optiques, sont attachés de manière élastique à leurs positions d'équilibre respectives. Les électrons associés à un atome donné sont également influencés par les atomes proches qui les entourent, et qui eux-mêmes peuvent ne pas être répartis symétriquement. En conclusion, les forces de liaison élastiques qui s'appliquent aux électrons diffèrent suivant les directions. En conséquence, la réponse de ce dernier au champ électrique incident varie avec la direction de \vec{E} . Si, en plus d'être anisotrope, le matériau est absorbant, une analyse détaillée devrait inclure une conductivité qui dépend de l'orientation. Il existera des courants, et une

partie de l'énergie de l'onde sera convertie en Effet Joule. En plus de varier avec la direction, l'atténuation peut également dépendre de la fréquence. Cela signifie que, si la lumière blanche incidente est dans un état \mathcal{P} , le cristal va paraître coloré, et la couleur va dépendre de l'orientation de \vec{E} . Les substances qui affichent deux ou même trois couleurs différentes sont respectivement appelées dichroïques et trichroïques*.

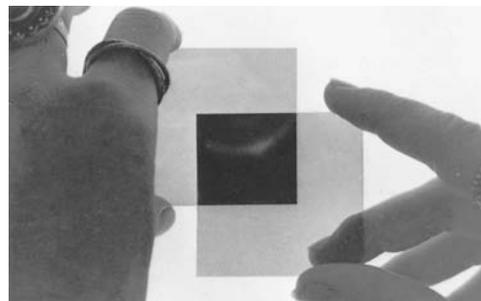
8.3.3 Polaroid

En 1928, Edwin Herbert Land, alors étudiant de 19 ans à Harvard, inventa le premier polariseur à feuille dichroïque, connu commercialement comme le *Polaroid J-sheet*. Il incorporait une substance dichroïque synthétique appelée *héraopathite*, ou *quinine sulfate periodide*[†]. Le compte rendu rétrospectif de Land sur ses premiers travaux est très enrichissant et fascinant à lire. Il est particulièrement intéressant de suivre les origines parfois saugrenues de ce qui est maintenant, sans aucun doute, le groupe de polariseurs le plus largement utilisé. Ce qui suit est un extrait des remarques de Land.

Dans la littérature, il y a quelques grandes lignes pertinentes dans le développement des polariseurs, particulièrement dans les travaux de William Bird Herapath, médecin à Bristol en Angleterre, dont l'élève, un certain Mr Phelps, avait découvert que lorsqu'il mettait de l'iode dans l'urine d'un chien à qui on avait administré de la quinine, il se formait de petits cristaux verts scintillants. Phelps en parla à son professeur, et Herapath fit alors quelque chose que je [Land] trouve curieux dans ces circonstances ; il regarda les cristaux au microscope et remarqua qu'à certains endroits où ils se chevauchaient, ils étaient clairs, et qu'à d'autres endroits, ils étaient foncés. Il fut assez intelligent pour reconnaître en cela un phénomène remarquable, un nouveau matériau polarisant [aujourd'hui connu comme héraopathite]... Le travail d'Herapath attira l'attention de Sir David Brewster, qui travaillait à cette époque heureuse sur le kaléidoscope... Brewster, qui inventa le kaléidoscope, écrivit un livre à ce sujet, où il mentionna qu'il aimerait utiliser les cristaux d'héraopathite pour l'oculaire. Quand j'ai lu ce livre, en 1926 et 1927, je suis tombé sur sa référence à ces cristaux remarquables, et c'est ainsi qu'est né mon intérêt pour l'héraopathite.

*Nous en dirons plus sur ces processus plus tard lorsque nous étudierons la biréfringence. Il suffit de dire pour l'instant que pour les cristaux classés comme *uniaxes*, il existe deux directions distinctes, ce qui fait que les spécimens *absorbants* peuvent présenter deux couleurs. Pour les cristaux *biaxes*, il y a trois directions distinctes et autant de possibilités de couleurs.

[†]E. H. Land, « Some Aspects of the Development of Sheet Polarizers », *J. Opt. Soc. Am.* **41**, 957 (1951).



Une paire de polariseurs croisés. Chaque polariseur apparaît gris parce qu'il absorbe environ la moitié de la lumière incidente. (Photo E.H.)

Pour créer un nouveau polariseur linéaire, Land commença par broyer de l'héraopathite en des millions de cristaux submicroscopiques, qui avaient naturellement la forme d'une aiguille. Leur petite taille réduisait le problème de diffusion de la lumière. Dans ces premières expériences, les cristaux étaient alignés presque parallèlement les uns aux autres au moyen de champs électriques ou magnétiques. Plus tard, Land découvrit qu'on pouvait aligner mécaniquement des cristaux en faisant passer une suspension colloïdale visqueuse contenant des aiguilles d'héraopathite à travers une longue fente étroite. La *J-sheet* résultante était effectivement un cristal dichroïque large et plat. Les cristaux submicroscopiques individuels diffusaient toujours un peu la lumière, et en conséquence, la *J-sheet* était un peu voilée.

En 1938, Land inventa la *H-sheet*, qui est probablement le polariseur linéaire le plus largement utilisé aujourd'hui. Elle ne contient pas de cristaux dichroïques mais un équivalent moléculaire du polariseur à grille. Une feuille d'alcool de polyvinyle pur est chauffée et étirée dans une direction donnée, ses longues molécules d'hydrocarbure s'alignant au cours du processus. La feuille est alors plongée dans une solution d'encre riche en iode. L'iode imprègne le plastique et s'attache à la longue chaîne droite de molécules polymères, formant une chaîne propre. Les électrons de conduction associés à l'iode peuvent bouger le long des chaînes moléculaires comme si celles-ci étaient de longs fils fins. Pour une onde incidente, la composante de \vec{E} qui est parallèle aux molécules met les électrons en mouvement, agit sur eux, et est fortement absorbée. L'axe de transmission du polariseur est donc perpendiculaire à la direction d'étirage du film.

Chaque minuscule entité dichroïque est appelée *dichromophore*. Dans une *H-sheet*, les dichromophores sont de dimension moléculaire, donc la diffusion ne représente pas un problème. La *H-sheet* est un polariseur très efficace pour tout le visible, sauf

dans le bleu. Lorsqu'on regarde une lumière blanche et brillante à travers des Polaroids *H-sheet* croisés, la couleur d'*extinction* sera en conséquence d'un bleu profond. HN-50 serait la désignation d'une hypothétique *H-sheet* idéale, de couleur neutre (N) et transmettant 50 % de la lumière incidente naturelle, les 50 % restants (composante non désirée) étant absorbés. En pratique, cependant, sur la totalité de la lumière incidente, à peu près 4 % sont réfléchis sur chacune des surfaces (en général, on n'utilise pas de revêtements anti-réflexion), ce qui laisse à peu près 92 % du flux dont la moitié est sans doute absorbée, ce qui nous conduirait à un Polaroid HN-46. Aujourd'hui, beaucoup de HN-38, HN-32 et HN-22 sont produits commercialement et facilement disponibles (Problème 8.10), chacun se distinguant par la quantité d'iode présente.

Beaucoup d'autres formes de Polaroids ont été développées*. La *K-sheet* résiste à l'humidité et à la chaleur. En combinant des éléments des *H-* et *K-sheets* on obtient une *HR-sheet*, polariseur pour l'infrarouge proche. Et il y a dans le commerce des polariseurs linéaires à feuille dichroïque qui fonctionnent dans l'ultraviolet de ≈ 300 nm à ≈ 400 nm.

Il faut se souvenir que les polariseurs dichroïques à feuille sont conçus pour une gamme de longueurs d'onde spécifique. Une paire croisée de polariseurs linéaires à feuille, prévue pour bloquer le visible, laissera passer la lumière en dessous de ≈ 450 nm et au-dessus de ≈ 650 nm.

Un *Polaroid vectographe* est un matériau commercial qui avait initialement été conçu pour être incorporé à un procédé permettant de réaliser des photos en trois dimensions. Il n'a jamais atteint le but recherché, mais on peut l'utiliser pour produire des démonstrations qui font réfléchir sans être vraiment intrigantes. Un film vectographe est un plastique stratifié anhydre composé de deux feuilles d'alcool polyvinyle disposées de manière à ce que leurs directions d'étirage forment un angle droit. Dans cette configuration, il n'y a pas d'électrons de conduction disponibles, et le film n'est pas un polariseur. Supposons que, à l'aide d'une solution iodée, on dessine un X sur un côté du film et un Y le chevauchant de l'autre côté. Sous un éclairage naturel, la lumière traversant le X sera dans un état \mathcal{P} perpendiculaire à celui de la lumière issue du Y. En d'autres termes, les régions peintes forment deux polariseurs croisés, qui seront vus comme se superposant. À présent, si l'on regarde le vectographe à travers un polariseur linéaire que l'on peut faire tourner, on verra le X et/ou le Y. Évidemment, on peut faire des dessins beaucoup plus imaginatifs (il ne faut pas oublier de dessiner le second à l'envers).

*Voir *Polarized Light: Production and Use*, de Shurcliff, ou un équivalent plus accessible : *Polarized Light*, de Shurcliff et Ballard.

8.4 Biréfringence

Beaucoup de corps cristallins (i.e. des solides dont les atomes sont disposés en réseaux répétitifs et réguliers) sont *optiquement anisotropes*. Leurs propriétés optiques ne sont pas les mêmes dans toutes les directions, pour un échantillon donné. Les cristaux dichroïques de la section précédente n'en sont qu'un sous-groupe particulier. Nous avons vu que si les atomes du réseau cristallin n'étaient pas disposés de manière complètement symétrique, les forces de liaison sur les électrons étaient anisotropes. À la figure 3.38b nous avons représenté l'oscillateur isotrope en utilisant le modèle mécanique simple d'une coquille sphérique chargée, qui est attachée par des ressorts identiques à un point fixe. Cela convenait à des substances optiquement isotropes (les solides amorphes, tels que le verre ou le plastique, sont en principe, mais pas toujours, isotropes). La figure 8.14 montre une autre coquille chargée, cette fois attachée par des ressorts de raideurs diverses (i.e. ayant des constantes de rappel différentes). Un électron que l'on déplace de son équilibre le long d'une direction parallèle à une série de « ressorts » va évidemment osciller avec une fréquence caractéristique différente de celle qu'il aurait eue si l'on l'avait déplacé dans une autre direction.

Comme nous l'avons noté précédemment, la lumière se propage à travers une substance transparente en excitant les atomes de ce milieu. Les électrons sont mis en mouvement par le champ \vec{E} , et ils réémettent des ondelettes secondaires qui se

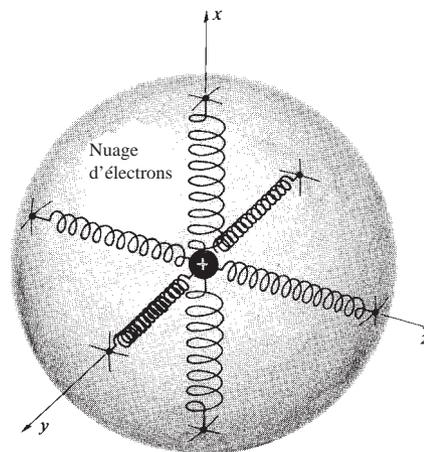


Figure 8.14 Modèle mécanique représentant un nuage électronique chargé négativement, lié à un noyau positif par des paires de ressorts de raideurs différentes.

recombinent, et l'onde résultante réfractée poursuit ainsi sa propagation. La vitesse de l'onde, et donc l'indice de réfraction, sont déterminés par la différence entre la fréquence du champ \vec{E} et la fréquence naturelle des atomes. Une anisotropie dans les forces de liaison se manifestera par une anisotropie dans l'indice de réfraction. Par exemple, si de la lumière à l'état \mathcal{P} traverse un cristal dans lequel elle rencontre des électrons tels que ceux de la figure 8.14, sa vitesse dépend de l'orientation de \vec{E} . Si \vec{E} est parallèle aux ressorts raides, c'est-à-dire dans la direction de la liaison forte, ici le long de l'axe x , la fréquence naturelle des électrons est élevée (proportionnelle à la racine carrée de la constante de rappel). Au contraire, si \vec{E} est le long de l'axe des y , où les forces de liaison sont plus faibles, la fréquence naturelle est plus basse. Gardant à l'esprit notre discussion précédente sur la dispersion et sur la courbe $n(\omega)$ de la figure 3.41, on comprendra que les indices de réfraction appropriés doivent ressembler à ceux de la figure 8.15. Un tel matériau, qui présente deux indices de réfraction différents, est dit **biréfringent***. Si le cristal est tel que la fréquence angulaire de la lumière incidente est voisine de ω_b , dans la figure 8.15, cette fréquence se trouve dans la bande d'absorption de $n_y(\omega)$. Si on éclaire le cristal dans ces conditions, il sera très absorbant pour une direction de polarisation (y) et transparent pour l'autre (x). Un matériau biréfringent qui absorbe l'un des états orthogonaux \mathcal{P} et laisse passer l'autre est dichroïque. De plus, supposons que la symétrie du cristal soit telle que les forces de liaison dans les directions y et z sont identiques, en d'autres termes, que chacun de ces ressorts a la même fréquence naturelle. L'axe x définit à présent la direction de l'**axe optique**. Dans la mesure où on peut représenter un cristal par un réseau de ces oscillateurs chargés, anisotropes, et orientés, **l'axe optique est en fait une direction et plus seulement une simple droite**. Le modèle marche assez bien pour les cristaux dichroïques, puisque si la lumière devait se propager le long de l'axe optique (\vec{E} dans le plan yz), elle serait fortement absorbée, et si elle se propageait perpendiculairement à cet axe, elle sortirait polarisée linéairement.

La plupart des cristaux biréfringents ont des fréquences naturelles situées au-delà du visible, et ils sont incolores. Cela est représenté sur la figure 8.15 où la lumière incidente a des fréquences angulaires proches de ω_b . Il apparaît deux indices différents, mais l'absorption pour chacune des polarisations est négligeable. L'équation (3.71) montre que $n(\omega)$ est inversement proportionnel à la fréquence naturelle. Cela signifie

*Le mot *réfringence* était autrefois utilisé à la place du mot actuel *réfraction*. Il vient du latin *refractus* par la voie de transformations étymologiques à partir de *frangere*, qui signifie *casser*.

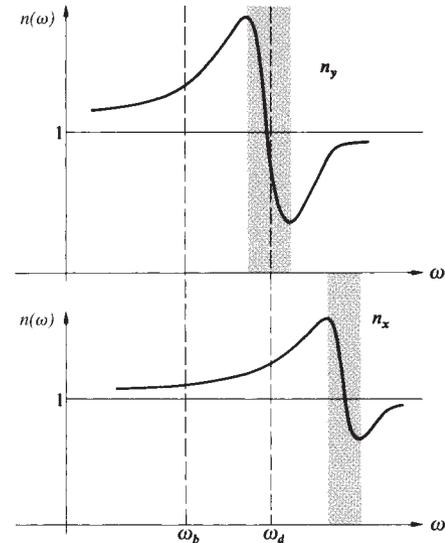


Figure 8.15 Indice de réfraction en fonction de la fréquence, le long de deux axes, dans un cristal. Les régions où $dn/d\omega < 0$ correspondent aux bandes d'absorption.

qu'une grande constante de rappel (i.e. liaison forte) correspond à une faible polarisabilité, à une faible constante diélectrique et à un indice de réfraction bas.

Nous allons construire, au moins d'une façon imagée, un polariseur linéaire qui utilise la biréfringence pour forcer les deux états \mathcal{P} orthogonaux à suivre différentes voies et à se séparer. On peut faire des choses encore plus fascinantes avec des cristaux biréfringents, comme nous allons le voir.

8.4.1 Calcite

Prenons un moment pour appliquer les notions précédentes à un cristal biréfringent typique, la calcite. La calcite ou carbonate de calcium (CaCO_3) est une substance que l'on trouve à l'état naturel. Le marbre et le calcaire sont formés de nombreux petits cristaux de calcite liés les uns aux autres. Les monocristaux de grande taille sont magnifiques et présentent un intérêt particulier ; bien qu'ils deviennent rares, on peut encore en trouver, notamment en Inde, au Mexique, et en Afrique du Sud. Les polariseurs linéaires des lasers à forte puissance sont le plus souvent réalisés à partir de calcite.

La figure 8.16 montre la distribution du carbone, du calcium et de l'oxygène dans la structure de la calcite ; la figure 8.17 est une vue de dessus, en regardant le long de l'axe

optique (défini comme tel en figure 8.16). Chacun des groupes de CO_3 forme un ensemble triangulaire dont le plan est perpendiculaire à l'axe optique. Si on fait tourner la figure 8.17 autour d'une ligne perpendiculaire à l'un de ces groupes carbonates, et passant par son centre, la même configuration d'atomes apparaît trois fois par révolution. La direction désignée comme l'axe optique correspond à une orientation cristallographique spéciale, c'est un axe de symétrie d'ordre 3. Les groupes carbonate de la calcite sont tous sur des plans normaux à l'axe optique, ce qui explique sa grande biréfringence. Le comportement de leurs électrons ou plutôt l'interaction mutuelle entre les dipôles induits dans les atomes d'oxygène, est sensiblement différente suivant que \vec{E} appartient à ces plans ou qu'il leur est normal (Problème 8.25). Dans tous les cas, l'asymétrie est assez claire.

On peut facilement séparer en deux des échantillons de calcite et obtenir des surfaces lisses, appelées **plans de clivage**. Le cristal est fait pour se rompre entre des plans spécifiques d'atomes, là où les liaisons interatomiques sont relativement faibles. Tous les plans de clivage dans la calcite (figure 8.17) sont normaux à trois directions différentes. Lorsqu'un cristal se forme, les atomes s'ajoutent couche après couche en suivant le même motif. Mais il se peut qu'il y ait plus de matière disponible d'un côté que de l'autre dans le processus de formation du cristal, qui

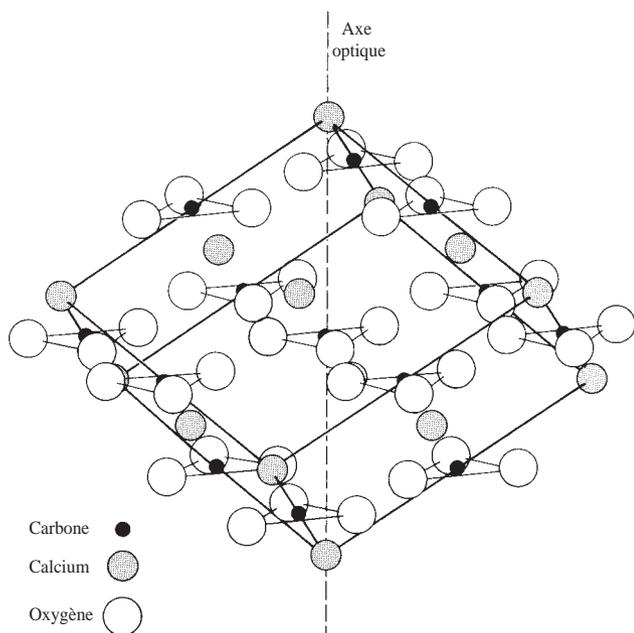


Figure 8.16 Disposition des atomes dans la calcite.

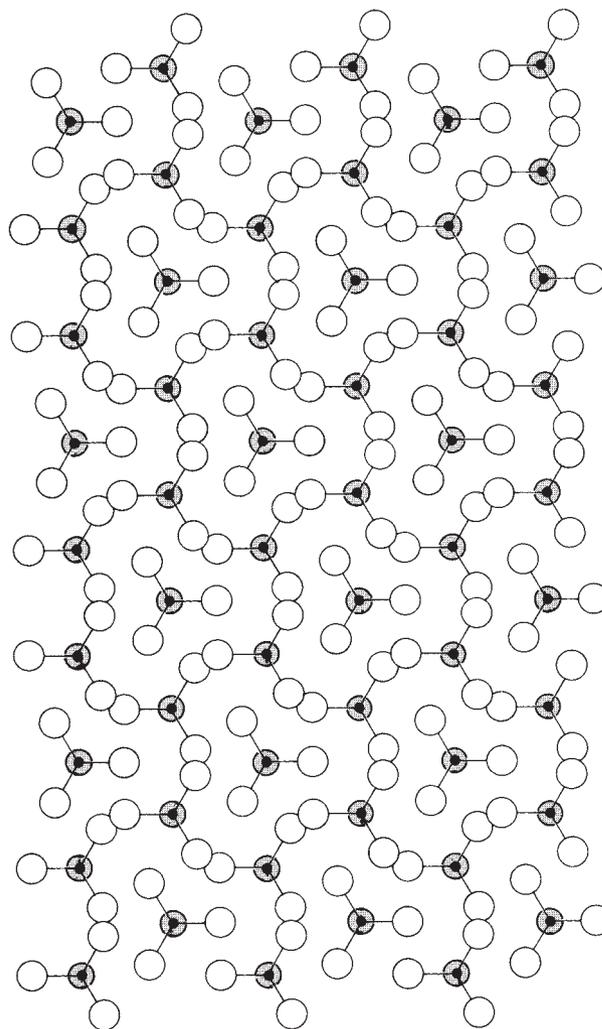


Figure 8.17 Disposition atomique de la calcite vue du haut de l'axe optique.

prend dès lors une forme extérieure compliquée. Malgré cela, les plans de clivage dépendent de la configuration atomique, et si l'on coupe un échantillon de cristal le long d'un plan de clivage, sa forme est reliée à l'arrangement de base entre ses atomes, et correspond à la **géométrie du clivage**. Dans le cas de la calcite c'est un rhomboèdre, dont chaque face est un parallélogramme ayant des angles de $78^\circ 5'$ et $101^\circ 55'$ (figure 8.18).

Il n'y a que deux coins, un peu aplatis, pour lesquels les surfaces planes se rencontrent en formant trois angles obtus. Une droite passant par le sommet de l'un ou de l'autre, et orientée de telle sorte qu'elle forme un angle égal avec chacune des

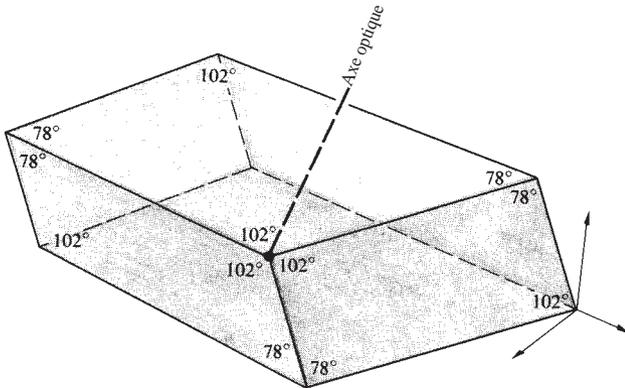


Figure 8.18 Géométrie du clivage de la calcite.

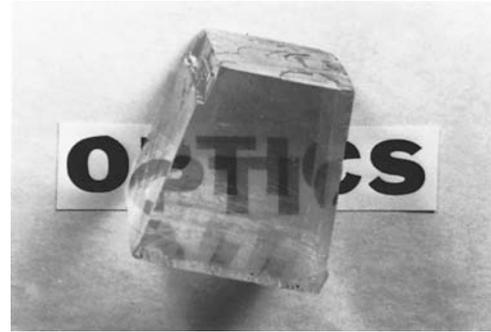
faces ($45,5^\circ$) et chacun des côtés ($63,8^\circ$), est un axe de symétrie d'ordre 3 (cela serait un peu plus évident si l'on coupait le rhomboèdre afin qu'il ait des côtés de même longueur). Évidemment une telle droite doit correspondre à l'axe optique. Quelle que soit la forme naturelle d'un échantillon de calcite, il suffit de trouver le coin non saillant pour définir son axe optique.

En 1669, Erasme Bartholin (1625-1692), docteur en médecine et professeur de mathématiques à l'université de Copenhague (et, par ailleurs, beau-père de Ole Römer, qui mesura le premier la vitesse de la lumière en 1679), observa un phénomène optique nouveau et remarquable dans la calcite, qu'il appela double réfraction. La calcite avait été découverte depuis peu, près d'Eskifjodur en Islande, et était alors connue sous le nom de *spath d'Islande*. Selon les mots de Bartholin* :

« Tout le monde apprécie le diamant, les pierres précieuses et les perles... mais celui qui, au contraire, préfère à ces délices la connaissance de phénomènes inhabituels, celui-là, je l'espère, n'aura pas moins de joie à découvrir une nouvelle sorte de corps, à savoir un cristal transparent qui nous est récemment venu d'Islande, et qui est peut-être l'une des plus grandes merveilles que la nature ait produite... »

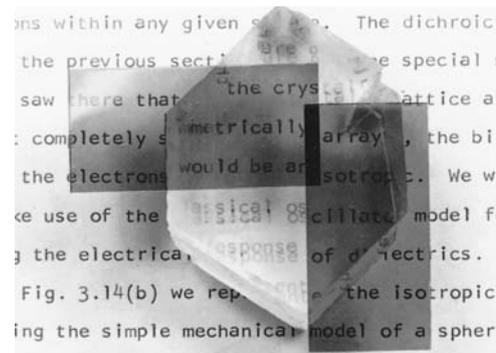
Alors que mes recherches sur ce cristal avançaient, il se produisit un phénomène magnifique et extraordinaire : les objets que l'on regarde à travers le cristal ne donnent pas, comme dans le cas d'autres corps transparents, une image réfractée unique, mais ils apparaissent en double.

L'image double dont parle Bartholin est évidente dans la photographie ci-contre, illustrant ce point. Si un faisceau étroit de



Dédoublement de l'image par un cristal de calcite (sans clivage). (Photo E.H.)

lumière naturelle éclaire un cristal de calcite normalement à un plan de clivage, il va se diviser, et deux faisceaux parallèles vont sortir du cristal. Pour observer aisément le même effet, il suffit de placer un point noir sur un morceau de papier et de le couvrir d'un losange de calcite. L'image sera composée de deux points gris (noirs lorsqu'ils se chevauchent). En faisant tourner le cristal, l'un des points reste à sa place et l'autre semble bouger en cercle autour du premier, suivant le mouvement du cristal. Les rayons formant le point fixe, qui est invariablement le plus proche du coin non saillant supérieur, se comportent comme s'ils étaient passés en grande partie à travers un morceau de verre. En accord avec une suggestion de Bartholin, on les appelle **rayons ordinaires** ou *rayons O*. Les rayons venant de l'autre point, qui se comportent de manière très inhabituelle, sont appelés **rayons extraordinaires**, ou *rayons E*. Si on examine à travers un analyseur, on trouvera que les images ordinaire et extraordinaire sont polarisées linéairement (voir la photo). De plus, les deux états \mathcal{P} émergents sont orthogonaux.



Un cristal de calcite (le coin non saillant est en bas). Les axes de transmission des deux polariseurs sont parallèles à leurs petits côtés. Là où l'image est double, celle du bas, non défléchie, est l'image ordinaire. Regarder attentivement cette image : il y a beaucoup à voir. (Photo E.H.)

*W. F. Magie, *A Source Book in Physics*.

Tous les plans contenant l'axe optique sont appelés **plans principaux**. Plus particulièrement, si le plan principal est également normal à deux surfaces opposées de la forme de clivage, il coupe le cristal le long de sa **section principale**. Il est évident qu'en chaque point il passe trois sections principales ; chacune est un parallélogramme ayant des angles à 109° et 71° . La figure 8.19 est un diagramme représentant un faisceau initialement non polarisé qui traverse un cristal de calcite suivant une section principale. Les cercles pleins et les flèches dessinées le long des rayons indiquent que le *rayon O* a son vecteur champ électrique normal à la section principale, et que le champ du *rayon E* est parallèle à la section principale.

Pour simplifier, considérons que dans l'onde plane incidente, \vec{E} est polarisé linéairement, et perpendiculaire à l'axe optique, comme on le voit sur la figure 8.20. L'onde frappe la surface du cristal, provoquant ainsi l'oscillation des électrons, qui, à leur tour, vont réémettre des ondes secondaires. Ces ondes secondaires se recombinaient pour former l'onde réfractée, et le processus se répète jusqu'à ce que l'onde sorte du cristal. Cela est un argument physique convaincant pour appliquer les idées de la diffusion à travers le principe de Huygens. Huygens lui-même, bien que ne bénéficiant pas de la théorie électromagnétique, utilisait dès 1690 sa construction pour expliquer divers aspects de la double réfraction dans la calcite.

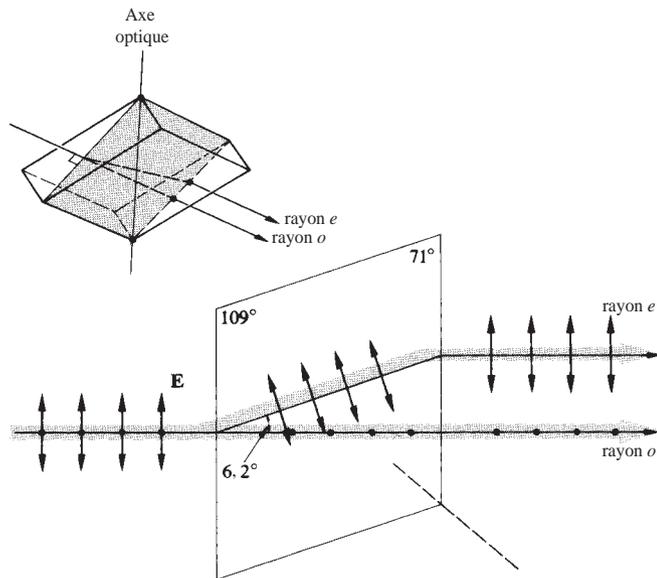


Figure 8.19 Un faisceau lumineux, comportant deux composantes de champ orthogonales, traversant la section principale d'un cristal de calcite.

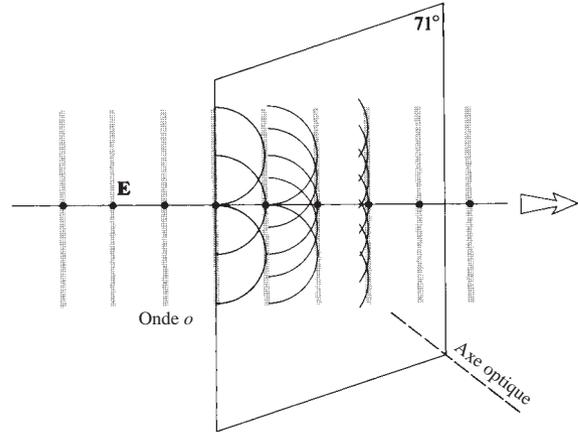


Figure 8.20 Une onde plane incidente polarisée perpendiculairement à la section principale.

Il faut cependant préciser que son traitement est incomplet,* et, bien qu'attrayant, faussement simple.

Dans la mesure où le champ \vec{E} est perpendiculaire à l'axe, on admet que le front d'onde stimule un nombre incalculable d'atomes sur la surface, qui dès lors agissent comme des sources d'ondelettes sphériques secondaires, toutes en phase. Tant que le champ des ondelettes secondaires est en tout point normal à l'axe optique, elles se répandront dans toutes les directions à l'intérieur du cristal à une vitesse v_{\perp} , comme elles le feraient dans un milieu isotrope (ne pas oublier que la vitesse est fonction de la fréquence). Puisque l'onde O ne montre pas de comportement anormal, cette supposition semble raisonnable. L'enveloppe des ondelettes secondaires est en fait une partie d'une onde plane qui, à son tour, stimule un ensemble d'atomes jouant le rôle de sources ponctuelles secondaires. Le processus continue, et l'onde avance à travers le cristal.

Par contre, considérons l'onde incidente de la figure 8.21 dont le champ \vec{E} est parallèle à la section principale. Notons que \vec{E} a maintenant une composante normale à l'axe optique, ainsi qu'une composante qui lui est parallèle. Puisque le milieu est biréfringent, un rayon monochromatique et polarisé parallèlement à l'axe optique, se propage à une vitesse v_{\parallel} , où $v_{\parallel} \neq v_{\perp}$. Pour la calcite et le jaune du sodium ($\lambda = 589 \text{ nm}$), $1,486v_{\parallel} = 1,658v_{\perp} = c$. À quel type d'ondelettes de Huygens peut-on s'attendre désormais ? Bien que ce soit une simplification trop poussée, on représentera au moins pour l'instant, chacune des

*A. Sommerfeld, *Optics*, p. 148.

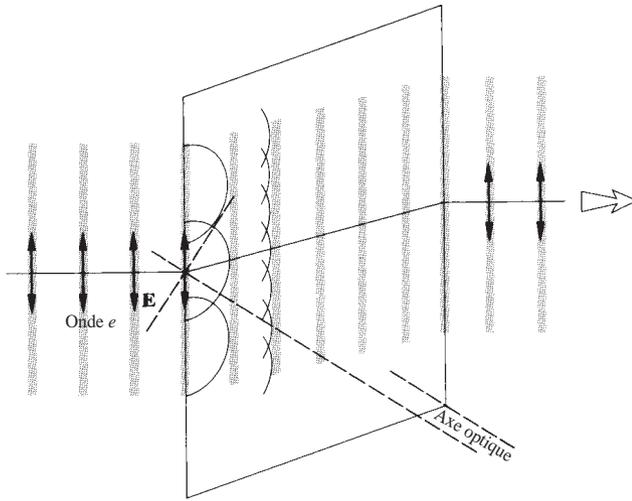


Figure 8.21 Une onde plane incidente polarisée parallèlement à la section principale.

ondes secondaires E par une petite sphère (figure 8.22). Mais comme $v_{\parallel} > v_{\perp}$, l'ondelette secondaire s'allonge dans toutes les directions normales à l'axe optique. Pour cette raison, nous faisons l'hypothèse, comme l'a fait Huygens, que les ondelettes secondaires associées à l'onde E sont des ellipsoïdes de révolution autour de l'axe optique. L'enveloppe de toutes ces ondelettes ellipsoïdales est en fait une partie d'onde plane, parallèle à l'onde incidente. Cette onde plane, cependant, va manifestement subir un déplacement latéral en traversant le cristal. Le faisceau se déplace dans une direction qui est parallèle aux segments reliant l'origine de chaque onde secondaire et le point de tangence avec l'enveloppe plane. C'est ce qu'on appelle la **direction du rayon**, qui correspond à la direction de propagation de

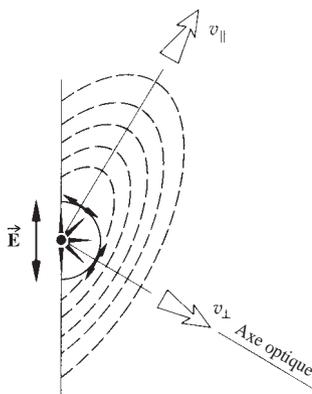


Figure 8.22 Ondelettes dans la calcite.

l'énergie. Manifestement, dans un cristal anisotrope, la direction du rayon n'est pas normale au front d'onde.

Si le faisceau incident est de la lumière naturelle, les deux situations décrites en figure 8.20 et 8.21 coexistent, provoquant la division du faisceau en deux faisceaux dont les polarisations sont linéaires et orthogonales entre elles (figure 8.19). On peut observer la séparation de ces deux faisceaux dans un cristal en utilisant un faisceau laser étroit correctement orienté (\vec{E} normal ou parallèle au plan principal, ce qui est habituellement le cas). On peut voir assez facilement le chemin suivi par la lumière, par diffusion sur les défauts internes.

La description électromagnétique de ce qui se passe est assez compliquée, mais cela vaut la peine de l'examiner à présent, même de manière superficielle. Dans le Chapitre 3 nous avons vu que le champ \vec{E} incident va polariser le diélectrique, c'est-à-dire qu'il va modifier la distribution des charges, en créant des dipôles électriques. Le champ interne au diélectrique est donc altéré par l'inclusion d'un champ induit, et l'on est amené à introduire une nouvelle quantité, le déplacement \vec{D} (voir l'annexe 1). Dans un milieu isotrope, \vec{D} et \vec{E} sont liés par une quantité scalaire et sont donc toujours parallèles. Dans des cristaux anisotropes, \vec{D} et \vec{E} sont liés par un tenseur et ne sont donc pas toujours parallèles l'un à l'autre. Si on applique à présent les équations de Maxwell à la propagation d'une onde à travers un tel milieu, on trouve que les champs portés par le front d'onde sont \vec{D} et \vec{B} et non, comme précédemment, \vec{E} et \vec{B} . Le vecteur de propagation \vec{k} , qui est normal aux surfaces de phase constante, est à présent perpendiculaire à \vec{D} et non plus à \vec{E} . En fait, \vec{D} , \vec{E} , et \vec{k} sont coplanaires. La direction du rayon correspond à la direction du vecteur de Poynting $\vec{S} = v^2 \epsilon \vec{E} \times \vec{B}$, qui est en général différente de celle de \vec{k} . Selon la répartition des atomes, \vec{E} et \vec{D} sont colinéaires quand ils sont tous les deux, soit parallèles, soit perpendiculaires à l'axe optique.* Cela signifie qu'une ondelette O va rencontrer un milieu effectivement isotrope et qu'elle sera donc sphérique, avec \vec{S} et \vec{k} colinéaires. À l'inverse, pour les ondelettes E , \vec{S} et \vec{k} (ou de manière équivalente \vec{E} et \vec{D}) ne seront parallèles que dans les directions parallèles ou normales à l'axe optique. Pour tous les autres points de l'ondelette, c'est \vec{D} qui est tangent à l'ellipsoïde, et donc c'est

*Dans le modèle de l'oscillateur, le cas général correspond à la situation dans laquelle \vec{E} n'est parallèle à aucune des directions des ressorts. Le champ va conduire la charge, mais son mouvement résultant ne sera pas dans la direction de \vec{E} à cause de l'anisotropie des forces de liaison. La charge sera principalement déplacée, pour une force de composante donnée, dans la direction où la contrainte sera la plus faible. Le champ induit n'aura pas la même orientation que \vec{E} .

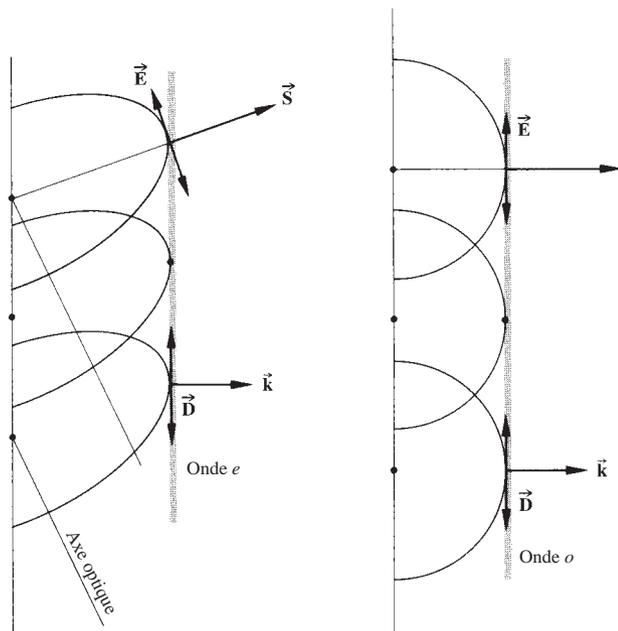


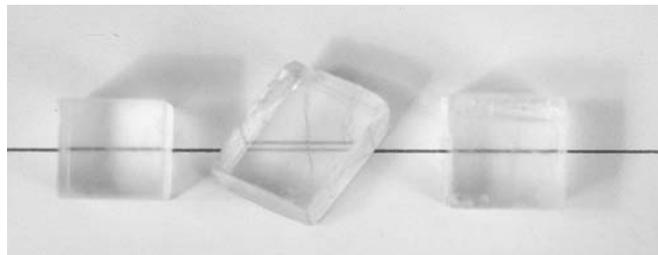
Figure 8.23 Orientations des vecteurs \vec{E} , \vec{D} , \vec{S} et \vec{k} .

toujours \vec{D} qui finit par être dans l'enveloppe ou dans le front d'onde plan composite à l'intérieur du cristal (figure 8.23).

8.4.2 Cristaux biréfringents

Les cristaux *cubiques*, tels que le chlorure de sodium (c'est-à-dire le sel), ont leurs atomes disposés de manière assez simple et très symétrique. (Il y a quatre axes de symétrie d'ordre 3, chacun allant d'un sommet au sommet opposé, contrairement à la calcite qui n'en a qu'un.) La lumière qui provient d'un point source, à l'intérieur d'un tel cristal, va se propager uniformément dans toutes les directions comme une onde sphérique. Comme pour les solides amorphes, il n'y aura pas de direction privilégiée dans le matériau, qui aura un indice de réfraction unique et sera *optiquement isotrope* (voir la photo). Dans ce cas, tous les ressorts de l'oscillateur que nous avons pris comme modèle seront bien sûr identiques.

Les cristaux appartenant aux systèmes *hexagonal*, *tétragonal* et *trigonal* ont leurs atomes disposés de manière à ce que la lumière qui se propage dans une direction quelconque rencontre une structure asymétrique. De telles substances sont optiquement anisotropes et biréfringentes. L'axe optique correspond à une direction autour de laquelle les atomes sont disposés



Cristaux de chlorure de potassium, de carbonate de calcium (calcite) et de chlorure de sodium (sel de table). Seule la calcite produit une double image. C'est pour cela que la calcite est dite biréfringente. (Photo E.H.)

symétriquement. Des cristaux ne possédant qu'une seule direction de ce type sont *uniaxiaux*.

Une source ponctuelle de lumière naturelle, située dans l'un de ces cristaux, crée des ondelettes O sphériques et des ondelettes E ellipsoïdales. C'est l'orientation du champ par rapport à l'axe optique qui détermine les vitesses de propagation de ces ondelettes. Le champ \vec{E} de l'onde O est partout normal à l'axe optique, et il se déplace donc à une vitesse v_{\perp} dans toutes les directions. De même, la vitesse de l'onde E n'est égale à v_{\perp} que dans la direction de l'axe optique (figure 8.22), le long de laquelle elle est tangente à l'onde O. Perpendiculairement à cette direction, \vec{E} est parallèle à l'axe optique, et cette partie de l'onde secondaire se propage à une vitesse v_{\parallel} (figure 8.24). Les matériaux uniaxiaux ont deux indices de réfraction principaux, $n_o \equiv c/v_{\perp}$ et $n_e \equiv c/v_{\parallel}$ (Problème 8.36), comme on le voit dans le Tableau 8.1.

La différence $\Delta n = (n_e - n_o)$ est une mesure de la biréfringence, et c'est pourquoi on l'appelle souvent la **biréfringence**. Pour la calcite, $v_{\parallel} > v_{\perp}$, $(n_e - n_o) = -0,172$, ce qui fait d'elle un cristal *uniaxe négatif*. En comparaison, il y a d'autres cristaux, tels que le quartz (cristal de SiO_2) et la glace, pour lesquels $v_{\perp} > v_{\parallel}$. En conséquence, les ondes secondaires E ellipsoïdales sont incluses dans les ondes secondaires O sphériques, comme on le voit sur la figure 8.25. (Le quartz est optiquement actif et, pour cette raison, un peu plus compliqué.) Dans ce cas, $(n_e - n_o)$ est positif et le cristal est *uniaxe positif*.

Les autres systèmes cristallographiques, orthorhombique, monoclinique et triclinique, ont deux axes optiques et sont appelés biaxes. Ces cristaux, tels que le mica $[\text{KH}_2\text{Al}_3(\text{SiO}_4)_3]$, ont trois indices de réfraction principaux différents. Chaque série de ressorts, dans le modèle utilisé, serait alors différent. La biréfringence des cristaux biaxes est définie par la différence entre le plus grand et le plus petit de ces indices.

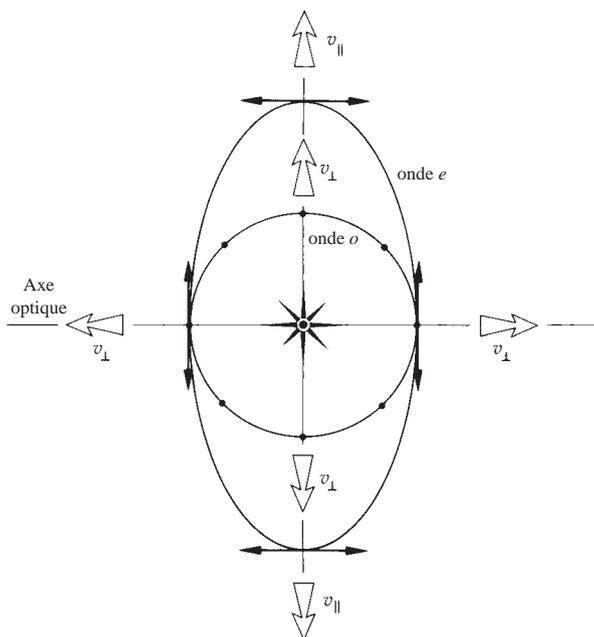


Figure 8.24 Ondelettes dans un cristal uniaxe négatif. Les flèches et les points représentent respectivement les champs \vec{E} des ondes extraordinaires et ordinaires. Le champ \vec{E} de l'onde O est, en tout point, perpendiculaire à l'axe optique.

8.4.3 Polariseurs biréfringents

Il va maintenant être facile, au moins conceptuellement, de fabriquer un polariseur biréfringent linéaire. Un grand nombre de procédés ont été proposés pour séparer les ondes E des ondes O, tous reposant sur le fait que $n_e \neq n_o$.

Le polariseur biréfringent le plus célèbre a été mis au point en 1828 par le physicien écossais William Nicol (1768-1851).

Tableau 8.1 Indices de réfraction de quelques cristaux uniaxes biréfringents ($\lambda_0 = 589,3 \text{ nm}$)

Cristal	n_o	n_e
Tourmaline	1,669	1,638
Calcite	1,6584	1,4864
Quartz	1,5443	1,5534
Nitrate de sodium	1,5854	1,3369
Glace	1,309	1,313
Rutile (TiO_2)	2,616	2,903

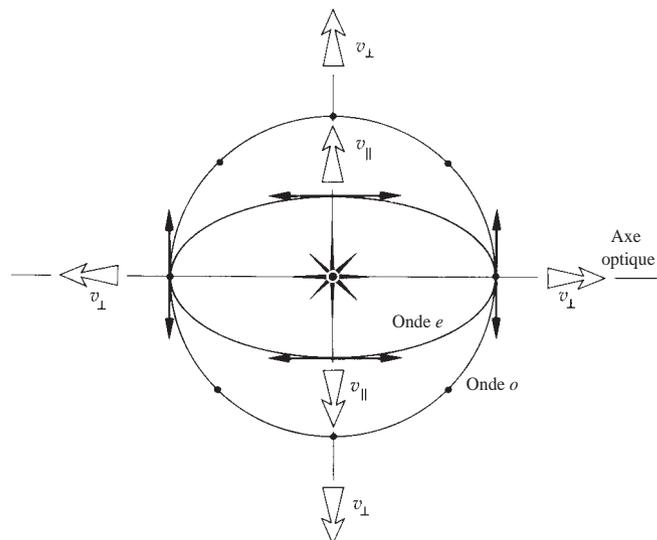


Figure 8.25 Ondelettes dans un cristal uniaxe positif. Les flèches et les points représentent les champs \vec{E} des ondes extraordinaires et ordinaires, respectivement. Le champ \vec{E} de l'onde O est, en tout point, perpendiculaire à l'axe optique.

Le *prisme de Nicol* est avant tout d'intérêt historique, ayant été remplacé depuis longtemps par d'autres polariseurs plus performants. Pour le décrire succinctement, disons qu'on fabrique ce dispositif en polissant les extrémités (de 71° à 68° ; voir figure 8.20) d'un rhomboèdre de calcite suffisamment long et fin; après avoir coupé le rhomboèdre suivant un plan diagonal, on polit les deux parties et l'on les fixe ensemble avec du baume du Canada (figure 8.26). Le baume est transparent et a un indice de 1,55, presque à mi-chemin entre n_e et n_o . Lorsque le faisceau incident entre dans le « prisme », les rayons E et O se séparent et arrivent sur la couche de baume. L'angle critique sur l'interface baume-calcite est, pour les rayons O, d'à peu près 69° (Problème 8.38). Les rayons O (entrant dans un cône étroit d'environ 28°) seront totalement réfléchis à l'intérieur puis absorbés par une couche de peinture noire sur les côtés du rhomboèdre. Le rayon E sort inchangé, au moins dans le visible, si ce n'est un décalage latéral (le baume du Canada absorbe dans l'ultraviolet).

Le *polariseur de Glan-Foucault* (figure 8.27) ne contient pas autre chose que de la calcite, qui est transparente d'environ 5000 nm, dans l'infrarouge, à 230 nm, dans l'ultraviolet. On peut donc l'utiliser sur une large gamme spectrale. Les rayons incidents arrivent normalement à la face d'entrée, et \vec{E} peut être décomposé en composantes qui sont soit totalement

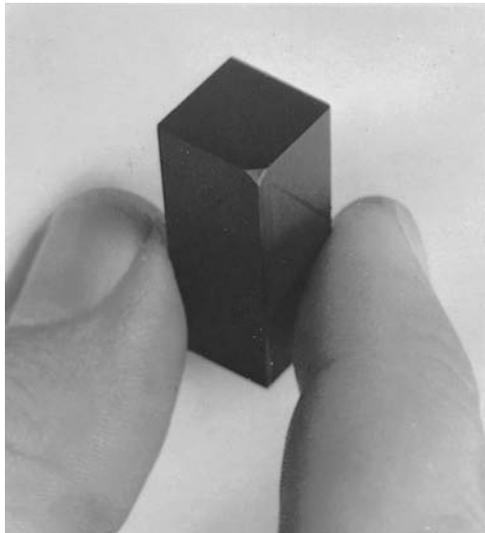
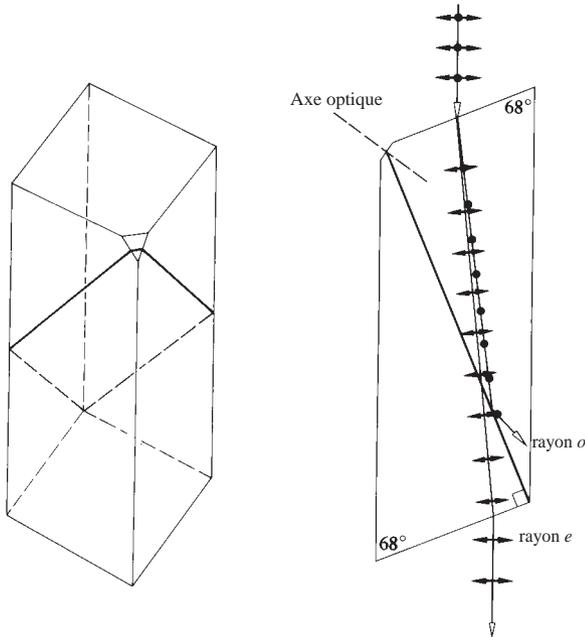


Figure 8.26 Le prisme de Nicol. Le chanfrein sur le coin non saillant est perpendiculaire à l'axe optique. (Photo E.H.)

parallèles soit perpendiculaires à l'axe optique. Les deux rayons traversent la première section de calcite sans aucune déviation (on reviendra plus tard sur ce point quand on abordera des retardateurs). Si l'angle d'incidence sur l'interface calcite-air est θ , on doit simplement s'arranger pour que

$n_e < 1/\sin \theta < n_o$ afin que les rayons O soient totalement réfléchis à l'intérieur (mais pas les rayons E). Si les deux prismes sont collés (on utilise de la glycérine ou de l'huile minérale dans l'ultraviolet) et que l'angle d'interface est judicieusement modifié, le dispositif est appelé un *polariseur Glan-Thompson*. Son champ utile est d'environ 30° , contre environ 10° pour le Glan-Foucault, ou Glan-Air comme on l'appelle souvent. Ce dernier a cependant l'avantage de supporter des niveaux de puissances bien plus importants, comme c'est souvent le cas avec les lasers. Par exemple, alors que l'éclairement maximal d'un Glan-Thompson est d'à peu près 1 W/cm^2 (en continu), un Glan-Air typique a une limite supérieure de 100 W/cm^2 (en continu). La différence est due à la détérioration de la colle à l'interface (et de la peinture absorbante si l'on en utilise).

Le prisme de *Wollaston* est un diviseur de faisceaux polarisant, parce qu'il laisse passer les deux composantes polarisées orthogonalement. Il peut être en calcite ou en quartz, et se présente sous la forme indiquée en figure 8.28. Les deux composantes E et O se séparent à l'interface (diagonale). À cet endroit, le rayon E devient un rayon O, ce qui change l'indice en conséquence. Pour la calcite, $n_e < n_o$, et le rayon O émergent se rapproche de la normale. De la même manière, le rayon O, dont le champ est initialement perpendiculaire à l'axe optique, devient un rayon E dans la partie de droite. Cette fois, dans la calcite, le rayon E s'éloigne de la normale à l'interface (Problème 8.39). L'angle séparant les deux faisceaux émergents est déterminé par l'angle de coin du prisme, θ . On peut trouver dans le commerce des prismes dont les séparations sont comprises entre 15° et 45° environ, sous formes collées (par exemple avec de l'huile de ricin ou de la glycérine) ou non (i.e. avec un contact optique), suivant les spécifications en domaine spectral et en tenue au flux.

8.5 Diffusion et polarisation

La lumière du soleil qui arrive dans l'atmosphère est diffusée dans toutes les directions par les molécules d'air (paragraphe 4.2). Sans l'atmosphère, le ciel diurne serait aussi noir que le vide de l'espace, un point que l'on a bien vu avec les photographies lunaires d'Apollo, et l'on ne serait sensible qu'à la lumière directe. Avec l'atmosphère, l'extrémité rouge du visible n'est presque pas déviée, tandis que l'extrémité bleue ou violette est fortement diffusée. Cette forte diffusion à basse longueur d'onde atteint l'observateur lorsqu'il regarde dans de nombreuses directions, rendant le ciel bleu et brillant (figure 8.29).

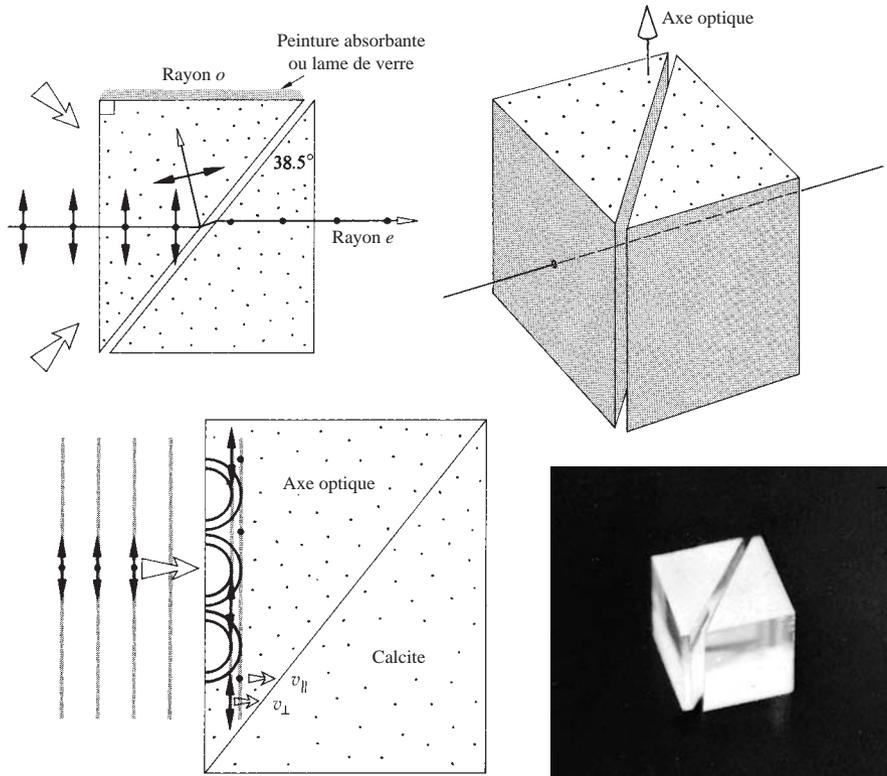


Figure 8.27 Prisme de Glan-Foucault.
(Photo E.H.)

La fumée qui s'échappe de l'extrémité d'une cigarette allumée est constituée de particules plus petites que la longueur d'onde moyenne du visible, ce qui la fait apparaître bleue quand on l'observe sur fond noir. Par contre, la fumée qui sort de la bouche d'un fumeur contient d'assez grosses gouttelettes d'eau et semble blanche. Chaque gouttelette est plus grande que les longueurs d'onde du visible et contient donc tellement d'oscillateurs qu'elle peut soutenir les processus ordinaires de réflexion et de réfraction, et ces effets ne sont pas spectralement sélectifs.

La lumière qui est réfléchiée et réfractée plusieurs fois par une gouttelette et qui finalement retourne vers l'observateur est donc également blanche. Cela se retrouve aussi dans la blancheur des petits grains de sel et de sucre, du brouillard, des nuages, du papier, des poudres, du verre dépoli et, de manière plus menaçante, dans le ciel typiquement blafard des villes polluées.

Les particules dont la taille est de l'ordre de grandeur d'une longueur d'onde (les atomes font environ une fraction de nanomètre de long) diffusent la lumière d'une façon assez spécifique. Une population nombreuse de ces particules, de même

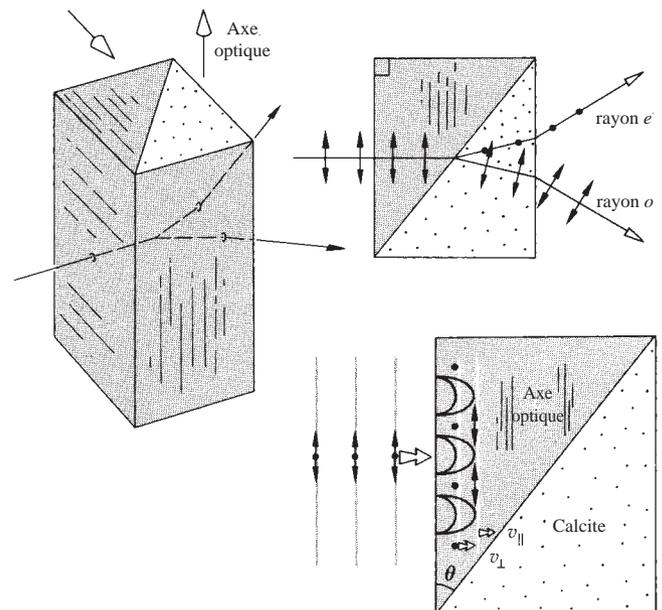


Figure 8.28 Prisme de Wollaston.



Un croissant de Terre vu dans le ciel de la Lune. (Photo NASA)

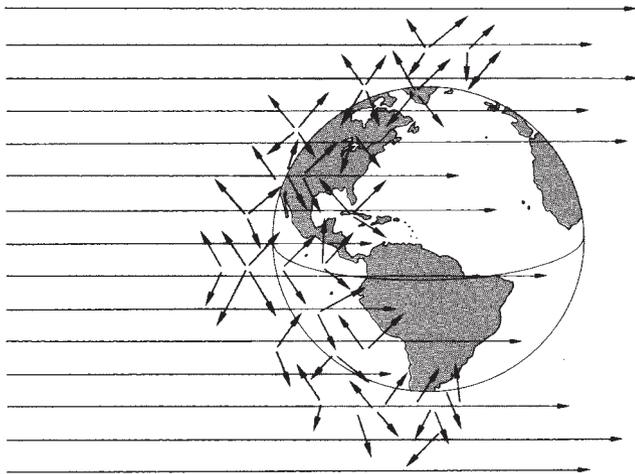


Figure 8.29 Diffusion de la lumière du ciel.

taille, peut donner lieu à une large gamme de couleurs. En 1883, l'île volcanique de Krakatoa, située dans le détroit de Sunda à l'ouest de Java, explosa dans une conflagration fantastique. De grandes quantités de fine poussière volcanique ont jailli dans l'atmosphère et ont dérivé au dessus de multiples régions de la Terre. Pendant quelques années après cette éruption, le Soleil et la Lune apparaissaient régulièrement

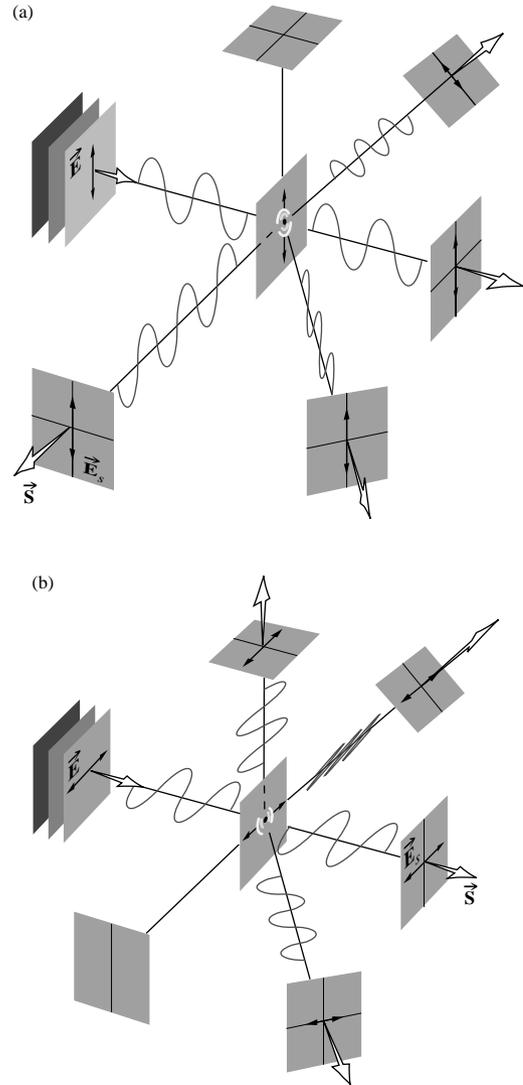


Figure 8.30 Diffusion par une molécule de la lumière polarisée.

bleus ou verts, et les levers et couchers de soleil étaient anormalement colorés.

8.5.1 Polarisation par diffusion

Imaginons une onde plane polarisée linéairement, qui est incidente sur une molécule d'air, comme sur la figure 8.30. L'orientation du vecteur champ électrique du rayonnement

diffusé (i.e. \vec{E}_s) suit le diagramme du dipôle, de sorte que \vec{E}_s , le vecteur de Poynting \vec{S} , et le dipôle oscillant sont coplanaires (figure 3.31). Les vibrations provoquées dans l'atome sont parallèles au champ \vec{E} de l'onde incidente et sont donc perpendiculaires à la direction de la propagation. On rappelle, une fois de plus, que le dipôle n'émet pas le long de son axe. À présent, si l'onde incidente n'est pas polarisée, elle peut être représentée par deux états \mathcal{P} orthogonaux et incohérents ; auquel cas la lumière diffusée (figure 8.31) est équivalente à une superposition des conditions vues en figure 8.30, *a* et *b*. Manifestement, la lumière diffusée vers l'avant est complètement non polarisée ; lorsqu'on s'éloigne de cet axe, elle devient partiellement polarisée, puis de plus en plus polarisée lorsque l'angle augmente. Lorsque la direction d'observation est normale au faisceau primaire, la lumière diffusée est devenue complètement polarisée linéairement.

On peut facilement vérifier ces conclusions avec un Polaroid. Repérons le soleil et observons une zone du ciel qui est orientée à 90° des rayons solaires. Cette portion du ciel sera partiellement polarisée normalement aux rayons (voir photo). Elle n'est pas totalement polarisée, notamment à cause des anisotropies moléculaires, de la présence de grandes particules dans l'air et de l'effet dépolarisant des diffusions multiples. On peut illustrer la dernière condition en plaçant un morceau de papier paraffiné entre deux Polaroids croisés (voir photo).

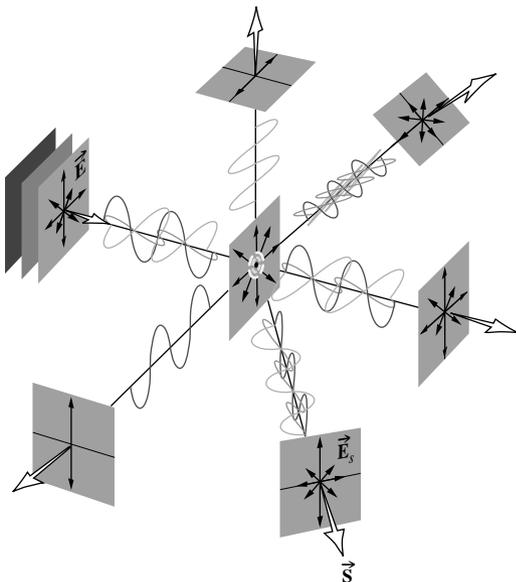
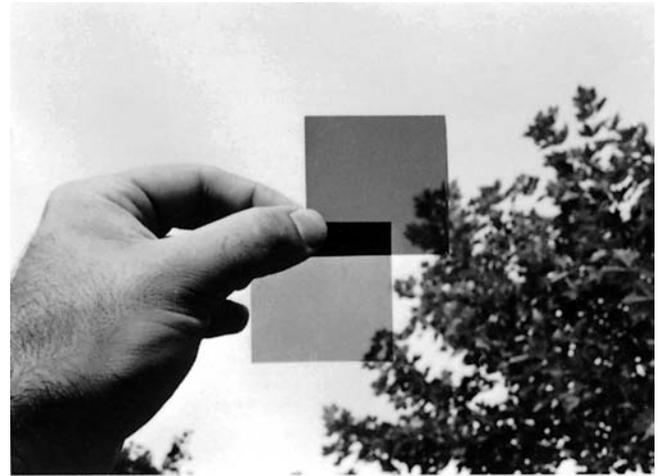


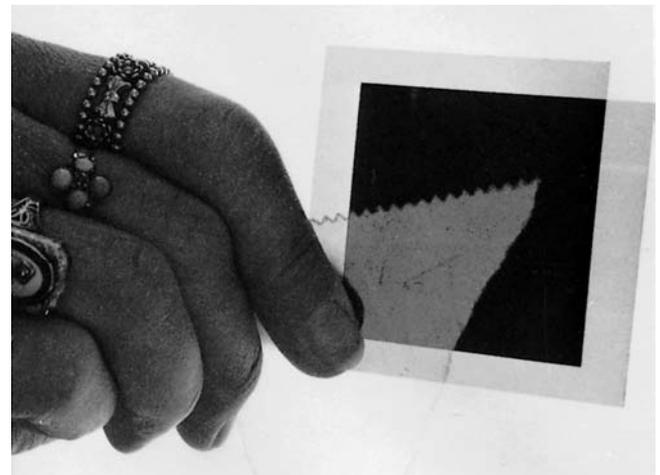
Figure 8.31 Diffusion par une molécule de la lumière non polarisée.

Parce que la lumière subit beaucoup de diffusions et plusieurs réflexions à l'intérieur du papier paraffiné, un oscillateur donné pourra « voir » la superposition d'un grand nombre de champs \vec{E} indépendants les uns des autres. L'émission qui en résulte est en majeure partie dépolarisée.

Comme expérience finale, mettons quelques gouttes de lait dans un verre d'eau et éclairons (perpendiculairement à l'axe) en utilisant une puissante lampe de poche. La solution apparaîtra d'un blanc bleuté en diffusion et orange en visée directe, ce



Une paire de polariseurs croisés. Le Polaroid du haut est bien plus foncé que l'autre, indiquant la polarisation partielle de la lumière du ciel. (Photo E.H.)



Un morceau de papier paraffiné entre deux polariseurs croisés. (Photo E.H.)

qui indique que le mécanisme opérant est la diffusion de Rayleigh. De plus, la lumière diffusée sera partiellement polarisée.

En se basant sur les mêmes idées, Charles Glover Barkla (1877-1944) établit en 1906, la nature transverse du rayonnement X en montrant que les rayons X pouvaient être polarisés dans certaines directions du fait de la diffusion par la matière.

8.6 Polarisation par réflexion

L'un des moyens le plus souvent utilisé pour avoir de la lumière polarisée est le procédé omniprésent de réflexion dans un milieu diélectrique. Tous les reflets, qu'ils proviennent d'une fenêtre, d'une feuille de papier, d'une tête chauve, du téléphone, d'une boule de billard ou de la jaquette d'un livre sont en principe partiellement polarisés.

Le premier à avoir étudié cet effet fut Étienne Malus, en 1808. L'académie de Paris avait offert un prix pour une théorie mathématique de la double réfraction ; Malus entreprit d'étudier le problème. Un soir, il était debout à la fenêtre de sa maison, rue d'Enfer, et examinait un cristal de calcite. Le soleil allait se coucher, et Malus voyait son image par réflexion sur les fenêtres du Palais du Luxembourg, non loin de là. À un moment, il leva le cristal et regarda la réflexion du Soleil à travers. À son étonnement, il vit l'une des images doubles disparaître alors qu'il tournait le cristal. Après que le soleil se soit couché, il continua à vérifier ses observations pendant la nuit avec la lumière d'une bougie réfléchie sur des surfaces d'eau et de verre*. L'importance de la biréfringence et la nature réelle de la lumière polarisée devenaient claires pour la première fois. À cette époque, il n'existait aucune explication satisfaisante sur la polarisation dans le contexte de la théorie ondulatoire. Durant les treize années qui suivirent, il fallut le travail de nombreuses personnes, notamment Thomas Young et Augustin Fresnel, pour arriver à une représentation de la lumière sous la forme d'une sorte de vibration transversale (noublions pas que cela précédait la théorie électromagnétique de la lumière d'environ 40 ans).

Le modèle de l'électron-oscillateur fournit une image remarquablement simple de ce qui se passe lorsque la lumière

*Essayer avec la flamme d'une bougie et un morceau de verre. Tenir le verre à $\theta_p \approx 56^\circ$ pour que l'effet soit le plus prononcé. À incidence presque rasante, les deux images sont brillantes, et aucune ne disparaît lorsque l'on fait tourner le cristal ; Malus eut donc la chance de regarder la fenêtre du Palais du Luxembourg avec le bon angle.

est polarisée en réflexion. Malheureusement, cette représentation n'est pas complète, car elle ne prend pas en compte le comportement des matériaux magnétiques non conducteurs.† Malgré cela, considérons une onde plane polarisée linéairement avec son champ \vec{E} perpendiculaire au plan d'incidence (figure 8.32). L'onde est réfractée à l'interface et pénètre dans le milieu avec un angle de réfraction θ_r . Son champ électrique met en mouvement les électrons liés du milieu, dans ce cas, perpendiculairement au plan d'incidence, et ceux-ci réémettent à leur tour. Une partie de cette énergie réémise apparaît sous la forme d'une onde réfléchie. Il est désormais clair que, selon la géométrie et le diagramme de rayonnement du dipôle, les ondes réfléchie et réfractée doivent être dans un état \mathcal{P} normal au plan incident.* Par contre, si le champ entrant \vec{E} est dans le plan d'incidence, les électrons-oscillateurs proches de la surface vont vibrer sous l'influence de l'onde réfractée, comme on le voit sur la figure 8.32b. On peut voir qu'une chose assez intéressante arrive au flux réfléchi : il doit être à présent relativement faible parce que la direction des rayons réfléchis forme un petit angle θ avec l'axe du dipôle. Si on peut faire en sorte que $\theta = 0$, ou, de manière équivalente, que $\theta_r + \theta_t = 90^\circ$, l'onde réfléchie disparaîtrait totalement. *Dans ces circonstances, pour une onde non polarisée incidente, composée de deux états \mathcal{P} orthogonaux et incohérents, seule la composante polarisée perpendiculaire au plan d'incidence, et donc parallèle à la surface, sera réfléchie.* L'angle d'incidence particulier, pour lequel cette situation se produit, est désigné par θ_p et appelé **angle de polarisation** ou **angle de Brewster**, avec $\theta_p + \theta_t = 90^\circ$. D'où, selon la loi de Snell-Descartes :

$$n_i \sin \theta_p = n_t \sin \theta_t$$

et comme $\theta_t = 90^\circ - \theta_p$, il s'ensuit que :

$$n_i \sin \theta_p = n_t \cos \theta_p$$

$$\text{et} \quad \tan \theta_p = n_t/n_i \quad (8.25)$$

Il s'agit de la **loi de Brewster**, qui porte le nom de celui qui l'a découverte empiriquement, Sir David Brewster (1781-1868),

† W. T. Doyle, « Scattering Approach to Fresnel's Equations and Brewster's Law », *Am. J. Phys.* **53**, 463 (1985).

*L'angle de réflexion est déterminé par la disposition géométrique des diffuseurs, comme on le verra au paragraphe 10.2.7. Les ondelettes diffusées s'associent en général constructivement dans une seule direction, produisant ainsi un rayon réfléchi à un angle égal à celui du rayon incident.

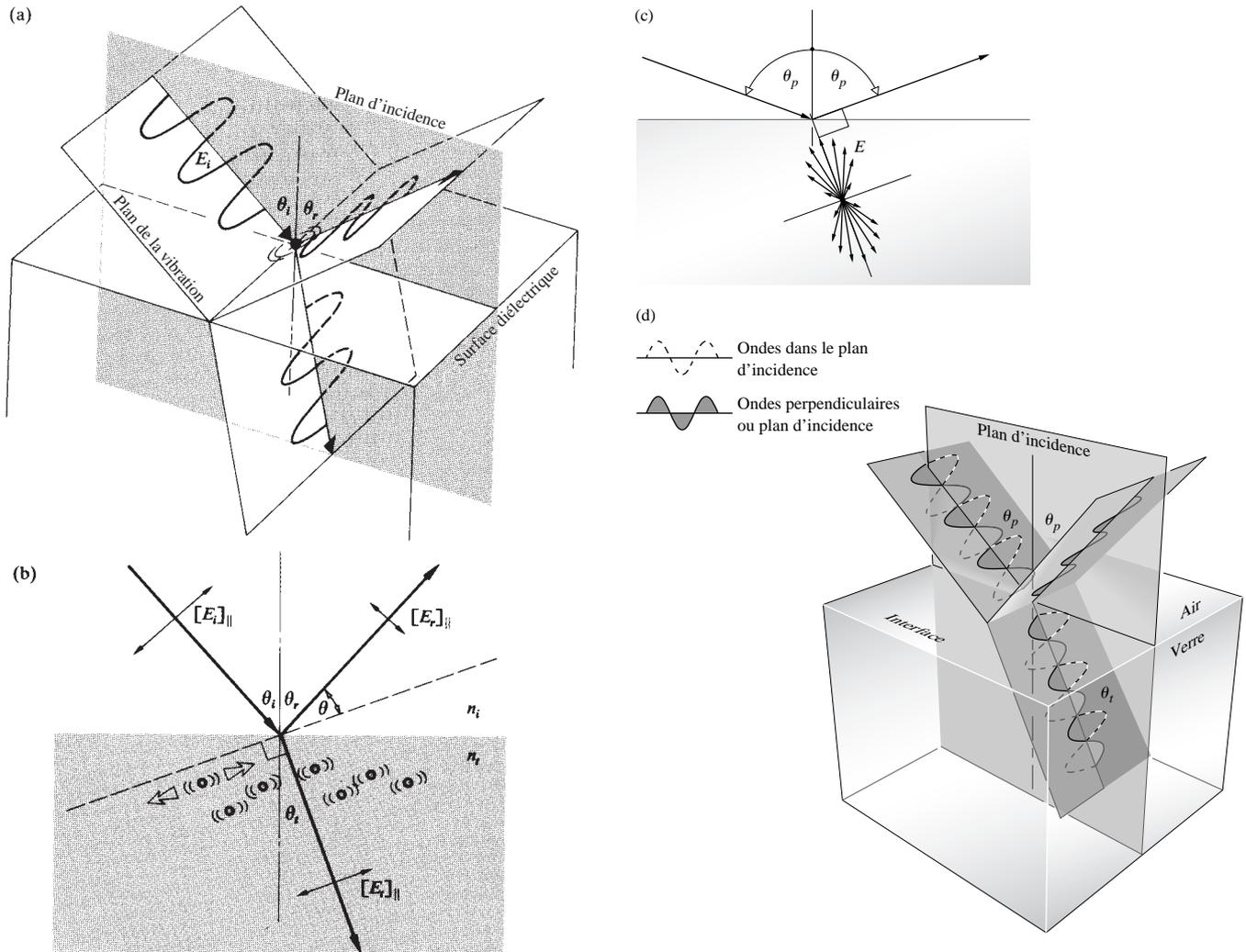


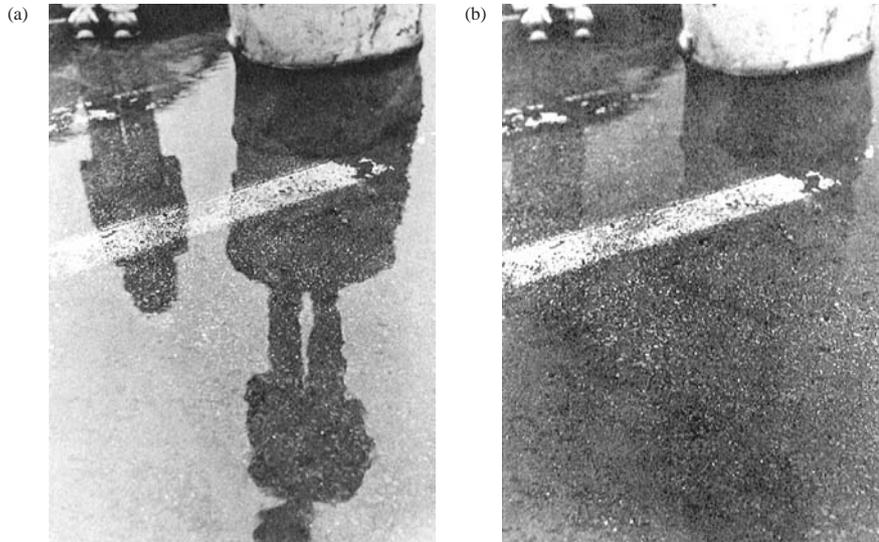
Figure 8.32 (a) Onde se réfléchissant et se réfractant sur une interface. (b) Électrons-oscillateurs et loi de Brewster. (c) Diagramme de rayonnement du dipôle. (d) Polarisation de la lumière apparaissant lors d'une réflexion par un diélectrique, tel que le verre, l'eau ou le plastique. À θ_p , le faisceau réfléchi est dans l'état \mathcal{P} perpendiculaire au plan d'incidence. Le faisceau transmis est fortement polarisé dans l'état \mathcal{P} parallèle au plan d'incidence et faiblement polarisé dans l'état \mathcal{P} perpendiculaire au plan d'incidence ; il est partiellement polarisé.

professeur de physique à l'université de St-Andrews et, bien sûr, l'inventeur du kaléidoscope.

Lorsque le faisceau incident est dans l'air $n_i = 1$, et si le milieu transparent est du verre, auquel cas $n_t \approx 1,5$, l'angle de polarisation est $\approx 56^\circ$. De même, si un faisceau non polarisé frappe la surface d'un étang ($n_t \approx 1,33$ pour H_2O) avec un angle de 53° , le faisceau réfléchi sera complètement polarisé avec son champ \vec{E} perpendiculaire au plan d'incidence ou, si

l'on veut, parallèle à la surface de l'eau (voir la photo en page 364). Cela suggère un moyen pratique de repérer l'axe de transmission de polariseurs non marqués ; il suffit d'une lame de verre ou d'un étang.

Le problème que l'on rencontre à partir de cette propriété si l'on veut fabriquer un polariseur efficace tient au fait qu'on obtient un faisceau réfléchi, même s'il est totalement polarisé, faible, et un faisceau transmis fort, mais qui n'est



La lumière qui se réfléchit d'une flaqué est partiellement polarisée. (a) Lorsqu'on la regarde à travers un filtre Polaroid dont l'axe de transmission est parallèle au sol, on voit très bien cette réflexion. (b) Lorsque l'axe de transmission du Polaroid est perpendiculaire à la surface de la flaqué, cette réflexion disparaît en grande partie. (Photo Martin Seymour.)

que partiellement polarisé. Un schéma, illustré en figure 8.33, est souvent dénommé **polariseur à « pile de glaces » ou à empilement de lames**. Il a été inventé par Dominique F. J. Arago en 1812. On peut fabriquer ce genre de dispositif avec des lames de verre dans le visible, de chlorure d'argent dans l'infrarouge, et de quartz ou vycor dans l'ultraviolet. Il est facile de construire un arrangement rudimentaire de ce type avec une douzaine de lames de microscope (on étudiera au chapitre 9, les belles couleurs qui apparaissent lorsque les lames sont en contact).

Le cube séparateur de polarisation utilise la même idée pour produire deux faisceaux dont les polarisations sont orthogonales et qui se propagent à 90° l'un de l'autre (figure 8.34).

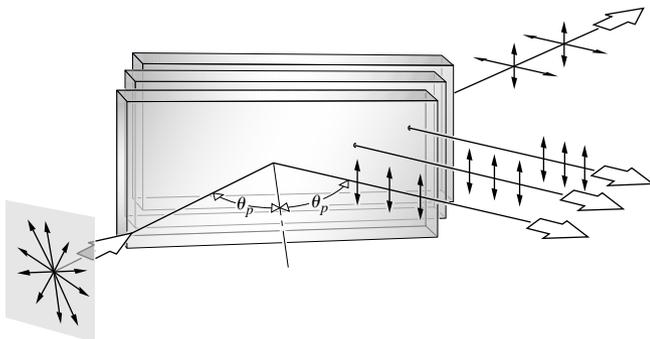


Figure 8.33 Polariseur obtenu avec un empilement de lames.

L'hypoténuse de l'un des deux prismes est avec des couches minces diélectriques transparents. Parce qu'il n'y a pas, ou peu, d'absorption, le dispositif est bien adapté aux applications de faisceau laser où l'on recherche une bonne tenue au flux et une faible distorsion du front d'onde transmis.

8.6.1 Une application des lois de Fresnel

Dans le paragraphe 4.6.2 nous avons obtenu un ensemble de formules, appelées équations de Fresnel, qui décrivent les effets d'une onde plane électromagnétique incidente sur l'interface

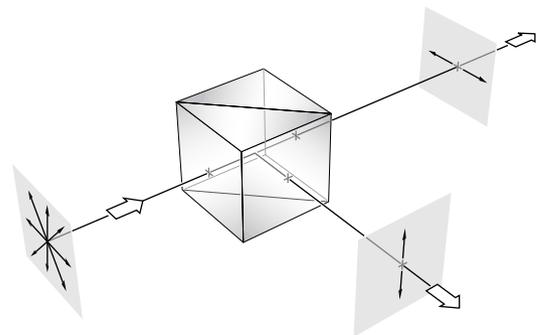


Figure 8.34 Un cube polarisant comporte un traitement de couches minces diélectriques sur sa face diagonale. La réflexion de cette structure polarise la lumière incidente, comme le ferait un empilement de lames.

entre deux milieux diélectriques différents. Ces équations établissent un rapport entre l'amplitude des champs réfléchis et transmis et l'amplitude incidente en fonction des angles d'incidence θ_i et de réfraction θ_r . Pour une lumière linéaire avec le champ \vec{E} parallèle au plan d'incidence, nous avons défini le *coefficient de réflexion en amplitude* $r_{\parallel} \equiv [E_{0r}/E_{0i}]_{\parallel}$, c'est-à-dire, le rapport entre l'amplitude du champ électrique réfléchi et l'amplitude du champ électrique incident. De même, lorsque le champ électrique est normal au plan d'incidence, nous avons $r_{\perp} \equiv [E_{0r}/E_{0i}]_{\perp}$. Le rapport correspondant en éclairissement (les faisceaux incident et réfléchi ont la même section transversale) est le facteur de réflexion, et puisque l'éclairissement est proportionnel au carré de l'amplitude du champ,

$$R_{\parallel} = r_{\parallel}^2 = [E_{0r}/E_{0i}]_{\parallel}^2 \quad \text{and} \quad R_{\perp} = r_{\perp}^2 = [E_{0r}/E_{0i}]_{\perp}^2$$

En élevant au carré les équations de Fresnel appropriées, on obtient :

$$R_{\parallel} = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_r)}{\tan^2(\theta_i + \theta_r)} \quad (8.26)$$

et

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_r)}{\sin^2(\theta_i + \theta_r)} \quad (8.27)$$

Alors que R_{\perp} n'est jamais égal à zéro, R_{\parallel} est nul lorsque le dénominateur est infini, c'est-à-dire, quand $\theta_i + \theta_r = 90^\circ$. Le facteur de réflexion en polarisation parallèle au plan d'incidence, disparaît ; $E_{r\parallel} = 0$ et le faisceau est complètement transmis. C'est l'essence même de la loi de Brewster.

Si la lumière incidente n'est pas polarisée, on peut la représenter par deux états \mathcal{P} de même amplitude, orthogonaux et incohérents. À ce propos, le fait qu'ils soient d'égales amplitudes signifie que la quantité d'énergie est la même dans les deux états de polarisation (i.e. $I_{i\parallel} = I_{i\perp} = I_i/2$), ce qui est raisonnable. Ainsi :

$$I_{r\parallel} = I_{r\parallel} I_i / 2 I_i = R_{\parallel} I_i / 2$$

et de la même façon, $I_{r\perp} = R_{\perp} I_i / 2$. Le facteur de réflexion de la lumière naturelle, $R = I_r / I_i$, est donc donné par :

$$R = \frac{I_{r\parallel} + I_{r\perp}}{I_i} = \frac{1}{2}(R_{\parallel} + R_{\perp}) \quad (8.28)$$

La figure 8.35 est la représentation des Eqs. (8.26), (8.27), (8.28) dans le cas particulier où $n_i = 1$ et $n_t = 1,5$. La courbe intermédiaire, qui correspond à la lumière naturelle, montre

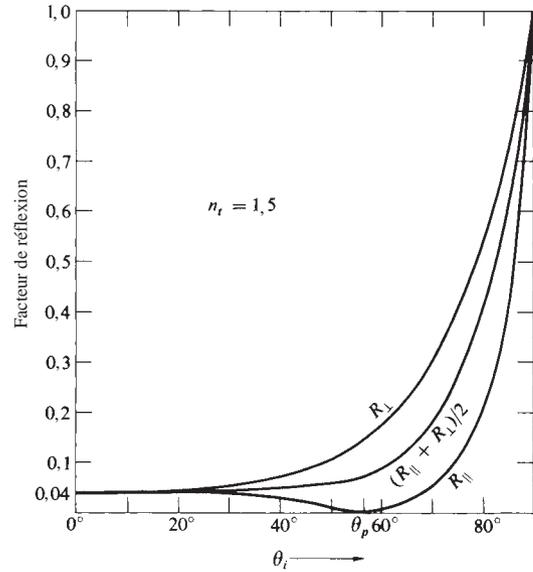


Figure 8.35 Facteur de réflexion en fonction de l'angle d'incidence.

que seulement 7,5 % de la lumière incidente est réfléchié quand $\theta_i = \theta_p$. La lumière transmise est alors manifestement partiellement polarisée. Lorsque $\theta_i \neq \theta_p$ les ondes transmise et réfléchié sont toutes les deux partiellement polarisées.

Il est souvent utile de s'appuyer sur le concept de **degré de polarisation** V , défini par :

$$V = \frac{I_p}{I_p + I_n} \quad (8.29)$$

Où I_p et I_n sont les flux correspondant respectivement à la partie polarisée et « non polarisée » ou naturelle de la lumière considérée. Par exemple, si $I_p = 4 \text{ W/m}^2$ et $I_n = 6 \text{ W/m}^2$, alors $V = 40 \%$ et le faisceau est partiellement polarisé. Avec de la lumière « non polarisée » $I_p = 0$ et manifestement $V = 0$, alors qu'à l'opposé, si $I_n = 0$, $V = 1$ et la lumière est complètement polarisée ; ainsi $0 \leq V \leq 1$. On est souvent confronté à de la lumière quasi monochromatique polarisée partiellement, linéairement. Dans ce cas, si l'on fait tourner un analyseur dans le faisceau, il y aura une orientation pour laquelle le flux transmis sera maximal (I_{\max}), et perpendiculairement à cela, une direction pour laquelle il sera minimal (I_{\min}). Naturellement, $I_p = I_{\max} - I_{\min}$, et donc :

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (8.30)$$

Notons que V est réellement une propriété du faisceau, qui peut être partiellement ou complètement polarisé avant d'entrer en contact avec n'importe quel polariseur.

8.7 Retardateurs

Nous considérons à présent une catégorie d'éléments optiques, appelés **retardateurs**, qui servent à changer la polarisation d'une onde incidente. Le principe de fonctionnement d'un retardateur est assez simple, dans la mesure où il est chargé d'induire un retard de phase connu sur l'une des composantes \mathcal{P} d'un rayonnement par rapport à l'autre. En sortie du retardateur, la phase relative des deux composantes est différente de ce qu'elle était en entrée, et donc, l'état de polarisation est, lui aussi, différent. Lorsque nous aurons développé le concept du retardateur, nous pourrons convertir n'importe quelle polarisation donnée en une autre et, en faisant cela, créer des polariseurs circulaires et elliptiques.

8.7.1 Lames de phase et rhomboédres

On rappelle qu'une onde plane monochromatique incidente sur un cristal uniaxe, tel que la calcite, est généralement séparée en deux, et qu'elle en ressort sous forme de deux faisceaux : l'un ordinaire et l'autre extraordinaire. Par contre, on peut tailler et polir un cristal de calcite afin que son axe optique soit normal aux faces avant et arrière (figure 8.36). Une onde plane en incidence normale peut uniquement avoir son champ \vec{E} perpendiculaire à l'axe optique. Les ondes secondaires sphériques et elliptiques seront tangentes les unes aux autres dans la direction de l'axe optique. Les ondes O et E , qui sont les enveloppes de ces ondes, coïncident, et une seule onde plane non déviée passera à travers le cristal ; il n'y a pas de changement de phase relative et pas d'images doubles*.

À présent, faisons en sorte que la direction de l'axe optique soit parallèle aux faces avant et arrière, comme sur la figure 8.37. Si le champ \vec{E} d'une onde plane monochromatique incidente a une composante parallèle et une autre perpendiculaire

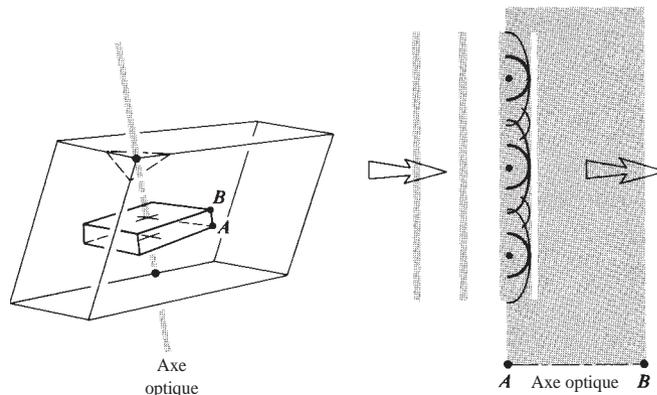


Figure 8.36 Une lame de calcite coupée perpendiculairement à l'axe optique.

à l'axe optique, deux ondes planes séparées vont se propager à travers le cristal. Puisque $v_{\parallel} > v_{\perp}$, $n_o > n_e$, et les ondes E vont se déplacer dans le milieu plus rapidement que les ondes O . Après avoir traversé une lame d'épaisseur d , l'onde électromagnétique résultante est la superposition des ondes E et O , qui ont à présent une différence de phase relative $\Delta\phi$. Gardons à l'esprit que ce sont des ondes harmoniques de même fréquence et avec des champs \vec{E} orthogonaux. La différence de chemin optique, ou différence de marche, est donnée par :

$$\Lambda = d(n_o - n_e) \quad (8.31)$$

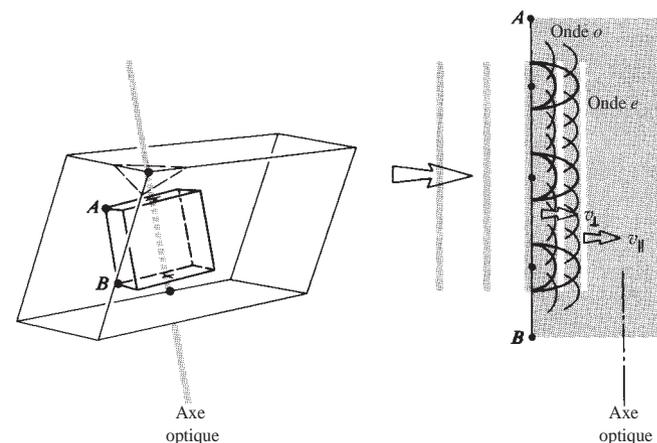


Figure 8.37 Une lame de calcite coupée parallèlement à l'axe optique.

*Si on dispose d'un morceau de calcite rhomboédrique, déterminer le coin non saillant et orienter le cristal de façon à l'observer le long de la direction de l'axe optique, à travers l'une des faces. Les deux images vont converger jusqu'à se superposer complètement.

et comme $\Delta\varphi = k_0\Lambda$, la différence de phase en radians est donnée par :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d(|n_o - n_e|) \quad (8.32)$$

où λ_0 , comme d'habitude, est la longueur d'onde dans le vide (la forme contenant la valeur absolue de la différence d'indice est l'état le plus général). L'état de polarisation de la lumière émergente dépend manifestement des amplitudes des composantes du champ orthogonal incident et, bien sûr, de $\Delta\varphi$.

La lame onde

Si $\Delta\varphi$ est égal à 2π , la différence de marche est d'une longueur d'onde ; les ondes E et O sont à nouveau en phase, et la lame n'a pas d'effet sur la polarisation du faisceau monochromatique incident. Lorsque la *différence de phase* $\Delta\varphi$, que l'on appelle aussi déphasage, est de 360° , le dispositif est appelé lame onde. (Cela ne signifie pas que $d = \lambda$.) En général, la quantité $|n_o - n_e|$ de l'équation (8.32) varie peu en fonction de la longueur d'onde, et donc $\Delta\varphi$ varie à peu près en $1/\lambda_0$. Manifestement, une lame onde ne peut avoir cette propriété que pour une longueur d'onde particulière, et ces retardateurs sont chromatiques. Si on place un tel dispositif, avec une orientation quelconque, entre deux polariseurs linéaires croisés, il recevra de la lumière (dans ce cas, disons de la lumière blanche) qui sera totalement polarisée linéairement. Seule la longueur d'onde qui satisfait à l'équation (8.32) passera à travers le retardateur sans être affectée, pour être ensuite absorbée par l'analyseur. Toutes les autres longueurs d'onde vont subir un retard de phase quelconque et vont donc sortir de la lame onde sous des formes diverses de lumière elliptique. Une partie de la lumière incidente va traverser l'analyseur, émergant finalement avec la couleur complémentaire de celle qui aura disparu. On commet souvent l'erreur de croire qu'une lame onde se comporte comme si elle était isotrope à toutes les fréquences : ce n'est manifestement pas le cas.

Rappelons-nous que dans la calcite, l'onde qui se propage le plus vite est celle dont les vibrations du champ \vec{E} sont parallèles à l'axe optique, c'est-à-dire que $v_{\parallel} > v_{\perp}$. La direction de l'axe optique dans un retardateur uniaxe négatif est donc souvent appelée axe rapide, et la direction qui lui est perpendiculaire est celle de l'axe lent. Pour les cristaux uniaxes positifs, tels que le quartz, ces principes sont inversés, l'axe lent correspondant à l'axe optique.

On utilise souvent une lame onde pour éliminer des modifications inopportunes dans la polarisation d'un faisceau après traversée d'un système optique. Par exemple, un faisceau polarisé linéairement subira des déphasages à la réflexion sur un métal, ce qui le rendra polarisé elliptiquement. On peut corriger cet effet en faisant passer le faisceau au travers d'une lame onde légèrement inclinée par rapport à l'un ou l'autre de ses axes, le rapide ou le lent.

La lame demi-onde

Un retard de phase qui introduit une différence de phase relative de π radians ou de 180° entre les ondes E et O est une **lame demi-onde**. Supposons que le plan de vibration d'un faisceau polarisé linéairement incident sur une lame de phase fasse un angle arbitraire θ avec l'axe rapide de cette dernière, comme dans la figure 8.38. Dans un matériau négatif, l'onde E aura une vitesse supérieure (même v) et une plus grande longueur d'onde que l'onde O . Lorsque les ondes émergent de la lame, il y aura

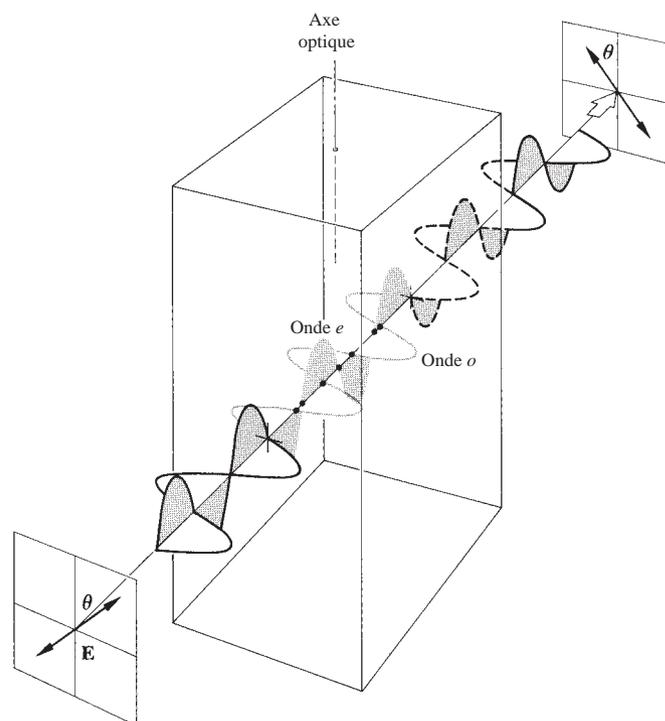


Figure 8.38 Lame demi-onde montrant comment un déphasage s'accumule dans la lame retardatrice.

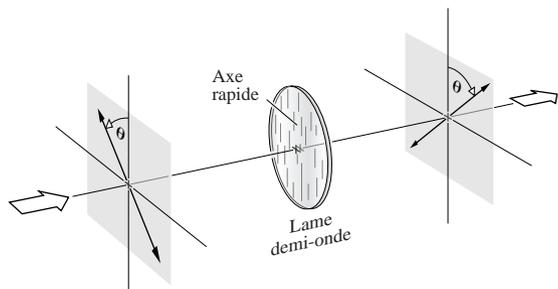


Figure 8.39 Une lame demi-onde fait tourner le plan de polarisation d'un angle total 2θ si la lumière incidente est polarisée linéairement avec un angle θ par rapport à l'axe rapide de la lame. Ici, on voit que le plan de vibration de la lumière incidente est situé dans les quadrants 1 et 3 et qu'il émerge dans les quadrants 2 et 4.

une différence de marche de $\lambda_0/2$ (c'est-à-dire un déphasage de π radians), ayant pour effet une rotation de 2θ du champ \vec{E} (figure 8.39). En fait, les lames demi-ondes sont parfois appelées rotateurs de polarisation pour cette seule raison. Si l'on revient à la figure 8.7, il est évident qu'une lame demi-onde va, de la même manière, faire basculer la lumière elliptique. De plus, elle va inverser le sens des polarisations circulaire et elliptique, changeant la gauche en droite et vice versa.

Au fur et à mesure où les ondes E et O progressent à travers une lame de phase, leur différence de phase relative $\Delta\varphi$ augmente, et l'état de polarisation de l'onde change donc graduellement d'un point à l'autre de la lame. On peut considérer la figure 8.7 comme un échantillon de quelques-uns de ces états à un instant précis en différents endroits. Évidemment, si l'épaisseur du matériau est telle que :

$$d(|n_o - n_e|) = (2m + 1)\lambda_0/2$$

où $m = 0, 1, 2, \dots$, il fonctionnera comme une lame demi-onde ($\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi$, etc.).

Bien que son comportement soit simple à visualiser, la calcite n'est pas très utilisée pour faire des lames de phase. Elle est fragile, et difficile à manipuler quand elle se présente sous de faibles épaisseurs, mais, raison majeure, sa biréfringence (la différence entre n_e et n_o) est un peu trop importante pour ce genre d'application. Au contraire, le quartz, avec sa biréfringence bien plus faible est très utilisé mais il n'a pas de plans de clivage naturels et il faut le tailler, le durcir et le polir, ce qui le rend assez cher. On utilise le plus souvent le mica, qui est un cristal biaxe. Plusieurs formes de mica conviennent parfaitement, par exemple, la fluorophlogopite, la biotite ou la muscovite. La

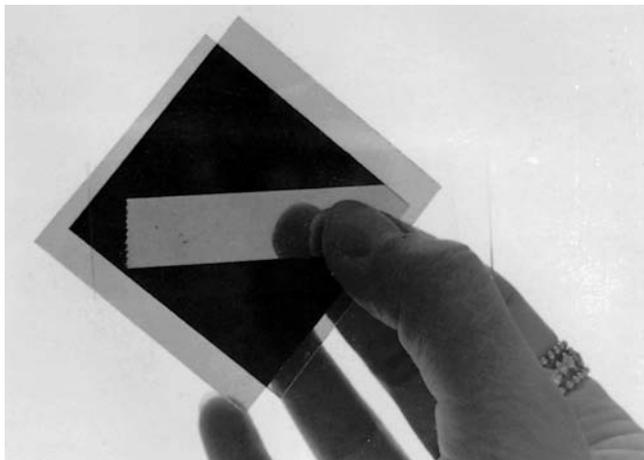
variété la plus courante est la muscovite marron clair. On peut très facilement la cliver en grandes lamelles extrêmement fines, solides et flexibles. De plus, ses deux axes principaux sont quasi parallèles aux plans de clivage. Le long de ces axes, les indices sont 1,599 et 1,549 pour le jaune du sodium, et, bien que ces chiffres varient un peu d'un échantillon à l'autre, leur différence est pratiquement constante. L'épaisseur minimale d'une lame onde en mica est d'environ 60 microns. Le quartz cristallin, le fluorure de magnésium monocristallin (pour la gamme IR de 3 000 nm à 6 000 nm), et le sulfure de cadmium (pour la gamme IR de 6 000 nm à 12 000 nm) sont également très utilisés pour les lames de phase.

Certaines lames sont fabriquées à partir de feuilles d'alcool polyvinyle qui ont été étirées afin d'aligner leurs molécules organiques à longue chaîne. Du fait de cette anisotropie évidente, les électrons dans le matériau n'ont pas les mêmes forces de rappel le long de ces molécules ou perpendiculairement à celles-ci. Les substances de ce type demeurent biréfringentes en permanence, bien qu'elles ne soient pas cristallines.

On peut fabriquer astucieusement une lame demi-onde en maintenant une bonne vieille bande de cellophane vernie solidaire d'une lame de microscope (toutes les variétés ne fonctionnent pas ; la meilleure est la « Transparent tape » de LePage). L'axe rapide, c'est-à-dire, la direction de la composante la plus rapide des deux ondes, est parallèle à la largeur de la bande, et l'axe lent à sa longueur. Lors de sa fabrication, la cellophane (qui est faite à partir de cellulose régénérée extraite de coton ou de pâte à papier) est mise en forme de feuilles, et, dans le processus, ses molécules s'alignent, ce qui la rend biréfringente. Si l'on place une lame demi-onde entre deux polariseurs linéaires croisés, il n'y aura pas d'effet si ses axes principaux coïncident avec ceux des polariseurs. Par contre, si l'on l'oriente avec ses axes à 45° par rapport à ceux des polariseurs, le champ \vec{E} émergent de la bande aura tourné de 90° et sera parallèle à l'axe de transmission de l'analyseur. La lumière va passer à travers la région correspondant à la bande, comme s'il s'agissait d'un trou découpé dans le fond noir des polariseurs croisés (voir la photo). Un morceau d'emballage de cellophane va aussi fonctionner en principe comme une lame demi-onde. Vérifiez si vous pouvez déterminer l'orientation de chacun de ses axes principaux en utilisant la bande retardatrice et deux Polaroids croisés (notez bien les fines stries parallèles sur la feuille de cellophane).

La lame quart d'onde

Une lame quart d'onde est un élément optique qui introduit un retard de phase relatif de $\Delta\varphi = \pi/2$ entre les composantes



Une main tenant un morceau de ruban adhésif collé sur une lame de microscope, entre deux Polaroids croisés. (Photo E.H.)

orthogonales E et O d'une onde. Il ressort de la figure 8.7 qu'un déphasage de 90° convertit une polarisation linéaire en elliptique (ou circulaire) et vice versa. Il est clair qu'une polarisation linéaire incidente parallèlement à l'un des axes principaux ne sera modifiée par aucune lame de phase. On ne peut pas avoir de déphasage sans avoir deux composantes. Avec de la lumière naturelle en entrée, les deux composantes à l'état \mathcal{P} sont incohérentes ; c'est-à-dire que leur différence de phase relative change rapidement et aléatoirement. L'introduction d'un changement de phase additionnel constant par un retardateur quelconque, entraînera toujours une différence de phase aléatoire et n'aura donc pas d'effet notable. Lorsqu'une polarisation linéaire, à 45° de l'un des axes principaux, est incidente sur une lame quart d'onde, ses composantes E et O ont des amplitudes égales. Dans ces circonstances spéciales, une différence de phase de 90° convertit l'onde en lumière circulaire (figure 8.40). De même, un faisceau incident polarisé circulairement émergera polarisé linéairement.

On fabrique souvent les lames quart d'onde en quartz, en mica, ou en polymère organique. Dans tous les cas, l'épaisseur du matériau biréfringent doit satisfaire à l'expression :

$$d(|n_o - n_e|) = (4m + 1)\lambda_0/4$$

On peut réaliser grossièrement une lame quart d'onde en utilisant du plastique d'emballage alimentaire, fin et élastique, qui s'achète en rouleau. Comme la cellophane, il a des stries dans la direction de la longueur qui correspondent à un axe principal. Après avoir empilé une demi-douzaine de

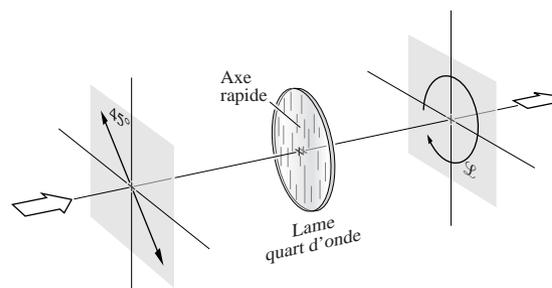


Figure 8.40 Une lame quart d'onde transforme une lumière polarisée linéairement à un angle de 45° par rapport à ses axes (premier et troisième quadrants) en lumière circulaire gauche (tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre quand on regarde la source).

couches en prenant soin que les stries restent bien parallèles, et positionné le plastique à 45° des axes du polariseur, examinons-le à travers un analyseur tournant. Si on continue d'ajouter une couche après l'autre jusqu'à ce que l'éclairement final soit à peu près constant lorsqu'on fait tourner l'analyseur, on a alors de la lumière polarisée circulairement et une lame quart d'onde. Bien que ce soit plus facile à dire qu'à faire avec de la lumière blanche, cela vaut la peine d'essayer.

Les lames d'onde que l'on trouve dans le commerce sont en principe classées par leur **différence de marche**, qui est, par exemple, de 140 nm pour une lame quart d'onde dans le visible. Cela signifie simplement que le dispositif produit un déphasage de 90° , seulement pour la lumière verte de longueur d'onde 560 nm (i.e. 4×140). La différence de marche n'est pas, en principe, donnée aussi précisément ; 140 ± 20 nm est plus réaliste. On peut augmenter ou réduire le retard d'une lame de phase par rapport à sa valeur nominale en l'inclinant un peu. Si la lame tourne autour de son axe rapide, le retard augmentera, alors qu'une rotation autour de l'axe lent aura l'effet opposé. De cette manière, on peut régler une lame de phase à une longueur d'onde spécifique dans un domaine spectral situé de part et d'autre de sa valeur nominale.

Retardateurs (lames de phase). Considérations générales

Habituellement, un retardateur peut être de trois types : d'ordre zéro, d'ordre multiple, d'ordre zéro composé. Un retardateur d'ordre zéro a l'épaisseur minimale qui permet de

produire la différence de phase requise. Par exemple, considérons une lame quart d'onde en quartz, dont la biréfringence est seulement de 0,0092 à 550 nm. L'équation (8.32) avec $\Delta\varphi = \pi/2$ montre qu'un retardateur quart d'onde d'ordre zéro ne fera que $15 \mu\text{m}$ d'épaisseur d'où une fragilité certaine et de grandes difficultés de fabrication. Cependant, il aura un champ angulaire assez large.

Un retardateur d'ordre multiple aurait une épaisseur correspondant à un déphasage qui serait un nombre entier de fois 2π plus le $\Delta\varphi$ requis, qu'il s'agisse de 2π , π , ou $\pi/2$. Ces dispositifs sont plus faciles à fabriquer et moins chers, mais ils se révèlent très sensibles à la longueur d'onde, à l'angle d'incidence et à la température, et ils ont un champ étroit.

En combinant deux lames d'ordre multiple dont la différence des déphasages donne la valeur $\Delta\varphi$ recherchée, on obtient une lame **d'ordre zéro composé**. Pour cela, on aligne l'axe rapide de l'une avec l'axe lent de l'autre. Cela compense les variations de température, qui tendent ainsi à s'éliminer, mais la contrepartie est l'étroitesse du champ.

Les polymères biréfringents ont une biréfringence qui est faible, et l'on peut les utiliser comme retardateurs d'ordre zéro. Ils possèdent un champ assez large, et l'on peut les produire en grands diamètres.

Le rhomboèdre de Fresnel

Nous avons vu au chapitre 4 que le processus de réflexion totale interne introduit une différence de phase entre deux composantes orthogonales du champ, par exemple entre les composantes parallèle et perpendiculaire au plan d'incidence. Dans le verre ($n = 1,51$) un déphasage de 45° accompagne la réflexion totale interne pour l'angle d'incidence particulier de $54,6^\circ$ (figure 4.44e). Le rhomboèdre de Fresnel, figure 8.41, exploite cet effet en forçant le faisceau à se réfléchir deux fois à l'intérieur, ce qui aboutit à un déphasage de 90° . Si l'onde plane incidente est polarisée linéairement à 45° du plan d'incidence, les composantes initiales $[E_i]_{\parallel}$ et $[E_i]_{\perp}$ du champ seront égales. Après la première réflexion, l'onde dans le verre sera polarisée elliptiquement. Après la seconde réflexion, elle sera circulaire. Puisque le déphasage est presque indépendant de la longueur d'onde sur un large domaine, le rhomboèdre de Fresnel est un retardateur quasi achromatique de 90° . En combinant deux rhomboèdres bout à bout, on peut produire un retard de $\lambda_0/2$ sur une large bande de longueur d'onde ($\approx 2\,000$ nm). Le rhomboèdre de Mooney ($n = 1,65$) représenté sur la figure 8.42 est similaire en principe, mais ses caractéristiques pratiques sont différentes à certains égards.

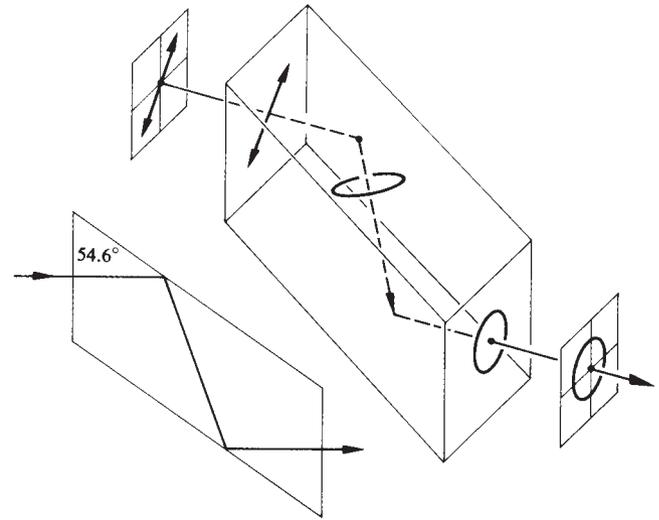


Figure 8.41 Rhomboèdre de Fresnel.

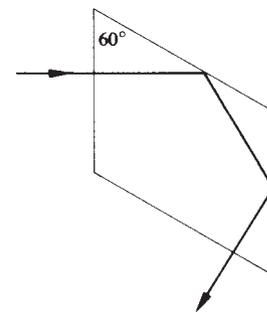


Figure 8.42 Rhomboèdre de Mooney.

8.7.2 Compensateurs et retardateurs variables

Un **compensateur** est un dispositif optique capable de créer un retard contrôlable sur une onde. Au contraire d'une lame de phase, où $\Delta\varphi$ est fixe, le déphasage résultant d'un compensateur peut varier continûment. Il existe de nombreuses sortes de compensateurs, mais nous n'en considérerons que deux, les plus largement répandues. Le **compensateur de Babinet**, représenté sur la figure 8.43, est constitué de deux prismes indépendants de calcite, ou, plus communément, de quartz, dont les axes optiques sont indiqués par les lignes et les points sur la figure. Un rayon qui traverse verticalement le dispositif de haut en bas, en un point arbitraire, va parcourir une épaisseur d_1 pour le prisme supérieur et d_2 pour le prisme inférieur. Le déphasage transmis à l'onde par le premier cristal est $2\pi d_1(|n_o - n_e|)/\lambda_0$, et celle du second cristal est $-2\pi d_2(|n_o - n_e|)/\lambda_0$. Comme pour

le prisme de Wollaston, auquel ce système ressemble, mais qui a des angles plus larges et est plus épais, les rayons O et E dans la partie supérieure deviennent respectivement les rayons E et O , dans la partie inférieure.

Le compensateur est assez mince (l'angle du coin mesure en principe 2.5°), et donc la séparation des rayons est négligeable. La différence de phase totale, est ainsi :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (d_1 - d_2)(|n_o - n_e|) \quad (8.33)$$

Si le compensateur est en calcite, l'onde E est en avance sur l'onde O dans la partie supérieure, et donc si $d_1 > d_2$, $\Delta\varphi$ correspond à l'avance de phase de la composante E par rapport à la composante O . C'est l'inverse pour un compensateur à quartz, où, si $d_1 > d_2$, $\Delta\varphi$ est l'avance de l'onde O par rapport à l'onde E . Au centre, où $d_1 = d_2$, l'effet d'un prisme est annulé par celui de l'autre, et $\Delta\varphi = 0$ pour toutes les longueurs d'onde. Le retard varie d'un point à l'autre sur la surface, et il est constant le long de lignes parallèles aux arêtes des prismes, et pour lesquelles la différence des épaisseurs traversées est constante. Si la lumière entre par une fente parallèle aux arêtes et si l'on déplace l'un des deux prismes horizontalement avec une vis micrométrique, on obtient en sortie le $\Delta\varphi$ désiré.

Lorsque le Babinet est positionné à 45° entre polariseurs croisés, une série de franges sombres d'extinction, équidistantes et parallèles, apparaissent sur la largeur du compensateur. Cela marque les positions où le dispositif agit comme s'il s'agissait d'une lame onde. En lumière blanche, les franges sont colorées, à l'exception de la bande centrale noire ($\Delta\varphi = 0$). On peut trouver le déphasage d'une lame inconnue

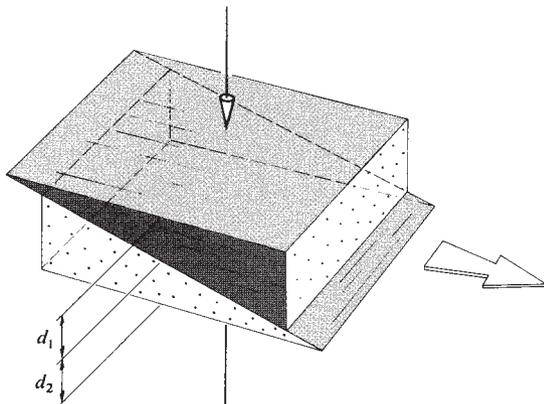


Figure 8.43 Compensateur de Babinet.

en la plaçant sur le compensateur et en évaluant le décalage de franges qui en résulte. Puisque les franges sont étroites et difficiles à « lire » électroniquement, le Babinet a perdu de sa popularité. On peut le modifier pour produire un retard uniforme sur toute sa surface en faisant tourner simplement la partie supérieure de 180° autour de la verticale, afin de placer les deux sommets l'un sur l'autre. Cette configuration va, quoiqu'il en soit, dévier légèrement le faisceau.

Une autre variation du Babinet, qui a l'avantage de produire un retard uniforme sur toute sa surface sans déviation de faisceau, est le **compensateur de Soleil**, décrit à la figure 8.44. En principe constitué de quartz (bien que MgF_2 et CdS soient utilisés dans l'infrarouge), il comporte deux prismes et une lame à faces planes et parallèles dont les axes optiques sont orientés suivant l'indication de la figure. La quantité d_1 correspond à l'épaisseur totale des deux prismes, laquelle est constante pour n'importe quelle position de la vis micrométrique.

8.8 Polariseurs circulaires

Précédemment, nous avons conclu qu'une polarisation linéaire dont le champ \vec{E} est à 45° des axes principaux d'une lame quart d'onde va émerger de cette lame sous forme de polarisation circulaire. Toute combinaison en série d'un polariseur linéaire judicieusement orienté et d'une lame quart d'onde va agir comme un **polariseur circulaire**. Les deux éléments fonctionnent complètement indépendamment, si l'un peut être biréfringent, l'autre

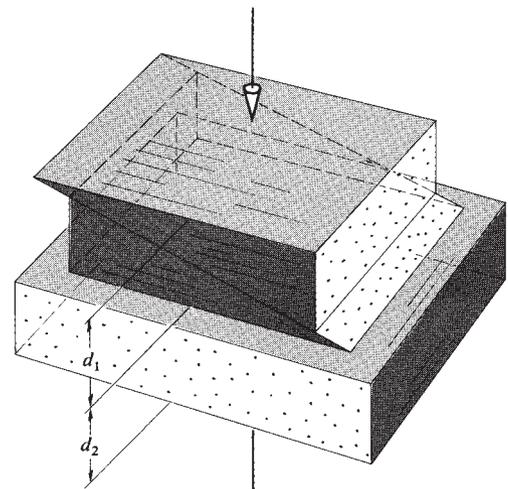


Figure 8.44 Compensateur de Soleil.

peut être à réflexion. Le sens de rotation de la lumière circulaire émergente change si l'axe de transmission du polariseur linéaire est à $+45^\circ$ ou -45° de l'axe rapide de la lame. On peut produire assez facilement l'un ou l'autre des deux états de polarisation circulaire, \mathcal{L} ou \mathcal{R} . En fait, si le polariseur linéaire est situé entre deux lames, l'un orienté à $+45^\circ$ et l'autre à -45° , la combinaison sera « ambidextre ». En bref, cela conduira à un état \mathcal{R} pour la lumière entrant d'un côté et à un état \mathcal{L} lorsque l'entrée est de l'autre côté.

$CP-HN$ est le nom commercial d'un polariseur circulaire connu, qui est d'une seule pièce. C'est un laminé d'un Polaroid HN et d'une lame quart d'onde en alcool polyvinyle à 90° étirée. L'entrée d'un tel dispositif est manifestement la face du polariseur linéaire. Si le faisceau entre par la sortie (i.e. la lame), il passera ensuite à travers la feuille H et n'en sortira que polarisé linéairement.

On peut se servir d'un polariseur circulaire comme analyseur, pour déterminer le sens de rotation d'une onde dont on sait déjà qu'elle est polarisée circulairement. Pour cela, imaginons que nous ayons les quatre éléments étiquetés A, B, C et D dans la figure 8.45. Les deux premiers, A et B, pris ensemble, forment un polariseur circulaire, tout comme C et D. Le sens de rotation exact de ces polariseurs est sans importance à présent tant qu'ils sont identiques tous les deux, ce qui revient à dire que les axes rapides des lames sont parallèles. La lumière polarisée linéairement en provenance de A est retardée de 90° par B, d'où elle ressort circulaire. Alors qu'elle passe à travers C, un retard supplémentaire de 90° est ajouté, ce qui donne au final une nouvelle onde polarisée linéairement. En effet, B et C forment ensemble une lame demie-onde, qui fait tourner physiquement la polarisation de A d'un angle 2θ , dans ce cas 90° . Puisque la polarisation linéaire issue

de C est parallèle à l'axe de transmission de D, elle traverse D et sort du système.

Dans ce processus simple, nous avons prouvé quelque chose d'assez subtil. Si les polariseurs circulaires A+B et C+D sont tous gauchers, nous avons montré que *la lumière circulaire gauche, entrant par la sortie dans un polariseur circulaire gauche sera transmise*. De plus, il ressort qu'une polarisation circulaire droite produira un état \mathcal{P} perpendiculaire à l'axe de transmission de D et sera donc absorbée. L'inverse est également vrai, c'est-à-dire que, des deux formes de polarisation circulaires, *seule l'état \mathcal{R} passera à travers un polariseur circulaire droit, s'il est entré par la sortie*.

8.9 Polarisation de la lumière polychromatique

8.9.1 Bande spectrale et temps de cohérence d'une onde polychromatique

De par sa nature, un rayonnement purement monochromatique, qui n'a évidemment pas de réalité physique, doit être polarisé. Les deux composantes orthogonales de l'onde ont la même fréquence, et chacune d'elles a une amplitude constante. Si l'amplitude de l'une des deux composantes sinusoïdales variait, cela reviendrait à dire que d'autres fréquences additionnelles sont présentes dans le spectre de Fourier analysé. De plus, les deux composantes ont une différence de phase constante, c'est-à-dire qu'elles sont cohérentes. Une perturbation monochromatique est un train d'onde infini dont les propriétés ont été fixées de tout temps ; qu'elle soit dans un état \mathcal{R} , \mathcal{L} , \mathcal{P} , ou \mathcal{E} , l'onde est complètement polarisée.

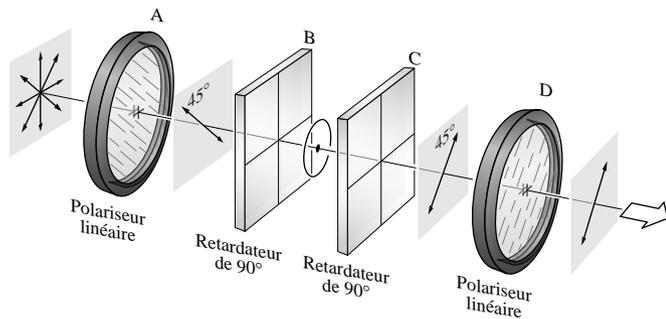
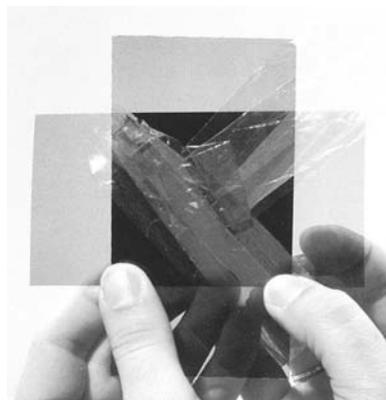


Figure 8.45 Deux polariseurs linéaires et deux lames quart d'onde.



Une feuille de cellophane froissée placée entre deux Polaroids croisés présente un arc-en-ciel de couleurs. Selon son épaisseur et la longueur d'onde de la lumière, la cellophane fait tourner plus ou moins le champ E . En faisant tourner l'un des Polaroids, on transforme les couleurs en leurs complémentaires.

Les sources de lumière réelles sont polychromatiques ; elles émettent de l'énergie dans un certain domaine de fréquences. Examinons à présent ce qui arrive sur une échelle submicroscopique, en faisant particulièrement attention à l'état de polarisation de l'onde émise. Envisageons un électron-oscillateur entré en vibration (probablement par collision) et qui émet donc un rayonnement. En fonction de son mouvement précis, l'oscillateur émettra une certaine forme de lumière polarisée.

Comme en section 7.4.3, nous représentons l'énergie issue d'un seul atome comme un train d'onde ayant une étendue spatiale Δl_c finie. Supposons, pour le moment, que son état de polarisation est à peu près constant pour une durée de l'ordre du temps de cohérence Δt_c (qui, comme on doit s'en souvenir, correspond à l'étendue temporelle du train d'onde, i.e. $\Delta l_c/c$). Une source classique consiste en général en une grande quantité de ces atomes radiatifs, que l'on peut envisager comme oscillant avec différentes phases autour d'une fréquence dominante $\bar{\nu}$. Examinons la lumière issue d'une région de la source, suffisamment petite pour que les rayons émis arrivant en un point d'observation soient quasiment parallèles. Pendant un temps court par rapport au temps de cohérence moyen, les amplitudes et phases des trains d'onde issus des atomes individuels seront à peu près constants. Cela signifie que si l'on regardait la source localement, on « verrait », au moins pendant un instant, une superposition cohérente d'ondes émises de cette direction. On « verrait » une onde résultante dans un état de polarisation donné. Cet état ne durerait que pendant un intervalle de temps inférieur au temps de cohérence, puis il changerait, mais il correspondrait malgré tout à un grand nombre d'oscillations à la fréquence $\bar{\nu}$. Manifestement, si la bande spectrale $\Delta\nu$ est large, le temps de cohérence ($\Delta t_c \approx 1/\Delta\nu$) sera petit, et tout état de polarisation aura une durée de vie restreinte. Bien entendu *les concepts de polarisation et de cohérence sont liés de manière fondamentale.*

Considérons à présent une onde dont la bande spectrale est très petite par rapport à sa fréquence moyenne, c'est-à-dire une onde quasi monochromatique. On peut la représenter par deux états \mathcal{P} harmoniques orthogonaux, comme dans les équations. (8.1) et (8.2), mais ici, les amplitudes et les angles de phase initiaux sont fonction du temps. De plus, la fréquence angulaire et le nombre d'onde correspondent aux valeurs moyennes du spectre présent dans l'onde, c'est-à-dire, $\bar{\omega}$ et \bar{k} . Ainsi :

$$\vec{\mathbf{E}}_x(t) = \hat{\mathbf{i}}E_{0x}(t) \cos [\bar{k}z - \bar{\omega}t + \varepsilon_x(t)] \quad (8.34a)$$

et
$$\vec{\mathbf{E}}_y(t) = \hat{\mathbf{j}}E_{0y}(t) \cos [\bar{k}z - \bar{\omega}t + \varepsilon_y(t)] \quad (8.34b)$$

L'état de polarisation, de même que $E_{0x}(t)$, $E_{0y}(t)$, $\varepsilon_x(t)$, et $\varepsilon_y(t)$, vont varier lentement, restant à peu près constants sur un grand nombre d'oscillations. Gardons à l'esprit qu'une bande spectrale étroite implique un temps de cohérence assez grand. Si l'on considère l'onde pendant un intervalle beaucoup plus long, les amplitudes et les angles de phase varieront, indépendamment ou non. Si les variations sont complètement indépendantes, l'état de polarisation restera constant sur un intervalle court par rapport au temps de cohérence. En d'autres termes, l'ellipse décrivant l'état de polarisation changera de forme, d'orientation et de sens de rotation. Puisque, en pratique, aucun des détecteurs existants ne peut détecter un état de si courte durée, on pourrait en conclure que l'onde n'est pas polarisée.

Par contre, si le rapport $E_{0x}(t)/E_{0y}(t)$ était constant alors que les deux amplitudes varient, et si $\varepsilon = \varepsilon_y(t) - \varepsilon_x(t)$ était également constant, l'onde serait polarisée. Ici, la nécessité d'une corrélation entre ces différentes fonctions est évidente. Nous pouvons d'ailleurs imprimer ces conditions à l'onde en la faisant simplement passer à travers un polariseur, effaçant ainsi les composantes non désirées. L'intervalle de temps pendant lequel l'onde maintiendra, après cela, son état de polarisation n'est plus dépendant de la bande spectrale puisque les composantes de l'onde ont bien été mises en corrélation. La lumière pourrait être polychromatique (même blanche), et totalement polarisée. Elle se comportera quasiment comme les ondes monochromatiques idéalisées traitées en section 8.1.

Entre les deux extrêmes que sont la lumière non polarisée et la lumière totalement polarisée se trouve le cas de la lumière partiellement polarisée. En fait, on peut montrer que toute onde monochromatique est le résultat de la somme d'une onde polarisée et d'une onde non polarisée, indépendantes l'une de l'autre, l'une ou l'autre pouvant être nulle.

8.9.2 Couleurs interférentielles

Insérons une feuille de cellophane froissée entre deux Polaroids éclairés en lumière blanche. Autrement dit, prenons un sac plastique ordinaire (polyéthylène), qui ne montre rien de particulier entre les deux Polaroids croisés, et étirons-le. Cela va aligner ses molécules, et le rendre biréfringent. À présent, froissons-le et examinons-le à nouveau. Le motif résultant est une profusion de régions multicolores, qui changent de teinte lorsqu'on fait tourner l'un des Polaroids. Ces **couleurs interférentielles** proviennent de la dépendance du retard de phase sur la longueur d'onde. Le chatouement habituel des motifs est

dû aux variations locales d'épaisseurs, de biréfringence, ou des deux.

L'observation de couleurs interférentielles n'est pas rare et peut se faire dans beaucoup de substances. Par exemple, on peut les voir avec un morceau de mica multicouche, un éclat de glace, un sac plastique étiré, ou bien les particules finement écrasées d'un cristal de roche blanc ordinaire (le quartz). Pour comprendre comment le phénomène se produit, examinons la figure 8.46. On y a représenté de manière schématique un faisceau étroit de lumière monochromatique polarisé linéairement en train de traverser une petite zone d'une lame biréfringente Σ . Sur cette zone, la biréfringence et l'épaisseur sont supposées constantes. La lumière transmise est généralement elliptique. De la même manière, considérons que la lumière émergente de Σ est composée de deux ondes linéaires orthogonales (i.e. les composantes x et y du champ total \vec{E}), déphasées de $\Delta\varphi$, valeur déterminée par l'équation (8.32). Seules les composantes de ces deux perturbations, qui sont parallèles à l'axe de transmission de l'analyseur, vont arriver jusqu'à l'observateur.

Ces composantes qui subissent elles aussi la différence de phase $\Delta\varphi$, sont coplanaires et peuvent donc interférer. Lorsque $\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$, elles sont en opposition de phase et tendent à s'annuler mutuellement. Lorsque $\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$, elles sont en phase et se renforcent mutuellement. Supposons maintenant que le déphasage en un point P_1 sur Σ soit de 4π pour la lumière bleue ($\lambda_0 = 435$ nm). Dans ce cas, le bleu sera fortement transmis. Il ressort de l'équation (8.32) que $\lambda_0\Delta\varphi = 2\pi d(n_o - n_e)$ est essentiellement une constante déterminée par l'épaisseur et la biréfringence. Par conséquent, au point en question, $\lambda_0\Delta\varphi = 1740\pi$ pour toutes les longueurs d'onde. Si l'on passe à présent dans le jaune ($\lambda_0 = 580$ nm), $\Delta\varphi \approx 3\pi$ et la lumière jaune issue de P_1 est totalement annulée. En lumière

blanche, ce point particulier sur Σ semblera être complètement privé de jaune, émettant toutes les autres couleurs, en particulier le bleu. Une autre façon d'exprimer cela est de dire que le bleu émergent de la région de P_1 est polarisé linéairement ($\Delta\varphi = 4\pi$) et parallèlement à l'axe de transmission de l'analyseur. Au contraire, le jaune est polarisé linéairement ($\Delta\varphi = 3\pi$) mais parallèlement à l'axe d'extinction ; les autres couleurs sont elliptiques. La région de P_1 se comporte comme une lame demi-onde pour le jaune et comme une lame onde pour le bleu. Si l'on faisait tourner l'analyseur de 90° , le jaune serait transmis, et le bleu disparaîtrait.

Par définition, on dit que deux couleurs sont complémentaires quand leur superposition donne de la lumière blanche. Ainsi, quand l'analyseur est tourné de 90° il va alternativement transmettre ou absorber les couleurs complémentaires. De la même manière, il doit y avoir un autre point P_2 sur Σ où $\Delta\varphi = 4\pi$ pour le rouge ($\lambda_0 = 650$ nm). Alors, $\lambda_0\Delta\varphi = 2600\pi$, et la lumière bleue-verte ($\lambda_0 = 520$ nm) aura un retard de 5π et sera annulée. Manifestement, si le retard varie d'une région à l'autre de l'échantillon, il en sera de même pour la couleur transmise par l'analyseur.

8.10 Activité optique

La manière dont la lumière interagit avec des substances matérielles permet d'obtenir un grand nombre d'informations de valeur sur leurs structures moléculaires. Le processus que nous allons examiner, au-delà de son intérêt spécifique en optique, a eu et continue d'avoir des effets considérables dans les sciences chimiques et biologiques.

En 1811, le physicien français Dominique F. J. Arago fut le premier à observer le phénomène fascinant que l'on appelle aujourd'hui l'**activité optique**. Cette année-là, il découvrit que le plan de vibration d'un faisceau de lumière linéaire subissait une rotation continue au cours de sa propagation le long de l'axe optique d'une lame de quartz (figure 8.47). À peu près au même moment, Jean-Baptiste Biot (1774-1862) remarqua le même effet en utilisant les formes liquides et gazeuses de diverses substances naturelles, telles que la térébenthine. Tout matériau qui entraîne le champ \vec{E} d'une onde plane polarisée linéairement est dit *optiquement actif*. De plus, comme Biot le découvrit, on doit distinguer les rotations vers la droite et celles vers la gauche. Pour cela, la définition du sens de rotation suppose que l'on regarde dans la direction de la source : si le plan de vibration tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, la substance est dite *dextrogyre* (du latin *dextro*, la droite). Inversement, si \vec{E} se

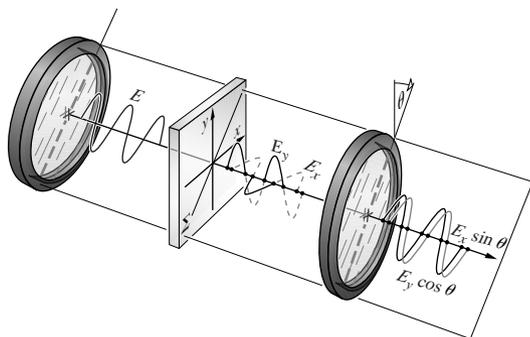


Figure 8.46 L'origine des couleurs interférentielles.

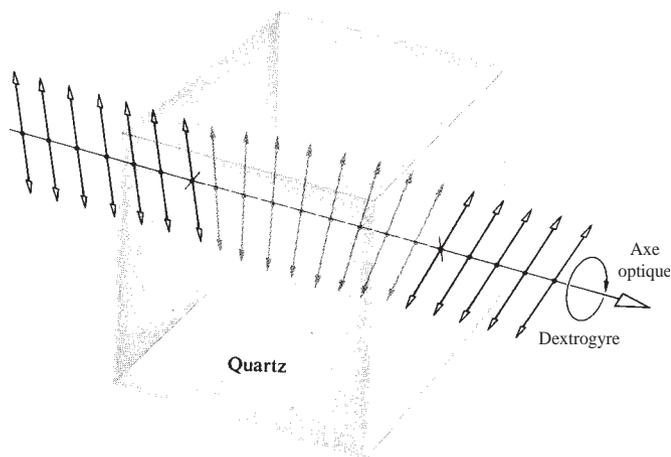


Figure 8.47 Activité optique d'un cristal de quartz.

déplace dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, le matériau est dit *lévogyre* (du latin *levo*, la gauche).

En 1822, l'astronome anglais Sir John F. W. Herschel (1792-1871) montra que les comportements des *dextrogyres* et des *lévogyres* du quartz correspondaient en fait à deux structures cristallographiques différentes. Bien que les molécules soient identiques (SiO_2), le quartz peut être dextrogyre ou lévogyre selon la disposition de ses molécules. Comme on le voit à la figure 8.48, les apparences externes de ces deux formes sont les mêmes à tous les égards, sauf que l'une est l'image de l'autre ; elles sont dites *énantiomorphes* l'une de l'autre. Toutes les substances transparentes énantiomorphes sont optiquement actives. De plus, le quartz fondu et le quartz amalgamé ne sont pas cristallins, et ne sont pas optiquement actifs. Manifestement, dans le quartz, l'activité optique est associée avec la distribution structurale des molécules dans son ensemble. Il y a beaucoup de substances, organiques ou non (par exemple, le benzile et NaBrO_3 respectivement) qui, comme le quartz, ne sont actives optiquement que sous la forme cristalline. Au contraire, beaucoup de composés organiques que l'on trouve à l'état naturel, tels que le sucre, l'acide tartrique et la térébenthine, sont optiquement actifs en solutions ou à l'état liquide. Dans ce cas, le *pouvoir rotatoire*, comme on l'appelle souvent, est manifestement un attribut des molécules individuelles. Il y a aussi des substances plus compliquées pour lesquelles l'activité optique est associée à la fois aux molécules elles-mêmes et à leur disposition dans les différents cristaux. Un exemple est le tartrate de rubidium. Une solution *dextrogyre* de ce composé devient *lévogyre* en cristallisant.

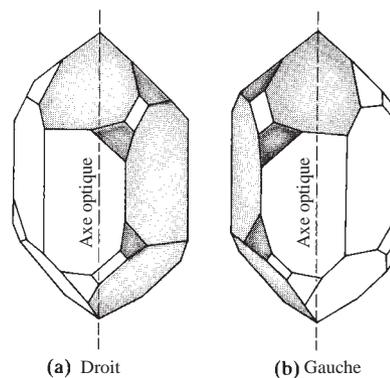


Figure 8.48 Cristaux de quartz dextrogyre et lévogyre.

En 1825, Fresnel, sans se référer au mécanisme réel concerné, proposa une description phénoménologique simple de l'activité optique. Puisqu'on peut représenter une onde linéaire incidente par une superposition des états \mathcal{R} et \mathcal{L} , il suggéra que ces deux formes de lumière circulaire se propageaient à des vitesses différentes. Un matériau actif montre une *biréfringence circulaire*, c'est-à-dire qu'il possède deux indices de réfraction, un pour l'état \mathcal{R} ($n_{\mathcal{R}}$) et l'autre pour l'état \mathcal{L} ($n_{\mathcal{L}}$). En traversant un milieu optiquement actif, les deux ondes circulaires se déphasent l'une par rapport à l'autre, et il en résulte une rotation de la polarisation linéaire. On peut voir de manière analytique comment cela est possible en revenant aux équations (8.8) et (8.9), qui décrivent la propagation de la lumière monochromatique circulaire droite et gauche dans la direction z . On a vu dans l'équation (8.10) que la somme de ces deux ondes est en fait polarisée linéairement. Nous allons modifier ces expressions afin de supprimer le facteur 2 dans l'amplitude de l'équation (8.10), dans ce cas :

$$\vec{\mathbf{E}}_{\mathcal{R}} = \frac{E_0}{2} [\hat{\mathbf{i}} \cos(k_{\mathcal{R}}z - \omega t) + \hat{\mathbf{j}} \sin(k_{\mathcal{R}}z - \omega t)] \quad (8.35a)$$

et

$$\vec{\mathbf{E}}_{\mathcal{L}} = \frac{E_0}{2} [\hat{\mathbf{i}} \cos(k_{\mathcal{L}}z - \omega t) - \hat{\mathbf{j}} \sin(k_{\mathcal{L}}z - \omega t)] \quad (8.35b)$$

représentent les composantes circulaires droite et gauche. Comme ω est constant, $k_{\mathcal{R}} = k_0 n_{\mathcal{R}}$ et $k_{\mathcal{L}} = k_0 n_{\mathcal{L}}$. La perturbation résultante est donnée par $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_{\mathcal{R}} + \vec{\mathbf{E}}_{\mathcal{L}}$, et après utilisation de quelques propriétés trigonométriques, on obtient :

$$\vec{\mathbf{E}} = E_0 \cos[(k_{\mathcal{R}} + k_{\mathcal{L}})z/2 - \omega t] [\hat{\mathbf{i}} \cos(k_{\mathcal{R}} - k_{\mathcal{L}})z/2 + \hat{\mathbf{j}} \sin(k_{\mathcal{R}} - k_{\mathcal{L}})z/2] \quad (8.36)$$

À l'endroit où l'onde entre dans le milieu ($z = 0$), elle est polarisée linéairement le long de l'axe x , comme on le voit à la figure 8.49 ; c'est-à-dire,

$$\vec{E} = E_0 \hat{i} \cos \omega t \quad (8.37)$$

Remarquons qu'en n'importe quel point de la trajectoire, les deux composantes ont la même dépendance temporelle et sont donc en phase. Cela signifie simplement que tout le long de l'axe z la résultante est polarisée linéairement (figure 8.50), bien que son orientation soit fonction de z . De plus, si $n_{\mathcal{R}} > n_{\mathcal{L}}$ ou de manière équivalente, si $k_{\mathcal{R}} > k_{\mathcal{L}}$, \vec{E} va tourner dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, alors que si $k_{\mathcal{L}} > k_{\mathcal{R}}$, la rotation est dans le sens des aiguilles d'une montre (en regardant vers la source). \vec{E} tourne d'un angle β et traditionnellement, cet angle est défini comme positif quand il est dans le sens des aiguilles d'une montre. En gardant à l'esprit cette convention, il ressort de l'équation (8.36) que le champ au point z fait un angle $\beta = -(k_{\mathcal{R}} - k_{\mathcal{L}})z/2$ par rapport à son

orientation d'origine. Si le milieu a une épaisseur d , l'angle de rotation du plan de vibration est :

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda_0} (n_{\mathcal{L}} - n_{\mathcal{R}}) \quad (8.38)$$

où $n_{\mathcal{L}} > n_{\mathcal{R}}$ est dextrogyre et $n_{\mathcal{R}} > n_{\mathcal{L}}$ est lévogyre (figure 8.51).

Fresnel fut capable de séparer les états \mathcal{R} et \mathcal{L} constitutifs d'un faisceau linéaire en utilisant le prisme composite de la figure 8.52, qui est constitué d'un nombre de prismes en quartz dextrogyres et lévogyres taillés avec leurs axes optiques disposés comme on peut le voir sur le schéma. L'état \mathcal{R} se propage plus rapidement dans le premier prisme que dans le second et donc se rapproche de la normale à la première réfraction. L'inverse est vrai pour l'état \mathcal{L} , et la séparation angulaire des deux ondes circulaires augmente à chaque interface.

Pour le jaune du sodium, le *pouvoir rotatif* spécifique, défini par β/d , est de $21,7^\circ/\text{mm}$ dans le quartz. Il en découle que $|n_{\mathcal{L}} - n_{\mathcal{R}}| = 7,1 \times 10^{-5}$ pour la lumière se propageant le long

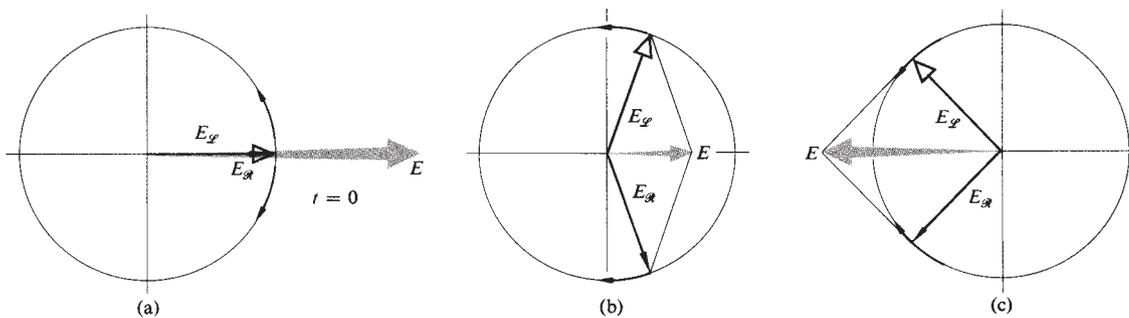


Figure 8.49

Superposition d'un état \mathcal{R} et d'un état \mathcal{L} à $z = 0$.

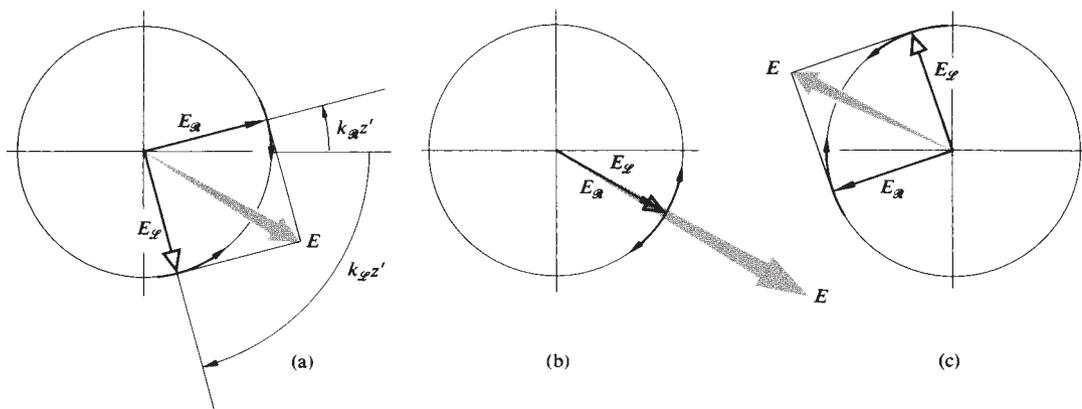


Figure 8.50

Superposition d'un état \mathcal{R} et d'un état \mathcal{L} à $z = z'$ ($k_{\mathcal{L}} > k_{\mathcal{R}}$).

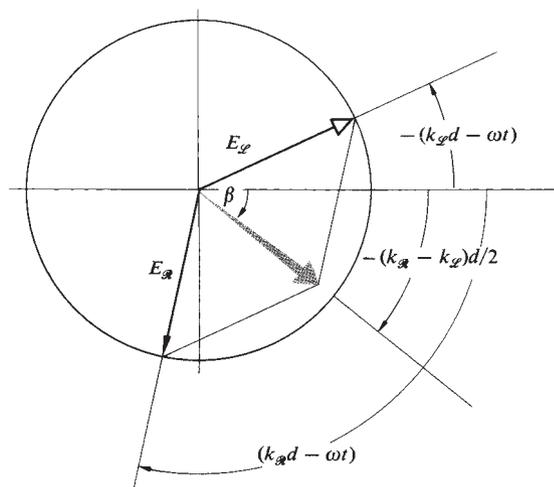


Figure 8.51 Superposition d'un état \mathcal{R} et d'un état \mathcal{L} à $z = d$ ($k_{\mathcal{R}} > k_{\mathcal{L}}$, $\lambda_{\mathcal{L}} < \lambda_{\mathcal{R}}$, and $v_{\mathcal{L}} < v_{\mathcal{R}}$).

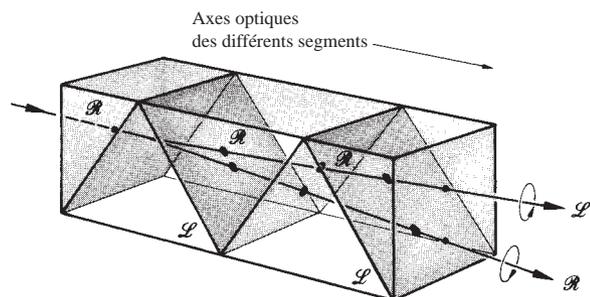


Figure 8.52 Prisme composite de Fresnel.

de l'axe optique. En principe, dans cette direction particulière la double réfraction disparaît. Toutefois, si la lumière incidente se propage normalement à l'axe optique (comme c'est souvent le cas pour les prismes polarisants, les lames de phase et les compensateurs), le quartz agit comme n'importe quel cristal uniaxe, positif et optiquement inactif. Il existe d'autres cristaux biréfringents, optiquement actifs, uniaxes ou biaxes, tels que le cinabre, HgS ($n_o = 2,854$, $n_e = 3,201$), qui a un pouvoir rotatoire de $32,5^\circ/\text{mm}$. Au contraire, NaClO_3 est une substance optiquement active ($3,1^\circ/\text{mm}$) mais pas biréfringente. En comparaison, le pouvoir rotatoire des liquides est si petit qu'il est spécifié en principe pour une épaisseur de 10 cm ; par exemple pour la térébenthine (C_{10}H_6) il n'est que de $-37^\circ/10$ cm (10° avec $\lambda_0 = 589,3$ nm). Le pouvoir rotatoire des solutions varie selon leur concentration. Ce fait est particulièrement utile pour déterminer

par exemple la quantité de sucre présente dans un échantillon d'urine ou dans un sirop sucré commercial.

On peut assez facilement observer l'activité optique en utilisant un sirop de maïs incolore, que l'on trouve dans n'importe quelle épicerie. On n'a besoin de rien d'autre car β/d est à peu près $+12^\circ/\text{cm}$. Il faut mettre trois centimètres environ de sirop dans un verre entre deux Polaroids croisés et éclairer avec une lampe de poche. Les jolies couleurs qui apparaissent lors de la rotation de l'analyseur proviennent du fait que β est fonction de λ_0 ; cet effet est appelé *dispersion rotatoire*. En utilisant un filtre pour obtenir une lumière à peu près monochromatique, on peut facilement déterminer le pouvoir rotatif du sirop*.

La première grande contribution scientifique de Louis Pasteur (1822-1895) vit le jour en 1848 et était liée à ses recherches de doctorat. Il prouva que l'acide racémique, qui est une forme optiquement inactive de l'acide tartrique, était en fait un mélange contenant des quantités égales de composants lévogyres et dextrogyres. Des substances de cette sorte, qui ont les mêmes formules moléculaires mais diffèrent par leur structure, sont dites isomères. Il fut capable de cristalliser l'acide racémique et de séparer les deux différents types de cristaux coexistants, images inversées l'une de l'autre (énantiomorphes). Après avoir été séparément dissous dans de l'eau, ils formèrent des solutions dextrogyre et lévogyre. Cela impliquait l'existence de molécules qui, bien que chimiquement identiques, étaient l'image inversée l'une de l'autre ; de telles molécules sont appelées stéréo-isomères optiques. Ces idées ont été à la base du développement de la stéréochimie des composés organiques et inorganiques, qui étudie la distribution spatiale tridimensionnelle des atomes dans une molécule donnée.

8.10.1 Un modèle utile

Le phénomène d'activité optique est très compliqué et, bien qu'il puisse être traité en termes de théorie électromagnétique classique, il requiert en fait un traitement par la mécanique quantique[†]. Malgré cela, nous allons considérer un modèle

*Un filtre de gélatine fonctionne bien, mais un morceau de cellophane colorée fera aussi bien l'affaire. Le cellophane va agir comme une lame d'onde (voir paragraphe 8.7.1) ; il ne faut donc pas la mettre entre les Polaroids à moins d'aligner correctement son axe principal.

[†]L'article « Optical Activity and Molecular Dissymmetry », de S. F. Mason, *Contemp. Phys.* **9**, 239 (1968), cite de nombreuses références exhaustives pour approfondir le sujet.

simplifié, qui va permettre une description qualitative et plausible du processus. Revenons à la représentation d'un milieu optiquement isotrope par une population homogène d'électrons-oscillateurs qui vibrent parallèlement au champ \vec{E} d'une onde incidente. Un milieu optiquement anisotrope est de la même manière décrit comme une distribution d'oscillateurs anisotropes qui vibrent suivant une direction qui fait un certain angle avec celle du champ \vec{E} incident. Imaginons à présent que les électrons des substances optiquement actives sont contraints de se déplacer selon des trajectoires courbes, que l'on supposera hélicoïdales, pour simplifier. On peut représenter une telle molécule comme s'il s'agissait d'une hélice conductrice. Les atomes de silicium et d'oxygène dans un cristal de quartz sont disposés en spirales droites ou gauches par rapport à l'axe optique, comme on le voit sur la figure 8.53. Dans cette représentation, ce cristal correspondrait à un réseau parallèle d'hélices. En comparaison, une solution de sucre active serait analogue à une répartition d'hélices orientées aléatoirement, chacune ayant le même sens de rotation.*

Dans le quartz, on peut s'attendre à ce que l'onde venant de l'extérieur interagisse différemment avec l'échantillon, selon qu'elle « voit » des hélices droites ou gauches, et donc à ce

*En plus de ces états solide et liquide, il existe une troisième classification des substances, qui est utile du fait de ses propriétés optiques remarquables. C'est l'état mésomorphe ou des cristaux liquides. Les cristaux liquides sont des composés organiques qui peuvent couler tout en maintenant une orientation moléculaire caractéristique. En particulier les cristaux liquides cholestériques ont une structure hélicoïdale et des pouvoirs rotatoires extrêmement forts, de l'ordre de 40 000°/mm. Le pas du réseau moléculaire en hélice est bien plus petit que celui du quartz.

qu'il y ait différents indices pour les composantes \mathcal{R} et \mathcal{L} de l'onde. Le traitement détaillé du processus qui conduit à la biréfringence circulaire des cristaux n'est pas simple, mais au moins l'asymétrie nécessaire est évidente. Comment se peut-il qu'un réseau aléatoire d'hélices, correspondant à une solution, produise une activité optique ? Examinons une telle molécule dans cette représentation simplifiée, par exemple, une dont l'axe est parallèle au champ \vec{E} harmonique de l'onde électromagnétique. Ce champ va faire monter et descendre les charges sur toute la longueur de la molécule, produisant effectivement un moment dipolaire électrique variable dans le temps $\mathcal{P}(t)$, parallèle à l'axe. De plus, il y a à présent un courant qui est associé au mouvement en spirale des électrons, qui produit à son tour un moment dipolaire magnétique oscillant $\mathcal{M}(t)$, également parallèle à l'axe de l'hélice (figure 8.54). Par contre, si la molécule est parallèle au champ \vec{B} de l'onde, il y a un flux modulé dans le temps, et donc un courant d'électrons induit qui circule autour de la molécule. Cela entraîne à nouveau des moments dipolaires électrique et magnétique, oscillant parallèlement à l'axe. Dans tous les cas, $\mathcal{P}(t)$ et $\mathcal{M}(t)$ seront parallèles ou antiparallèles entre eux, selon le sens de l'hélice de la molécule en question. Manifestement, de l'énergie a été prélevée du champ, et les deux dipôles oscillants vont diffuser (i.e. réémettre) des ondes électromagnétiques. Le champ électrique \vec{E}_p émis dans une direction donnée par un dipôle électrique est perpendiculaire au champ \vec{E}_m émis par un dipôle magnétique. Leur somme, qui est le champ résultant \vec{E}_s , diffusé par une hélice, ne sera pas parallèle au champ incident \vec{E}_i le long de la direction de propagation (ce qui est vrai également pour les champs magnétiques). Le plan de polarisation

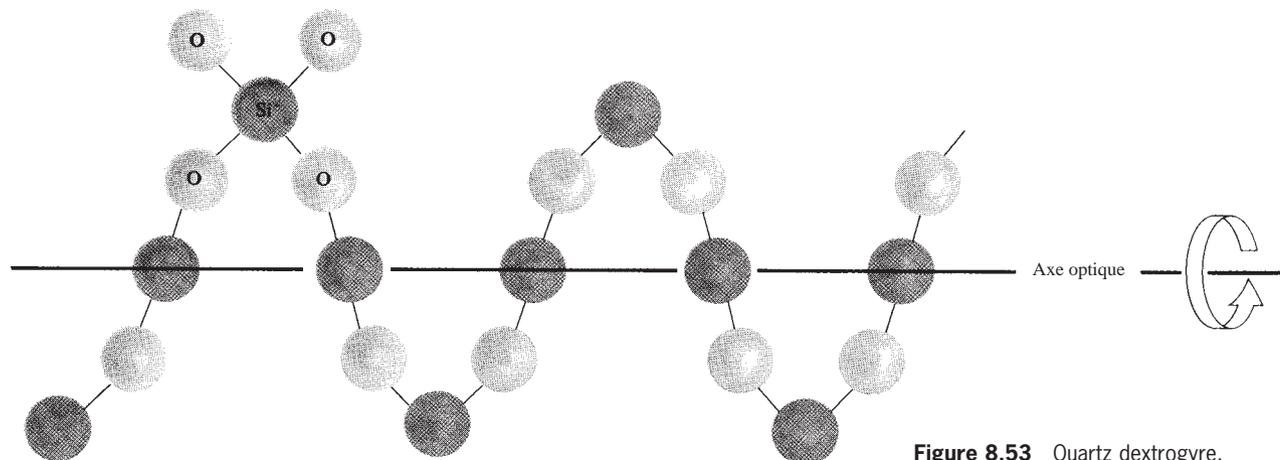


Figure 8.53 Quartz dextrogyre.

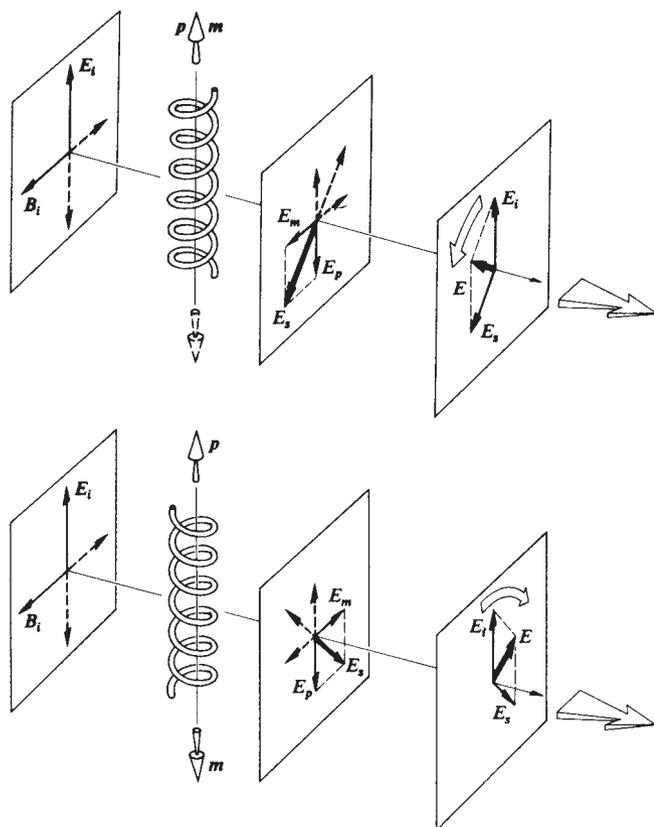


Figure 8.54 Rayonnement émis par des molécules hélicoïdales.

de la lumière transmise ($\vec{E}_s + \vec{E}_i$) aura alors subi une rotation dans une direction déterminée par le sens de l'hélice. La rotation varie en ampleur selon l'orientation de chaque molécule, mais elle s'effectue toujours dans la même direction pour des hélices de même sens.

Bien que cette assimilation des molécules optiquement actives à des conducteurs hélicoïdaux soit assez superficielle, il est intéressant de garder l'analogie à l'esprit. En fait, si l'on dirige un faisceau micro-ondes polarisé linéairement de 3 cm de longueur d'onde sur une boîte remplie d'un grand nombre d'hélices de cuivre identiques (par exemple d'1 cm de long sur 0,5 cm de diamètre et isolées les unes des autres), l'onde transmise va subir une rotation de son plan de polarisation*.

*I. Tinoco et M. P. Freeman, « The Optical Activity of Oriented Copper Helices », *J. Phys. Chem.* **61**, 1196 (1957).

8.10.2 Substances biologiques optiquement actives

Parmi les observations les plus fascinantes liées à l'activité optique, on peut citer celles qui concernent la biologie. Lorsqu'on synthétise des molécules organiques en laboratoire, on obtient le même nombre d'isomères *d* et *l*, ce qui a pour effet d'aboutir à un composé optiquement inactif. On peut donc s'attendre à trouver, s'ils existent, des quantités égales de stéréoisomères optiques *d* et *l* dans des substances organiques naturelles. Or, ce n'est absolument pas le cas. Le sucre naturel (le saccharose, $C_{12}H_{22}O_{11}$) est toujours dextrogyre, d'où qu'il provienne : canne ou betterave. De plus, le simple dextrose ou *d*-glucose ($C_6H_{12}O_6$), qui comme son nom l'indique est *dextrogyre*, est l'hydrate de carbone (glucide) le plus important dans le métabolisme humain. Il semble évident que les êtres vivants peuvent, en quelque sorte, faire la distinction entre isomères optiques.

Toutes les protéines sont fabriquées à partir de composés appelés acides aminés, qui sont des combinaisons de carbone, d'hydrogène, d'oxygène et d'azote. Il existe une vingtaine d'acides aminés, et tous (à l'exception du plus simple, la glycine, qui n'est pas énantiomorphe) sont en principe lévogyres. Cela signifie que si l'on casse une molécule de protéine, quelle que soit sa provenance, les acides aminés qui la constituent seront lévogyres. Une exception importante est le groupe des antibiotiques, tels que la pénicilline, qui contient quelques acides aminés dextrogyres, ce qui peut expliquer l'effet toxique de la pénicilline sur les bactéries.

Il est fascinant de spéculer sur les origines possibles de la vie sur les planètes, et sur la nôtre en particulier. Par exemple, la vie sur Terre consistait-elle, à l'origine, en ces deux formes d'images inversées ? Cinq acides aminés ont été trouvés dans une météorite tombée à Victoria, en Australie, le 28 septembre 1969, et les analyses ont révélé l'existence d'environ le même nombre de formes optiques droites et gauches. Ces résultats sont en rupture avec la prédominance écrasante des formes lévogyres que l'on trouve dans les roches terrestres. Les implications sont nombreuses et magnifiques†.

†Voir *Physics Today*, Feb. 1971, p. 17, pour plus d'approfondissements et de références bibliographiques.

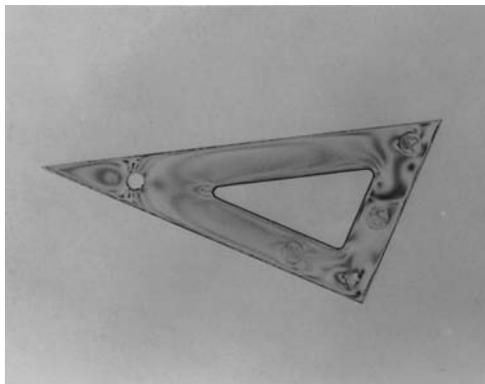
8.11 Effets optiques induits. Modulateurs optiques

Un certain nombre d'effets physiques différents, impliquant la polarisation, partage la caractéristique commune d'être provoqué de manière externe, dans le sens où on exerce une influence externe (par exemple une force mécanique, un champ électrique ou magnétique) sur le milieu pour modifier son comportement optique.

8.11.1 Photoélasticité

En 1816, Sir David Brewster découvrit qu'on pouvait rendre anisotropes des substances isotropes normalement transparentes, par l'application d'une pression mécanique. Ce phénomène est connu sous les noms de *biréfringence mécanique*, **photoélasticité**, ou *biréfringence de pression*. Sous l'effet d'une compression ou d'un étirement, le matériau prend respectivement les propriétés d'un cristal uniaxe négatif ou positif. Dans les deux cas, l'axe optique effectif est dans la direction de la tension, et la biréfringence induite lui est proportionnelle. Si la tension n'est pas uniforme sur tout l'échantillon, la biréfringence et le retard imposés à l'onde transmise ne le seront pas non plus [équation (8.32)].

La photoélasticité est à la base de techniques pour l'étude des tensions dans des structures mécaniques opaques et transparentes (voir la photo). Le verre qui a été recuit de manière irrégulière ou monté sans précaution, que ce soit pour des pare-brise d'automobiles ou des lentilles de télescope, va développer des tensions internes que l'on peut facilement détecter. On peut obtenir des informations sur les tensions de



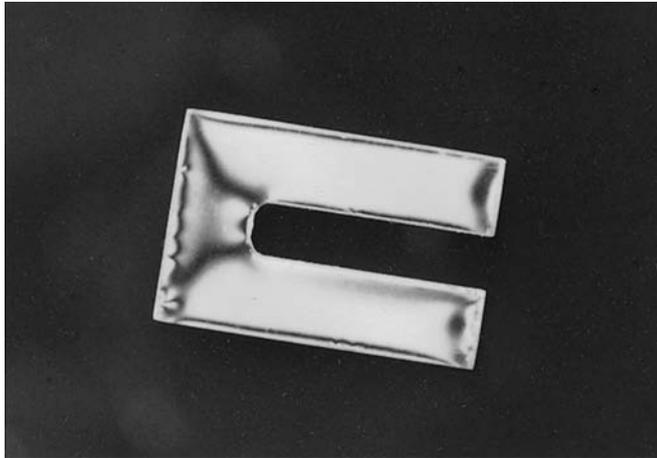
Équerre en plastique entre deux Polaroids. (Photo E. H.)

surface d'objets opaques en collant un revêtement photoélastique sur les parties à étudier. Plus communément, on réalise un modèle réduit transparent de la pièce à étudier, avec un matériau *optiquement sensible aux tensions* comme l'époxy, le glyptol ou les résines de polyester modifiées. Le modèle est alors soumis aux forces que le vrai composant subit en réalité. Puisque la biréfringence varie d'un point à l'autre sur la surface du modèle, un motif de franges varié et compliqué va révéler les tensions internes du modèle lorsque ce dernier est placé entre deux polariseurs croisés. Si on examine un morceau de plastique clair ou même de la gélatine sans parfum entre deux Polaroids, et si l'on applique une tension, on verra les motifs changer en conséquence (voir les photos).

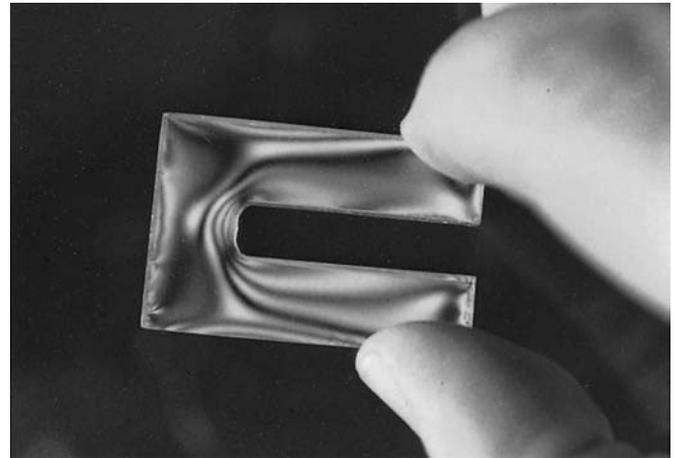
En tout point de l'échantillon, le retard est proportionnel à la différence de tension principale ; c'est-à-dire $(\sigma_1 - \sigma_2)$, où les sigmas sont les tensions orthogonales majeures. Par exemple, si l'échantillon est une lame soumise à une tension verticale, σ_1 est la tension principale maximale dans la direction verticale et σ_2 la tension principale minimale horizontalement (dans ce cas zéro). Dans des situations plus compliquées, les tensions principales, comme leurs différences, varieront d'une région à l'autre. Sous l'action d'une lumière blanche, les emplacements de tous les points du milieu pour lesquels $(\sigma_1 - \sigma_2)$ est constant sont les *régions isochromatiques*, et à chacune de ces régions correspond une couleur particulière. Superposé à ces franges de couleur, il y a un ensemble de bandes noires. Partout où le champ \vec{E} incident est parallèle à l'un des axes d'effort principaux, l'onde va traverser l'échantillon sans être modifiée, quelle que soit sa longueur d'onde. Avec des polariseurs croisés, cette lumière sera absorbée par l'analyseur, produisant une région noire dite bande *isoclinique* (Problème 8.49). En plus d'être belles à regarder, les franges fournissent qualitativement une carte de l'état des tensions et une base aux calculs quantitatifs.

8.11.2 L'effet Faraday

C'est en 1845 que Michael Faraday découvrit qu'on pouvait modifier la propagation de la lumière dans un milieu matériel par l'application d'un champ magnétique externe. En particulier, il trouva que le plan de vibration de la lumière linéaire incidente sur un morceau de verre tournait lorsqu'un champ magnétique fort était appliqué dans la direction de la propagation. L'**effet Faraday** était l'une des premières indications sur les relations entre la lumière et l'électromagnétisme. Bien que cela rappelle l'activité optique, il y a une différence importante.



(a)



(b)

(a) Pièce de plastique transparent à contraintes internes, entre deux polariseurs croisés. (b) L'allure des franges change selon la force appliquée. (Photo E.H.)

Le plan de polarisation tourne d'un angle β (mesuré en minutes d'arc), donné par l'expression déterminée empiriquement :

$$\beta = \mathcal{V}Bd \quad (8.39)$$

où B est la densité de flux magnétique statique (en gauss), d est la longueur de milieu traversée (en cm), et \mathcal{V} est un facteur de proportionnalité, la **constante de Verdet**. Dans un milieu donné, la constante de Verdet varie avec la fréquence (elle chute rapidement quand ν diminue) et la température. Elle est de l'ordre de 10^{-5} min d'arc gauss $^{-1}$ cm $^{-1}$ pour les gaz et 10^{-2} min d'arc gauss $^{-1}$ cm $^{-1}$ pour les solides et les liquides (Tableau 8.2). On peut avoir une meilleure vision de la signification de ces chiffres en imaginant par exemple un échantillon d'un centimètre de long d'H₂O dans un champ modérément étendu de 10^4 gauss. (Le champ de la Terre est d'environ un demi-gauss.) Dans ce cas particulier, comme $\mathcal{V} = 0,0131$, il y aurait une rotation de $2^\circ 11'$.

Par convention, une constante de Verdet positive correspond à un matériau (diamagnétique) pour lequel l'effet Faraday est gauche lorsque la lumière se propage parallèlement au champ \vec{B} appliqué, et droit lorsqu'elle se propage de manière antiparallèle à \vec{B} . De telles inversions de sens de rotation ne se produisent pas dans le cas d'activité optique naturelle. Comme moyen mnémotechnique, imaginons que le champ \vec{B} soit produit par un solénoïde enroulé sur l'échantillon. Lorsque \mathcal{V} est positif, le plan de polarisation tourne

dans la même direction que le courant dans la bobine, indépendamment de la direction de propagation du faisceau le long de son axe. On peut donc amplifier l'effet en faisant faire des aller retour à la lumière grâce à plusieurs réflexions dans l'échantillon.

Le traitement théorique de l'effet Faraday nécessite d'utiliser la théorie quantique de la dispersion, en incluant les effets de \vec{B} sur les niveaux d'énergie atomique ou moléculaire. Cela suffira pour exposer brièvement les arguments classiques limités aux matériaux non magnétiques.

Tableau 8.2 Constantes de Verdet pour quelques matériaux

Matériaux	Température (°C)	\mathcal{V} (min d'arc gauss $^{-1}$ cm $^{-1}$)
Verre Flint léger	18	0,031 7
Eau	20	0,013 1
NaCl	16	0,035 9
Quartz	20	0,016 6
NH ₄ Fe(SO ₄) ₂ ·12H ₂ O	26	-0,000 58
Air*	0	$6,27 \times 10^{-6}$
CO ₂ *	0	$9,39 \times 10^{-6}$

* $\lambda = 578$ nm et 760 nm Hg.

On trouvera une liste plus exhaustive dans la plupart des manuels.

Supposons que la lumière incidente soit circulaire et monochromatique. Sous l'action d'un champ \vec{E} tournant, un électron lié élastiquement va progressivement suivre une orbite circulaire (l'effet du champ \vec{B} de l'onde est négligeable). L'introduction d'un fort champ magnétique constant, perpendiculairement au plan de l'orbite entraînera sur l'électron une force radiale F_M . Cette force peut pointer vers le centre du cercle ou vers l'extérieur, suivant l'hélicité de la lumière et la direction du champ \vec{B} , constant. La force radiale totale (F_M plus la force élastique de rappel) peut dès lors avoir deux valeurs différentes, de même que le rayon de l'orbite. En conséquence, pour un champ magnétique donné, il y aura deux valeurs possibles pour le moment dipolaire électrique, la polarisation et la permittivité, de même que deux valeurs possibles pour l'indice de réfraction, n_R et n_L . L'analyse peut alors se poursuivre de la même manière que pour le traitement de l'activité optique de Fresnel. Comme précédemment, on parle de deux modes de propagation normaux pour les ondes électromagnétiques à travers le milieu, les états R et L .

Pour les substances ferromagnétiques, c'est un peu plus compliqué. Dans le cas d'un matériau magnétisé, β est proportionnel à la composante de la magnétisation dans la direction de la propagation plutôt qu'à celle du champ constant appliqué. Il existe un grand nombre d'applications pratiques de l'effet Faraday. Il peut être utilisé pour analyser des mélanges d'hydrocarbures, puisque chaque composant a une rotation magnétique caractéristique. Lorsqu'on l'utilise pour des études spectroscopiques, il donne des informations sur les propriétés des états excités, au-dessus du niveau fondamental. Chose

curieuse, l'effet Faraday a été utilisé pour la fabrication de modulateurs optiques. Une version infrarouge, construite par R. C. LeCraw, utilisait le grenat d'yttrium et de fer (YIG), qui est un cristal magnétique et synthétique, auquel on avait ajouté une certaine quantité de gallium. YIG a une structure sensible à celle des grenats naturels. Le dispositif est décrit en figure 8.55. Un faisceau laser infrarouge polarisé linéairement arrive sur le cristal par la gauche. Un champ magnétique constant transversal sature la magnétisation du cristal YIG dans cette direction. On peut modifier la direction du vecteur de magnétisation total (provenant du champ constant et du champ de la bobine) en la faisant se rapprocher de l'axe du cristal d'une valeur proportionnelle à la variation du courant dans la bobine. Puisque la rotation de Faraday dépend des composantes axiales de la magnétisation, le courant de la bobine contrôle β . L'analyseur convertit cette modulation de polarisation en modulation d'amplitude par le biais de la loi de Malus [équation (8.24)]. En bref, on introduit dans la bobine le signal à transmettre sous la forme d'une modulation de tension, et le faisceau laser émergent transporte les informations sous la forme de variations d'amplitude.

Il existe en fait de nombreux autres effets magnéto-optiques. Nous n'en considérerons que deux, et plutôt succinctement. *Les effets Voigt et Cotton-Mouton* apparaissent tous deux quand on applique un champ magnétique constant à un milieu transparent, perpendiculairement à la direction de propagation du faisceau incident. Le premier se produit dans des gaz, alors que le second, bien plus fort, se manifeste dans des liquides. Dans les deux cas, le milieu affiche une biréfringence

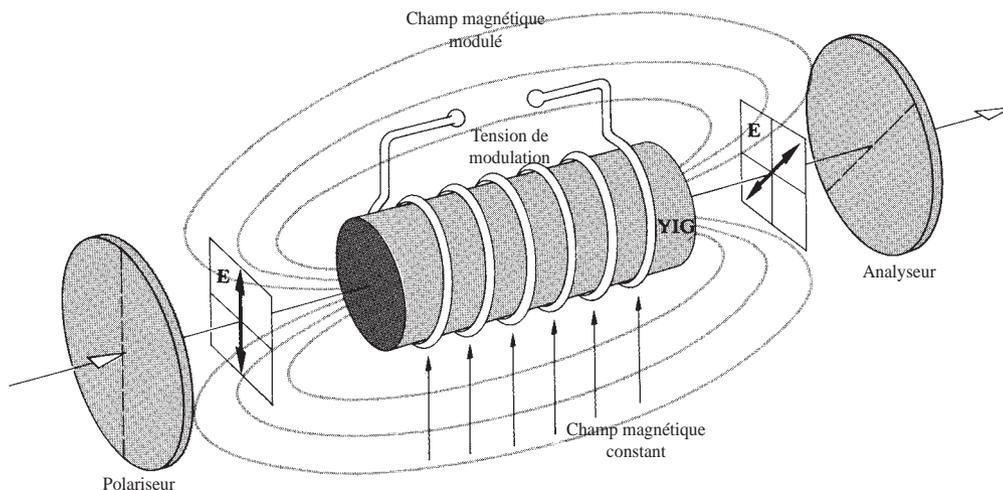


Figure 8.55 Un modulateur à effet Faraday.

similaire à celle d'un cristal uniaxe dont l'axe optique est colinéaire au champ magnétique constant, c'est-à-dire normal au faisceau [équation (8.32)]. Les deux indices de réfraction correspondent à présent aux situations dans lesquelles le plan de polarisation de l'onde est normal ou parallèle au champ magnétique constant. Leur différence Δn (i.e. la biréfringence) est proportionnelle au carré du champ magnétique appliqué. Dans les liquides, il résulte d'un alignement des molécules du milieu qui sont optiquement et magnétiquement anisotropes, avec ce champ. Si la lumière incidente se propage dans une direction qui fait un angle avec le champ statique, autre que 0 ou $\pi/2$, les effets Faraday et Cotton-Mouton apparaissent simultanément ; le premier étant généralement le plus grand des deux. L'effet Cotton-Mouton est l'analogue magnétique de l'effet Kerr (électro-optique), dont l'étude suit.

8.11.3 Les effets Kerr et Pockels

Le premier effet électro-optique fut découvert par le physicien écossais John Kerr (1824-1907) en 1875. Ce dernier trouva qu'une substance isotrope transparente devient biréfringente quand on la place dans un champ électrique \vec{E} . Le milieu prend les caractéristiques d'un cristal uniaxe dont l'axe optique correspond à la direction du champ appliqué. Les deux indices, n_{\parallel} et n_{\perp} , sont associés aux deux orientations du plan de polarisation de l'onde, à savoir parallèle et perpendiculaire à ce champ électrique appliqué. Leur différence, Δn , ou biréfringence, est définie par :

$$\Delta n = \lambda_0 K E^2 \quad (8.40)$$

où K est la **constante de Kerr**. Lorsque K est positive, comme elle l'est le plus souvent, Δn , qui peut être envisagée comme $n_e - n_o$, est positive, et la substance se comporte comme un cristal uniaxe positif. Les valeurs de la constante de Kerr (Tableau 8.3) sont souvent données en unités électrostatiques, et l'on doit donc penser à exprimer E dans l'équation (8.40) en statvolts par cm (un statvolt ≈ 300 V). Observons que, comme l'effet Cotton-Mouton, *l'effet Kerr est proportionnel au carré du champ et l'on s'y réfère souvent en termes d'effet électro-optique quadratique*. Le phénomène dans les liquides est attribué à l'alignement partiel des molécules anisotropes par le champ \vec{E} . Dans les solides, la situation est beaucoup plus compliquée.

La figure 8.56 représente un dispositif appelé obturateur de Kerr ou modulateur optique. Il est constitué d'une cellule de verre contenant deux électrodes et remplie d'un liquide polaire. Cette *cellule de Kerr*, comme on l'appelle, est placée

Tableau 8.3 Constantes de Kerr pour quelques substances liquides (20 °C, $\lambda_0 = 589,3$ nm)

	Substance	K (en unités de 10^{-7} cm statvolt $^{-2}$)
Benzène	C_6H_6	0,6
Bisulfure de carbone	CS_2	3,2
Chloroforme	$CHCl_3$	-3,5
Eau	H_2O	4,7
Nitrotoluène	$C_5H_7NO_2$	123
Nitrobenzène	$C_6H_5NO_2$	220

entre polariseurs linéaires croisés dont les axes de transmission sont à $\pm 45^\circ$ du champ \vec{E} appliqué. Avec une tension électrique nulle entre les plaques, aucune lumière ne sera transmise ; l'obturateur est fermé. L'application d'une tension modulée produit un champ qui convertit la cellule en lame d'onde variable et ouvre donc l'obturateur proportionnellement. La valeur d'un tel dispositif réside dans le fait qu'il peut répondre efficacement jusqu'à des fréquences allant jusqu'à 10^{10} Hz. Les cellules de Kerr, contenant en principe du nitrobenzène ou du disulfure de carbone, ont été employées pendant des années dans bon nombre d'applications. Elles servent d'obturateurs en photographie ultrarapide et de modulateurs de faisceau pour remplacer les roues dentées. En tant que telles, elles ont servi dans les mesures de la vitesse de la lumière. Les cellules de Kerr sont également utilisées en tant que Q-switch dans les systèmes laser impulsionnels.

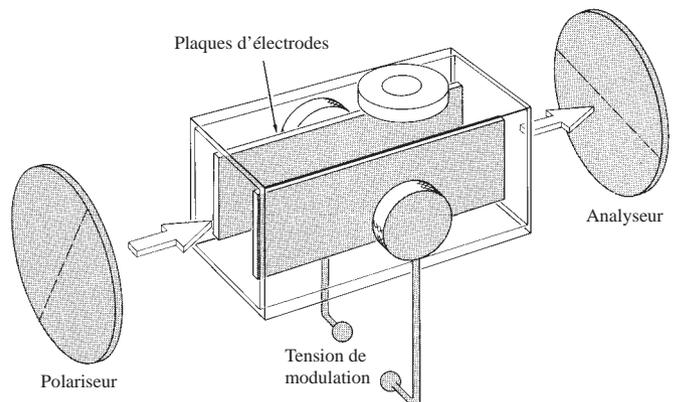


Figure 8.56 Cellule de Kerr.

Si les plaques, qui font fonction d'électrodes, ont une longueur de ℓ cm et sont séparées d'une distance d , le déphasage est donné par :

$$\Delta\varphi = 2\pi K\ell V^2/d^2 \quad (8.41)$$

où V est la tension appliquée. Ainsi pour une cellule à nitrobenzène, avec $d = 1$ cm et ℓ de plusieurs cm, il faudra une tension assez importante, d'environ 3×10^4 V, afin d'obtenir une lame demi-onde. Il s'agit d'une quantité caractéristique appelée *tension demi-onde*, $V_{\lambda/2}$. Un autre inconvénient est que le nitrobenzène est à la fois toxique et explosif. Les substances solides transparentes, telles que le cristal mixte niobate tantalate de potassium ($\text{KTa}_{0,65}\text{Nb}_{0,35}\text{O}_3$), KTN pour simplifier, ou le titanate de baryum (BaTiO_3), qui montrent un effet Kerr, sont donc intéressantes comme modulateurs électro-optiques.

Il y a un autre effet électro-optique très important qui est l'effet Pockels, d'après le physicien allemand Friedrich Carl Alwin Pockels (1865-1913), qui l'étudia dans le détail en 1893. C'est un effet électro-optique linéaire, dans la mesure où la biréfringence induite est proportionnelle au champ \vec{E} appliqué, et donc à la tension appliquée. L'effet Pockels n'existe que dans certains cristaux qui n'ont pas de centre de symétrie point central par rapport auquel tous les atomes sont symétriques deux par deux. Il y a 32 catégories de symétries cristallines, dont 20 peuvent révéler l'effet Pockels. Par ailleurs, ces mêmes 20 catégories sont également piézoélectriques. Ainsi, beaucoup de cristaux et tous les liquides ne peuvent avoir d'effet électro-optique linéaire.

La première cellule de Pockels pratique, qui pouvait se comporter comme un obturateur ou un modulateur, n'a pas été fabriquée avant les années 1940, quand on eût développé des cristaux adéquats. Nous avons déjà exposé le principe de tels dispositifs ; en bref, on modifie électroniquement la biréfringence en appliquant un champ électrique variable. On peut moduler à volonté le retard de phase en changeant l'état de polarisation de l'onde linéaire incidente. De cette manière, le système fonctionne comme un modulateur de polarisation. Les premiers dispositifs étaient constitués de phosphate di-hydrogéné d'ammonium ($\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$) ou ADP, et phosphate di-hydrogéné de potassium (KH_2PO_4) ou KDP, encore utilisés aujourd'hui. Une grande amélioration est survenue grâce à l'introduction de monocristaux de phosphate di-deutééré de potassium (KD_2PO_4) ou KD*P, qui provoque le même déphasage avec des tensions plus de deux fois inférieures à celles nécessaires pour le KDP. Ce procédé de diffusion du deutérium dans les cristaux consiste à les baigner dans une solution

d'eau lourde. Les cellules de KD*P ou de CD*A (arsenate di-deutééré de césium) sont produites dans le commerce depuis de nombreuses années.

Une *cellule de Pockels* est simplement un monocristal, approprié, non centrosymétrique, orienté, et plongé dans un champ électrique contrôlable. On peut faire fonctionner ces dispositifs à des tensions assez basses (environ 5 à 10 fois moins que celles d'une cellule de Kerr équivalente) ; ils sont linéaires, et bien sûr il n'y a aucun problème avec des liquides toxiques. Le temps de réponse du KDP est assez court, en principe inférieur à 10 ns, et il peut moduler un faisceau lumineux jusqu'à environ 25 GHz (i.e. 25×10^9 Hz).

Il existe deux configurations communes de cellules, dites *transversale* et *longitudinale*, selon que le champ \vec{E} appliqué est perpendiculaire ou parallèle à la direction de propagation du faisceau. Le type longitudinal est illustré dans sa forme la plus basique à la figure 8.57. Le faisceau traverse les électrodes, qui sont en principe faites de couches d'oxyde de métal transparentes (par exemple SnO, InO, ou CdO), de films métalliques fins, de grilles ou d'anneaux. Le cristal lui-même est en principe uniaxe en l'absence de champ appliqué, et il est aligné de manière à ce que son axe optique soit parallèle à la direction de propagation du faisceau. Pour un tel dispositif, le retard de phase est donné par :

$$\Delta\varphi = 2\pi n_o^3 r_{63} V/\lambda_0 \quad (8.42)$$

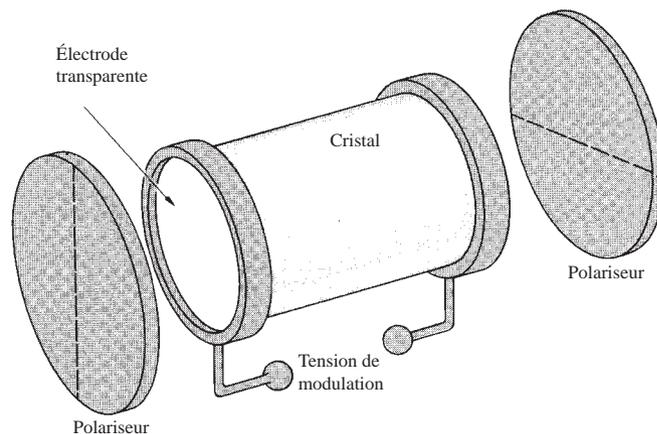


Figure 8.57 Cellule de Pockels.

* Cette expression, si l'on prend le mode transversal approprié, est obtenue assez facilement dans A. Yariv, *Quantum Electronics*. Signalons cependant que cette analyse est assez complexe.

où r_{63} est la *constante électro-optique* en m/V, n_o l'indice de réfraction *ordinaire*, V la différence de potentiel en volts, et λ_0 la longueur d'onde dans le vide en mètres.* Puisque les cristaux sont anisotropes, leurs propriétés varient en fonction de la direction, et elles sont décrites par un tenseur électro-optique de second rang r_{ij} . Heureusement, il n'est besoin de connaître qu'une seule de ses composantes, r_{63} , dont les valeurs sont données dans le Tableau 8.4. La tension demi-onde correspondant à $\Delta\varphi = \pi$, on a :

$$\Delta\varphi = \pi \frac{V}{V_{\lambda/2}} \quad (8.43)$$

et selon l'équation (8.42) :

$$V_{\lambda/2} = \frac{\lambda_0}{2n_o^3 r_{63}} \quad (8.44)$$

À titre d'exemple, pour KDP, $r_{63} = 10,6 \times 10^{-12}$ m/V, $n_o = 1,51$, et l'on obtient $V_{\lambda/2} \approx 7,6 \times 10^3$ V à $\lambda_0 = 546,1$ nm.

Les cellules de Pockels ont été utilisées comme des obturateurs ultrarapides, des Q-switch pour lasers, et des modulateurs de lumière depuis le continu jusqu'à 30 GHz.*

8.12 Cristaux liquides

En 1888 le botaniste autrichien Friedrich Reintzer observa que le benzoate de cholestéryl semblait avoir deux points de transition différents, l'un pour lequel le cristal se changeait en liquide trouble, et l'autre pour lequel il devenait transparent. Il avait découvert une nouvelle phase de la matière, connue

*Le lecteur intéressé par la modulation de lumière en général pourra consulter D. F. Nelson, « The Modulation of Laser Light », *Scientific American* (June 1968). Voir aussi le chapitre 14, vol. II du *Handbook of Optics* (1995).

Tableau 8.4 Les constantes électro-optiques (Température ambiante, $\lambda_0 = 546,1$ nm)

Matériau	r_{63} (10^{-12} m/V)	n_o (approx.)	$V_{\lambda/2}$ (kV)
ADP ($\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$)	8,5	1,52	9,2
KDP (KH_2PO_4)	10,6	1,51	7,6
KDA (KH_2AsO_4)	~13,0	1,57	~6,2
KD*P (KD_2PO_4)	~23,3	1,52	~3,4

aujourd'hui sous le nom de **cristal liquide**, qui possédait des propriétés physiques situées entre celles des liquides et celles des solides ordinaires. Les cristaux liquides (LCs) ont des molécules longues en forme de cigare, qui peuvent se déplacer et, qui comme les liquides, n'ont pas de positions ordonnées. Malgré tout, comme les cristaux, leurs molécules interagissent fortement pour soutenir un ordre d'orientation à grande échelle. Il y a trois types de cristaux liquides qui se distinguent par la manière dont leurs molécules s'alignent. Nous allons nous concentrer sur la variété **nématique**, où les molécules tendent à être plus ou moins parallèles, même si leurs positions sont assez aléatoires (figure 8.58).

Pour préparer une **cellule nématique parallèle**, on commence par recouvrir l'une des faces de deux lames de verre, d'un film métallique électriquement conducteur et transparent, tel que l'oxyde d'étain et d'indium (qui a une transmission maximale de 450 à 1800 nm). Ces deux lames vont également servir d'électrodes, entre lesquelles on place les cristaux liquides au travers desquels on appliquera une tension contrôlée. On veut que les molécules LC en contact avec la fenêtre soient orientées dans une direction qui soit à la fois parallèle à la vitre et aux autres molécules. Pour cela, il est nécessaire de créer un modèle de stries parallèles, le long desquelles les molécules LC peuvent s'aligner. Il y a diverses manières de le faire, la plus simple étant de frotter la surface d'oxyde d'étain et d'indium (ou une fine couche diélectrique), pour produire des microsillons parallèles qui la recouvre.

Lorsqu'on remplit de cristal liquide nématique l'espace fin (de quelques microns à 10 μm) entre les deux fenêtres ainsi préparées, les molécules en contact avec les microsillons s'ancrent d'elles-mêmes parallèlement aux stries. Les molécules LC s'alignent d'elles-mêmes, et rapidement la totalité du liquide est orienté similairement (figure 8.59a). La direction dans laquelle les molécules d'un cristal liquide sont alignées est le **directeur**.

Du fait de leur forme allongée et de leur orientation ordonnée, les molécules du cristal liquide se comportent *en masse* comme un diélectrique anisotrope qui serait biréfringent, uniaxe et positif. L'axe long des molécules définit la direction

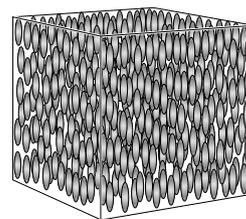


Figure 8.58 Les longues molécules en forme de cigare d'un cristal liquide nématique s'alignent aléatoirement mais toujours en formation parallèle.

de l'indice extraordinaire ou axe lent. Un rayon polarisé linéairement et parallèlement au directeur LC sera un rayon extraordinaire et va connaître un changement de phase continu en traversant la cellule. Au contraire, un rayon polarisé linéairement à 45° du directeur va subir un déphasage $\Delta\varphi$ entre ses deux composantes comme s'il était passé à travers un cristal biréfringent.

Lame de phase variable à cristaux liquides

Supposons que nous appliquions une tension (V) à la cellule (figure 8.59b), créant ainsi un champ électrique perpendiculaire aux fenêtres. Les dipôles électriques sont présents ou induits, et les molécules LC subissent une torsion qui les pousse à s'aligner avec le champ. Si la tension augmente, les molécules (sauf celles qui sont ancrées sur les surfaces intérieures des fenêtres), tournent de plus en plus en direction du champ, faisant baisser la biréfringence, $\Delta n = (n_e - n_o)$, et également le déphasage $\Delta\varphi$. Puisque la biréfringence (en principe entre 0,1 et 0,3) est fonction de la tension, de la température (baissant de 0,4 % par $^\circ\text{C}$ en plus) et de la longueur d'onde (diminuant quand λ_0 augmente) :

$$\Delta\varphi(V, T, \lambda_0) = \frac{2\pi}{\lambda_0} d\Delta n(V, T, \lambda_0)$$

On obtient le déphasage maximal (typiquement $\approx \lambda_0/2$) lorsque la tension est nulle. Quand V est grand (disons 20 V), il est à un minimum d'environ 30 nm (ou zéro, avec un compensateur pour annuler le retard résiduel des couches ancrées).

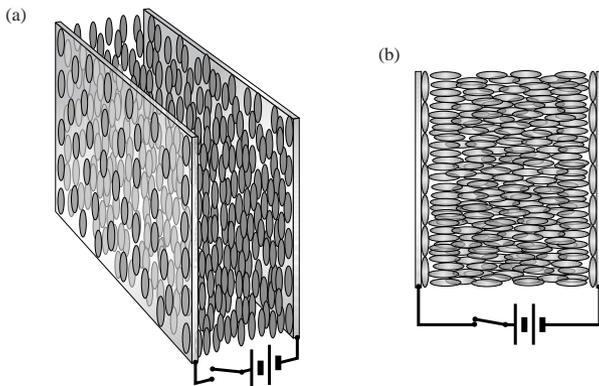


Figure 8.59 (a) Cristal liquide nématique placé entre deux électrodes transparentes. Les longues molécules s'alignent sur un ensemble de microsillons gravés sur les faces intérieures des électrodes. (b) Lorsqu'on applique une tension, les molécules s'alignent sur le champ.

Lorsque la lumière incidente est polarisée et parallèle à l'axe lent, on peut utiliser le dispositif comme *modulateur de phase* à tension contrôlée, qui peut changer le déphasage subi par la lumière lors de la traversée de la cellule. Autrement dit, quand la lumière a des composantes parallèle et perpendiculaire à l'axe lent, la cellule LC fonctionne comme un *retardateur continu variable* sur une large gamme de longueurs d'onde. En plaçant la cellule entre deux polariseurs croisés (à $\pm 45^\circ$), on obtient un *modulateur d'éclairement* par le contrôle de la tension.

L'écran à cristaux liquides

Supposons que l'on tourne de 90° , sur elle-même, l'une des fenêtres de la cellule à cristal liquide parallèle de la figure 8.59a. Cela fait tourner le liquide nématique de telle sorte que ses couches moléculaires effectuent un quart de tour autour de l'axe normal aux fenêtres (un peu comme si l'on avait un jeu de cartes entre les deux mains et qu'on les déploie en éventail). Le résultat obtenu est une cellule nématique en hélice (figure 8.60a). Les molécules sont alignées verticalement sur l'une des fenêtres et tournent progressivement, couche après couche, jusqu'à être horizontales sur l'autre fenêtre. La cellule va faire tourner le plan de vibration comme s'il s'agissait d'un milieu optiquement actif.* Par exemple, un faisceau de

.....

*Pour preuve, voir B. E. A. Saleh et M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, p. 228.

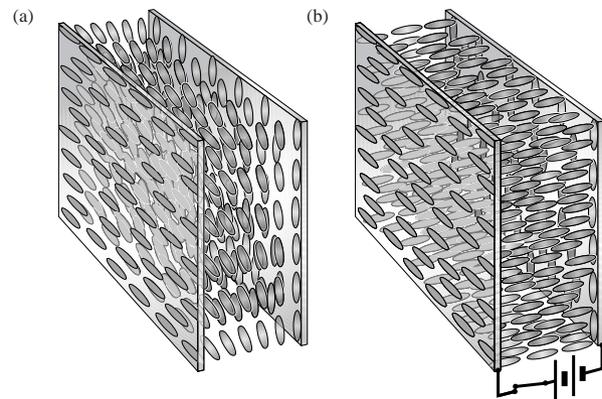


Figure 8.60 (a) Cellule nématique torsadée. Les molécules de cristal liquide sont alignées horizontalement sur la fenêtre de gauche et verticalement sur celle de droite, et elles tournent graduellement (plan après plan) de l'une à l'autre. (b) Lorsqu'on applique une tension dans la cellule, les molécules s'alignent sur le champ électrique.

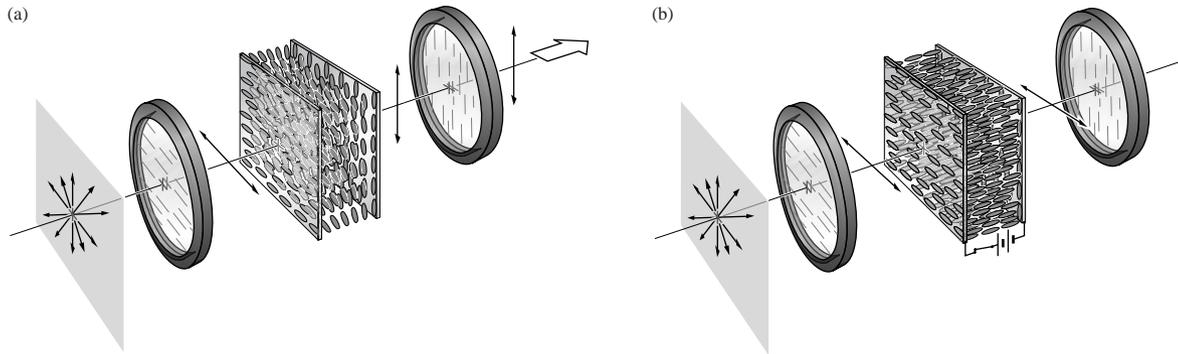


Figure 8.61 (a) Cellule nématique torsadée entre deux polariseurs linéaires croisés. La lumière sort du dispositif en étant polarisée verticalement. (b) Lorsqu'on applique une tension dans la cellule, elle ne peut plus faire tourner le plan de polarisation ; la lumière polarisée horizontalement arrive, pénètre et quitte la cellule de cristaux liquides ; celle-ci est alors absorbée par le second polariseur et aucune lumière ne sort du dispositif.

lumière linéaire sous incidence normale sur la fenêtre d'entrée, et polarisée parallèlement aux molécules ancrées en figure 8.60a, c'est-à-dire horizontalement, va tourner de 90° en polarisation et va sortir polarisé verticalement.

Lorsqu'on met la cellule sous tension, on met en place dans le cristal liquide un champ électrique qui est parallèle à l'axe de rotation. En conséquence, les molécules LC (sauf celles ancrées dans la fenêtre) s'alignent par rapport au champ (figure 8.60b). La structure torsadée de la cellule s'efface, et perd sa capacité à faire tourner le plan de polarisation de la lumière incidente. Lorsque le champ E est supprimé, la cellule reprend sa configuration torsadée et peut à nouveau faire tourner la polarisation de la lumière. Si on place à présent la cellule entre deux polariseurs linéaires croisés (figure 8.61), elle devient un *filtre contrôlable électriquement* qui peut transmettre ou absorber plus ou moins la lumière incidente.

L'écran à cristaux liquides (LCD) le plus simple, que l'on trouve dans les montres digitales, les pendules, les caméras, les calculatrices, etc., est éclairé par la lumière ambiante. Sa principale qualité est de consommer très peu de puissance électrique puisqu'il ne s'auto-illumine pas.

Pour fabriquer un écran LCD, il suffit de placer un miroir plan derrière le dernier polariseur sur la droite de la figure 8.61. La lumière ambiante entre par la gauche et se trouve immédiatement polarisée linéairement (dans ce cas horizontalement). En l'absence de tension entre les électrodes, la lumière émerge de la cellule LC en hélice et en polarisation verticale. Elle refait alors le chemin inverse à travers la cellule LC, d'où elle sort par la gauche, polarisée horizontalement. En regardant au travers du premier polariseur, on voit une zone relativement brillante.

Lorsqu'une tension est appliquée sur la cellule, le cristal liquide se réoriente et perd sa capacité à faire tourner le plan de polarisation. La lumière polarisée horizontalement entre dans la cellule, puis la quitte, pour être complètement absorbée par le second polariseur ; la fenêtre d'entrée est à présent noire parce qu'il ne ressort pas de lumière.

En configurant correctement l'électrode transparente à l'entrée, on peut donner à la région noire la forme de chiffres ou de lettres, ou d'autres symboles. En principe, les chiffres des calculatrices sont produits grâce à sept petites électrodes en forme de barre (figure 8.62), qui sont activées indépendamment (par la commande d'un circuit intégré) pour créer tous les chiffres de 0 à 9. Ces barres constituent des régions isolées

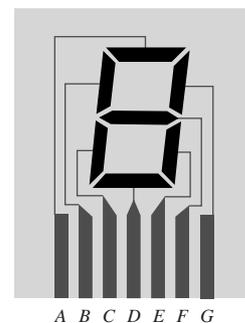


Figure 8.62 Dispositif à sept électrodes en forme de barre utilisé pour afficher des nombres. Par exemple, pour former le nombre 9, on applique une tension entre chacun des segments D , E , F , G , A , B et la grande électrode à l'arrière.



(a)



(b)

En faisant tourner un polariseur linéaire devant un écran à cristaux liquides, on peut voir les nombres apparaître et disparaître. Essayer avec une calculatrice ! (Photo E.H.)

sur le film frontal d'oxyde d'étain et d'indium. Lorsqu'une tension est appliquée entre une barre donnée et la grande électrode à l'arrière, le champ électrique créé derrière la barre détruit la torsade du cristal liquide dans cette petite région, et ce segment devient noir.

8.13 Une description mathématique de la polarisation

Jusqu'à présent nous avons considéré la lumière polarisée en termes du champ électrique constituant l'onde, la représentation la plus générale étant, bien sûr, celle de la lumière elliptique. L'extrémité du vecteur \vec{E} balayait de manière continue la trajectoire d'une ellipse ; le cercle et la droite étant des cas particuliers. La durée de balayage de l'ellipse était la période de l'onde lumineuse (i.e. environ 10^{-15} s) et était bien trop courte pour être détectée. Par contre, les mesures expérimentales sont des moyennes sur des intervalles de temps assez longs.

Manifestement, il serait avantageux de formuler une autre description de la polarisation, en termes de grandeurs observables, telles que l'éclairement. Il n'est pas uniquement question ici d'allier l'esthétique à la pédagogie. Le formalisme suivant est d'une importance capitale dans d'autres domaines d'étude, notamment en physique des particules (le photon étant après tout une particule élémentaire) et en mécanique quantique. Il va servir en quelque sorte à relier l'approche classique et celle de la mécanique quantique. Mais plus

encore, cette description différente va représenter un formidable intérêt pratique.

On va développer une procédure élégante pour prévoir l'effet d'associations complexes de composants polarisants sur l'état ultime d'une onde émergente. Les mathématiques utilisées, écrites sous forme matricielle, ne nécessiteront que des manipulations simples. La logique compliquée associée aux retards de phase, aux orientations relatives, et ainsi de suite, pour une série de deux lames d'ondes et de polariseurs est déjà quasiment introduite. Il suffit de sélectionner les matrices appropriées dans un tableau et de les introduire dans ce formalisme mathématique.

8.13.1 Les paramètres de Stokes

La représentation moderne de la lumière polarisée trouve ses origines en 1852 dans le travail de G. G. Stokes. Celui-ci introduisit quatre quantités qui ne sont fonctions que des grandeurs observables de l'onde électromagnétique, qu'on appelle les **paramètres de Stokes***. Grâce à ces grandeurs, on peut

.....

*La plupart des éléments de ce paragraphe sont abordés de manière plus exhaustive dans Shurcliff's *Polarized Light: Production and Use*, qui est un classique du sujet. On pourra aussi consulter M. J. Walker, « Matrix Calculus and the Stokes Parameters of Polarized Radiation », *Am. J. Phys.* **22**, 170 (1954), et W. Bickel and W. Bailey, « Stokes Vectors, Mueller Matrices, and Polarized Scattered Light », *Am. J. Phys.* **53**, 468 (1985).

décrire l'état de polarisation d'un faisceau lumineux (qu'il soit totalement, partiellement ou non polarisé). Nous allons d'abord définir opérationnellement les paramètres, puis les relier à la théorie électromagnétique.

Imaginons que nous disposons de quatre filtres, chacun d'entre eux transmettant la moitié de la lumière incidente si celle-ci est naturelle, l'autre moitié étant abandonnée. Le choix n'est pas unique, et il existe un grand nombre de possibilités équivalentes. Supposons maintenant que le premier filtre soit simplement isotrope, laissant passer tous les états de manière égale, alors que le deuxième et le troisième sont des polariseurs linéaires dont les axes de transmission sont pour le premier horizontal, et pour l'autre à $+45^\circ$ (c'est la diagonale qui passe par le premier et le troisième quadrant). Le dernier filtre est un polariseur circulaire opaque aux états \mathcal{L} . On placera chacun des ces quatre filtres, seul, sur la trajectoire du faisceau étudié, et l'on mesurera les éclaircissements transmis I_0, I_1, I_2, I_3 avec un détecteur insensible à la polarisation (ils ne le sont pas tous). La définition opérationnelle des paramètres de Stokes est donnée par les relations :

$$\mathcal{S}_0 = 2I_0 \quad (8.45a)$$

$$\mathcal{S}_1 = 2I_1 - 2I_0 \quad (8.45b)$$

$$\mathcal{S}_2 = 2I_2 - 2I_0 \quad (8.45c)$$

$$\mathcal{S}_3 = 2I_3 - 2I_0 \quad (8.45d)$$

Notons que \mathcal{S}_0 est simplement l'éclaircissement incident, et $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2,$ et \mathcal{S}_3 spécifient l'état de polarisation. Ainsi \mathcal{S}_1 reflète le rapprochement de la polarisation vers un état \mathcal{P} soit horizontal (où $\mathcal{S}_1 > 0$) soit vertical (auquel cas $\mathcal{S}_1 < 0$). Lorsque le faisceau ne montre pas d'orientation préférentielle par rapport à ces axes ($\mathcal{S}_1 = 0$), il se peut qu'il soit elliptique à $\pm 45^\circ$, circulaire ou non polarisé. De même, \mathcal{S}_2 indique la tendance vers l'état \mathcal{P} soit dans la direction de $+45^\circ$ (quand $\mathcal{S}_2 > 0$), soit dans la direction de -45° (quand $\mathcal{S}_2 < 0$), soit aucune ($\mathcal{S}_2 = 0$). De la même façon, \mathcal{S}_3 révèle une tendance de la polarisation à adopter un sens de rotation vers la droite ($\mathcal{S}_3 > 0$), vers la gauche ($\mathcal{S}_3 < 0$), ou aucun des deux ($\mathcal{S}_3 = 0$).

Maintenant, reprenons les expressions pour un faisceau quasi monochromatique,

$$\vec{\mathbf{E}}_x(t) = \hat{\mathbf{i}}E_{0x}(t) \cos [\bar{k}z - \bar{\omega}t + \varepsilon_x(t)] \quad [8.34a]$$

et

$$\vec{\mathbf{E}}_y(t) = \hat{\mathbf{j}}E_{0y}(t) \cos [\bar{k}z - \bar{\omega}t + \varepsilon_y(t)] \quad [8.34b]$$

où $\vec{\mathbf{E}}(t) = \vec{\mathbf{E}}_x(t) + \vec{\mathbf{E}}_y(t)$. En les utilisant d'une manière assez simple et directe, on peut reformuler les paramètres de Stokes* ainsi :

$$\mathcal{S}_0 = \langle E_{0x}^2 \rangle_T + \langle E_{0y}^2 \rangle_T \quad (8.46a)$$

$$\mathcal{S}_1 = \langle E_{0x}^2 \rangle_T - \langle E_{0y}^2 \rangle_T \quad (8.46b)$$

$$\mathcal{S}_2 = \langle 2E_{0x}E_{0y} \cos \varepsilon \rangle_T \quad (8.46c)$$

$$\mathcal{S}_3 = \langle 2E_{0x}E_{0y} \sin \varepsilon \rangle_T \quad (8.46d)$$

Ici $\varepsilon = \varepsilon_y - \varepsilon_x$ et nous avons abandonné la constante $\epsilon_0 c/2$, afin que les paramètres soient désormais *proportionnels* aux éclaircissements. Pour le cas hypothétique d'une lumière parfaitement monochromatique, $E_{0x}(t), E_{0y}(t)$, et $\varepsilon(t)$ sont indépendants du temps, et l'on doit simplement supprimer les parenthèses $\langle \rangle$ dans l'équation (8.46) pour obtenir les vrais paramètres de Stokes. Constatation intéressante, on peut arriver aux mêmes résultats en effectuant une moyenne temporelle de l'équation (8.14), qui est l'équation générale de la polarisation elliptique.†

Si le faisceau n'est pas polarisé, $\langle E_{0x}^2 \rangle_T = \langle E_{0y}^2 \rangle_T$; et aucun de ces deux termes n'a une moyenne nulle, car une amplitude au carré est toujours positive. Dans ce cas $\mathcal{S}_0 = \langle E_{0x}^2 \rangle_T + \langle E_{0y}^2 \rangle_T$ mais $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3 = 0$. Les deux derniers paramètres sont nuls car la moyenne de $\cos \varepsilon$ et $\sin \varepsilon$ est égale à zéro, indépendamment des amplitudes. Il est souvent utile de *normaliser* les paramètres de Stokes en les divisant par la valeur de \mathcal{S}_0 . Ce qui a pour effet d'utiliser un faisceau incident d'éclaircissement unitaire. Le groupe de paramètres ($\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$) pour la *lumière naturelle* dans la représentation normalisée est alors (1,0,0,0). Si la lumière est polarisée horizontalement, elle n'a pas de composante verticale, et les paramètres normalisés sont (1,1,0,0). De même, pour la lumière verticalement polarisée on a (1,-1,0,0). Les représentations de quelques autres états de polarisation se trouvent dans le Tableau 8.5. (Les paramètres sont affichés verticalement pour des raisons que nous exposerons plus tard.) Notons que pour une lumière totalement polarisée, il découle de l'équation (8.46) que :

$$\mathcal{S}_0^2 = \mathcal{S}_1^2 + \mathcal{S}_2^2 + \mathcal{S}_3^2 \quad (8.47)$$

*Pour plus de détails, voir E. Hecht, « Note on an Operational Definition of the Stokes Parameters », *Am. J. Phys.* **38**, 1156 (1970).

†E. Collett, « The Description of Polarisation in Classical Physics », *Am. J. Phys.* **36**, 713 (1968).

Tableau 8.5 Vecteurs de Stokes et de Jones pour quelques états de polarisation

État de polarisation	Vecteur de Stokes	Vecteur de Jones
État \mathcal{P} horizontal	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
État \mathcal{P} vertical	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
État \mathcal{P} à $+45^\circ$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
État \mathcal{P} à -45°	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
État \mathcal{R}	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$
État \mathcal{L}	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

De plus, pour une lumière partiellement polarisée on peut prouver que le degré de polarisation [équation (8.29)] est donné par :

$$V = (\mathcal{S}_1^2 + \mathcal{S}_2^2 + \mathcal{S}_3^2)^{1/2} / \mathcal{S}_0 \tag{8.48}$$

Imaginons à présent que nous ayons deux ondes quasi monochromatiques décrites par $(\mathcal{S}'_0, \mathcal{S}'_1, \mathcal{S}'_2, \mathcal{S}'_3)$ et $(\mathcal{S}''_0, \mathcal{S}''_1, \mathcal{S}''_2, \mathcal{S}''_3)$, qui se superposent dans une région de l'espace. Tant que les ondes sont incohérentes, n'importe lequel des paramètres de Stokes de la résultante sera la somme des paramètres correspondant à chacune des ondes (tous étant proportionnels à l'éclairement). En d'autres termes, le groupe de paramètres décrivant la résultante est $(\mathcal{S}'_0 + \mathcal{S}''_0, \mathcal{S}'_1 + \mathcal{S}''_1, \mathcal{S}'_2 + \mathcal{S}''_2, \mathcal{S}'_3 + \mathcal{S}''_3)$. Par exemple, si

un état \mathcal{P} vertical d'éclairement unitaire $(1, -1, 0, 0)$ est ajouté à un état \mathcal{L} incohérent (Tableau 8.5) d'éclairement 2, $(2, 0, 0, -2)$, l'onde composée aura pour paramètres $(3, -1, 0, -2)$. C'est une ellipse de densité de flux 3, plus proche de la verticale que de l'horizontale ($\mathcal{S}_1 < 0$), gauche ($\mathcal{S}_3 < 0$), et ayant un degré de polarisation de $\sqrt{5}/3$.

On peut envisager l'ensemble des paramètres de Stokes d'une onde donnée comme un vecteur ; nous avons déjà vu comment deux vecteurs de ce type (incohérents) s'additionnent.* En fait, ce ne sera pas le type de vecteur habituel en trois dimensions, mais une des représentations, très utilisée en physique, dans laquelle les paramètres $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3)$ sont disposés sous la forme de *vecteurs colonnes*,

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_0 \\ \mathcal{S}_1 \\ \mathcal{S}_2 \\ \mathcal{S}_3 \end{bmatrix} \tag{8.49}$$

8.13.2 Les vecteurs de Jones

Une autre représentation de la lumière polarisée, qui complète celle des paramètres de Stokes, a été inventée en 1941 par le physicien américain R. Clark Jones. La technique qu'il développa a l'avantage d'être applicable aux faisceaux cohérents et d'être également très concise. Mais, contrairement au formalisme précédent, elle *ne s'applique qu'aux ondes polarisées*. Dans ce cas, il semble que la manière la plus naturelle de représenter le faisceau serait en termes du vecteur électrique lui-même. Écrit sous forme de colonne, ce *vecteur de Jones* est :

$$\vec{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{bmatrix} \tag{8.50}$$

où $E_x(t)$ et $E_y(t)$ sont les composantes scalaires instantanées de $\vec{\mathbf{E}}$. Évidemment, en connaissant $\vec{\mathbf{E}}$, on connaît tout de l'état de polarisation et, si l'on préserve l'information sur la phase, on sera capable de traiter des ondes cohérentes. En gardant cela à l'esprit, on réécrit l'équation (8.50) sous une forme complexe ;

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i\varphi_x} \\ E_{0y} e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} \tag{8.51}$$

*Les conditions requises pour qu'un groupe d'objets forme un espace vectoriel et qu'ils soient eux-mêmes des vecteurs sont décrites par exemple, dans Davis, *Introduction to Vector Analysis*.

où φ_x et φ_y sont les phases appropriées. Les états \mathcal{P} , respectivement horizontal et vertical, sont donc donnés par :

$$\tilde{\mathbf{E}}_h = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i\varphi_x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{E}}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{0y} e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} \quad (8.52)$$

On obtient la superposition de deux faisceaux cohérents, comme avec les vecteurs de Stokes, en sommant les deux composantes correspondantes. Comme $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_h + \tilde{\mathbf{E}}_v$, quand $E_{0x} = E_{0y}$ et $\varphi_x = \varphi_y$, $\tilde{\mathbf{E}}$ est donné par :

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i\varphi_x} \\ E_{0x} e^{i\varphi_x} \end{bmatrix} \quad (8.53)$$

ou après factorisation :

$$\tilde{\mathbf{E}} = E_{0x} e^{i\varphi_x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8.54)$$

qui est un état \mathcal{P} à $+45^\circ$. C'est le cas, puisque les amplitudes sont égales et que la différence de phase est nulle.

Dans beaucoup d'applications, il n'est pas nécessaire de connaître exactement les amplitudes et les phases, et, on peut *normaliser* l'éclairement à l'unité. On perd ainsi quelques informations mais on y gagne des expressions bien plus simples, en divisant chaque élément du vecteur par la même quantité scalaire (réelle ou complexe), afin que la somme des carrés des composantes soit égale à un. Par exemple, on divise les termes de l'équation (8.53) par $\sqrt{2} E_{0x} e^{i\varphi_x}$ et l'on obtient :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{45} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8.55)$$

De même, sous forme normalisée :

$$\tilde{\mathbf{E}}_h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{E}}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8.56)$$

$E_{0x} = E_{0y}$ pour la lumière circulaire droite, et la composante y devance la composante x de 90° . Puisque nous utilisons la forme $(kz - \omega t)$, nous devons ajouter $-\pi/2$ à φ_y , et ainsi :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i\varphi_x} \\ E_{0x} e^{i(\varphi_x - \pi/2)} \end{bmatrix}$$

En divisant les deux composantes par $E_{0x} e^{i\varphi_x}$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-i\pi/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Le vecteur de Jones complexe normalisé est donc* :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad \text{et de même} \quad \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad (8.57)$$

La somme $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{R}} + \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{L}}$ est :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1+1 \\ -i+i \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il s'agit d'un état \mathcal{P} horizontal ayant une amplitude deux fois plus grande que celle des autres composantes, un résultat en accord avec nos calculs précédents de l'équation (8.10). On peut obtenir le vecteur de Jones pour la lumière elliptique de la même façon que celle qui nous a servi pour obtenir $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{R}}$ et $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{L}}$, avec maintenant le fait que E_{0x} ne sera pas obligatoirement égal à E_{0y} , et que la différence de phase peut différer de 90° . En fait, tout ce dont nous avons besoin pour obtenir les états \mathcal{E} verticaux et horizontaux est d'étendre la forme circulaire pour en faire une ellipse, en multipliant chaque composante par un scalaire. Ainsi :

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix} \quad (8.58)$$

décrit une forme possible de lumière elliptique droite horizontale.

On dit que deux vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ sont orthogonaux lorsque $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$, et que deux états de polarisation sont *orthogonaux* quand leurs vecteurs de Jones sont orthogonaux. Par exemple,

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{R}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{L}}^* = \frac{1}{2} [(1)(1)^* + (-i)(i)^*] = 0$$

$$\text{ou} \quad \tilde{\mathbf{E}}_h \cdot \tilde{\mathbf{E}}_v^* = [(1)(0)^* + (0)(1)^*] = 0$$

puisque les complexes conjugués de nombres réels sont les nombres eux-mêmes. Tout état de polarisation aura son état orthogonal correspondant. Notons que :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{R}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{R}} = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{L}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{L}}^* = 1$$

$$\text{et} \quad \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{R}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{L}}^* = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{L}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{R}}^* = 0$$

*Si nous avons utilisé $(\omega t - kz)$ pour la phase, les termes en $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathcal{R}}$ auraient été interchangés. La notation présente, bien qu'un peu plus délicate à utiliser, (par exemple, $-\pi/2$ pour une avance de phase), est la plus courante dans les travaux modernes. Mais cette convention peut varier selon la littérature consultée (par exemple, Shurcliff).

De tels vecteurs forment un groupe orthogonal, comme \mathbf{E}_h et \mathbf{E}_v . Comme nous l'avons vu, on peut décrire tout état de polarisation comme une combinaison linéaire de vecteurs dans l'une ou l'autre des ensembles orthonormaux. Ces notions sont capitales en mécanique quantique, où l'on manipule des fonctions d'onde orthonormales.

8.13.3 Les matrices de Jones et de Mueller

Considérons un faisceau incident polarisé, représenté par son vecteur de Jones $\tilde{\mathbf{E}}_i$, qui passe à travers un composant optique, et qui en émerge avec un nouveau vecteur $\tilde{\mathbf{E}}_t$ correspondant à l'onde transmise. Le composant optique a transformé $\tilde{\mathbf{E}}_i$ en $\tilde{\mathbf{E}}_t$, un processus qui peut être décrit mathématiquement en utilisant une matrice 2×2 . Rappelons qu'une matrice est simplement un tableau de chiffres à qui on a imposé des opérations d'addition et de multiplication. Soit \mathcal{A} la matrice de transformation du composant optique en question. On a :

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \mathcal{A} \tilde{\mathbf{E}}_i \quad (8.59)$$

où
$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (8.60)$$

et les vecteurs colonnes doivent être traités comme toute autre matrice. Pour rappel, réécrivons l'équation (8.59)

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{tx} \\ \tilde{E}_{ty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_{ix} \\ \tilde{E}_{iy} \end{bmatrix} \quad (8.61)$$

et après développement,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{tx} &= a_{11}\tilde{E}_{ix} + a_{12}\tilde{E}_{iy} \\ \tilde{E}_{ty} &= a_{21}\tilde{E}_{ix} + a_{22}\tilde{E}_{iy} \end{aligned}$$

Le Tableau 8.6 contient une liste brève des matrices de Jones pour différents composants optiques. Afin de comprendre comment on les utilise, examinons quelques applications. Supposons que $\tilde{\mathbf{E}}_i$ représente un état \mathcal{P} à $+45^\circ$, qui passe à travers une lame quart d'onde dont l'axe rapide est vertical (i.e. dans la direction y). L'état de polarisation de l'onde émergente est donné par :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{tx} \\ \tilde{E}_{ty} \end{bmatrix}$$

où l'on a, par commodité, éliminé les coefficients constants,

et donc
$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Tableau 8.6 Matrices de Jones et de Mueller

Élément optique linéaire		Matrice de Jones	Matrice de Mueller
Polariseur linéaire horizontal	\leftrightarrow	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Polariseur linéaire vertical	\updownarrow	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Polariseur linéaire à $+45^\circ$	\nearrow	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Polariseur linéaire à -45°	\nwarrow	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Lame quart d'onde axe rapide vertical		$e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
Lame quart d'onde axe rapide horizontal		$e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
Polariseur homogène circulaire droit	\odot	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Polariseur homogène circulaire gauche	\ominus	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La polarisation, comme vous le savez maintenant, est une circulaire droite. Si l'onde traverse un ensemble de composants optiques représentés par les matrices $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$, alors :

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \mathcal{A}_n \cdots \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1 \tilde{\mathbf{E}}_i$$

Les matrices doivent être appliquées dans le bon ordre car elles ne commutent pas. L'onde quittant le premier élément optique dans la série est $\mathcal{A}_1 \tilde{\mathbf{E}}_i$; après être passée par le deuxième élément, elle devient $\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1 \tilde{\mathbf{E}}_i$, et ainsi de suite. Pour illustrer le processus, repartons de l'onde considérée précédemment (i.e. un état \mathcal{P} à $+45^\circ$), mais à présent faisons-la passer à travers deux lames quart d'onde ; chacune ayant son axe rapide vertical. Ainsi, en éliminant à nouveau les termes d'amplitude, on a :

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

puis :

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

et finalement :

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Le faisceau transmis est dans un état \mathcal{P} à -45° , ayant été basculé de 90° par une lame demi-onde. Si on utilise le même ensemble d'éléments optiques pour observer d'autres états de polarisation, il remplacera le produit $\mathcal{A}_n \cdots \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1$ par la matrice 2×2 unique représentative du système et qui a été obtenue en réalisant la multiplication. (L'ordre dans lequel on calcule doit être $\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1$ puis $\mathcal{A}_3 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1$, etc.)

En 1943, Hans Mueller, alors professeur de physique à l'Institut de Technologie du Massachusetts, conçut une méthode matricielle pour travailler sur les vecteurs de Stokes. Rappelons qu'on peut utiliser les vecteurs de Stokes aussi bien pour la lumière totalement polarisée que partiellement polarisée. Il en est de même pour la méthode de Mueller, qui sert donc de complément à la méthode de Jones. Cette dernière, toutefois, peut facilement traiter les faisceaux cohérents, contrairement à la première. On applique les matrices 4×4 de Mueller de la même manière que les matrices de Jones. Il n'y a dès lors que peu d'intérêt à discuter plus longtemps de la

méthode ; quelques exemples simples et le Tableau 8.6 suffiront. Par exemple, si l'on fait passer un faisceau non polarisé d'éclairement unité à travers un polariseur linéaire horizontal, le vecteur de Stokes de l'onde émergente \mathcal{S}_t est :

$$\mathcal{S}_t = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'onde transmise a un éclairement de $\frac{1}{2}$ (i.e. $\mathcal{S}_0 = \frac{1}{2}$), elle est polarisée linéairement, et horizontale ($\mathcal{S}_1 > 0$). Comme autre exemple, considérons une onde elliptique partiellement polarisée dont les paramètres de Stokes ont été déterminés comme étant (4,2,0,3). Son éclairement est de 4 ; elle est plus proche de l'horizontale que de la verticale ($\mathcal{S}_1 > 0$), est orientée vers la droite ($\mathcal{S}_3 > 0$), et a un degré de polarisation de 90 %. Puisqu'aucun des paramètres ne peut dépasser \mathcal{S}_0 , une valeur de $\mathcal{S}_3 = 3$ est importante, ce qui signifie que l'ellipse ressemble fortement à un cercle. Si on fait maintenant traverser à l'onde une lame quart d'onde d'axe rapide vertical, alors :

$$\mathcal{S}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

et donc :

$$\mathcal{S}_t = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'onde émergente a le même éclairement et le même degré de polarisation, mais elle est à présent partiellement polarisée.

Nous avons seulement vu quelques-uns des aspects essentiels des méthodes matricielles. L'étude complète de ce sujet nécessiterait un traitement bien plus exhaustif que ces quelques remarques introductives*.

.....
*On peut aussi développer un traitement mathématique plus élaboré, et plus satisfaisant en termes du concept de matrice de cohérence. Comme référence plus détaillée, mais plus complexe, voir O'Neill, *Introduction to Statistical Optics*.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Les solutions complètes des exercices (exceptés ceux ayant un astérisque) figurent à la fin de l'ouvrage.

8.1 Décrire complètement l'état de polarisation de chacune des ondes suivantes :

$$(a) \vec{E} = \hat{i}E_0 \cos(kz - \omega t) - \hat{j}E_0 \cos(kz - \omega t)$$

$$(b) \vec{E} = \hat{i}E_0 \sin 2\pi(z/\lambda - \nu t) - \hat{j}E_0 \sin 2\pi(z/\lambda - \nu t)$$

$$(c) \vec{E} = \hat{i}E_0 \sin(\omega t - kz) + \hat{j}E_0 \sin(\omega t - kz - \pi/4)$$

$$(d) \vec{E} = \hat{i}E_0 \cos(\omega t - kz) + \hat{j}E_0 \cos(\omega t - kz + \pi/2).$$

8.2 Soit la perturbation donnée par l'expression $\vec{E}(z, t) = [\hat{i} \cos \omega t + \hat{j} \cos(\omega t - \pi/2)]E_0 \sin kz$. De quel type d'onde s'agit-il ? Représenter sommairement l'ensemble en indiquant ses caractéristiques principales.

8.3 Montrer, de manière analytique, que la superposition d'un état \mathcal{R} et d'un état \mathcal{L} d'amplitudes différentes, va donner un état \mathcal{E} , comme on le voit en figure 8.8. À quoi \mathcal{E} doit-il être égal pour obtenir cette figure ?

8.4 Écrire une expression correspondant à une onde lumineuse en état \mathcal{P} de fréquence angulaire ω et d'amplitude E_0 se propageant le long de l'axe x avec un plan de vibration à un angle de 25° du plan xy . La perturbation est de zéro à $t = 0$ et $x = 0$.

8.5* Écrivez une expression correspondant à une onde lumineuse en état \mathcal{P} de fréquence angulaire ω et d'amplitude E_0 se propageant le long du ligne dans le plan xy à 45° de l'axe x avec un plan de vibration correspondant au plan xy . À $t = 0$, $y = 0$, et $x = 0$, le champ est nul.

8.6 Écrivez une expression correspondant à une onde lumineuse en état \mathcal{R} de fréquence angulaire ω se propageant dans la direction des x positifs et telle qu'à $t = 0$ et $x = 0$ les points du champ \vec{E} soient dans la direction des z négatifs.

8.7* Un faisceau de lumière linéairement polarisée dont le champ électrique est vertical rencontre perpendiculairement un polariseur linéaire idéal dont l'axe de transmission est vertical. Si le faisceau entrant a un éclairement de 200 W/m^2 , quel est l'éclairement du faisceau transmis ?

8.8* Sachant que 300 W/m^2 de lumière provenant d'une ampoule de tungstène ordinaire arrive sur un polariseur idéal, quelle est sa densité de flux radiatif émergent ?

8.9* Un faisceau de lumière linéaire verticalement polarisée est incident perpendiculairement sur un polariseur linéaire idéal. Montrer

que si son axe de transmission fait un angle de 60° avec la verticale, seul 25 % de l'éclairement sera transmis par le polariseur.

8.10 Un faisceau lumière initialement naturelle possédant une densité de flux de I_i , passe par deux feuilles de *HN-32* dont les axes de transmission sont parallèles. Quelle est la densité de flux du faisceau émergent ?

8.11* Quel est l'éclairement du faisceau émergent si l'analyseur du problème précédent est tourné de 30° ?

8.12* Un faisceau de lumière naturelle d'éclairement 400 W/m^2 arrive sur le premier de deux polariseurs linéaires idéaux consécutifs dont les axes de transmission sont à 40° l'un de l'autre. Quelle est la quantité de lumière qui émerge de l'ensemble ?

8.13* Comme on l'a vu au paragraphe 8.10, les substances telles que le sucre et l'insuline sont optiquement actives ; elles font tourner le plan de polarisation de la lumière en fonction de la longueur de chemin traversé et de la concentration de la solution. Une cellule en verre est placée entre deux polariseurs linéaires *HN-50*, et 50 % de la lumière naturelle incidente sur le premier polariseur est transmise au second. De quel angle la solution de sucre placée dans la cellule fait-elle tourner le plan de polarisation de la lumière provenant du premier polariseur ?

8.14* De la lumière provenant d'une lampe de poche ordinaire passe à travers un polariseur linéaire avec un axe de transmission vertical. Le faisceau résultant, ayant un éclairement de 200 W/m^2 , arrive à incidence normale sur un polariseur linéaire *HN-50* vertical dont l'axe de transmission est incliné de 30° au-dessus de l'horizontale. Quelle quantité de lumière est transmise ?

8.15* De la lumière linéairement polarisée (avec un éclairement de 200 W/m^2) et alignée avec son vecteur de champ électrique à $+55^\circ$ de la verticale arrive perpendiculairement sur un polariseur mince linéaire dont l'axe de transmission est à $+10^\circ$ de la verticale. Quelle fraction de la lumière incidente en émerge ?

8.16* Deux polariseurs minces linéaires idéaux sont disposés par rapport à la verticale avec leurs axes de transmission respectivement à 10° et 60° . Si un faisceau de lumière linéairement polarisé avec son champ électrique à 40° pénètre dans le premier polariseur, quelle fraction de son éclairement va émerger ?

8.17* Soit une paire de polariseurs croisés avec leurs axes de transmission vertical et horizontal. Le faisceau émergent du premier polariseur a une densité de flux I_1 , et bien entendu, aucune lumière ne passe à travers l'analyseur (i.e. $I_2 = 0$). On insère à présent un polariseur

linéaire parfait (*HN-50*) avec un axe de transmission à 45° de la verticale entre les deux éléments. Calculer I_2 . On pensera au mouvement des électrons émis dans chacun des polariseurs.

8.18* Soient deux polariseurs linéaires parfaits identiques et une source de lumière naturelle. On les place l'un derrière l'autre tels que leurs axes de transmission soient respectivement à 0° et 50° . À présent, on insère entre eux un troisième polariseur linéaire avec un axe de transmission à 25° . Si 1000 W/m^2 de lumière est incidente, quelle quantité émerge de l'ensemble en absence, puis en présence du polariseur du milieu ?

8.19* 200 W/m^2 de lumière polarisée au hasard arrive à incidence normale sur une succession de polariseurs linéaires idéaux placés l'un derrière l'autre avec l'axe de transmission du premier à la verticale, celui du deuxième à 30° , du troisième à 60° et du quatrième à 90° . Quelle quantité de lumière émerge de ce dispositif ?

8.20* Deux polariseurs linéaires *HN-50* sont placés l'un derrière l'autre. Quel angle doivent former leurs axes de transmission si un faisceau incident non polarisé de 100 W/m^2 doit être réduit à 30 W/m^2 en sortie du dispositif ?

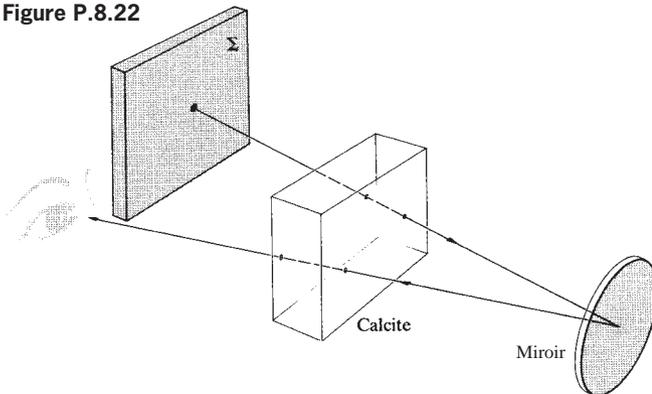
8.21 Un polariseur idéal tourne à un rythme de ω entre une paire de polariseurs croisés similaires et stationnaires. Montrer que la densité de flux émergent sera modulée quatre fois par rapport à la fréquence de rotation. En d'autres termes, montrer que :

$$I = \frac{I_1}{8}(1 - \cos 4\omega t)$$

où I_1 est la densité de flux émergent du premier polariseur et I est la densité de flux finale.

8.22 La figure P.8.22 montre un rayon traversant un cristal de calcite à incidence presque normale, rebondissant sur un miroir, et repassant alors à travers le cristal. Un observateur verra-t-il une double image du point sur Σ ?

Figure P.8.22



8.23* Une marque de stylo sur une feuille de papier est recouverte par un cristal de calcite. Avec un éclairage provenant du dessus, la lumière incidente sur le papier est-elle déjà polarisée, après être passée à travers le cristal ? Pourquoi voit-on, alors, deux images ? Faire l'essai de la solution proposée en polarisant la lumière d'une lampe de poche et en la réfléchissant sur une feuille de papier. Essayer également la réflexion spéculaire sur du verre ; la lumière réfléchie est-elle polarisée ?

8.24 Décrire en détail ce que l'on voit à la figure P.8.24. Le cristal de la photographie est de la calcite, et il a un angle de polarisation en haut à gauche. Les deux polaroids ont leurs axes de transmission parallèles à leurs *petits* côtés.

Figure P.8.24



8.25 Le cristal de calcite de la figure P.8.25 est représenté selon trois orientations différentes. Son angle de polarisation est à gauche en (a), en bas à gauche en (b) et en bas en (c). L'axe de transmission du polaroid est horizontal. Expliquer individuellement chacune de ces photographies.

Figure P.8.25a

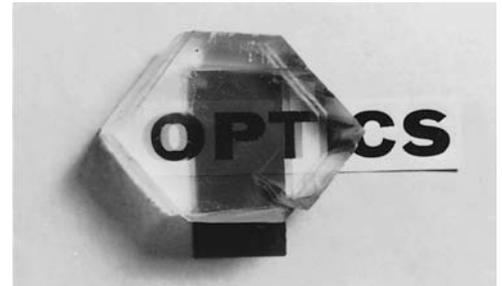
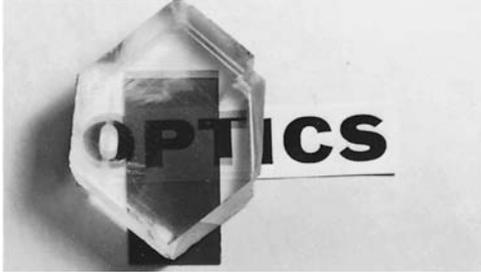


Figure P.8.25b



Figure P.8.25c



8.26 En décrivant la calcite, on a expliqué que sa grande biréfringence provenait du fait que les groupes carbonate étaient sur des plans parallèles (normaux à l'axe optique). Montrer par un schéma et expliquer pourquoi la polarisation du groupe est moindre lorsque \vec{E} est perpendiculaire au plan CO_3 que lorsqu'il lui est parallèle. Que signifie ces éléments par rapport à v_{\perp} et v_{\parallel} , c'est-à-dire, les vitesses de l'onde lorsque \vec{E} est polarisé linéairement perpendiculaire ou parallèle à l'axe optique ?

8.27* Soit un émetteur de micro-ondes qui émet une onde polarisée linéairement dont le champ \vec{E} est parallèle à la direction du dipôle. On souhaite réfléchir le plus d'énergie possible sur la surface d'un bassin (ayant un indice de réfraction de 9,0). Déterminer l'angle d'incidence nécessaire et expliquer l'orientation du faisceau.

8.28* À quel angle la réflexion du ciel sur la surface d'un bassin ($n = 1,33$) sera-t-elle complètement effacée si l'on l'observe à travers un filtre polaroid ?

8.29* Quel est l'angle de Brewster pour la réflexion de la lumière sur la surface d'un morceau de verre ($n_g = 1,65$) immergé dans l'eau ($n_w = 1,33$) ?

8.30* Un faisceau de lumière est réfléchi sur la surface d'un liquide inconnu, et la lumière est examinée avec un polariseur mince linéaire. Lorsque l'axe central du polariseur (c'est-à-dire la perpendiculaire au plan de la feuille) est incliné depuis la verticale à un angle de $54,30^\circ$, la lumière réfléchie passe en totalité, à condition que l'axe de transmission soit parallèle au plan de l'interface. À partir de ces informations, calculer l'indice de réfraction du liquide.

8.31* De la lumière qui se réfléchit sur une lame de verre ($n_g = 1,65$) immergée dans de l'alcool éthylique ($n_e = 1,36$) est complètement polarisée. À quel angle le faisceau partiellement polarisé sera-t-il transmis dans la lame ?

8.32* Un faisceau de lumière naturelle est incident sur une interface air-verre ($n_{ii} = 1,5$) à 40° . Calculer le degré de polarisation de la lumière réfléchie.

8.33* Un faisceau de lumière incidente dans l'air sur une interface de verre ($n = 1,5$) à 70° est partiellement réfléchi. Calculer le facteur

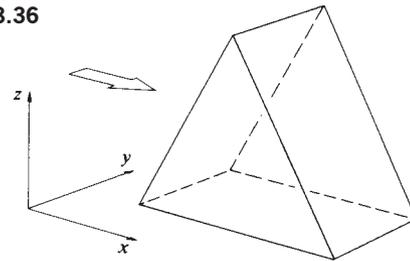
de réflexion total. Comparer ce résultat avec le cas d'une incidence à, par exemple, $56,3^\circ$? Expliquer.

8.34 Un rayon de lumière jaune est incident sur une lame de calcite à 50° . La lame est coupée afin que l'axe optique soit parallèle à la face avant et perpendiculaire au plan d'incidence. Déterminer la séparation angulaire entre les deux rayons émergents.

8.35* Un faisceau de lumière est incident normalement sur une lame de quartz dont l'axe optique est perpendiculaire au faisceau. Si $\lambda_0 = 589,3 \text{ nm}$, calculer les longueurs d'onde des ondes ordinaire et extraordinaire. Quelles sont leurs fréquences ?

8.36 Un faisceau de lumière entre dans un prisme de calcite par la gauche, comme sur la figure P.8.36. Il existe trois orientations possibles de l'axe optique, selon les directions x , y et z , présentant un intérêt particulier. Si l'on dispose de trois prismes de la sorte, schématiser, dans chaque cas, les faisceaux incident et émergent, en indiquant leur état de polarisation. Comment peuvent-ils être utilisés pour déterminer n_o et n_e ?

Figure P.8.36



8.37 Le vecteur de champ électrique d'un état \mathcal{P} incident fait un angle de $+30^\circ$ avec l'axe rapide horizontal d'une lame quart d'onde. Décrire en détail l'état de polarisation de l'onde émergente.

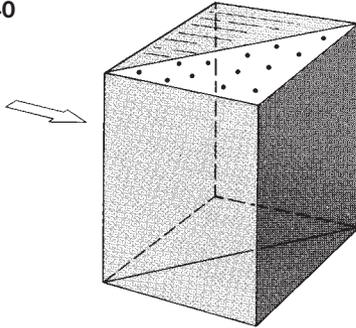
8.38 Calculer l'angle critique pour le rayon ordinaire (c'est-à-dire, l'angle de réflexion interne totale) à la couche de baume de calcite d'un prisme de Nicol.

8.39* Dessiner un prisme de Wollaston en quartz, en représentant tous les rayons pertinents et leurs états de polarisation.

8.40 Le prisme de la figure P.8.40 est un *polariseur de Rochon*. Dessiner les rayons pertinents en supposant :

- que le prisme est en calcite ;
- que le prisme est en quartz ;
- pourquoi un tel dispositif est plus utile qu'un polariseur dichroïque lorsqu'il fonctionne avec une lumière laser de densité de flux élevée ?
- Quelle caractéristique importante du polariseur de Rochon manque au polariseur de Wollaston ?

Figure P.8.40



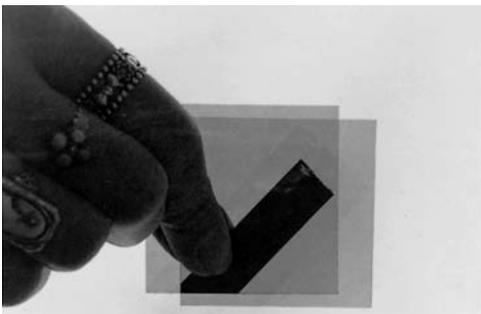
8.41* Soient deux polaroïds idéaux (le premier d'axe vertical et le second d'axe horizontal). On insère entre eux une série de 10 lames demi-onde, la première ayant son axe rapide décalé de $\pi/40$ rad par rapport à la verticale, et chacune des suivantes ayant son axe décalé de $\pi/40$ rad par rapport à la précédente. Déterminer le rapport de l'éclairement incident émergent, en expliquant clairement le raisonnement.

8.42* Supposons que l'on dispose d'un polariseur linéaire et d'une lame quart d'onde. Comment peut-on déterminer la nature de chaque composant, en supposant que l'on dispose également d'une source de lumière naturelle ?

8.43* Un état \mathcal{L} traverse une lame huitième d'onde ayant un axe rapide horizontal. Quel est son état de polarisation lorsqu'il émerge ?

8.44* La figure P.8.44 montre deux polariseurs linéaires polaroïd entre lesquels on a disposé une lame de microscope à laquelle est attaché un morceau de ruban de cellophane. Expliquer ce que l'on voit.

Figure P.8.44

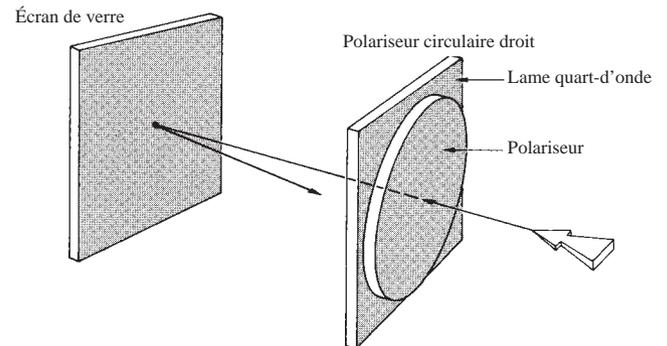


8.45 Un compensateur de Babinet est positionné à 45° entre deux polariseurs croisés linéaires et est éclairé par de la lumière au sodium. Lorsqu'une feuille fine de mica (d'indices 1,599 et 1,594) est placée

sur le compensateur, les bandes noires se déplacent toutes de $\frac{1}{4}$ de l'espace qui les sépare. Calculer le retard de la feuille et son épaisseur.

8.46 Imaginons que l'on polarise aléatoirement la lumière incidente d'une pièce presque normalement à la surface de verre d'un écran radar. Une portion serait réfléchiée de manière spéculaire vers l'observateur et tendrait donc à obscurcir le dispositif. Supposons à présent que l'on couvre l'écran avec un polariseur circulaire droit, comme à la figure P.8.46. Représenter les faisceaux incidents et réfléchis, en indiquant leurs états de polarisation. Qu'arrive-t-il aux faisceaux réfléchis ?

Figure P.8.46



8.47 Est-il possible qu'un faisceau se compose de deux états \mathcal{P} incohérents et orthogonaux sans être de la lumière naturelle ? Expliquer. Comment peut-on faire pour obtenir un tel faisceau ?

8.48* Le pouvoir rotatif spécifique d'un sucrose dissous dans une eau à 20°C ($\lambda_0 = 589,3$ nm) est $+66,45^\circ$ pour 10 cm traversés dans une solution contenant 1 g de substance active (sucre) par cm^3 de solution. Un état \mathcal{P} vertical (lumière sodium) pénètre par une extrémité d'un tube de 1 m contenant 1000 cm^3 de solution, dont 10 g de sucrose. Comment l'état \mathcal{P} est-t-il orienté lorsqu'il émerge ?

8.49 En examinant un morceau de matériau photoélastique étiré entre deux polariseurs linéaires croisés, on pourrait voir un ensemble de bandes colorées (isochromatiques) et, superposé à cela, un ensemble de bandes noires (isocliniques). Comment peut-on supprimer les isocliniques en ne conservant que les isochromatiques ? Expliquer le raisonnement. On remarquera que le dispositif approprié est indépendant de l'orientation de l'échantillon photoélastique.

8.50* Soit une cellule de Kerr dont les plaques sont séparées par une distance d . Soit ℓ la longueur effective de ces plaques (légèrement

différente de la longueur actuelle à cause des franges de champ).
Montrer que ;

$$\Delta\varphi = 2\pi K \ell V^2/d^2 \quad [8.41]$$

8.51 Calculer la tension demi-onde pour une cellule de Pockels longitudinale faite d'ADA (arséniure de dihydrogène d'ammonium) à $\lambda_0 \approx 550 \text{ nm}$ avec $r_{63} = 5,5 \times 10^{-12}$ et $n_o = 1,58$.

8.52* Le vecteur de Jones pour un état linéairement polarisé arbitraire à un angle θ par rapport à l'horizontale est ;

$$\begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

Démontrer que cette matrice est en accord avec celle du Tableau 8.5 pour un état \mathcal{P} à $+45^\circ$.

8.53 Déterminer un vecteur de Jones $\tilde{\mathbf{E}}_2$ représentant un état de polarisation orthogonal à :

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$$

Dessiner ces deux éléments.

8.54* Deux faisceaux lumineux incohérents représentés par $(1,1,0,0)$ et $(3,0,0,3)$ sont superposés.

- Décrire en détail l'état de polarisation de chacun d'entre eux.
- Déterminer les paramètres de Stokes résultant du faisceau combiné et décrire son état de polarisation.
- Quel est son degré de polarisation ?
- Quelle est la lumière résultante produite lorsque l'on superpose les faisceaux incohérents $(1,1,0,0)$ et $(1,-1,0,0)$? Expliquer.

8.55* Montrer par calcul direct, en utilisant les matrices de Mueller, qu'un faisceau d'éclairement unité de lumière naturelle passant à travers un polariseur linéaire vertical est converti en un état \mathcal{P} vertical. Déterminer son éclairement relatif et son degré de polarisation.

8.56* Montrer par calcul direct, en utilisant les matrices de Mueller, qu'un faisceau d'éclairement unité de lumière naturelle passant à travers un polariseur linéaire dont l'axe de transmission est à $+45^\circ$ est converti en un état \mathcal{P} à $+45^\circ$. Déterminer son éclairement relatif et son degré de polarisation.

8.57* Montrer, par un calcul direct, en utilisant les matrices de Mueller, qu'un faisceau de lumière horizontale en état \mathcal{P} , passant à travers une plaque $\frac{1}{4}\lambda$ dont l'axe rapide est horizontal, émerge inchangé.

8.58* Démontrer que la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

peut servir de matrice de Mueller pour une lame quart d'onde dont l'axe rapide est à $+45^\circ$. Que se passe-t-il si l'on oriente de la lumière polarisée linéairement à 45° vers lui ? Qu'est-ce qui émerge lorsqu'un état \mathcal{P} horizontal entre dans le dispositif ?

8.59* La matrice de Mueller :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^2+S^2 \cos \Delta\varphi & CS(1-\cos \Delta\varphi) & -S \sin \Delta\varphi \\ 0 & CS(1-\cos \Delta\varphi) & S^2+C^2 \cos \Delta\varphi & C \sin \Delta\varphi \\ 0 & S \sin \Delta\varphi & -C \sin \Delta\varphi & \cos \Delta\varphi \end{bmatrix}$$

où $C = \cos 2\alpha$ et $S = \sin 2\alpha$, représente une lame d'onde arbitraire ayant un retard $\Delta\varphi$ et un axe rapide à un angle α mesuré par rapport à l'horizontal. L'utiliser pour obtenir la matrice du problème précédent.

8.60* En partant de la matrice de Mueller pour un retardateur arbitraire donnée au problème précédent, montrer qu'elle est en accord avec la matrice du Tableau 8.6 pour une lame quart d'onde ayant un axe rapide vertical.

8.61 Déterminer la matrice de Mueller pour une lame quart d'onde ayant son axe rapide à -45° . Vérifier que cette matrice élimine, en effet, celle du Problème 8.58, de manière à ce qu'un faisceau passant à travers les deux lames d'onde successivement en ressorte inchangé.

8.62* On fait passer un faisceau de lumière linéaire polarisée horizontalement à travers chacune des lames $\frac{1}{4}\lambda$ des deux questions précédentes. Décrire les états de la lumière émergente ; expliquer quelle composante du champ l'emporte et comparer la figure 8.7 à ces résultats.

8.63 Utiliser le Tableau 8.6 pour déterminer une matrice de Mueller pour une lame demi-onde ayant son axe rapide vertical. Utiliser ce résultat pour convertir un état \mathcal{R} en un état \mathcal{L} . Vérifier que la même lame d'onde peut convertir un état \mathcal{L} en un état \mathcal{R} . Le fait d'augmenter ou de diminuer la différence de phase relative de $\pi/2$ devrait avoir le même effet. Vérifier cette assertion en déterminant la matrice d'une lame demi-onde ayant un axe rapide horizontal.

8.64 Déterminer une matrice de Mueller possible pour un polariseur circulaire droit constitué à partir d'un polariseur linéaire et d'une

lame quart d'onde. Un tel dispositif est manifestement un assemblage de deux éléments hétérogènes et va différer du polariseur circulaire homogène du Tableau 8.6. Tester la matrice obtenue pour déterminer si elle convertit la lumière naturelle en état \mathcal{R} . Montrer qu'elle laisse passer les états \mathcal{R} , comme la matrice homogène. La matrice obtenue doit convertir les états \mathcal{L} incidents sur l'entrée en états \mathcal{R} , alors que le polariseur homogène les absorbera totalement. Vérifier ce résultat.

8.65* Si le modulateur à cellule de Pockels de la figure 8.57 est éclairé par une lumière d'éclairement I_i , il transmet un faisceau d'éclairement I_r , tel que :

$$I_r = I_i \sin^2(\Delta\varphi/2)$$

Faire un tracé de I_r/I_i en fonction de la tension appliquée. Quelle est la signification de la tension qui correspond à la transmission maximale ? Quelle est la tension la plus basse, au-dessus de zéro, qui fera que I_r est nul pour l'ADP ($\lambda_0 = 546,1$ nm) ? Comment peut-on faire pour qu'une valeur maximum de I_r/I_i soit obtenue avec une tension nulle ? Dans cette nouvelle configuration, quel éclairement résulte lorsque $V = V_{\lambda/2}$?

8.66 Déterminer une matrice de Jones pour une plaque isotrope de matériau absorbant ayant un coefficient d'amplitude de transmission t . Il peut être intéressant, parfois, de garder une trace de la phase puisque même si $t = 1$, une telle plaque reste toujours un retardateur de phase isotrope. Que devient la matrice de Jones pour le vide ? Qu'est-elle pour un absorbant parfait ?

8.67 Déterminer une matrice de Mueller pour une plaque isotrope de matériau absorbant ayant un coefficient d'amplitude de transmission t . Quelle matrice de Mueller dépolarisera complètement n'importe quelle onde sans affecter son éclairement ? (Elle n'a pas d'équivalent physique.)

8.68 En gardant l'équation (8.29) à l'esprit, écrire une expression pour le composant (I_n) de la densité de flux polarisé au hasard d'un faisceau partiellement polarisé en termes de paramètres de Stokes. Pour vérifier ce résultat, on ajoutera un vecteur de Stokes polarisé aléatoirement de densité de flux 4 à un état \mathcal{R} de densité de flux 1. Vérifier alors si l'on trouve $I_n = 4$ pour l'onde résultante.

8.69* Un filtre optique peut être décrit par une matrice de Jones :

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Déterminer la forme de la lumière émergente pour chacun des faisceaux incidents suivants :

- un faisceau polarisé plan avec un angle θ par rapport à l'horizontale (Problème 8.52) ;
- un faisceau polarisé de manière circulaire gauche ;
- un faisceau polarisé de manière circulaire droite ;
- parmi ces derniers, identifier le filtre et expliquer comment il pourrait être construit.

8.70 Un filtre optique peut être décrit par une matrice de Jones :

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

- Déterminer la forme du faisceau émergent lorsque la lumière incidente est à polarisation plane à un angle θ de l'horizontale (Problème 8.52).
- Déduire la nature du filtre du résultat précédent.
- Vérifier la déduction précédente avec au moins un autre test.

8.71* Deux filtres optiques linéaires ont des matrices de Jones :

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}.$$

Identifier ces deux filtres.

8.72* Une cellule à liquides contenant une solution de sucre optiquement active a une matrice de Jones donnée par :

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

- Déterminer la polarisation de la lumière émergente si le faisceau incident est un état \mathcal{P} horizontal.
- Déterminer la polarisation de la lumière émergente si le faisceau incident est un état \mathcal{P} vertical.
- Déterminer l'angle de rotation produit par le matériau optiquement actif.

9

Interférences

Les motifs colorés complexes, qui scintillent à la surface d'une nappe d'huile sur une route bitumée humide (voir photo), sont l'une des manifestations les plus communes du phénomène d'interférence*. À une échelle macroscopique, on peut dire la même chose de l'interaction des ondulations de surface sur une étendue d'eau. Notre expérience quotidienne avec ce genre de situations nous permet d'imaginer une distribution complexe de perturbations (comme celle de la figure 9.1), dans laquelle il y aurait des zones où deux ondes (ou plus) se chevaucheraient, en se neutralisant partiellement ou même complètement. Il pourrait y avoir d'autres zones où les extrema résultant seraient supérieurs à ceux des ondes initiales. Après avoir interféré, les ondes se sépareraient et continueraient leur chemin, sans être affectées par la rencontre qui a précédé.

Bien que le sujet puisse être traité par le biais de l'électrodynamique quantique (QED, p. 144), nous choisirons une approche plus simple. La théorie ondulatoire, issue de la nature électromagnétique de la lumière, fournira un point de départ naturel à notre réflexion. On rappelle que l'expression d'une perturbation optique est une équation du second ordre, homogène, linéaire, partielle et différentielle [équation (3.22)]. Comme nous l'avons vu, cette expression obéit donc au *principe important de superposition*. En conséquence, l'intensité du champ électrique résultant \vec{E} , en un point de l'espace où deux ondes lumineuses ou plus se chevauchent, est égale à la somme vectorielle des perturbations initiales. Brièvement donc, ***une interférence optique résulte de l'interaction entre deux ou plusieurs ondes lumineuses qui produit un éclaircissement global différent de la somme des éclaircissements des ondes individuelles.***

.....
*La couche d'eau sur l'asphalte permet au film d'huile d'avoir la forme d'une surface plane lisse. L'asphalte, de couleur noire, absorbe la lumière transmise, empêchant ainsi les réflexions en retour qui tendraient à obscurcir les franges.



Ces franges d'interférence grossièrement circulaires sont dues à un film d'huile sur un trottoir humide. Ce sont des *franges d'égale épaisseur* (voir p. 419) ; elles ne changent donc pas lorsqu'on les regarde sous des angles différents. Bien évidemment, elles présentent un arc-en-ciel de couleurs.

Parmi la multitude de systèmes optiques produisant des interférences, nous étudierons quelques-uns des plus importants. Les systèmes interférométriques seront divisés, pour la discussion, en deux groupes : *diviseur de front d'onde* et *diviseur d'amplitude*. Dans le premier cas, on utilise des parties du front d'onde primaire, soit directement comme sources d'ondes secondaires, soit conjointement avec des systèmes optiques afin de produire des sources virtuelles ou des ondes secondaires, que l'on fait interférer. Dans le cas des diviseurs d'amplitude, l'onde primaire elle-même est divisée en deux parties qui suivent des trajectoires différentes avant de se recombiner et d'interférer.

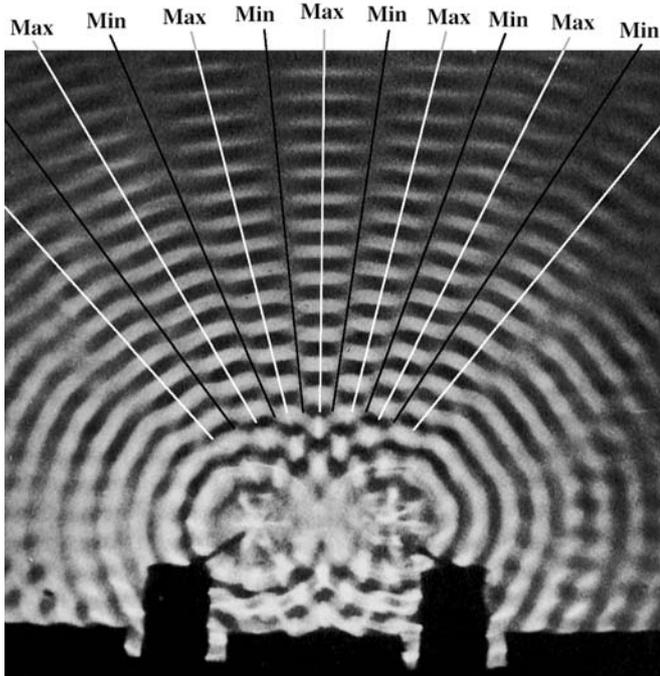


Figure 9.1 Ondes à la surface de l'eau issues de deux sources ponctuelles en phase dans une cuve. Au milieu de la figure, on aperçoit des pics (fines bandes brillantes) et les creux (fines bandes noires) situés à l'intérieur de zones allongées en forme de coins (maxima) séparées par des régions étroites et sombres qui sont calmes (minima). Bien que les lignes nodales semblent rectilignes, elles sont en fait hyperboliques. L'équivalent optique est la distribution de champ électrique décrite à la figure 9.3c. (Photo PSSC College Physics, 1968, © 1965 Educational Development Center, Inc.)

9.1 Considérations générales

Nous avons déjà étudié le problème de la superposition de deux ondes scalaires (paragraphe 7.1) et, à bien des égards, on pourra appliquer à nouveau ces résultats. Mais la lumière est bien évidemment un phénomène vectoriel : les champs électrique et magnétique sont des champs vectoriels. Il ne faut pas oublier cela pour bien comprendre les phénomènes d'interférence. Et encore, il y a beaucoup de situations dans lesquelles on peut configurer le système optique afin que la nature vectorielle de la lumière n'apparaisse pas. Nous calculerons les équations fondamentales des interférences dans le contexte du modèle vectoriel ; à la suite de quoi nous déterminerons sous quelles conditions le traitement scalaire peut être appliqué.

En accord avec le principe de superposition, l'amplitude du champ électrique \vec{E} , en un point de l'espace, résultant des champs distincts $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots$ des diverses sources contributives est donnée par :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \quad (9.1)$$

La perturbation optique, ou champ lumineux \vec{E} , varie dans le temps à un rythme extrêmement rapide, approximativement (dans le visible) :

$$4,3 \times 10^{14} \text{ Hz} \quad \text{à} \quad 7,5 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

faisant du champ réel une quantité impossible à détecter. D'un autre côté, on peut mesurer directement l'éclairement I avec une grande variété de capteurs (photodétecteurs, bolomètres, émulsions photographiques, ou les yeux). Mieux vaut donc étudier les interférences par le biais des éclairissements.

On peut mener une grande partie de l'analyse qui suit sans considérer la forme particulière des fronts d'onde, et les résultats sont donc très généraux (problème 9.1). Par souci de simplicité, considérons toutefois deux points sources S_1 et S_2 , qui émettent des ondes monochromatiques de même fréquence dans un milieu homogène. Soit a la distance séparant les deux sources, où a beaucoup plus grand que λ . Positionnons le point d'observation P suffisamment loin des sources de telle sorte que, vu de P , les fronts d'onde soient plans (figure 9.2). Pour le moment, considérons seulement des ondes polarisées linéairement de la forme :

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{01} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon_1) \quad (9.2a)$$

et

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_{02} \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon_2) \quad (9.2b)$$

On a vu dans le chapitre 3 que l'éclairement en P est donné par :

$$I = \epsilon v \langle \vec{E}^2 \rangle_T$$

Dans la mesure où on ne s'occupera que des éclairissements relatifs dans le même milieu, on négligera les constantes, et l'on posera :

$$I = \langle \vec{E}^2 \rangle_T$$

Ce qu'on entend par $\langle \vec{E}^2 \rangle_T$ est bien sûr la moyenne temporelle du carré de l'amplitude du champ électrique, ou $\langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle_T$. En conséquence :

$$\vec{E}^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$$

ou, maintenant :

$$\vec{E}^2 = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$$

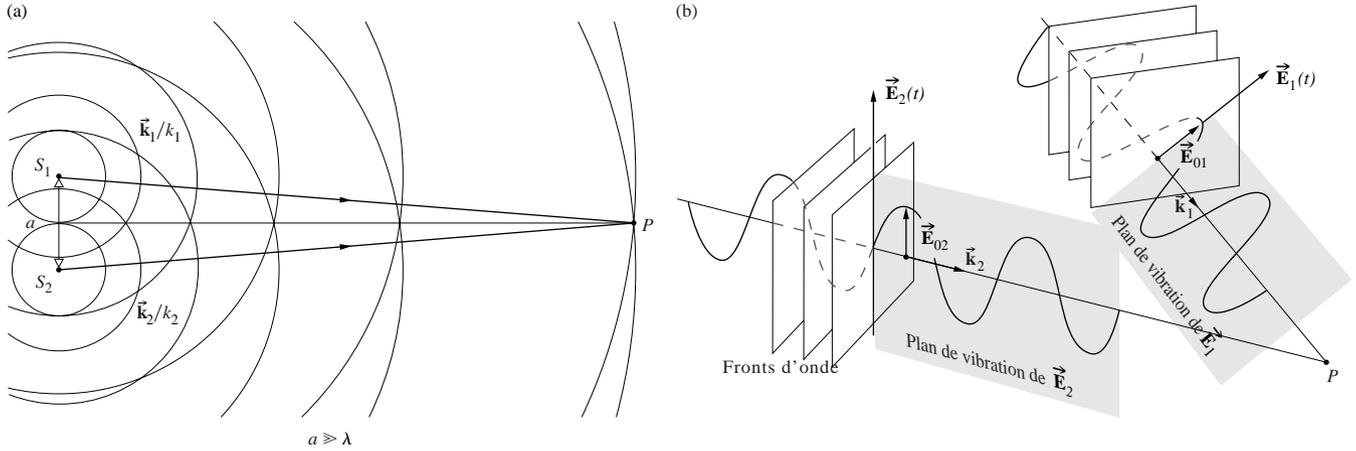


Figure 9.2 Ondes issues de deux sources ponctuelles et se superposant dans l'espace.

et donc :

$$\vec{\mathbf{E}}^2 = \vec{\mathbf{E}}_1^2 + \vec{\mathbf{E}}_2^2 + 2\vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 \quad (9.3)$$

En effectuant la moyenne temporelle des deux côtés, on trouve que l'éclairement devient :

$$I = I_1 + I_2 + I_{12} \quad (9.4)$$

sachant que :

$$I_1 = \langle \vec{\mathbf{E}}_1^2 \rangle_T \quad (9.5)$$

$$I_2 = \langle \vec{\mathbf{E}}_2^2 \rangle_T \quad (9.6)$$

$$\text{et} \quad I_{12} = 2\langle \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 \rangle_T \quad (9.7)$$

La dernière expression est connue sous le nom de terme d'interférence. Pour l'évaluer dans ce cas précis, posons :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 &= \vec{\mathbf{E}}_{01} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{02} \cos(\vec{\mathbf{k}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega t + \varepsilon_1) \\ &\quad \times \cos(\vec{\mathbf{k}}_2 \cdot \vec{\mathbf{r}} - \omega t + \varepsilon_2) \end{aligned} \quad (9.8)$$

ou de manière équivalente :

$$\begin{aligned} &\vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 = \\ &\vec{\mathbf{E}}_{01} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{02} [\cos(\vec{\mathbf{k}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}} + \varepsilon_1) \cos \omega t + \sin(\vec{\mathbf{k}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}} + \varepsilon_1) \sin \omega t] \\ &\times [\cos(\vec{\mathbf{k}}_2 \cdot \vec{\mathbf{r}} + \varepsilon_2) \cos \omega t + \sin(\vec{\mathbf{k}}_2 \cdot \vec{\mathbf{r}} + \varepsilon_2) \sin \omega t] \end{aligned} \quad (9.9)$$

Rappelons que la moyenne temporelle d'une fonction $f(t)$, prise pendant un intervalle de temps T , est :

$$\langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t') dt' \quad (9.10)$$

La période τ des fonctions harmoniques est $2\pi/\omega$, et pour le cas qui nous concerne $T \gg \tau$. Dans ce cas, le coefficient $1/T$, qui précède l'intégrale, a un rôle prédominant. En multipliant l'équation (9.9) et en effectuant la moyenne temporelle, nous obtenons :

$$\langle \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 \rangle_T = \frac{1}{2} \vec{\mathbf{E}}_{01} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{02} \cos(\vec{\mathbf{k}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}} + \varepsilon_1 - \vec{\mathbf{k}}_2 \cdot \vec{\mathbf{r}} - \varepsilon_2)$$

où l'on utilise le fait (p. 53) que $\langle \cos^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2}$, $\langle \sin^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2}$, et $\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle_T = 0$. Le terme d'interférence est alors :

$$I_{12} = \vec{\mathbf{E}}_{01} \cdot \vec{\mathbf{E}}_{02} \cos \delta \quad (9.11)$$

et δ , égal à $(\vec{\mathbf{k}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{k}}_2 \cdot \vec{\mathbf{r}} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$, est la différence de phase résultant à la fois d'une différence entre les chemins optiques et les angles de phase initiaux. Il faut remarquer que si $\vec{\mathbf{E}}_{01}$ et $\vec{\mathbf{E}}_{02}$ (et donc $\vec{\mathbf{E}}_1$ et $\vec{\mathbf{E}}_2$) sont perpendiculaires, $I_{12} = 0$ et $I = I_1 + I_2$.

De tels états linéaires, orthogonaux, interfèrent pour donner des états \mathcal{R} , \mathcal{L} , \mathcal{P} , ou \mathcal{C} , mais la répartition en éclairement est inchangée. La situation la plus fréquente est celle où \mathbf{E}_{01} et \mathbf{E}_{02} sont parallèles. Dans ce cas, l'éclairement se réduit à la valeur trouvée dans le traitement scalaire du paragraphe 7.1. Sous ces conditions,

$$I_{12} = E_{01} E_{02} \cos \delta$$

On peut écrire cela sous une forme plus pratique en remarquant que :

$$I_1 = \langle \vec{\mathbf{E}}_1^2 \rangle_T = \frac{E_{01}^2}{2} \quad (9.12)$$

$$\text{et} \quad I_2 = \langle \vec{\mathbf{E}}_2^2 \rangle_T = \frac{E_{02}^2}{2} \quad (9.13)$$

Le terme d'interférence devient alors :

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

On peut écrire l'éclairement global sous la forme :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (9.14)$$

En différents points de l'espace, il se peut que l'éclairement résultant soit supérieur, inférieur ou égal à $I_1 + I_2$, puisqu'il est lié à la valeur de I_{12} , elle-même liée à la valeur de δ . On obtient l'éclairement maximal pour $\cos \delta = 1$, donc :

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (9.15)$$

lorsque $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

Dans ce cas d'**interférence constructive totale**, la différence de phase entre les deux ondes est un multiple entier de 2π , et les perturbations sont *en phase*. Quand $0 < \cos \delta < 1$ les ondes sont *déphasées*, $I_1 + I_2 < I < I_{\max}$, et l'*interférence est constructive*. À $\delta = \pi/2$, $\cos \delta = 0$, les perturbations optiques sont déphasées de 90° , et $I = I_1 + I_2$. Pour $0 > \cos \delta > -1$ on a une *interférence destructive*, $I_1 + I_2 > I > I_{\min}$. On obtient un éclairement minimal quand les ondes sont déphasées de 180° , les creux de l'un et les crêtes de l'autre se chevauchent, $\cos \delta = -1$ et :

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (9.16)$$

Cela se produit quand $\delta = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$ et c'est ce que l'on appelle l'**interférence destructive totale**.

Un autre cas assez spécial, et néanmoins majeur se produit quand les amplitudes des deux ondes en P sur la figure 9.2 sont égales (i.e. $\vec{\mathbf{E}}_{01} = \vec{\mathbf{E}}_{02}$). Comme les contributions en éclairement des deux sources sont alors égales, et que $I_1 = I_2 = I_0$, l'équation (9.14) peut donc désormais s'écrire :

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta) = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad (9.17)$$

il s'ensuit que $I_{\min} = 0$ et $I_{\max} = 4I_0$. Pour une analyse de l'angle entre les deux faisceaux, se reporter au problème 9.3.

L'équation (9.14) est encore valable pour les ondes sphériques émises par S_1 et S_2 . On peut écrire de telles ondes sous la forme :

$$\vec{\mathbf{E}}_1(r_1, t) = \vec{\mathbf{E}}_{01}(r_1) \exp [i(kr_1 - \omega t + \varepsilon_1)] \quad (9.18a)$$

$$\text{et} \quad \vec{\mathbf{E}}_2(r_2, t) = \vec{\mathbf{E}}_{02}(r_2) \exp [i(kr_2 - \omega t + \varepsilon_2)] \quad (9.18b)$$

Les termes r_1 et r_2 sont les rayons des fronts d'onde sphériques qui se superposent en P ; ils caractérisent les distances des sources à P . Dans ce cas :

$$\delta = k(r_1 - r_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (9.19)$$

L'éclairement dans la région environnant S_1 et S_2 variera certainement d'un point à l'autre puisque $(r_1 - r_2)$ varie. Néanmoins, le principe de conservation de l'énergie nous dit que la moyenne spatiale de I doit rester constante et égale à la moyenne de $I_1 + I_2$. La moyenne spatiale de I_{12} doit donc être nulle, propriété vérifiée par l'équation (9.11), puisque la moyenne du terme en cosinus est en fait nulle (pour une discussion plus approfondie de ce point, se reporter au problème 9.2).

L'équation (9.17) est applicable quand la distance entre S_1 et S_2 est faible par rapport à r_1 et r_2 et quand la région d'interférence l'est également par rapport à r_1 et r_2 . Sous ces conditions, on peut considérer que $\vec{\mathbf{E}}_{01}$ et $\vec{\mathbf{E}}_{02}$ sont indépendants de la position, et donc constants dans la petite région étudiée. Si les sources émettrices sont de même force, $\vec{\mathbf{E}}_{01} = \vec{\mathbf{E}}_{02}$, $I_1 = I_2 = I_0$ et nous avons :

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{1}{2}[k(r_1 - r_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]$$

Les maxima d'éclairement s'obtiennent donc lorsque :

$$\delta = 2\pi m$$

à condition que $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. De même, les minima, pour lesquels $I = 0$, s'obtiennent lorsque :

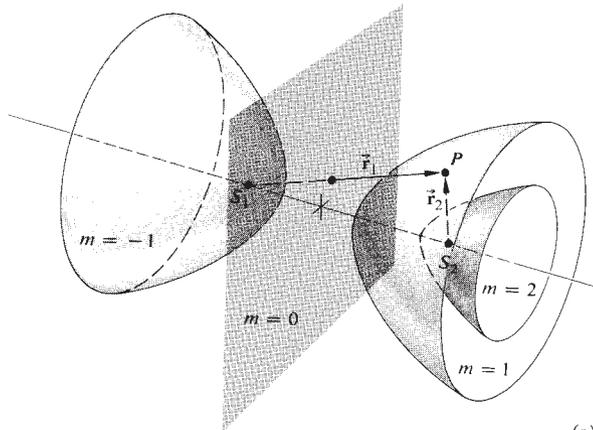
$$\delta = \pi m'$$

où $m' = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ ou si l'on préfère, $m' = 2m + 1$. En reprenant l'équation (9.19), on peut réécrire ces deux expressions pour δ de telle sorte qu'un maximum d'éclairement se produit lorsque :

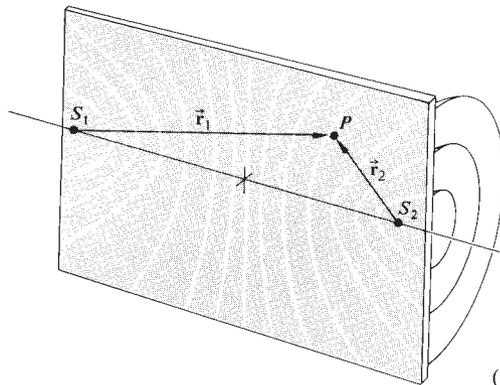
$$(r_1 - r_2) = [2\pi m + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)]/k \quad (9.20a)$$

et un minimum lorsque :

$$(r_1 - r_2) = [\pi m' + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)]/k \quad (9.20b)$$



(a)



(b)

Chacune de ces deux équations définit une famille de surfaces, qui sont des hyperboloïdes de révolution. Les sommets des hyperboloïdes sont séparés de distances égales aux termes de droite des équations (9.20a) et (9.20b). Les foyers sont situés en S_1 et S_2 . Si les ondes sont en phase à l'émission, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$, et les équations (9.20a) et (9.20b) peuvent être simplifiées en :

$$[\text{maxima}] \quad (r_1 - r_2) = 2\pi m/k = m\lambda \quad (9.21a)$$

$$[\text{minima}] \quad (r_1 - r_2) = \pi m'/k = \frac{1}{2}m'\lambda \quad (9.21b)$$

respectivement pour les maxima et minima d'éclairement. La figure 9.3a montre quelques-unes des surfaces le long desquelles l'éclairement est maximal. Les zones sombres et claires que l'on pourrait observer sur un écran dans la région

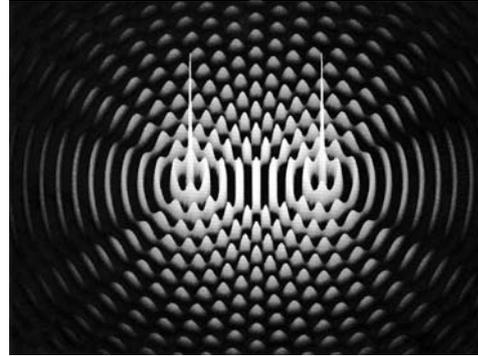


Figure 9.3 (a) Surfaces hyperboloïdales d'éclairement maximal pour deux sources ponctuelles. La quantité m est positive lorsque $r_1 > r_2$. (b) Ici, on voit comment les maxima d'éclairement sont distribués dans un plan contenant S_1 et S_2 . (c) Distribution de champ électrique dans le plan défini en (b). Les deux pics sont les sources ponctuelles S_1 et S_2 . On notera que l'espacement des sources est différent en (b) et en (c). (Photo The Optics Project, Mississippi State University.)

d'interférence sont appelées les **franges d'interférence** (figure 9.3b). On notera que la bande lumineuse centrale, équidistante des deux sources, appelée frange d'ordre zéro ($m = 0$), est encadrée par les minima $m' = \pm 1$, eux-mêmes bornés par les maxima du premier ordre ($m = \pm 1$), qui sont encadrés par les minima $m' = \pm 3$, et ainsi de suite.

Comme la longueur d'onde λ est très petite dans le visible, il y a un grand nombre de surfaces correspondant aux faibles valeurs de m , proches les unes des autres et ce, de part et d'autre du plan $m = 0$. On pourrait donc observer un certain nombre de franges pratiquement parallèles sur un écran perpendiculaire à ce plan ($m = 0$) et dans ce cas, l'approximation $r_1 \approx r_2$ est valide. Si l'on déplace S_1 et S_2 perpendiculairement à la ligne $\overline{S_1 S_2}$, les franges se déplacent presque parallèlement à elles-mêmes. *Deux fentes étroites produiront un grand nombre de franges qui se superposent, ce qui augmente ainsi l'éclairement sans modifier la répartition des franges.*

9.2 Conditions d'interférence

Pour que deux faisceaux interfèrent et produisent une figure d'interférence stable, ils doivent avoir approximativement la même fréquence. Une différence significative de fréquence engendrerait une différence de phase qui dépendrait du temps et fluctuerait rapidement, et la valeur moyenne de I_{12} serait nulle pendant l'intervalle de détection (voir chapitre 7.1). D'autre part, si les deux sources émettent de la lumière blanche, les composantes rouges interféreront entre elles, de même que les composantes bleues. Un grand nombre de figures d'interférence monochromatiques se chevaucheront, presque identiques entre elles et très légèrement décalées l'une par rapport à l'autre, produisant une figure d'interférence globale en lumière blanche. Elle ne sera pas aussi fine ni aussi étendue qu'un motif monochromatique, mais *la lumière blanche peut produire des interférences observables*.

On obtient les figures les plus nettes quand les ondes en superposition ont les mêmes amplitudes, ou des amplitudes presque égales. Les régions centrales des franges sombres et claires correspondent alors respectivement à des interférences complètement destructives et constructives, ce qui produit un contraste maximum.

Pour observer des franges d'interférence, il n'est pas nécessaire que les deux sources soient en phase. On obtiendra une figure d'interférence quelque peu déplacée, mais néanmoins identique à la précédente s'il existe une différence de phase initiale entre les sources, tant que celle-ci demeure constante. De telles sources (qui peuvent être en phase ou non, mais qui évoluent toujours ensemble) sont **cohérentes***.

9.2.1 Cohérence spatiale et temporelle

Compte tenu de la nature particulière du processus d'émission, les sources quasi monochromatiques classiques produisent de la lumière qui est une succession de trains d'onde. À chaque point éclairé de l'espace est associé un champ qui oscille (en effectuant à peu près un million de cycles) pendant moins de 10 ns avant de changer aléatoirement de phase. Cet intervalle de temps, pendant lequel l'onde lumineuse prend l'aspect d'une sinusoïde est une indication de sa **cohérence temporelle**. Cette durée moyenne durant laquelle l'onde lumineuse oscille de manière prévisible a déjà été définie comme étant le temps de cohérence de la radiation. La cohérence temporelle de la source est d'autant plus grande que le temps de cohérence est long.

*Le chapitre 12 est consacré à l'étude de la cohérence. On n'aborde donc ici que les aspects directement pertinents.

Si on la regarde passer depuis un point fixe de l'espace, l'onde lumineuse semble pratiquement sinusoïdale pour un certain nombre d'oscillations, entre d'abrupts changements de phase. La longueur correspondante, sur laquelle l'onde lumineuse oscille de manière régulière et prévisible, est la longueur de cohérence [équation (7.64)]. Une fois de plus, il conviendra de se représenter un faisceau lumineux comme la progression de groupes d'onde bien définis, plus ou moins sinusoïdaux, de longueur moyenne Δl_c , et dont les phases ne sont pas corrélées entre elles. Il ne faut pas oublier que *la cohérence temporelle d'un rayonnement est une manifestation de sa pureté spectrale*. Si la lumière était idéalement monochromatique, l'onde serait une sinusoïde parfaite avec une longueur de cohérence infinie. Toutes les sources réelles en sont loin, et elles émettent en fait sur une gamme de fréquences, qui peut être, parfois, très étroite. Par exemple, une lampe à décharge classique de laboratoire a une longueur de cohérence de quelques millimètres, tandis que certains types de lasers possèdent facilement des longueurs de cohérence de plusieurs dizaines de kilomètres.

La figure 9.4 résume certaines de ces idées. En (a) l'onde qui provient d'un point source est monochromatique et possède une cohérence temporelle totale. Ce qui se passe en P'_1 se passera, un moment plus tard, en P'_2 et encore plus tard en P'_3 , de manière totalement prévisible. En fait, en observant P'_4 , nous pouvons déterminer ce que l'onde fera à tout moment en P'_1 . Chaque point de l'onde est corrélé ; son temps de cohérence est illimité. En revanche, la figure 9.4b montre une source ponctuelle qui change de fréquence d'un moment à l'autre. Il n'y a maintenant plus de corrélation de l'onde en des points éloignés les uns des autres comme P'_1 et P'_4 . Les ondes n'ont pas la cohérence temporelle totale exposée en (a), mais elles ne sont pas complètement imprévisibles ; en des points proches l'un de l'autre comme P'_2 et P'_3 , il y a une certaine corrélation. C'est un exemple de la *cohérence temporelle partielle*, dont une mesure est la longueur de cohérence, la plus petite longueur le long de laquelle la perturbation est sinusoïdale, c'est-à-dire la distance le long de laquelle la phase est prévisible.

Notons que dans les deux parties de la figure 9.4, le comportement des ondes aux points P_1 , P_2 , et P_3 est complètement corrélé. Chacun des deux faisceaux est issu d'un seul point source et P_1 , P_2 , et P_3 sont situés sur le même front d'onde dans les deux cas ; la perturbation en chacun de ces points séparés latéralement est en phase et reste en phase. Les deux ondes présentent donc une **cohérence spatiale** totale. En revanche, supposons que la source est étendue, c'est-à-dire composée de plusieurs sources ponctuelles largement séparées (monochromatiques de période τ), comme en figure 9.5. Si nous pouvions

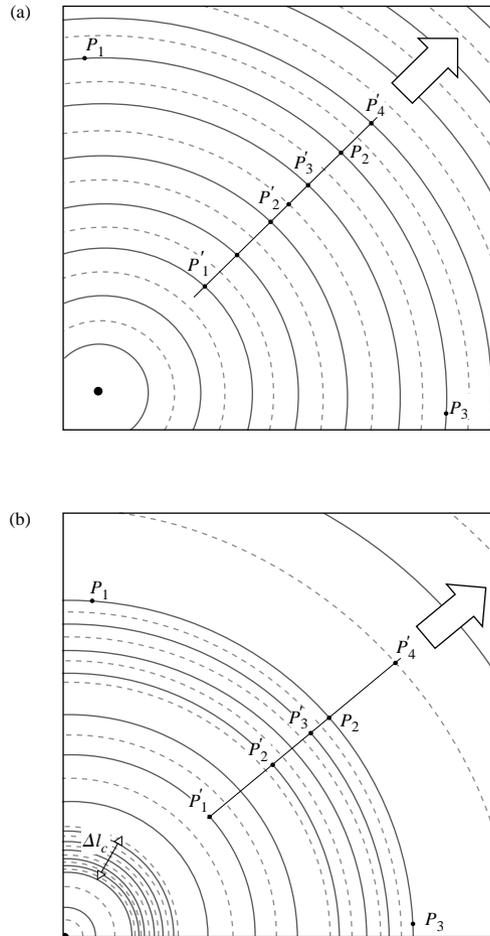


Figure 9.4 Cohérences spatiale et temporelle. (a) Onde parfaitement cohérente, spatialement et spectralement. (b) Ici, la cohérence spatiale est totale, mais la cohérence temporelle n'est que partielle.

prendre une photo du motif de l'onde toutes les τ secondes dans la figure 9.5, ce serait à chaque fois la même ; chaque front d'onde serait remplacé par un autre, identique, situé une longueur d'onde derrière lui. Les perturbations en $P'_1, P'_2,$ et P'_3 sont corrélées et l'onde est cohérente temporellement.

Pour introduire un peu de réalisme, supposons que chaque source ponctuelle change de phase rapidement, et de manière aléatoire, en émettant des trains d'ondes sinusoïdaux de 10 ns de long. Les ondes de la figure 9.5 changent aléatoirement de phase, se déplacent, se combinent et se recombinent dans une agitation frénétique. Les perturbations en $P'_1, P'_2,$ et P'_3 ne sont corrélées que pendant un temps inférieur à 10 ns. Et les champs

en deux points, même peu espacés, comme P_1 et P_2 , sont presque complètement décorrélés en fonction de la taille de la source. Le faisceau issu de la flamme d'une bougie ou d'un rayon de Soleil est un désordre multifréquence de cette nature.

On peut s'attendre à ce que deux sources ordinaires, deux ampoules par exemple, conservent une phase relative constante pendant un temps inférieur ou égal à Δt_c , de telle sorte que le motif d'interférence qu'elles produisent se déplacera aléatoirement dans l'espace extrêmement rapidement, le rendant pratiquement impossible à observer. Jusqu'à l'avènement du laser, il existait un principe de base selon lequel deux sources individuelles ne pouvaient jamais produire une figure d'interférence observable. Pourtant, il existe des lasers dont la durée de cohérence peut être très longue, et l'on a pu observer et photographier l'interférence issue de lasers indépendants*. Le moyen le plus classique de surmonter ce problème avec des sources thermiques ordinaires est de produire deux sources secondaires cohérentes à partir d'une seule source primaire.

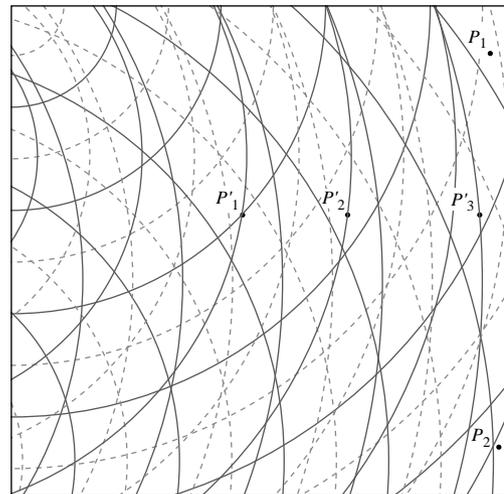


Figure 9.5 Avec de multiples (ici, quatre) sources ponctuelles largement espacées, l'onde résultante est encore cohérente. Toutefois si ces sources changent de phase, rapidement et de manière aléatoire, les cohérences spatiale et temporelle diminuent en conséquence.

* G. Magyar et L. Mandel, « Interference fringes produced by superposition of two independent maser light beams », *Nature* **198**, 255 (1963). F. Louradour, F. Reynaud, B. Colombeau, et C. Froehly, « Interference fringes between two separate lasers », *Am. J. Phys.* **61**, 242 (1993). L. Basano et P. Ottonello, « Interference fringes from stabilized diode lasers », *Am. J. Phys.* **68**, 245 (2000). E. C. G. Sudarshan et T. Rothman, « The two-slit interferometer reexamined », *Am. J. Phys.* **59**, 592 (1991).

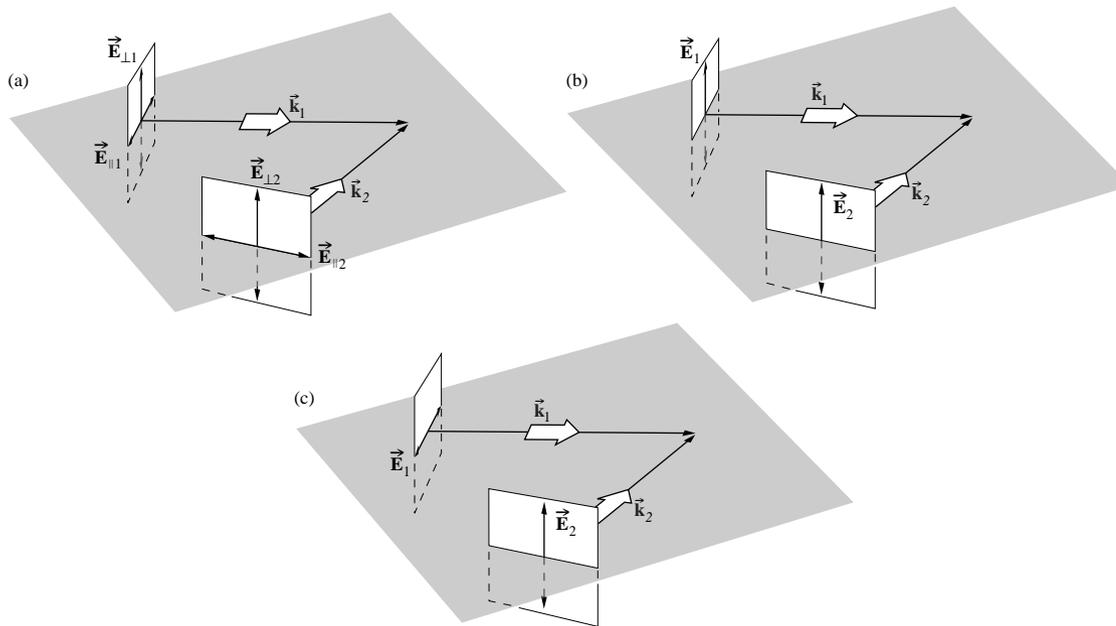


Figure 9.6 Interférence en lumière polarisée.

9.2.2 Les lois de Fresnel-Arago

Dans le paragraphe 9.1, nous avons supposé que les vecteurs des deux perturbations optiques qui se superposent étaient polarisés linéairement et étaient parallèles. Néanmoins, les formules s'appliquent également à des situations plus complexes ; en fait, elles sont indépendantes de l'état de polarisation des ondes. Afin d'appréhender cela, souvenons-nous que tout état de polarisation peut se définir comme la superposition de deux états \mathcal{P} orthogonaux. Pour la lumière naturelle, ces états \mathcal{P} sont mutuellement incohérents, mais cela ne présente pas de difficulté particulière.

Supposons que deux ondes aient leurs vecteurs de propagation dans le même plan, et que l'on puisse définir leurs composantes \mathcal{P} orthogonales par rapport à ce plan, par exemple \vec{E}_{\parallel} et \vec{E}_{\perp} , respectivement parallèle et perpendiculaire au plan (figure 9.6a). Ainsi chaque plan d'onde, polarisé ou non, peut s'écrire sous la forme $(\vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp})$. Imaginons que les ondes $(\vec{E}_{\parallel 1} + \vec{E}_{\perp 1})$ et $(\vec{E}_{\parallel 2} + \vec{E}_{\perp 2})$ émises de deux sources cohérentes identiques se superposent en une région de l'espace. La répartition d'éclairement correspondante sera exactement constituée de deux figures d'interférence distinctes $\langle (\vec{E}_{\parallel 1} + \vec{E}_{\parallel 2})^2 \rangle_T$ et $\langle (\vec{E}_{\perp 1} + \vec{E}_{\perp 2})^2 \rangle_T$ superposées. Par conséquent, *bien que nous ayons spécifiquement obtenu les équations du chapitre précédent pour la lumière polarisée linéairement, elles sont applicables pour tout état de polarisation, notamment la lumière naturelle.*

Remarquons que même si $\vec{E}_{\perp 1}$ et $\vec{E}_{\perp 2}$ sont toujours parallèles entre eux, $\vec{E}_{\parallel 1}$ et $\vec{E}_{\parallel 2}$, qui sont dans le plan de référence, n'ont pas besoin de l'être. Ils ne seront parallèles que lorsque les deux faisceaux seront eux-mêmes parallèles (i.e. $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$). La nature vectorielle inhérente au processus d'interférence, comme elle se manifeste dans l'écriture du terme I_{12} [équation (9.11)], ne peut être ignorée. Il existe de nombreux cas pratiques où les faisceaux sont presque parallèles et où la théorie scalaire s'appliquera parfaitement bien. Les schémas de la figure 9.6, (b) et (c) incitent tout de même à la prudence. Ils dépeignent la superposition imminente de deux ondes cohérentes polarisées linéairement. Dans la figure 9.6b, les vecteurs vibrants sont parallèles, même si les faisceaux ne le sont pas, et l'interférence aura lieu néanmoins. Dans la figure 9.6c, les vecteurs sont perpendiculaires et $I_{12} = 0$, ce qui serait le cas ici même si les faisceaux étaient parallèles.

Fresnel et Arago ont réalisé une étude exhaustive des conditions sous lesquelles l'interférence de la lumière polarisée se produit, et leurs conclusions résument certaines des considérations faites ci-dessus. Les **lois de Fresnel-Arago** sont les suivantes :

1. Deux états \mathcal{P} cohérents et orthogonaux ne peuvent interférer en ce sens que $I_{12} = 0$ et il ne résulte aucune frange.

2. Deux états \mathcal{P} cohérents et parallèles interféreront de la même manière que le ferait la lumière naturelle.
3. Les deux états \mathcal{P} orthogonaux d'une lumière naturelle ne peuvent interférer pour former une figure d'interférence facilement observable, et cela même s'ils sont alignés. Ce dernier point est compréhensible car ces états \mathcal{P} sont incohérents.

9.3 Interféromètres à division de front d'onde

Les sources représentent le problème principal dans l'obtention d'interférences : elles doivent être *cohérentes*. Cependant, les sources correctement cohérentes, séparées et indépendantes, en dehors des lasers modernes, n'existent pas ! Ce dilemme fut résolu pour la première fois il y a deux cents ans par Thomas Young dans sa célèbre expérience du double faisceau. De manière brillante, il prit un front d'onde unique dont il préleva deux zones cohérentes, qu'il fit interférer par la suite.

9.3.1 L'expérience de Young

En 1665, Grimaldi décrivit une expérience qu'il avait montée pour observer l'interaction entre deux faisceaux de lumière. Il laissait entrer la lumière solaire dans une pièce sombre par deux trous d'épingle, proches l'un de l'autre, faits dans un écran opaque. Comme un obturateur d'appareil photo (p. 226), chaque trou d'épingle projetait une image du Soleil sur une surface blanche placée à quelque distance de là. L'idée était de montrer que là où les cercles de lumière se superposaient, il pouvait se produire de l'obscurité. Bien qu'à l'époque il ne pouvait comprendre pourquoi, l'expérience échoua car la source primaire, le disque solaire (environ 32 minutes d'arc), était trop large et, par conséquent, la lumière incidente n'avait pas la cohérence spatiale nécessaire pour illuminer convenablement les deux trous d'épingle simultanément. Pour que cela fût le cas, le Soleil aurait dû ne mesurer que quelques secondes d'arc.

Cent quarante ans plus tard, le Dr Thomas Young (guidé par le phénomène de battement, qui était connu comme étant la superposition de deux ondes sonores) entreprit de prouver la nature ondulatoire de la lumière. Il refit l'expérience de Grimaldi, mais fit passer cette fois la lumière solaire à travers un premier trou d'épingle, qui devenait la source primaire (figure 9.7). Cela eut pour conséquence de créer un faisceau spatialement cohérent qui pouvait illuminer de manière identique les deux ouvertures. Young réussit ainsi à produire un système de franges d'interférence alternativement brillantes et sombres. De nos jours, grâce à

une meilleure compréhension de la physique, on remplace généralement les trous d'épingle par des fentes étroites qui laissent passer beaucoup plus de lumière (figure 9.8a).

Considérons un plan d'onde monochromatique parfait illuminant une longue fente étroite. À partir de cette fente primaire, la lumière sera diffractée vers l'avant selon tous les angles et une onde cylindrique émergera. Supposons que cette onde rencontre à son tour deux fentes étroites, parallèles et proches l'une de l'autre, S_1 et S_2 , ce qui est représenté dans une vue tridimensionnelle sur la figure 9.8a. S'il y a symétrie, les parties du front d'onde primaire qui arrivent sur les deux fentes sont exactement en phase, et les fentes constituent deux ondes secondaires cohérentes. On peut s'attendre à ce que, partout où les ondes issues de S_1 et S_2 se superposent, un phénomène d'interférence se produise (venant du fait que la différence de chemin optique est inférieure à la longueur de cohérence $c\Delta t_c$).

Les figures 9.8a, b, et c correspondent au montage classique de l'**expérience de Young**, et représentent trois de ses variantes. De nos jours, on se passe habituellement du premier écran, et l'on éclaire directement l'écran à fentes au moyen d'un laser (figure 9.8f). Dans une situation réaliste, la distance entre écrans (Σ_a et Σ_o) dans la figure 9.8c est très grande par rapport à la distance a entre les deux fentes, plusieurs milliers de fois supérieure, et toutes les franges sont très proches du centre O de l'écran. On détermine la différence de chemin optique entre les rayons le long de S_1P et S_2P , en première approximation, en traçant une perpendiculaire à S_1P et passant par S_2 . Cette différence de chemin est donnée par :

$$(\overline{S_1B}) = (\overline{S_1P}) - (\overline{S_2P}) \quad (9.22)$$

ou

$$(\overline{S_1B}) = r_1 - r_2$$

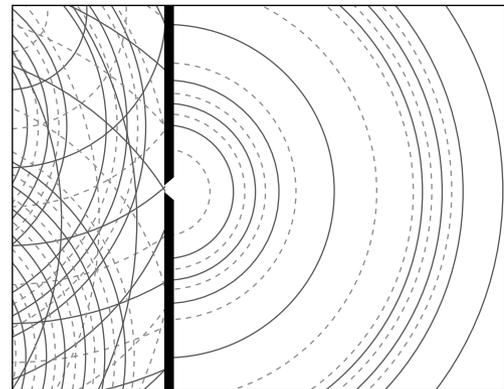


Figure 9.7 Le trou source diffuse une onde qui est cohérente spatialement, mais pas temporellement.

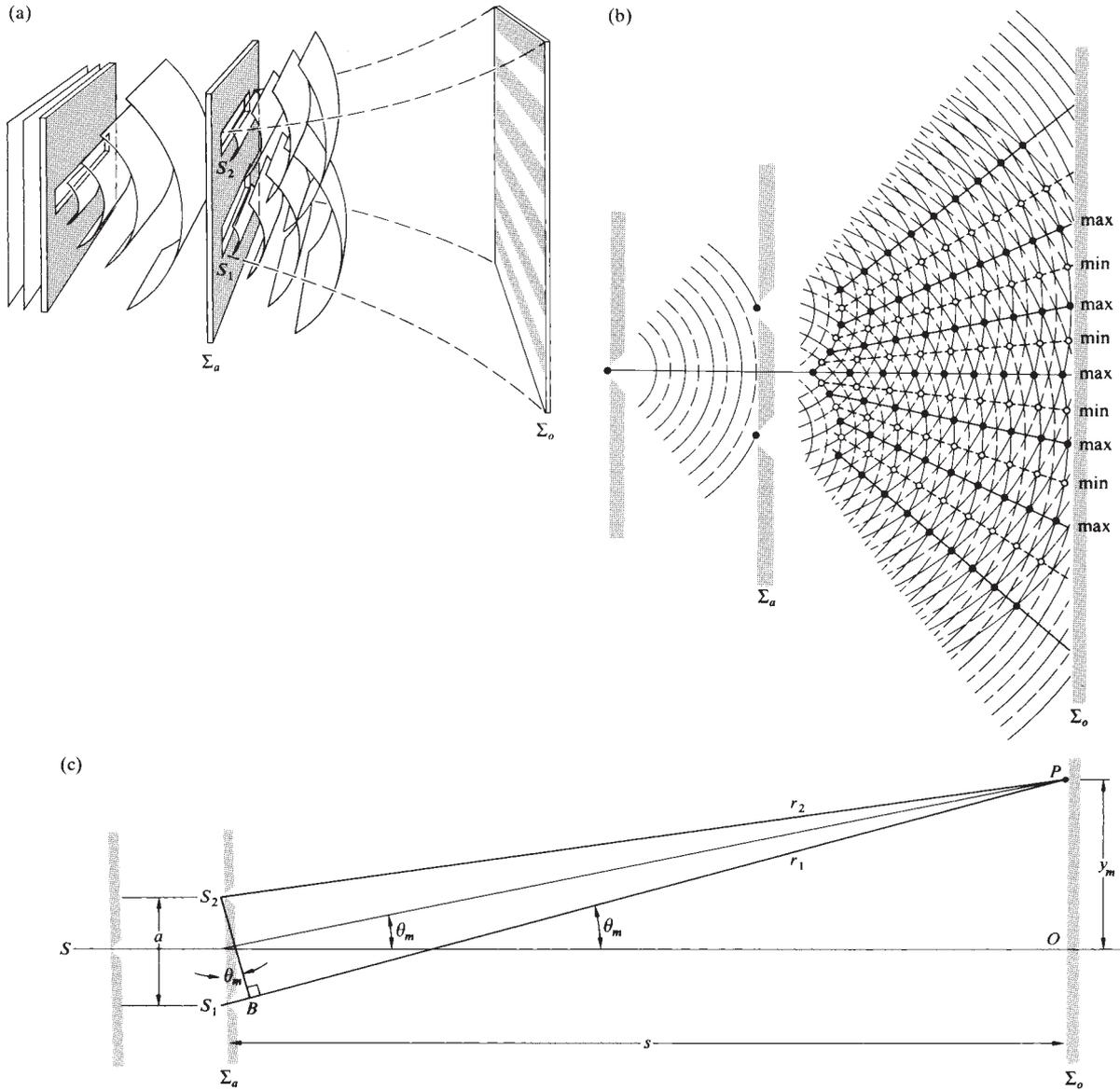
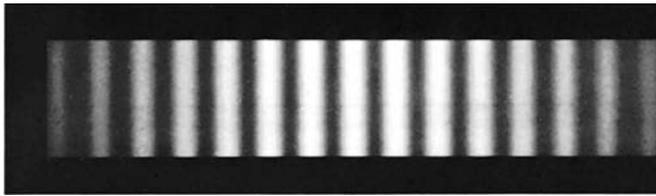
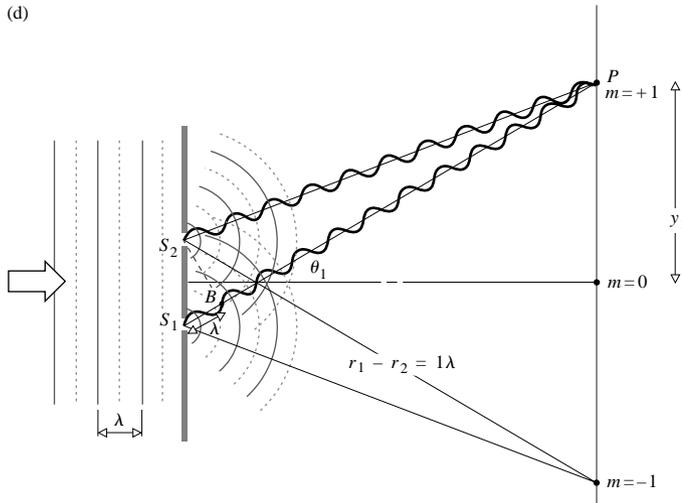


Figure 9.8 Expérience de Young. (a) Des ondes cylindriques se superposent au-delà de l'écran qui contient les deux fentes. (b) Superposition des ondes aboutissant à des pics et à des creux. Les maxima et les minima se trouvent le long d'hyperboles pratiquement rectilignes. (c) Géométrie de l'expérience de Young. (d) Une différence de chemin optique égale à une longueur d'onde correspond à $m = \pm 1$ et au maximum du premier ordre. (e) (Photo M. Cagnet, M. Francon, et J. C. Thierr : *Atlas optique des phénomènes*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1962.) (f) Une version moderne de l'expérience de Young utilisant un photodétecteur (par exemple, une cellule photovoltaïque ou une photodiode comme la RS 305-462) et un enregistreur X-Y. Le détecteur est placé sur une platine motorisée et balaye la figure d'interférence.



(e)

En continuant avec cette approximation (voir Problème 9.15), $(r_1 - r_2) = a \sin \theta$ et donc :

$$r_1 - r_2 \approx a \theta \quad (9.23)$$

comme $\theta \approx \sin \theta$. Remarquons que :

$$\theta \approx \frac{y}{s} \quad (9.24)$$

et donc

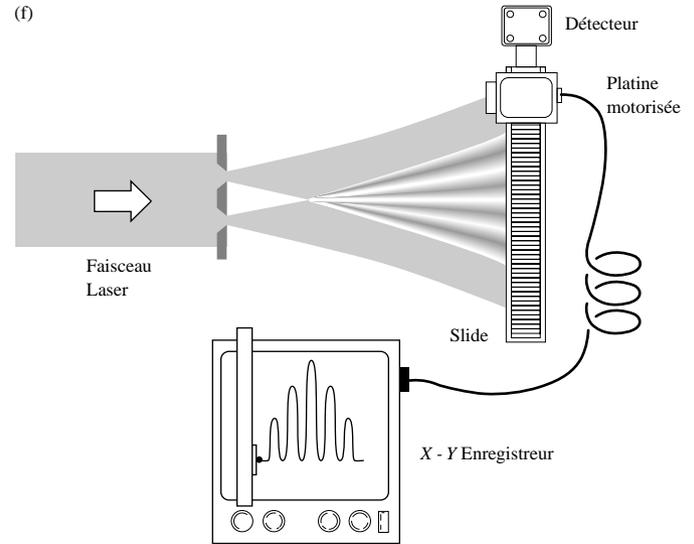
$$r_1 - r_2 \approx \frac{a}{s} y \quad (9.25)$$

Conformément au paragraphe 9.1, l'interférence *constructive* se produira quand

$$r_1 - r_2 = m\lambda \quad (9.26)$$

Donc, en tenant compte des deux dernières relations nous obtenons :

$$y_m \approx \frac{s}{a} m\lambda \quad (9.27)$$



Cela donne la position de la $m^{\text{ième}}$ frange brillante sur l'écran, si nous considérons le maximum en 0 comme la frange d'ordre zéro. La position angulaire de la frange est obtenue en substituant la dernière expression dans l'équation (9.24) ; ainsi :

$$\theta_m = \frac{m\lambda}{a} \quad (9.28)$$

On peut obtenir cette relation directement en examinant la figure 9.8c. Pour le maximum d'interférence d'ordre m , un nombre m entier de longueurs d'onde doit s'inscrire dans la distance $r_1 - r_2$. Par conséquent, à partir du triangle S_1S_2B ,

$$a \sin \theta_m = m\lambda \quad (9.29)$$

ou

$$\theta_m \approx m\lambda/a$$

L'espacement des franges sur l'écran peut facilement être déduit de l'équation (9.27). La différence entre les positions de deux maxima consécutifs est :

$$y_{m+1} - y_m \approx \frac{s}{a} (m+1)\lambda - \frac{s}{a} m\lambda$$

ou
$$\Delta y \approx \frac{s}{a} \lambda \quad (9.30)$$

Évidemment, les franges rouges sont plus larges que les franges bleues.

Comme cette figure est équivalente à celle obtenue avec la superposition de deux ondes sphériques (au moins dans la région où $r_1 \approx r_2$), l'équation (9.17) peut s'appliquer. En utilisant la différence de phase

$$\delta = k(r_1 - r_2)$$

L'équation (9.17) peut se réécrire ainsi :

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{k(r_1 - r_2)}{2}$$

étant donné, bien sûr, que les deux faisceaux sont cohérents et ont le même éclairement I_0 . Avec :

$$r_1 - r_2 \approx ya/s$$

l'éclairement résultant devient :

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{ya\pi}{s\lambda} \quad (9.31)$$

Comme le montre la figure 9.9, deux maxima consécutifs sont séparés par la valeur de Δy donnée dans l'équation (9.30). Il ne faut pas oublier que nous avons effectivement considéré que chaque fente était infiniment étroite, et les franges en cosinus carré de la figure 9.9 sont vraiment une idéalisation inatteignable.* La figure réelle, figure 9.8e, décroît avec la distance de chaque côté de O en raison de la diffraction.

Les effets d'une longueur de cohérence finie

Lorsque P s'éloigne, au-dessus ou en-dessous, de l'axe sur la figure 9.8c, $\overline{S_1B}$ (qui est plus ou moins égal à $\overline{S_1S_2}$) augmente. Si la source primaire a une faible longueur de cohérence, les groupes d'onde identiques appariés ne pourront plus arriver exactement ensemble en P comme la différence de chemin optique augmente. Il y aura un nombre croissant de superpositions dans des parties de trains d'onde non corrélés, et le

*On reconsidérera dans les chapitres suivants (10 et 12) les modifications de cette figure dues à l'augmentation de la largeur de la source primaire S ou à celle des fentes-sources secondaires. Dans le premier cas, on utilisera le contraste des franges pour mesurer le degré de cohérence (paragraphe 12.1). Dans le dernier cas, les effets de la diffraction deviennent significatifs.

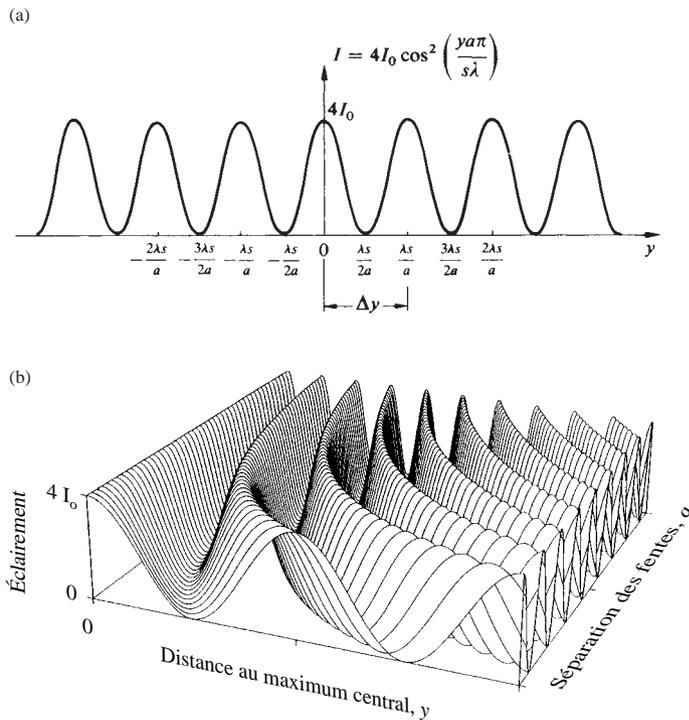


Figure 9.9 (a) Courbe théorique de l'éclairement en fonction de la distance à l'axe. (b) L'interfrange Δy est inversement proportionnelle à la séparation des fentes, comme on peut s'y attendre d'après les considérations de Fourier ; ne pas oublier que la fréquence spatiale et la position sont des variables conjuguées l'une de l'autre. (Reproduit à partir de « Graphical Representations of Fraunhofer Interference and Diffraction », *Am. J. Phys.* **62**, 6 (1994), A.B. Bartlett, University of Colorado and B. Mechtly, Northeast Missouri State University et l'American Association of Physics Teachers.)

contraste des franges se dégradera. Il se peut que Δl_c soit inférieur à $\overline{S_1B}$. Dans ce cas, au lieu d'avoir deux parties corrélées du même train d'onde arrivant en P , seuls des fragments des différents trains d'onde se superposeront, et les franges disparaîtront.

Comme le montre la figure 9.10a, le train d'onde E_1 issu de la source S_1 arrive en P en même temps que le train d'onde E_2 issu de la source S_2 quand la différence de chemin optique est supérieure à la longueur de cohérence. Il y a interférence, mais celle-ci ne dure que très peu de temps avant que la figure se déplace en raison du début de superposition des trains d'ondes D_1 et C_2 , les déphasages relatifs étant alors différents. Si la longueur de cohérence était plus grande ou la différence de chemin optique plus petite, le train d'onde D_1 interagirait plus ou moins avec son clone, le groupe d'onde D_2 , et il en serait de même pour chaque paire. Les phases seraient alors corrélées,

et la figure d'interférence stable (figure 9.10b). Comme une source de lumière blanche a une longueur de cohérence inférieure à environ trois longueurs d'onde, il s'ensuit de l'équation (9.27) que seulement trois franges sont visibles de chaque côté du maximum central.

En lumière blanche (ou avec un éclairage étendu), toutes les composantes colorées arriveront en phase à $y = 0$, ayant parcouru des distances égales depuis chaque ouverture. La frange d'ordre zéro sera essentiellement blanche, mais tous les maxima d'ordre supérieur présenteront un éventail de longueurs d'onde, puisque y_m est, d'après l'équation (9.27), une fonction de λ . Nous pouvons donc envisager dans la lumière blanche que le maximum d'ordre m correspond à la bande de longueurs d'onde d'ordre m ; une notion qui nous conduira directement à la grille de diffraction dans le prochain chapitre.

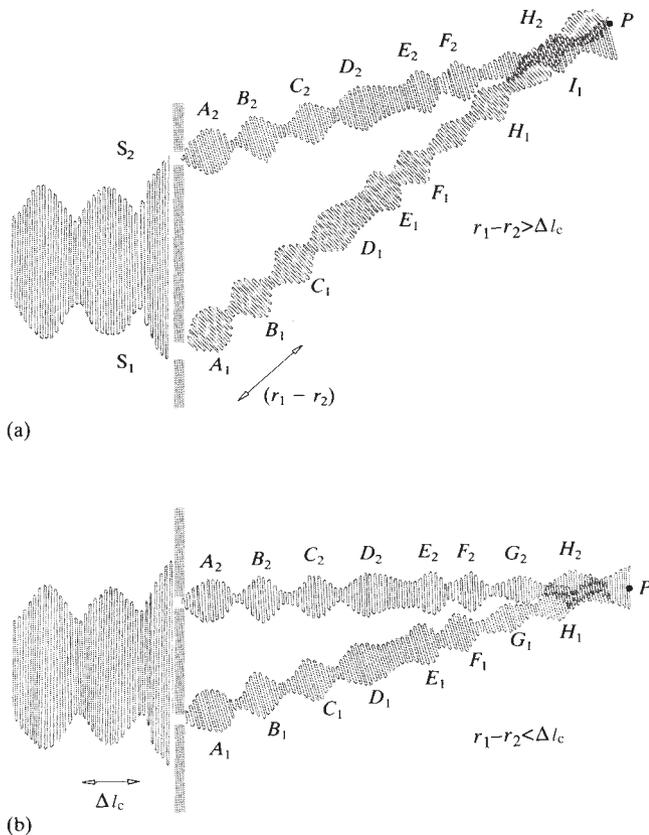


Figure 9.10 Représentation schématique montrant comment se produisent des interférences avec des trains d'onde de longueur de cohérence Δl_c , lorsque (a) la différence de chemin optique est supérieure à Δl_c et (b) la différence de chemin optique est inférieure à Δl_c .

On peut observer la figure d'interférence en faisant deux petits trous d'épingle dans une carte peu épaisse. Les trous devront approximativement avoir la largeur des caractères d'imprimerie de cette page, et la séparation entre leurs centres être de l'ordre de grandeur de trois rayons. Un lampadaire, un phare de voiture ou un feu de signalisation la nuit, situés à plusieurs centaines de mètres, serviront de source d'onde plane. La carte devra être positionnée *très près de l'œil*, et en face de celui-ci. Les franges apparaîtront perpendiculairement à la ligne joignant les deux centres. La figure d'interférence est plus facilement observable avec des fentes, comme nous l'avons vu au paragraphe 10.2.2, mais faites un essai avec les trous d'épingles.

En raison de leur grande longueur d'onde, les micro-ondes représentent également un moyen aisé d'observer une interférence à double fente. Deux fentes (par exemple, $\lambda/2$ de largeur sur λ de longueur, séparées par 2λ) coupées dans une feuille de métal ou d'aluminium feront parfaitement l'affaire comme sources secondaires (figure 9.11).

La perspective de Fourier

Quand les ondes planes de la figure 9.8b illuminent la première fente étroite, la lumière s'étale (i.e. est diffractée) derrière l'écran opaque sous une forme similaire à celle d'une onde cylindrique; plus la fente est étroite, plus l'onde se rapproche d'une onde cylindrique. Au-delà de l'écran, la lumière s'étend sur une large gamme angulaire ou, de manière équivalente, sur une large gamme de fréquences spatiales. Du point de vue de Fourier, cela se produit car une source infiniment étroite (i.e. étroite spatialement) crée un champ lumineux infiniment étendu (i.e. large en fréquences spatiales). La transformée d'un point source, idéalement un pic unidimensionnel (connu sous le

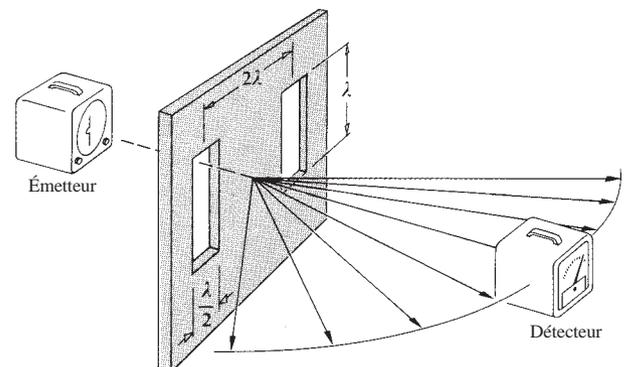


Figure 9.11 Interféromètre à micro-ondes.

nom de fonction delta de Dirac, p. 542), est un spectre constant et continu contenant toutes les fréquences spatiales, une onde sphérique. De la même façon, une source linéaire idéale produira une onde cylindrique.

En pratique, l'expérience de Young est habituellement constituée de deux fentes sources, en phase, disposées de telle manière que $s \gg a$. En règle générale, s est suffisamment grand pour que le système de franges résultant corresponde à une figure de diffraction de Fraunhofer (p. 473). Les deux fentes très étroites sont similaires à deux sources linéaires, deux pics idéalement étroits, et la transformée de deux fonctions delta est une fonction cosinus et la loi d'éclairement un cosinus carré ; nous avons vu cela sur la figure 7.42.

Plusieurs autres interféromètres

Un grand nombre d'autres interféromètres à division de front d'onde utilisent les mêmes considérations physiques et mathématiques que celles employées pour l'expérience de Young. Les plus connus d'entre eux sont le miroir double de Fresnel, le biprisme de Fresnel et le miroir de Lloyd. Le **miroir double de Fresnel** est constitué de deux miroirs plans argentés inclinés l'un

par rapport à l'autre d'un très petit angle, comme le montre la figure 9.12. Une partie du front d'onde cylindrique provenant de la fente S est réfléchi par le premier miroir, et une autre partie du front d'onde est réfléchi par le second miroir. Un champ d'interférence existe dans la région de l'espace où les deux ondes réfléchies se superposent. Les images (S_1 et S_2) de la fente S par les deux miroirs peuvent être considérées comme deux sources cohérentes séparées, situées à une distance a l'une de l'autre. En appliquant les lois de la réflexion, il s'ensuit, comme l'illustre la figure 9.12a, que $\overline{SA} = \overline{S_1A}$ et $\overline{SB} = \overline{S_2B}$ et donc $\overline{SA} + \overline{AP} = r_1$ et $\overline{SB} + \overline{BP} = r_2$. La différence de chemin optique entre les deux rayons est donc de $r_1 - r_2$. Les différents maxima sont atteints quand $r_1 - r_2 = m\lambda$, comme pour l'interféromètre de Young. Une fois de plus, la séparation entre les franges est donnée par

$$\Delta y \approx \frac{s}{a} \lambda$$

où s est la distance entre le plan des deux sources virtuelles (S_1, S_2) et l'écran. La disposition géométrique sur la figure 9.12 a été délibérément exagérée afin de la rendre plus claire. L'angle θ entre les miroirs doit être très faible si l'on veut que les vecteurs champ électrique soient parallèles, ou presque parallèles, pour

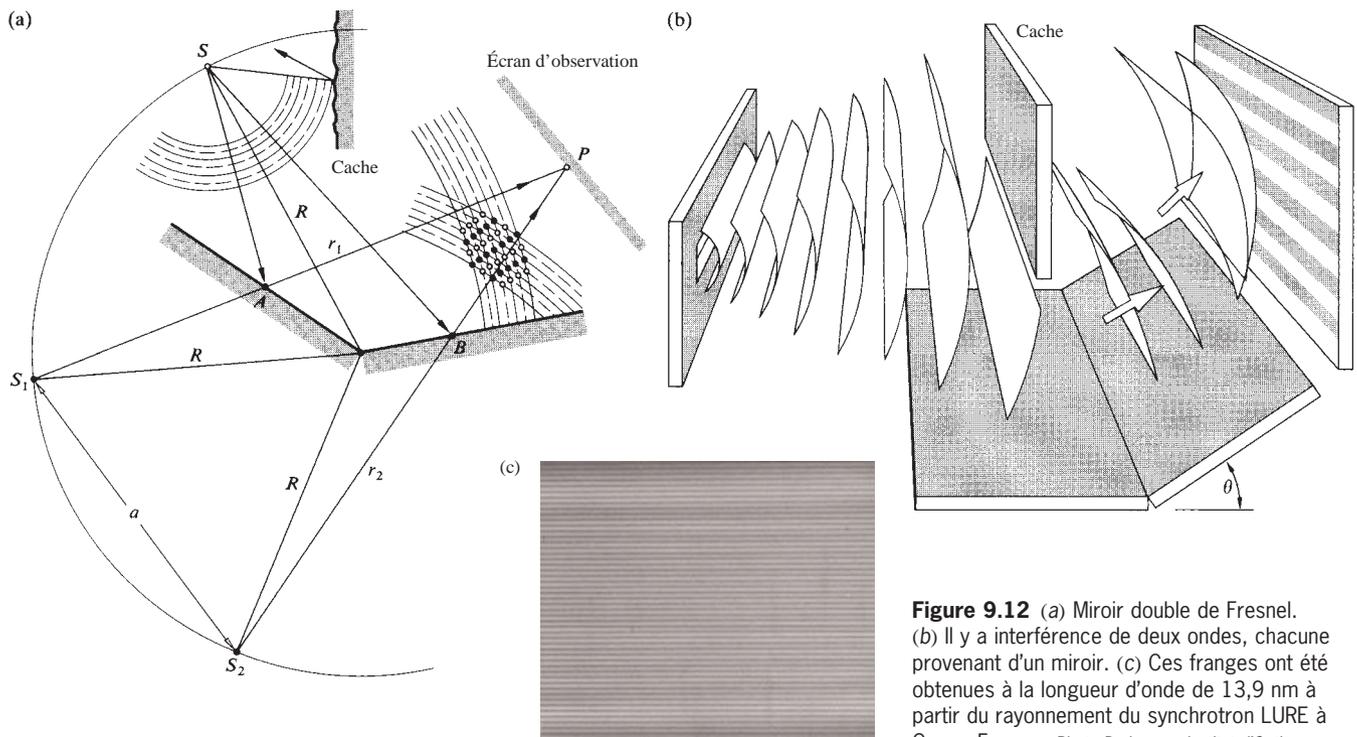
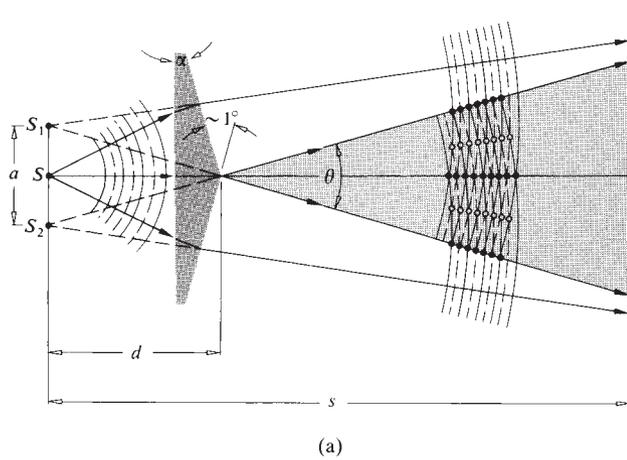
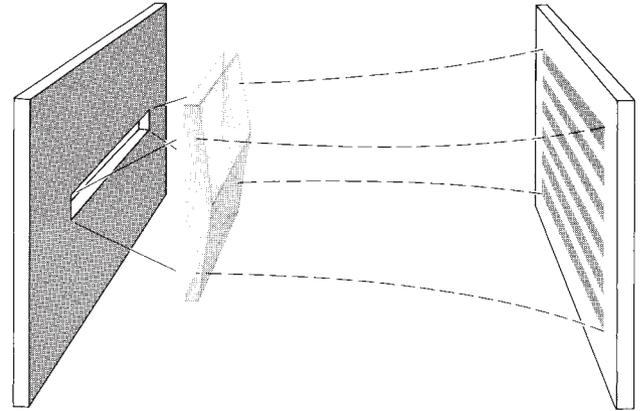


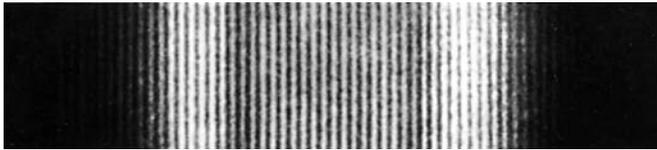
Figure 9.12 (a) Miroir double de Fresnel. (b) Il y a interférence de deux ondes, chacune provenant d'un miroir. (c) Ces franges ont été obtenues à la longueur d'onde de 13,9 nm à partir du rayonnement du synchrotron LURE à Orsay, France. (Photo D. Joyeux, Institut d'Optique.)



(a)



(b)



(c)

Figure 9.13 Biprisme de Fresnel. (a) Le biprisme crée deux sources image. (b) Avec l'utilisation d'une fente comme source, les franges sont des bandes. (c) Franges d'interférence observées avec un montage de biprisme pour électrons par G. Möllenstedt. Une fois de plus, les électrons se comportent comme les photons. (Photo tirée de *Handbuch der Physik*, édité par S. Flügge, Springer-Verlag, Heidelberg.)

chacun des deux faisceaux. Soient \vec{E}_1 et \vec{E}_2 les champs électriques émis des sources virtuelles cohérentes S_1 et S_2 . À chaque instant au point P , chacun de ces vecteurs peut être scindé en deux composantes, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire au plan de la figure. Avec \vec{k}_1 et \vec{k}_2 respectivement parallèles à AP et BP , il est clair que les composantes de \vec{E}_1 et \vec{E}_2 dans le plan de la figure ne pourront être quasiment parallèles que pour des valeurs de θ petites. Quand θ décroît, a diminue et les franges s'élargissent.

Le **biprisme de Fresnel** est constitué de deux prismes fins joints à leurs bases, comme le montre la figure 9.13. Un front d'onde cylindrique unique arrive sur les deux prismes. La partie haute du front d'onde est réfractée vers le bas, et la partie basse est réfractée vers le haut. Il y a interférence dans la zone de superposition. Ici encore, il y a deux sources virtuelles S_1 et S_2 séparées d'une distance a , que l'on peut exprimer en fonction de l'angle du prisme α (Problème 9.19), où $s \gg a$. L'expression donnant l'espacement des franges est la même que précédemment.

Le dernier interféromètre à division de front d'onde que nous allons aborder est le **miroir de Lloyd** présenté à la figure 9.14. C'est une lame de diélectrique ou de métal qui fait office de miroir plan, sur lequel se réfléchit une partie du front d'onde cylindrique issu de la fente S . Une autre partie du front d'onde va directement de la fente à l'écran. La séparation a

entre les sources cohérentes est la distance séparant la fente réelle de son image S_1 donnée par le miroir. L'interfrange est, une fois de plus, $(s/a)\lambda$. Le trait caractéristique de ce dispositif est qu'à incidence oblique ($\theta_i = \pi/2$) le faisceau réfléchi subit un déphasage de 180° . (Souvenons-nous que les facteurs de réflexion en amplitude sont alors tous deux égaux à -1 .) En tenant compte d'un déphasage additionnel de $\pm\pi$,

$$\delta = k(r_1 - r_2) \pm \pi$$

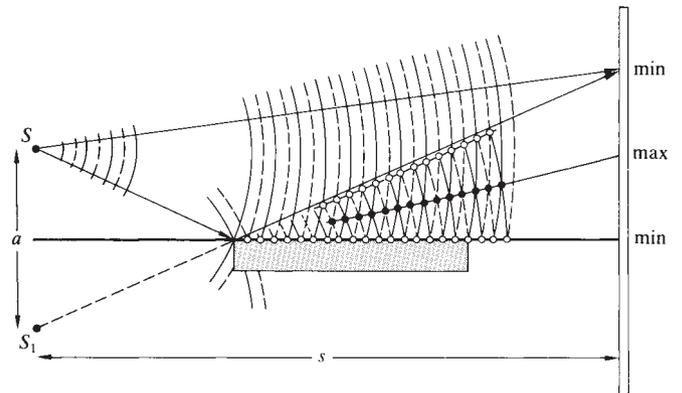


Figure 9.14 Miroir de Lloyd.

et l'éclairement devient :

$$I = 4I_0 \sin^2 \left(\frac{\pi a y}{s \lambda} \right)$$

Les franges du miroir de Lloyd sont complémentaires de celles de l'interféromètre de Young ; les maxima d'une figure sont aux emplacements des minima de l'autre figure. Le bord supérieur du miroir est équivalent à $y = 0$ et sera le centre d'une frange sombre plutôt que d'une frange brillante, comme c'est le cas dans le dispositif d'Young. La partie inférieure du motif est par ailleurs cachée par la présence du miroir lui-même. Si l'on place une lame mince transparente sur le trajet des rayons directs, la lame a pour effet d'augmenter le nombre de longueurs d'onde sur ce trajet. Le motif est donc décalé dans son ensemble vers le haut, ce qui augmente aussi le chemin des rayons réfléchis avant d'interférer. En raison de son évidente simplicité, ce dispositif a été utilisé sur une région spectrale très étendue. Les surfaces réfléchissantes réelles vont des cristaux pour les rayons X, au verre ordinaire pour la lumière, aux réseaux de fils de fer pour les micro-ondes à la surface d'un lac ou même à l'ionosphère de la Terre pour les ondes radio.*

On peut très facilement faire une démonstration de tous les interféromètres ci-dessus en utilisant soit un laser, soit, en lumière blanche, quelque chose de plus désuet comme une lampe à décharge ou un arc au carbone (figure 9.15).

9.4 Interféromètres à division d'amplitude

Supposons qu'une onde lumineuse arrive sur un miroir semi-argenté,[†] ou simplement sur une lame de verre, qui en transmette une partie et réfléchisse l'autre. Les ondes transmises et réfléchies ont des amplitudes plus faibles que celles de l'onde initiale. On peut dire, de manière figurative, que l'amplitude a été « divisée ».

*Pour une discussion des effets d'une largeur de fente et d'une bande de fréquences finies, voir R. N. Wolfe et F. C. Eisen, « Irradiance Distribution in a Lloyd Mirror Interference Pattern », *J. Opt. Soc. Am.* **38**, 706 (1948).

[†]Un *miroir semi-argenté* est un miroir semi-transparent parce que le revêtement métallique est trop fin pour être opaque. On peut voir à travers mais également se voir par réflexion. Il est aussi possible de réaliser des *lames séparatrices* (c'est le nom qu'on leur donne) avec de minces films plastiques étirés, appelés *pellicules*, ou même avec des lames de verre non traitées.

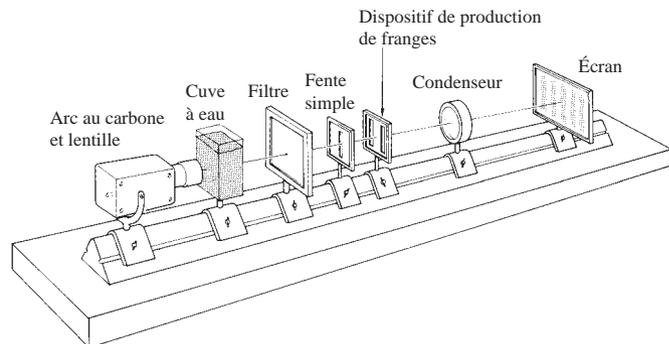


Figure 9.15 Montage sur banc optique pour l'étude de dispositifs à séparation de faisceaux avec une source à arc de carbone. La cuve à eau permet de réduire l'échauffement.

Si l'on peut superposer à nouveau les deux ondes sur un détecteur, il y aurait interférence tant que leur cohérence originale n'a pas été détruite. Si la différence de chemin optique est supérieure à la distance caractéristique d'un train d'onde (i.e. la longueur de cohérence), les fractions réunies sur le détecteur correspondent à des trains différents. Dans ce cas, il n'existe pas de relation de phase bien définie entre elles, et la figure d'interférence est instable, au point d'être inobservable. Nous reviendrons sur ces idées quand nous étudierons la théorie de la cohérence plus en détail. On limitera pour le moment la discussion aux cas pour lesquels la différence de chemin optique est inférieure à la longueur de cohérence.

9.4.1 Films diélectriques Interférence à deux ondes

On peut observer les effets d'interférence dans des lames transparentes d'épaisseurs très variables, depuis des films plus fins qu'une longueur d'onde dans le visible à des lames de plusieurs centimètres d'épaisseur. Une couche de matériau est considérée comme *mince* pour une longueur d'onde donnée quand son épaisseur est de l'ordre de cette longueur d'onde. Avant le début des années 1940, le phénomène d'interférence associé aux films fins diélectriques, bien que parfaitement connu, avait peu d'intérêt pratique. Les déploiements de couleurs plutôt spectaculaires engendrés par les nappes d'huile et les bulles de savon, bien qu'esthétiquement et théoriquement plaisants, étaient avant tout des curiosités.

Suite à l'avènement, dans les années 1930, des techniques de dépôt sous vide, on a pu produire commercialement des revêtements précisément contrôlés en épaisseur ce qui eut

pour conséquence de remettre sur le devant de la scène les films diélectriques. Durant la Seconde Guerre mondiale, les deux camps purent s'observer grâce aux premiers traitements de surface optiques, et à partir des années 1960, les multicouches devinrent d'un usage courant.

Franges d'égale inclinaison

Envisageons le cas simple d'une lame de diélectrique transparente à faces planes et parallèles, et d'épaisseur d (figure 9.16). Supposons que ce film n'absorbe pas et que ses facteurs de réflexion en amplitude à l'interface soient si bas que l'on puisse prendre en compte seulement les deux premiers faisceaux réfléchis E_{1r} et E_{2r} (les deux n'ayant subi qu'une seule réflexion) (figure 9.17). En pratique, les amplitudes des faisceaux réfléchis d'ordre supérieur (E_{3r} , etc.) diminuent généralement très rapidement, comme on peut l'observer pour les interfaces air-eau et air-verre, problème 9.25). Pour le moment, considérons S comme une source ponctuelle monochromatique.

Le film fait office de diviseur d'amplitude, de telle sorte que E_{1r} et E_{2r} peuvent être considérés comme provenant des deux sources virtuelles cohérentes placées derrière le film, que sont les deux images de S après réflexion sur la première et sur la seconde interface. Les rayons sont parallèles après réflexion sur le film et peuvent se retrouver en un point P du plan focal de l'objectif d'un télescope ou de la rétine de l'œil observant à l'infini. À partir de la figure 9.17, la différence de chemin optique entre les deux premiers faisceaux réfléchis est donnée par :

$$\Lambda = n_f[(\overline{AB}) + (\overline{BC})] - n_1(\overline{AD})$$

et comme $(\overline{AB}) = (\overline{BC}) = d/\cos \theta_t$,

$$\Lambda = \frac{2n_f d}{\cos \theta_t} - n_1(\overline{AD})$$

Désormais, afin de trouver une expression de (\overline{AD}) , écrivons :

$$(\overline{AD}) = (\overline{AC}) \sin \theta_t$$

En utilisant les lois de Snell-Descartes, cela devient :

$$(\overline{AD}) = (\overline{AC}) \frac{n_f}{n_1} \sin \theta_t$$

où

$$(\overline{AC}) = 2d \tan \theta_t \quad (9.32)$$

L'expression de Λ devient maintenant :

$$\Lambda = \frac{2n_f d}{\cos \theta_t} (1 - \sin^2 \theta_t)$$

ou finalement :

$$\Lambda = 2n_f d \cos \theta_t \quad (9.33)$$

La différence de phase correspondante, associée à la différence de chemin optique, est alors le produit du nombre de propagation de l'espace libre et de Λ , c'est-à-dire $k_0 \Lambda$. Si le film est immergé dans un milieu unique, l'indice de réfraction peut

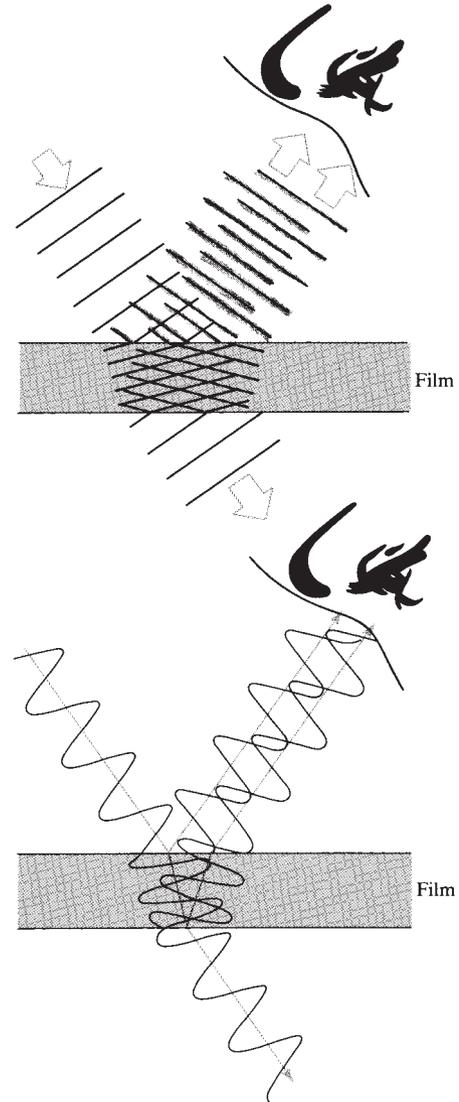


Figure 9.16 Représentations des interférences par une couche mince, en termes de rayons et d'ondes. Les réflexions sur le haut et sur le bas du film interfèrent pour créer des figures franges.

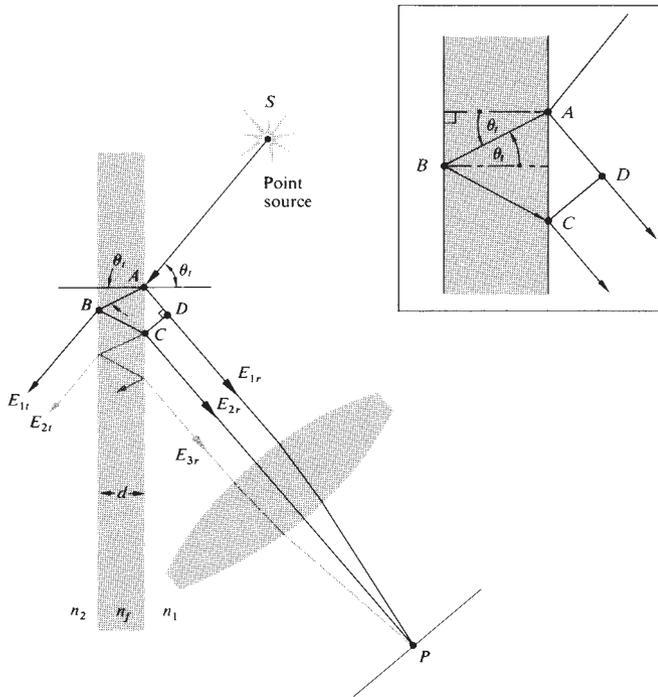


Figure 9.17 Franges d'égalé inclinasion.

simplement s'écrire $n_1 = n_2 = n$. Notez que n peut être inférieur à n_f , comme c'est le cas pour une bulle de savon dans l'air, ou plus grand que n_f , comme pour un film d'air entre deux lames de verre. Dans les deux cas il y aura un *déphasage additionnel dû aux réflexions elles-mêmes*. Souvenons-nous que pour des angles d'incidence inférieurs à 30° , indépendamment de la polarisation de la lumière incidente, les deux faisceaux, l'un à réflexion interne et l'autre à réflexion externe, subissent un *déphasage relatif* de π radians (figure 4.44 et paragraphe 4.3). En conséquence,

$$\delta = k_0 \Lambda \pm \pi$$

et de manière plus explicite :

$$\delta = \frac{4\pi n_f}{\lambda_0} d \cos \theta_i \pm \pi \quad (9.34)$$

$$\text{ou} \quad \delta = \frac{4\pi d}{\lambda_0} (n_f^2 - n^2 \sin^2 \theta_i)^{1/2} \pm \pi \quad (9.35)$$

Le signe du déphasage est sans importance, et nous choisisons le signe négatif afin de rendre les équations un petit peu plus simples. En réflexion, une interférence constructive se produit

quand $\delta = 2m\pi$, un multiple pair de π . Dans ce cas, on peut reformuler l'équation (9.34) pour obtenir :

$$[\text{maxima}] \quad d \cos \theta_i = (2m + 1) \frac{\lambda_f}{4} \quad (9.36)$$

où $m = 0, 1, 2, \dots$ et où on a utilisé le fait que $\lambda_f = \lambda_0/n_f$. Cela correspond également aux minima de la lumière transmise. Les minima d'interférence de la lumière réfléchie (maxima de la lumière transmise) sont atteints quand $\delta = (2m \pm 1)\pi$, c'est-à-dire pour les multiples impairs de π . Pour de tels cas, l'équation (9.34) devient :

$$[\text{minima}] \quad d \cos \theta_i = 2m \frac{\lambda_f}{4} \quad (9.37)$$

L'apparition de multiples impairs et pairs de $\lambda_f/4$ dans les équations (9.36) et (9.37) est significative comme nous allons le voir à présent. On peut, bien sûr, avoir une situation où $n_1 > n_f > n_2$ ou $n_1 < n_f < n_2$, ce qui est le cas avec un film de fluorure déposé sur un élément optique de verre immergé dans l'air. On n'aurait plus ce déphasage de π , et il faudrait modifier les équations ci-dessus en conséquence.

Si la lentille utilisée pour focaliser les rayons a un faible diamètre, les franges d'interférence apparaîtront sur une partie réduite du film. Seuls les rayons réfléchis sur la lentille seront vus (figure 9.18). Pour une source étendue, la lumière issue de multiples directions atteindra la lentille, et la figure d'interférences s'étalera sur une large zone du film (figure 9.19).

L'angle θ_i , ou de manière équivalente θ_r , déterminé par la position de P , contrôlera à son tour la valeur de δ . Les franges apparaissant aux points P_1 et P_2 sur la figure 9.20 sont connues sous le terme de **franges d'égalé inclinasion** (le problème 9.30 aborde des façons simples d'observer ces franges). Il ne faut pas oublier que chaque point d'une source étendue est incohérent par rapport aux autres. Si l'image d'une source étendue est réfléchie sur la surface, on la voit rayée de franges brillantes et sombres, dont chacune est un arc de cercle centré sur le point d'impact, le film de la perpendiculaire à la lame passant par l'œil.

Plus le film devient épais, plus la séparation \overline{AC} entre E_{1r} et E_{2r} augmente également, car :

$$\overline{AC} = 2d \tan \theta_i \quad (9.32)$$

Lorsque seulement l'un des deux rayons peut entrer dans la pupille de l'œil, le motif d'interférence disparaît. On peut alors utiliser un télescope pour recueillir les deux rayons, ce qui rend à nouveau visible la figure d'interférence. On peut aussi réduire la séparation en diminuant θ_i et donc θ_r , c'est-à-dire en

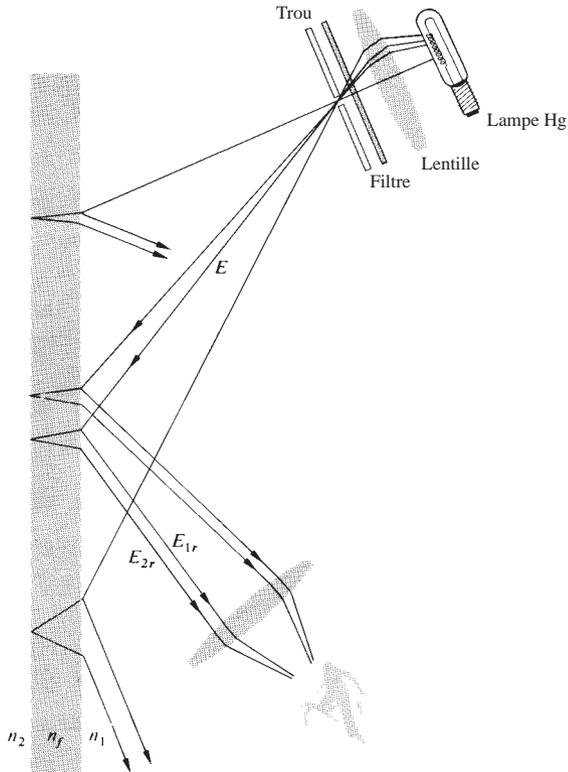


Figure 9.18 Observation de franges sur une petite portion de film.

regardant le film sous incidence quasi normale. Les franges d'égale inclinaison observées de cette manière avec des lames épaisses sont appelées les **franges de Haidinger**, du nom du physicien autrichien Wilhelm Karl Haidinger (1795-1871). Avec une source étendue, la symétrie de l'ensemble implique que la figure d'interférence soit constituée d'une série d'anneaux circulaires concentriques centrés sur la perpendiculaire joignant l'œil au film (figure 9.21). Quand l'observateur déplace son œil, la figure d'interférence suit le mouvement.

On peut voir des franges de Haidinger sur le verre d'une fenêtre ordinaire ou sur la vitrine d'un magasin. Trouvez-vous une devanture illuminée par un néon et regardez la rue dehors, de nuit, en vous plaçant très près du tube incandescent. Vous verrez des franges circulaires centrées sur l'image de votre œil, et flottant au loin.

Franges d'égale épaisseur

Il existe une catégorie de franges d'interférence, dans laquelle c'est l'épaisseur optique $n_f d$ qui est le paramètre dominant

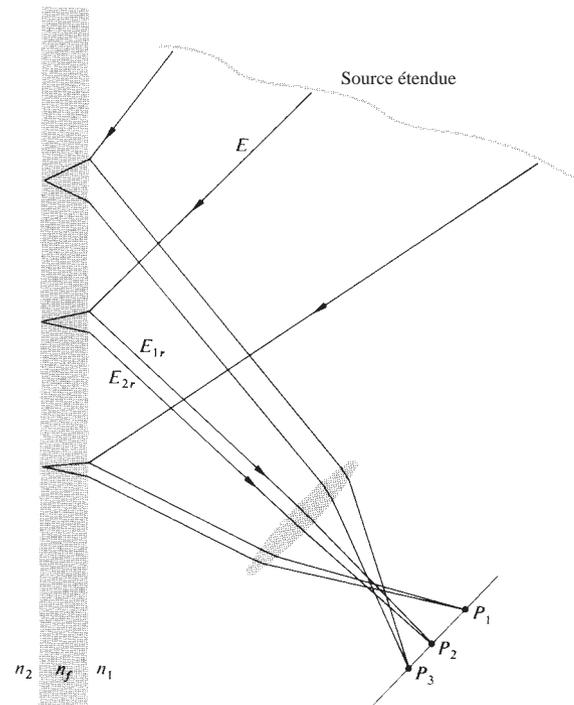


Figure 9.19 Observation de franges sur une grande portion du film.

plutôt que θ_i . On les appelle des **franges d'égale épaisseur**. En lumière blanche, l'irisation des bulles de savon, des nappes d'huile (de plusieurs longueurs d'onde d'épaisseur), et même des surfaces métalliques oxydées, est le résultat des variations d'épaisseur du film. Ce genre de franges est analogue aux lignes de niveau d'une carte topographique. Chaque frange est le lieu des points où le film a une épaisseur optique constante, et comme n_f est généralement fixe, les franges correspondent aux régions du film d'épaisseur constante. Ainsi, on peut les exploiter pour déterminer les caractéristiques de surfaces d'éléments optiques (lentilles, prismes, etc.). Par exemple, on peut être en contact d'une surface à examiner avec une *surface plane étalon*.* L'air dans l'espace entre les deux produit des

*On dit qu'une surface est « optiquement plane » lorsqu'elle ne s'éloigne pas de plus de $\lambda/4$ par rapport à un plan parfait. Dans le passé, les meilleurs plans étaient en quartz fondu. À l'heure actuelle, on dispose de céramiques (par exemple, le CERVIT) aux coefficients de dilatation thermique extrêmement petits (environ un sixième de ceux du quartz). On peut obtenir des plans-étalon à $\lambda/200$ ou même un peu meilleurs.

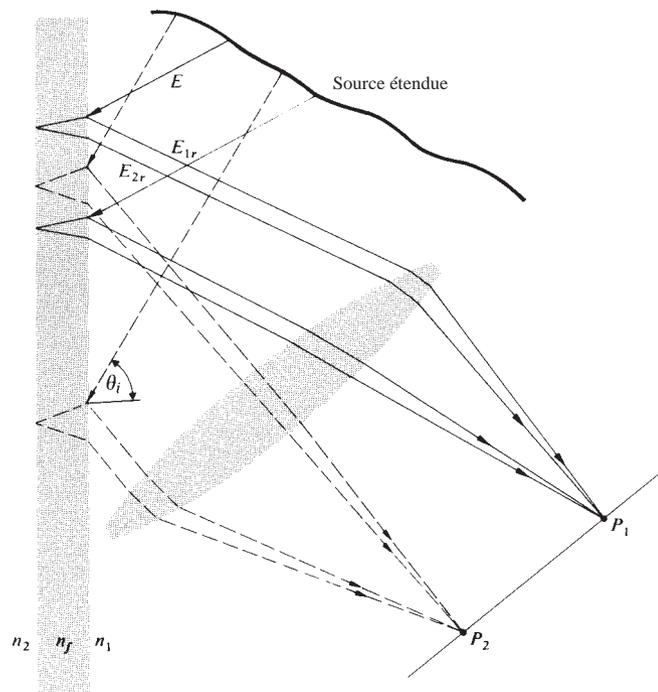


Figure 9.20 Tous les rayons de même inclinaison se rencontrent au même point.

franges d'égal épaisseur. Si la surface à tester est plane, une série de franges droites, équidistantes, indique un film d'air en forme de coin, créé habituellement par de la poussière entre les plans. Deux lames de verre séparées à une extrémité par une feuille de papier formeront un coin approprié pour pouvoir observer ces franges d'interférence.

Quand on les observe sous incidence normale, comme sur la figure 9.22, les contours créés par un film non uniforme sont appelées des **franges de Fizeau**. Pour un coin peu épais d'angle α faible, la différence de chemin optique entre deux rayons réfléchis peut être approximée d'après l'équation (9.33), où d est l'épaisseur en un point particulier :

$$d = x\alpha \quad (9.38)$$

Pour de petites valeurs de θ_i , la condition pour obtenir une interférence constructive devient :

$$(m + \frac{1}{2})\lambda_0 = 2n_f d_m$$

ou :

$$(m + \frac{1}{2})\lambda_0 = 2\alpha x_m n_f$$

Comme $n_f = \lambda_0/\lambda_f$, x_m peut être réécrit ainsi :

$$x_m = \left(\frac{m + 1/2}{2\alpha} \right) \lambda_f \quad (9.39)$$

Les maxima apparaissent à des distances du sommet données par $\lambda_f/4\alpha$, $3\lambda_f/4\alpha$, et ainsi de suite, deux franges consécutives étant séparées d'une distance Δx donnée par :

$$\Delta x = \lambda_f/2\alpha \quad (9.40)$$

On notera que la différence d'épaisseur de film entre deux maxima adjacents est simplement $\lambda_f/2$. Comme le faisceau réfléchi issu de la surface inférieure traverse deux fois le film ($\theta_i \approx \theta_r \approx 0$), les maxima adjacents ont une différence de chemin optique de λ_f . On remarquera également que l'épaisseur du film aux différents maxima est donnée par :

$$d_m = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda_f}{2} \quad (9.41)$$

qui est un multiple impair du quart de la longueur d'onde. Le fait de traverser deux fois le film produit un déphasage de π , qui, quand on l'additionne au déphasage de π résultant de la réflexion, ramène les deux rayons en phase.

La photographie jointe montre un film de savon étiré verticalement, de telle sorte qu'il prend une forme de coin sous l'influence de la gravité. Quand elles sont illuminées en lumière blanche, les franges sont très colorées. La région noire du dessus est une zone où le film a moins de $\lambda_f/4$ d'épaisseur. Deux fois cette épaisseur, plus un déphasage additionnel de $\lambda_f/2$ dû à la réflexion, donnent une valeur inférieure à une longueur d'onde. Les rayons réfléchis sont donc déphasés. Quand l'épaisseur décroît encore plus, la différence de phase totale est proche de π . L'éclairement au



Un film en coin fait de liquide savonneux. (Photo E. H.)

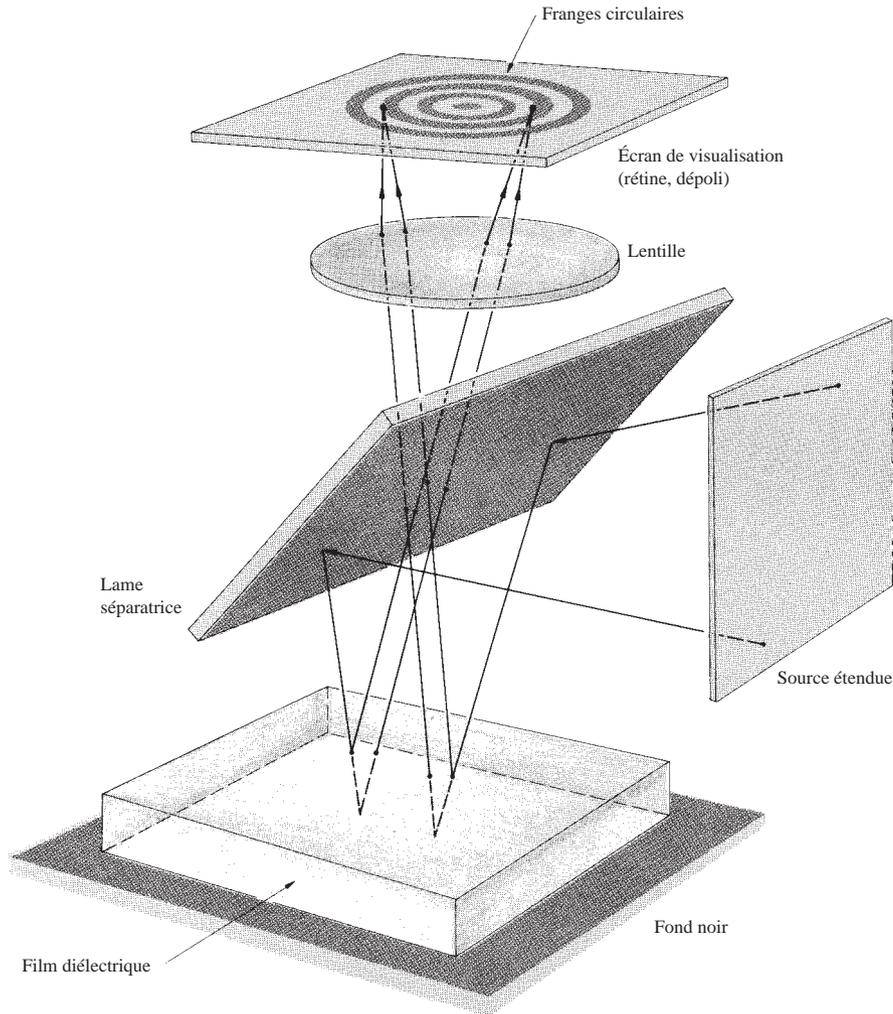


Figure 9.21 Franges circulaires de Haidinger centrées sur l'axe de la lentille.

niveau de l'observateur atteint un minimum (équation 9.16), et le film apparaît noir en réflexion.*

Si l'on presse deux lames de microscope bien nettoyées l'une contre l'autre, le film d'air emprisonné ne sera pas, en général, uniforme. À la lumière, une série de franges colorées, irrégulières, sera visible à la surface (franges d'égale épaisseur). Les fines lames de verre se déforment sous l'effet de la

*Le déphasage relatif de π entre les réflexions interne et externe est requis si l'on veut que le flux réfléchi tende vers zéro régulièrement, au fur et à mesure que le film devient de plus en plus mince et finit par disparaître.



Franges créées par un film d'air entre deux lames de microscope. (Photo E. H.)

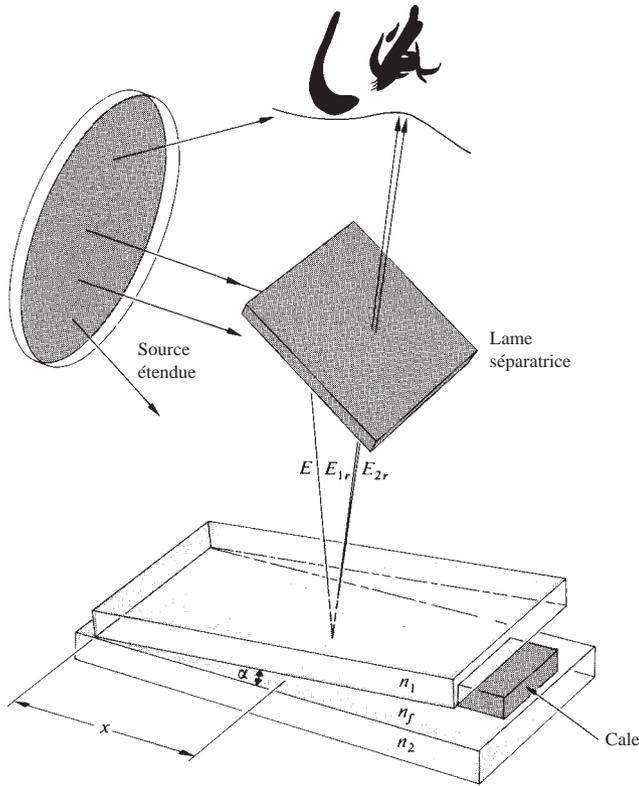
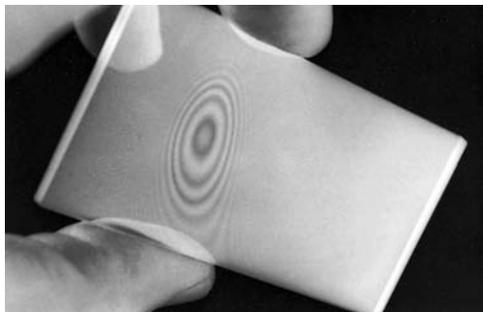


Figure 9.22 Franges de coin d'air.

pression et les franges se déplacent et changent en conséquence. Si l'on scotche les deux lames ensemble avec un ruban transparent (de surface matte), cela va diffuser la lumière et rendre les franges réfléchies plus facilement visibles.



Anneaux de Newton observés avec deux lames de microscope. Le mince film d'air entre les deux lames crée la figure d'interférence. (Photo E. H.)

Si l'on appuie sur les deux morceaux de verre en un point précis, comme on pourrait le faire avec un crayon pointu, il se forme une série de franges concentriques et presque circulaires autour de ce point. Connue sous le nom d'**anneaux de Newton***, cette figure est étudiée plus précisément avec le dispositif de la figure 9.23. Dans ce cas, on place une lentille sur un plan étalon et on l'éclaire sous incidence normale en lumière quasi monochromatique. La régularité des anneaux circulaires concentriques est une mesure du degré de perfection de la forme de la lentille. En prenant R comme rayon de courbure de la lentille convexe, la relation entre la distance x au centre et l'épaisseur du film d est donnée par :

$$x^2 = R^2 - (R - d)^2$$

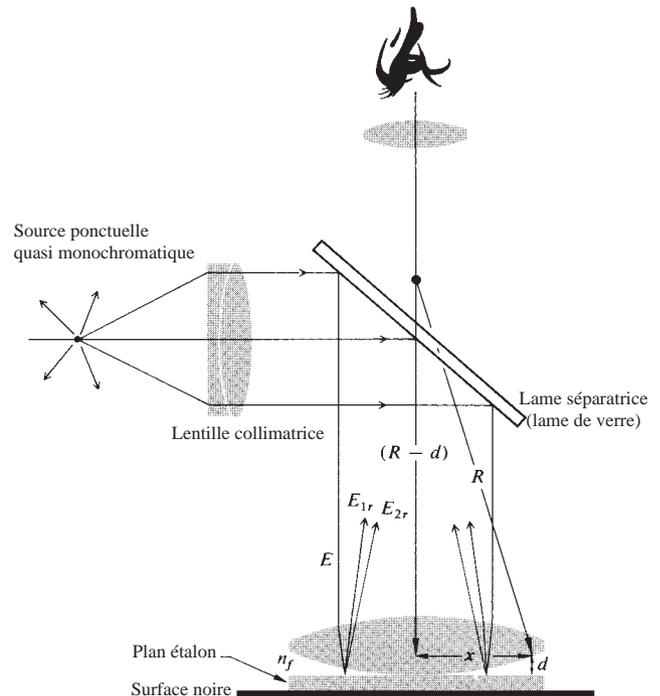
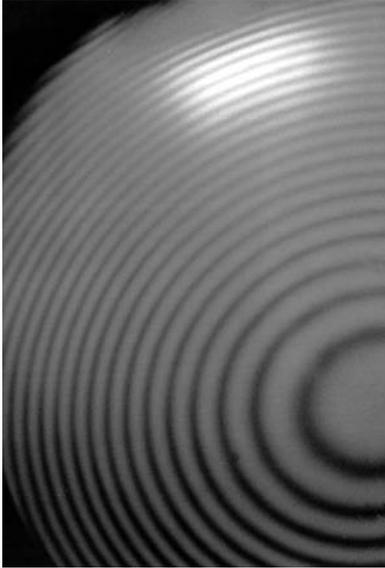


Figure 9.23 Montage standard pour observer les anneaux de Newton.

*Robert Hooke (1635–1703) et Isaac Newton étudièrent indépendamment l'un de l'autre une large gamme de phénomènes de couches minces, depuis les bulles de savon jusqu'au film d'air entre lentilles. Newton raconte, dans son *Opticks* :

J'ai pris deux objectifs en verre ; l'un était plan-convexe pour une lunette de 14 pieds, et l'autre était grand et biconvexe, pour une lunette d'environ 50 pieds. Je les ai pressés doucement pour voir les couleurs apparaître avec succès au milieu des cercles.



Franges de coin d'air entre une lentille convexe et le plan étalon sur lequel elle est posée, en éclairage quasi monochromatique. Ces franges furent étudiées en profondeur par Newton ; on les appelle les « anneaux de Newton ». (Photo E.H.)

ou, plus simplement, par :

$$x^2 = 2Rd - d^2$$

Comme $R \gg d$, cela devient :

$$x^2 = 2Rd$$

En sachant que nous ne devons étudier que les deux premiers faisceaux réfléchis E_{1r} , et E_{2r} . Le maximum d'interférence d'ordre m est atteint dans le film mince quand l'épaisseur de ce dernier vérifie la relation :

$$2n_f d_m = (m + \frac{1}{2})\lambda_0$$

Le rayon du $m^{\text{ième}}$ anneau brillant est donc obtenu en combinant les deux dernières expressions afin d'avoir :

$$\text{[anneau brillant]} \quad x_m = [(m + \frac{1}{2})\lambda_f R]^{1/2} \quad (9.42)$$

De même, le rayon du $m^{\text{ième}}$ anneau sombre est :

$$\text{[anneau sombre]} \quad x_m = (m\lambda_f R)^{1/2} \quad (9.43)$$

Si le contact entre les deux morceaux de verre est bon (pas de poussière), la frange centrale au point de contact ($x_0 = 0$) sera

évidemment un peu sombre puisque d est nulle en ce point. En transmission, la figure d'interférence sera complémentaire de celle en réflexion, de sorte que le centre apparaît brillant.

Les anneaux de Newton, qui sont des franges de Fizeau, se distinguent des franges circulaires de Haidinger par la manière dont les diamètres des anneaux varient avec l'ordre m . La zone centrale des franges de Haidinger correspond à la valeur maximale de m (problème 9.29), alors que c'est l'inverse pour les anneaux de Newton.

Un atelier d'optique, qui fabrique des lentilles, aura une collection de surfaces sphériques de précision, ou « calibres ». Un concepteur peut spécifier la qualité de la surface d'une nouvelle lentille en termes de régularité et de nombre d'anneaux de Newton observables avec un calibre particulier. Cependant, l'utilisation de calibres dans la fabrication de lentilles de haute qualité laisse la place à d'autres techniques plus performantes basées sur l'interférométrie laser (paragraphe 9.8.2).

9.4.2 Interféromètres en réflexion

Il existe un certain nombre d'interféromètres à division d'amplitude qui utilisent des montages à miroirs et à lames séparatrices. L'**interféromètre de Michelson** est de loin le plus connu et le plus important historiquement. Sa configuration est illustrée à la figure 9.24. Une source étendue (par exemple une lame de verre dépoli éclairée par une lampe à décharge) émet une onde, dont une partie se dirige vers la droite. La lame séparatrice sépare en O l'onde en deux, une partie se propageant vers la droite et l'autre vers l'arrière-plan. Les deux ondes sont réfléchies par les miroirs M_1 et M_2 et renvoyées vers la lame. Une fraction de l'onde venant de M_2 passe à travers la lame et est renvoyée vers le bas ; et une fraction de l'onde provenant de M_1 est réfléchiée vers le détecteur. Les deux ondes sont réunies et peuvent générer une interférence.

Il est à noter qu'un rayon traverse trois fois la lame séparatrice, alors que l'autre ne la traverse qu'une seule fois. Par conséquent, les deux trajets ne comprennent la même épaisseur de verre que si une *lame compensatrice* C est insérée dans l'axe OM_1 . La compensatrice est une copie exacte de la séparatrice, à l'exception du traitement de surface de la séparatrice. Celle-ci est positionnée selon un angle de 45° , de manière à ce que O et C soient parallèles. Une fois la compensatrice en place, toute différence de chemin optique résulte de la différence de trajet réelle. En outre, en raison de la dispersion de la séparatrice, le chemin optique est fonction de λ . En conséquence, si l'on veut un résultat quantitatif, on ne peut utiliser l'interféromètre sans compensatrice qu'avec une source quasi

monochromatique. L'introduction d'une compensatrice annule les effets de la dispersion, de sorte qu'on observera des franges même avec une source à large bande spectrale.

Pour comprendre comment les franges se forment, on peut se référer à la figure 9.25, où les composantes physiques sont davantage représentées comme des surfaces mathématiques. Si l'on se met en lieu et place du détecteur, on verra simultanément les miroirs M_1 et M_2 alignés avec la source Σ dans la séparatrice. On peut redessiner l'interféromètre comme si tous ses éléments étaient alignés. Ici, M_1' correspond à l'image du miroir M_1 dans la séparatrice, et Σ a été aligné avec O et M_2 . La position de ces éléments dans le diagramme dépend de leur distance relative à O (i.e. M_1' peut être devant, derrière, confondu avec M_2 , ou même le traverser). Les surfaces Σ_1 et Σ_2 sont respectivement les images de la source Σ sur les miroirs M_1 et M_2 . Considérons maintenant un point S de la source émettant de la lumière dans toutes les directions et suivons le trajet d'un rayon émergent. En réalité, une onde issue

de S sera divisée, en O , en deux ondes réfléchies ensuite par M_1 et M_2 . Dans notre schéma, cela correspond à la réflexion du rayon à la fois sur M_2 et sur M_1' . Pour un observateur situé en D , les deux rayons réfléchis apparaîtront comme s'ils étaient issus des points images S_1 et S_2 . Notons que tous les rayons montrés en (a) et (b) à la figure 9.25 sont dans le même plan d'incidence ; S_1 et S_2 sont des sources ponctuelles cohérentes, et la répartition d'éclairement obéit à l'équation (9.14).

Comme indiqué sur la figure, la différence de chemin optique pour ces rayons est d'environ $2d \cos \theta$, ce qui correspond à une différence de phase de $k_0 2d \cos \theta$. Il y a une phase additionnelle provenant du fait que l'onde traversant l'axe OM_2 est en réflexion interne dans la séparatrice, alors que l'onde OM_1 est en réflexion externe sur O . Si la séparatrice est une simple lame de verre non traitée, le déphasage relatif entre les deux réflexions sera π radians. Il y aura interférence destructive, plutôt que constructive, lorsque :

$$2d \cos \theta_m = m\lambda_0 \quad (9.44)$$

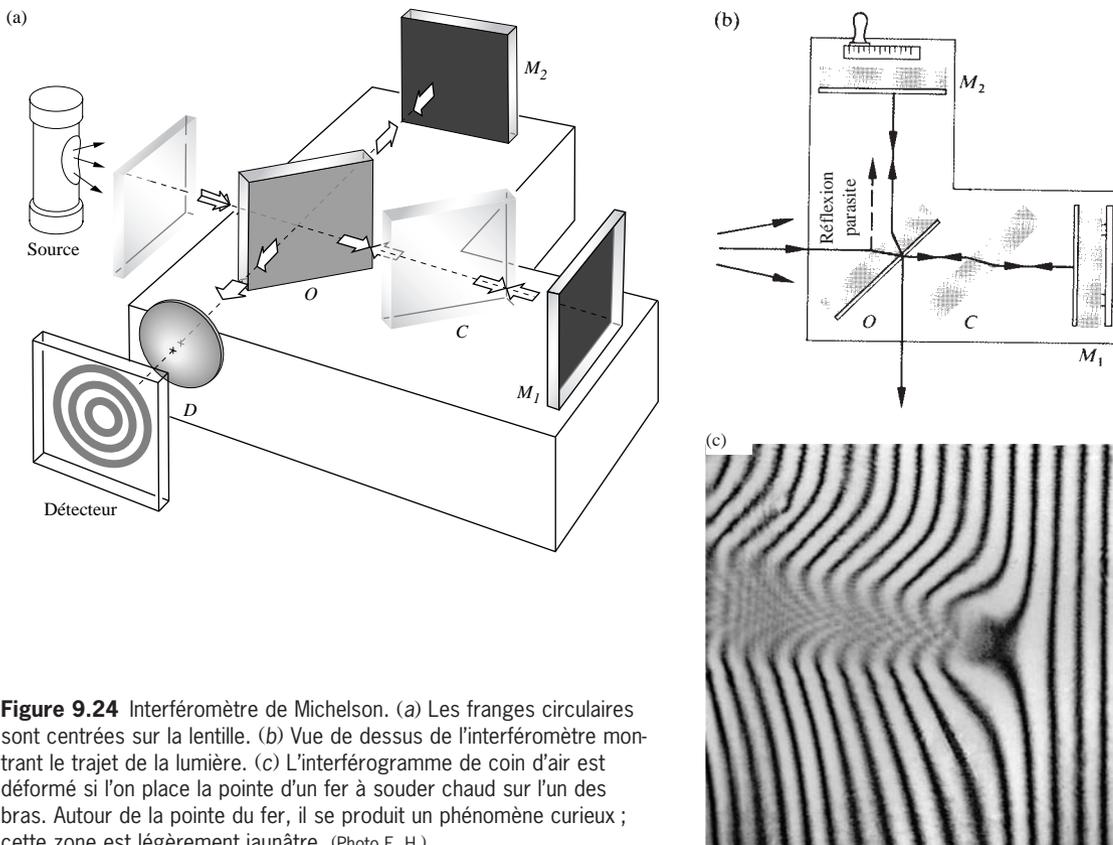


Figure 9.24 Interféromètre de Michelson. (a) Les franges circulaires sont centrées sur la lentille. (b) Vue de dessus de l'interféromètre montrant le trajet de la lumière. (c) L'interférogramme de coin d'air est déformé si l'on place la pointe d'un fer à souder chaud sur l'un des bras. Autour de la pointe du fer, il se produit un phénomène curieux ; cette zone est légèrement jaunâtre. (Photo E. H.)

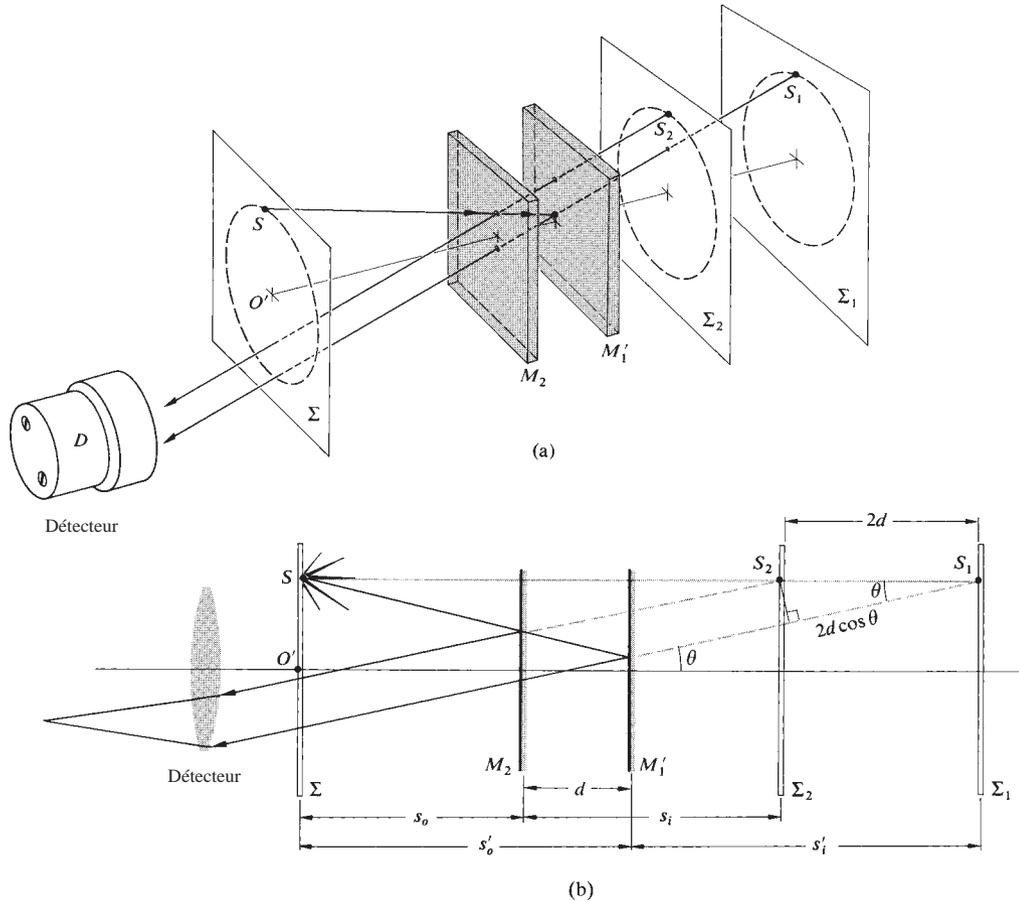


Figure 9.25 Reconfiguration conceptuelle de l'interféromètre de Michelson.

où m est un entier. Si cette condition est remplie pour le point S , elle le sera alors également pour n'importe quel point de Σ se trouvant sur le cercle de rayon $O'S$, avec O' situé sur l'axe du détecteur. Comme l'illustre la figure 9.26, un observateur verra un système de franges circulaires concentriques ayant pour axe central la direction de l'image de son œil. En raison de la petite ouverture de l'œil, l'observateur ne pourra pas voir l'intégralité du motif sans utiliser une large lentille près de la séparatrice afin de collecter le plus de lumière possible en sortie.

Si l'on utilise une source à spectre large (par exemple une lampe à décharge de mercure), la dépendance de θ_m en λ_0 dans l'équation (9.44) suppose que chaque composante produit son propre système de franges. Notons, également, que puisque $2d \cos \theta_m$ doit être inférieur à la longueur de cohérence de la source, la lumière laser sera particulièrement facile à utiliser pour faire la démonstration de l'interféromètre (paragraphe 9.5). Cette remarque serait étayée de manière

évidente si nous avons à comparer les franges produites par une lumière laser avec celles obtenues à partir de la lumière « blanche » d'un tube tungstène ordinaire ou d'une bougie. Dans ce dernier cas, il faut que la différence de chemin optique soit presque nulle si l'on veut percevoir des franges, alors que pour le premier exemple, une différence de 10 cm n'aura pas d'effet notable.

Une figure d'interférence en lumière quasi monochromatique est typiquement composée d'un grand nombre d'anneaux alternativement brillants et sombres. Un anneau particulier correspond à un ordre m donné. Si l'on rapproche M_2 de M_1' , d diminue et, d'après l'équation (9.44), $\cos \theta_m$ augmente alors que, en conséquence, θ_m baisse. Les anneaux se dirigent vers le centre, et celui qui a l'ordre maximal disparaît chaque fois que d diminue de $\lambda_0/2$. Chaque anneau restant s'élargit, alors que de plus en plus de franges disparaissent au centre, jusqu'à ce qu'un petit nombre remplisse la totalité de

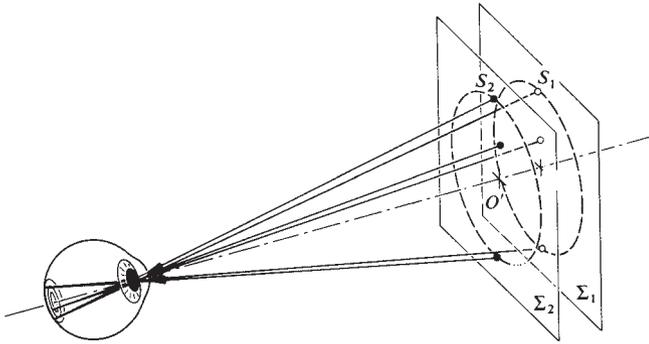


Figure 9.26 Formation de franges circulaires.

l'écran. Lorsque $d = 0$, la frange centrale se sera élargie, remplissant l'intégralité du champ de vision. Avec un déphasage de π résultant de la réflexion interne dans la séparatrice, la totalité de l'écran sera alors en interférence destructive. (Les défauts des éléments optiques peuvent masquer ce phénomène). Si l'on continue à déplacer M_2 encore plus loin, des franges réapparaissent au centre et se dirigent vers l'extérieur.

Notons qu'on peut représenter une frange sombre centrale pour laquelle $\theta_m = 0$ dans l'équation (9.44) par :

$$2d = m_0 \lambda_0 \quad (9.45)$$

(Il s'agit d'un cas spécial, car en général la zone centrale ne doit correspondre ni à un maximum, ni à un minimum.) Même si d est égal à 10 cm, ce qui est plutôt modeste pour de la lumière laser, et $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$, m_0 sera très grand, 400 000 exactement. Pour une valeur donnée de d , les anneaux sombres successifs remplissent les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} 2d \cos \theta_1 &= (m_0 - 1)\lambda_0 \\ 2d \cos \theta_2 &= (m_0 - 2)\lambda_0 \\ &\vdots \\ 2d \cos \theta_p &= (m_0 - p)\lambda_0 \end{aligned} \quad (9.46)$$

On obtient la position angulaire de n'importe quel anneau, le $p^{\text{ième}}$ anneau par exemple, en combinant les équations (9.45) et (9.46) :

$$2d(1 - \cos \theta_p) = p\lambda_0 \quad (9.47)$$

Comme $\theta_m \equiv \theta_p$, chacun d'eux vaut la moitié de l'angle sous-tendu depuis le détecteur par l'anneau en question, et comme $m = m_0 - p$, l'équation (9.47) est équivalente à l'équation (9.44).

La nouvelle forme est plus commode, puisque (en utilisant le même exemple que précédemment) si $d = 10 \text{ cm}$, on peut déterminer le sixième anneau sombre en spécifiant que $p = 6$, ou en termes d'ordre du $p^{\text{ième}}$ anneau, que $m = 399\,994$. Si θ_p est petit,

$$\cos \theta_p = 1 - \frac{\theta_p^2}{2}$$

et les équations (9.47) mènent à :

$$\theta_p = \left(\frac{p\lambda_0}{d} \right)^{1/2} \quad (9.48)$$

pour le rayon angulaire de la $p^{\text{ième}}$ frange.

La construction de la figure 9.25 représente une configuration possible, celle dans laquelle on considère seulement des paires de rayons parallèles émergents. Puisque ces rayons ne se rencontrent pas réellement, ils ne peuvent pas former une image sans un condensateur quelconque. La plupart du temps, c'est l'œil de l'observateur mis au point à l'infini qui joue le rôle de cette lentille. Les franges d'égale inclinaison résultantes ($\theta_m = \text{constante}$) localisées à l'infini sont aussi des franges de Haidinger. Une comparaison des figures 9.25b et 9.3a, montrant toutes les deux des points sources cohérents, suggère qu'en plus de ces franges (virtuelles) à l'infini, il pourrait également y avoir des franges (réelles) formées par des rayons convergents. En fait, ces franges existent. Ainsi, si l'on éclaire l'interféromètre avec une source étendue protégée de toute lumière extérieure, on voit facilement la figure projetée sur un écran dans une pièce obscure (paragraphe 9.5). Les franges se forment devant l'interféromètre (i.e. à l'emplacement du détecteur), et leur taille augmente en fonction de leur distance à la séparatrice. Nous considérerons plus tard les franges (réelles) obtenues avec un éclairage par une source ponctuelle.

Lorsque les miroirs de l'interféromètre sont inclinés l'un par rapport à l'autre, formant ainsi un petit angle (i.e. quand M_1 et M_2 ne sont pas complètement perpendiculaires), on peut observer des franges de Fizeau. Le coin d'air résultant entre M_2 et M'_1 crée un motif de franges rectilignes et parallèles. Les rayons qui interfèrent semblent diverger à partir d'un point situé derrière les miroirs. L'observateur devra accommoder afin de voir ces franges localisées. On peut montrer analytiquement* que, par un ajustement approprié de l'orientation des miroirs M_1 et M_2 , les franges produites peuvent être droites, circulaires, elliptiques, paraboliques ou hyperboliques ; et cela vaut aussi bien pour les franges réelles que virtuelles.

.....
*Voir, par exemple, Valasek, *Optics*, p. 135.

On peut utiliser l'interféromètre de Michelson pour effectuer des mesures de longueur extrêmement précises. Si l'on déplace le miroir mobile de $\lambda_0/2$, chaque frange se décale vers la position précédemment occupée par la frange adjacente. À l'aide d'un microscope, il suffit simplement de compter le nombre de franges N , éventuellement le nombre fractionnaire, qui défilent sur un point de référence pour déterminer la distance Δd parcourue par le miroir, soit :

$$\Delta d = N(\lambda_0/2)$$

Aujourd'hui, il est possible de la calculer aisément par des moyens électroniques. Michelson a utilisé cette méthode pour mesurer le nombre de longueurs d'onde de la raie rouge du cadmium correspondant au mètre standard de Sèvres près de Paris.*

On peut aussi utiliser l'interféromètre de Michelson avec des filtres polarisants pour vérifier les lois de Fresnel-Arago. L'insertion d'un polariseur sur chaque bras permettra de maintenir presque constante la différence de chemin optique par une modification des directions du vecteur polarisation des deux faisceaux.

On peut monter un interféromètre de Michelson micro-onde avec des tôles métalliques comme miroirs et un grillage comme séparatrice. Avec un détecteur sur la frange centrale, on peut facilement mesurer les décalages entre maxima et minima quand on déplace un des miroirs, et donc déterminer λ . Quelques feuilles de contreplaqué, de plastique ou de verre inséré sur un bras déplaceront la frange centrale. En comptant le nombre de franges, on obtient une valeur de l'indice de réfraction, et à partir de cette valeur on peut calculer la constante diélectrique du matériau.

L'**interféromètre de Mach-Zehnder** est un autre dispositif à division d'amplitude. Comme le montre la figure 9.27, il est composé de deux lames séparatrices et de deux miroirs. Les deux ondes se propagent selon des trajets différents, et l'on peut introduire une différence de chemins optiques par une légère rotation d'une des lames. À cause de la séparation entre les deux trajets, l'interféromètre est relativement difficile à aligner. Pour la même raison, celui-ci trouve cependant des myriades d'applications. On l'a même utilisé pour obtenir des franges d'interférences entre électrons.†

*Une discussion du procédé qu'il utilisa pour ne pas avoir à compter directement les 3106 327 franges se trouve dans Strong, *Concepts of Classical Optics*, p. 238, ou Williams, *Applications of Interferometry*, p. 51.

†L. Marton, J. Arol Simpson, et J. A. Suddeth, *Rev. Sci. Instr.* **25**, 1099 (1954), et *Phys. Rev.* **90**, 490 (1953).

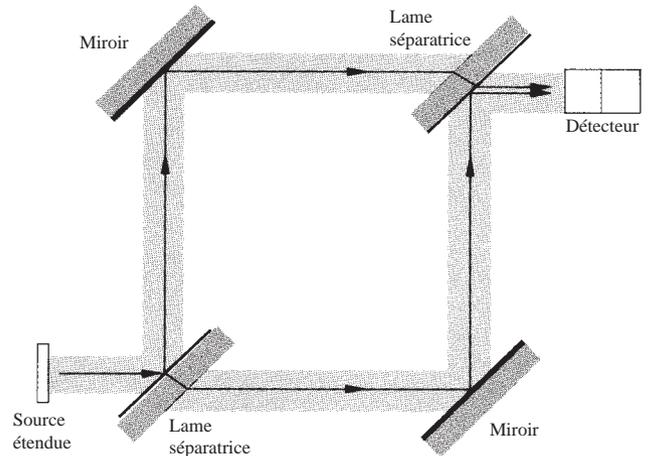
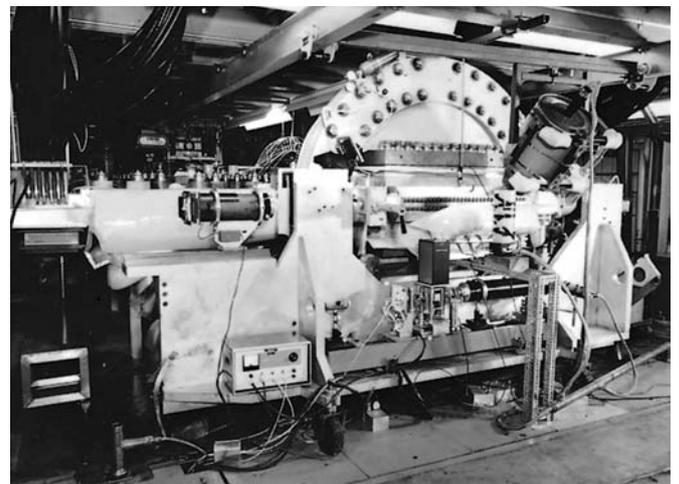


Figure 9.27 Interféromètre de Mach-Zehnder.

Si l'on interpose un objet dans un des faisceaux, on modifie la différence de chemin optique, ce qui change la figure d'interférences. Une application classique du « Mach-Zehnder » est l'observation des écoulements gazeux dans des chambres d'expérimentation (souffleries, tubes à chocs, etc.). Un faisceau traverse une chambre de test, pendant que l'autre traverse une cellule compensatrice appropriée. Le premier rencontre un milieu à indice de réfraction spatialement variable, et les distorsions résultantes du front d'onde sont à l'origine du contour



Scylla IV, un des premiers montages pour l'étude des plasmas. (University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, et Department of Energy.)

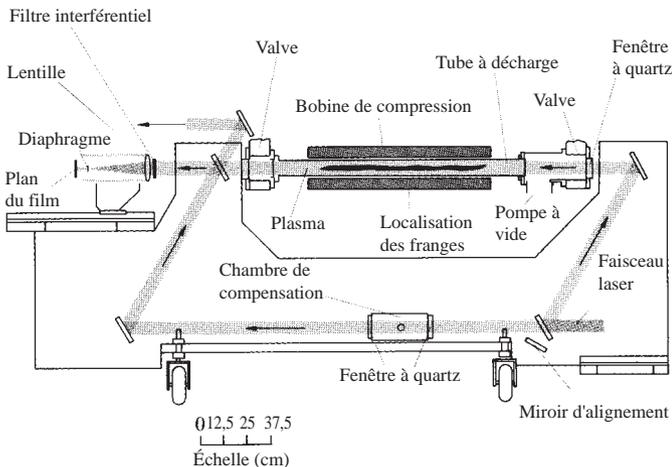
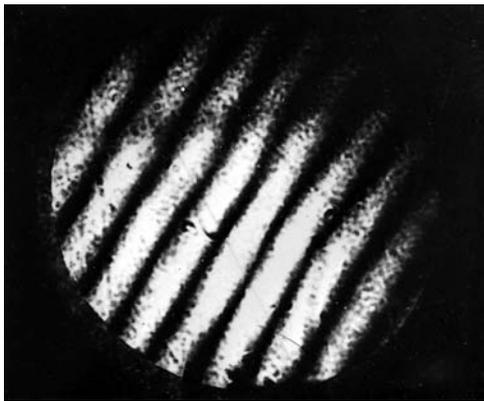


Figure 9.28 Schéma de Scylla IV.

des franges. La figure 9.28 montre une très belle application, le dispositif de compression magnétique connu sous le nom de Scylla IV, utilisé pour étudier des réactions thermonucléaires contrôlées au laboratoire scientifique de Los Alamos. Dans ce cas, l'interféromètre de Mach-Zehnder apparaît sous la forme d'un parallélogramme. Les deux photographies, qui sont des *interférogrammes* laser à rubis, montrent la figure d'interférence obtenue en l'absence de plasma dans le tube et les contours de la densité du plasma pendant une réaction.

Un autre dispositif à division d'amplitude, qui diffère du précédent par bien des aspects, est l'**interféromètre de Sagnac**, qui est très facile à aligner, et vraiment stable. Une application



Interférogramme sans plasma. (Photo Los Alamos National Laboratory.)



Interférogramme avec plasma. (Photo Los Alamos National Laboratory.)

intéressante de ce dispositif est exposée dans la dernière section de ce chapitre, où l'on traite de son utilisation comme gyroscope. La figure 9.29a montre une forme de l'interféromètre de Sagnac et la figure 9.29b en montre une autre ; il existe d'autres possibilités. Notons que la caractéristique principale de ce dispositif est la présence de deux trajets identiques mais que les faisceaux suivent en sens inverse et en boucle fermée avant de se recombiner pour interférer. Un léger décalage délibéré dans l'orientation d'un des miroirs produira une différence dans le chemin optique et dans la figure d'interférence. Puisque les faisceaux sont superposés et donc inséparables, l'interféromètre ne peut pas être utilisé pour les usages conventionnels ; ceux-ci imposent en général que les variations ne soient introduites que sur l'un des deux faisceaux.

Franges réelles

Avant d'examiner la création de franges réelles, en opposition aux franges virtuelles, considérons tout d'abord un autre système à division d'amplitude, le **système de production de franges de Pohl**, illustré sur la figure 9.30. Il s'agit d'un simple film fin transparent éclairé par une source ponctuelle. Dans ce cas, les franges sont réelles et l'on peut les matérialiser sur un écran, n'importe où aux alentours de l'interféromètre et sans aucun condenseur. Une lampe à mercure, derrière un écran avec un petit trou (≈ 5 mm de diamètre) est une source lumineuse appropriée. Comme film fin, on peut utiliser un morceau de mica collé sur la couverture d'un livre de couleur foncée, pour servir de fond opaque. Si l'on dispose d'un laser, on peut profiter de sa longueur de cohérence remarquable et de son

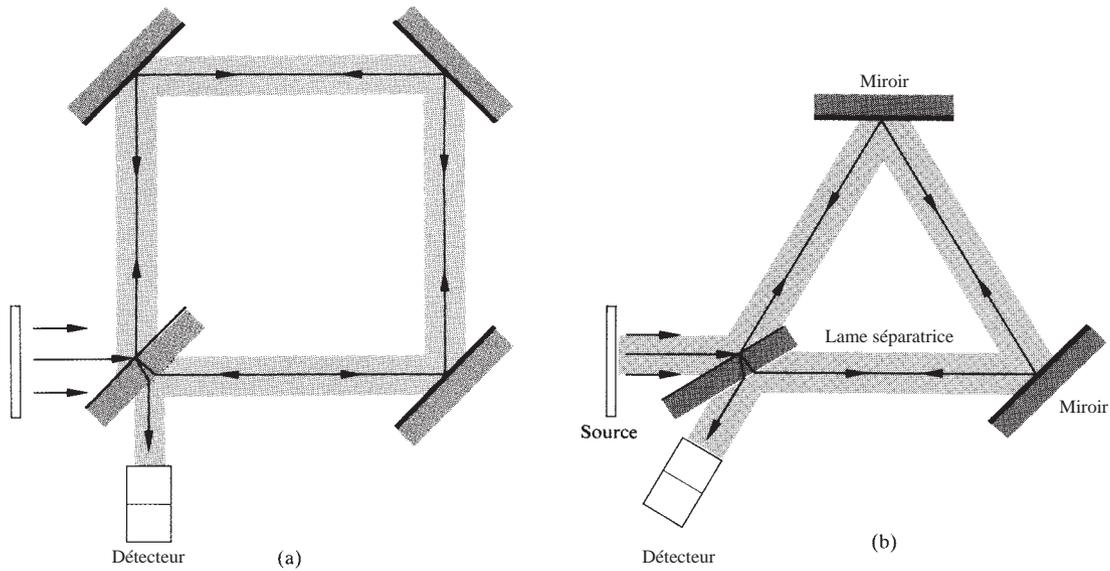


Figure 9.29 (a) Interféromètre de Sagnac. (b) Autre version de l'interféromètre de Sagnac.

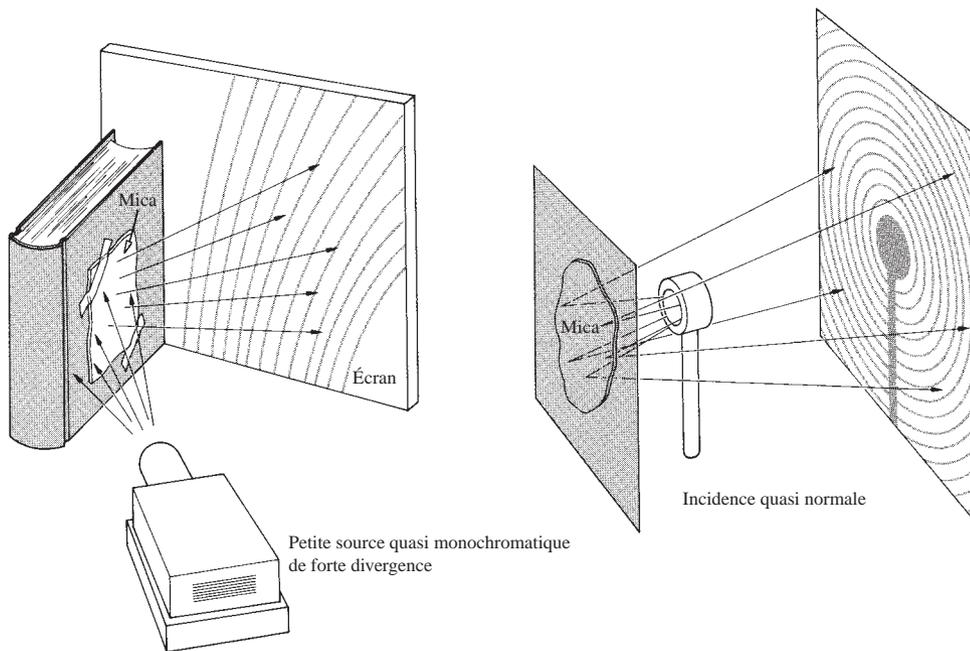


Figure 9.30 Interféromètre de Pohl.

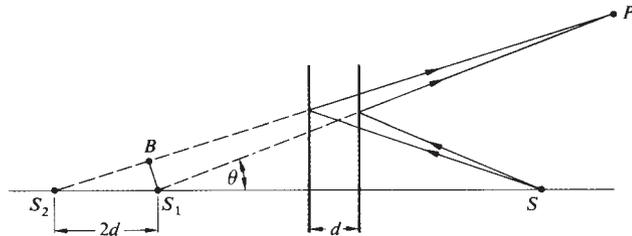


Figure 9.31 Éclairage de surfaces parallèles par une source ponctuelle.

éclairage élevé pour réaliser cette même expérience avec pratiquement n'importe quel matériau lisse et transparent. On peut élargir le faisceau à environ trois ou quatre centimètres de diamètre en le faisant passer à travers une lentille (une distance focale de 50 à 100 mm conviendra), puis on fera réfléchir le faisceau sur une lame de verre (par exemple, une lame de microscope), et les franges seront évidentes à l'intérieur du cercle éclairé sur l'écran.

Le principe physique sous-jacent à l'éclairage par une source ponctuelle pour les quatre systèmes interférométriques considérés ci-dessus peut se comprendre à l'aide d'une construction, dont certaines variantes sont exposées dans les figures 9.31 et 9.32.* Les deux lignes verticales de la figure 9.31, ou les lignes inclinées de la figure 9.32, représentent soit les positions des miroirs soit les deux côtés de la lame mince de l'interféromètre de Pohl. Considérons un point P où il y a une interférence constructive, qu'un écran peut matérialiser sans la présence de condenseur. Les sources virtuelles cohérentes qui produisent les interférences sont les images S_1 et S_2 de la source ponctuelle réelle S données par les miroirs. Il est

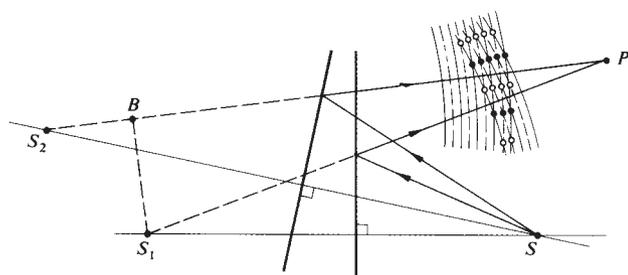
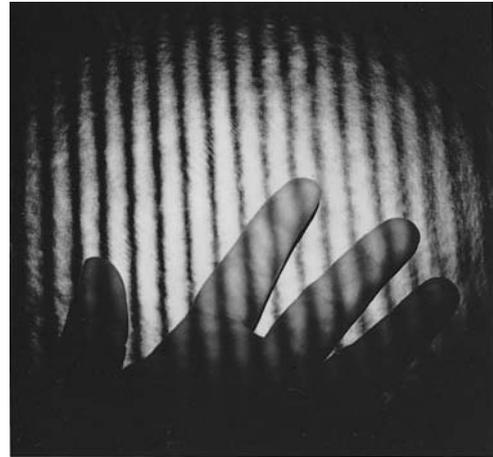


Figure 9.32 Éclairage de surfaces faisant un angle entre elles par une source ponctuelle.

*A. Zajac, H. Sadowski, et S. Licht, « The Real Fringes in the Sagnac and the Michelson Interferometers », *Am. J. Phys.* **29**, 669 (1961).



Franges de Michelson réelles obtenues avec un laser He-Ne.
(Photo E.H.)

à noter que ce genre de figures d'interférences réelles peut être observé avec les interféromètre de Michelson et de Sagnac. Si un de ces systèmes est éclairé par un faisceau laser étendu, les ondes qui émergent produiront directement un motif de franges réelles ; ce qui constitue une démonstration extrêmement simple et belle.

9.5 Types et localisation des franges d'interférence

Il est souvent important de connaître la localisation des franges produites par un système interférométrique donné, car c'est là qu'on doit placer le détecteur (œil, appareil photographique, télescope). En général, le problème de localisation de franges est caractéristique d'un interféromètre donné, et doit être résolu pour chaque dispositif, individuellement.

On peut d'abord classer les franges en *réelles* ou *virtuelles*, puis en *localisées* ou *non localisées*. Les franges réelles sont celles qu'on peut observer sur un écran sans utiliser de système complémentaire de focalisation. Les rayons qui forment ces franges convergent par eux-mêmes au point d'observation. Les franges virtuelles ont besoin d'un système de focalisation pour être observées sur un écran, car les rayons n'y convergent pas par eux-mêmes.

Les franges non localisées sont réelles et existent partout, dans une large portion de l'espace (tridimensionnel). La figure d'interférence n'est pas localisée, car littéralement elle n'est

pas confinée à une petite région. L'expérience de Young, illustrée sur la figure 9.8, remplit de franges réelles l'espace entier. Ce type de franges non localisées est généralement produit par de petites sources, à savoir des sources ponctuelles ou linéaires, qu'elles soient virtuelles ou réelles. En revanche, les franges localisées ne sont clairement observables que sur une surface particulière. La figure d'interférence est littéralement localisée, qu'elle soit près d'un film mince ou à l'infini. Ce type de franges résulte toujours de l'utilisation de sources étendues mais peut également être créé par une source ponctuelle.

L'interféromètre de Pohl (figure 9.30) est particulièrement utile pour illustrer ces principes puisque, à partir d'un point source, il produit à la fois des franges réelles non localisées et des franges virtuelles localisées. Les franges réelles non localisées (figure 9.33, moitié supérieure) peuvent être matérialisées sur un écran presque partout en face d'un film de mica.

Pour les rayons non convergents, l'œil n'interceptera que ceux presque exactement dirigés vers lui, puisque sa pupille est très petite. Pour ce petit pinceau de rayons, l'œil, dans une position particulière, ne peut voir que soit un point clair soit un point foncé, mais guère plus. Pour percevoir une figure d'interférence étendue formée par des rayons parallèles du type de ceux que montre la moitié inférieure de la figure 9.33, il faut utiliser une grande lentille pour récupérer la lumière provenant d'autres directions. En pratique, cependant, la source est habituellement étendue, et l'on voit généralement les franges en regardant à l'infini à travers le film. Ces franges virtuelles sont localisées à l'infini et équivalentes aux *franges d'égale inclinaison* du paragraphe 9.4. De même, si les miroirs M_1 et M_2 de l'interféromètre de Michelson sont parallèles, on pourra observer les franges circulaires habituelles, virtuelles, d'égale inclinaison, et localisées à l'infini. On peut imaginer qu'il y a une

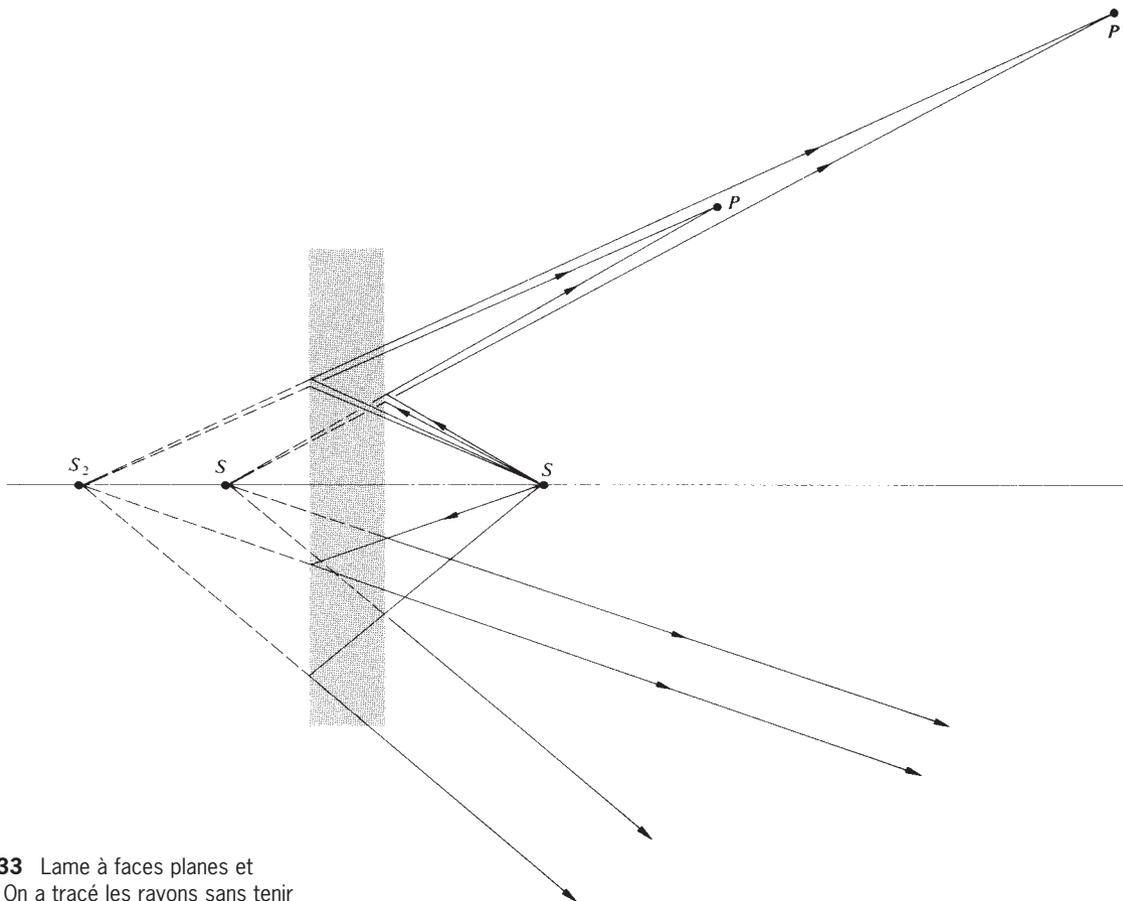


Figure 9.33 Lampe à faces planes et parallèles. On a tracé les rayons sans tenir compte de la réfraction.

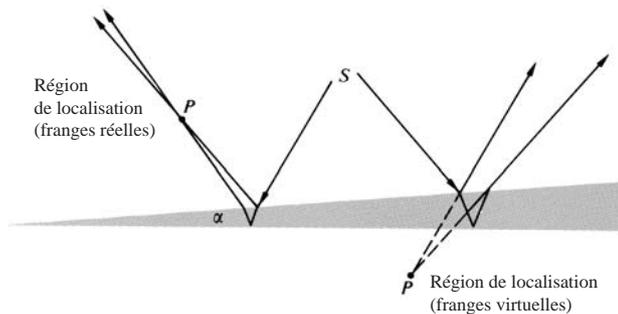


Figure 9.34 Formation de franges par un coin.

lame mince d'air entre les surfaces des miroirs M_2 et M'_1 qui crée ces franges. Comme avec la configuration de la figure 9.30 pour le système de Pohl, des franges réelles non localisées seront également présentes.

La géométrie de la figure d'interférence donnée en réflexion par un coin transparent de petit angle α est exposée à la figure 9.34. L'emplacement P de la frange sera déterminé par la direction du rayon incident. Les anneaux de Newton, de Michelson, de Sagnac et des autres interféromètres pour lesquels le système d'interférence équivalent est composé de deux surfaces planes réfléchissantes, légèrement inclinées l'une par rapport à l'autre. L'orientation du coin de l'interféromètre de Mach-Zehnder est différente car, par rotation des miroirs, on peut faire en sorte que les franges virtuelles résultantes soient localisées n'importe où à l'intérieur de la chambre de test (figure 9.35).

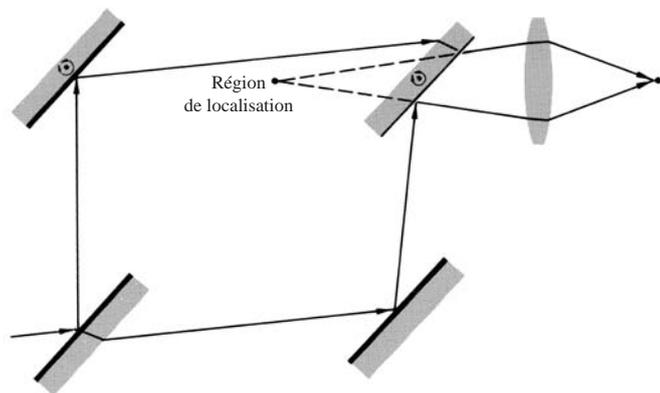


Figure 9.35 Franges dans l'interféromètre de Mach-Zehnder.

9.6 Interférence à ondes multiples

Nous avons jusqu'à présent examiné différentes situations dans lesquelles on fait recombiner deux faisceaux cohérents pour produire des figures d'interférences. Il existe cependant des configurations dans lesquelles on fait interférer un nombre beaucoup plus grand d'ondes mutuellement cohérentes. En fait, à chaque fois que les facteurs de réflexion en amplitude, les r 's, pour la lame parallèle illustrée en figure 9.17 ne sont pas petits, comme c'était le cas précédemment, les ondes réfléchies d'ordres supérieurs $\vec{E}_{3r}, \vec{E}_{4r}, \dots$ deviennent vraiment significatives. Une lame en verre, légèrement argentée sur ses deux faces de façon à ce que les r 's s'approchent de l'unité, produit un grand nombre de rayons qui se réfléchissent de nombreuses fois à l'intérieur. Pour le moment, nous ne considérerons que des situations dans lesquelles le film, le substrat et le milieu environnant sont des diélectriques transparents. Cela permet d'éviter le problème des changements de phase plus complexes qui surviennent aux revêtements métalliques des surfaces.

Pour commencer l'analyse le plus simplement possible, supposons le film non absorbant et posons $n_1 = n_2$. La notation sera en accord avec celle du paragraphe 4.10 ; les facteurs de transmission en amplitude seront notés t (fraction en amplitude de l'onde transmise dans le film) et t' (fraction transmise lorsque l'onde quitte le film). Les rayons sont en fait des lignes perpendiculaires aux fronts d'onde et sont donc également perpendiculaires aux champs optiques $\vec{E}_{1r}, \vec{E}_{2r}$, et ainsi de suite. Comme les rayons vont rester presque parallèles, la théorie scalaire suffira, tant que l'on tient compte des possibles changements de phase.

Comme le montre la figure 9.36, les amplitudes scalaires des ondes réfléchies $\vec{E}_{1r}, \vec{E}_{2r}, \vec{E}_{3r}, \dots$, sont respectivement $E_0 r, E_0 t r' t', E_0 t r'^3 t', \dots$, où E_0 est l'amplitude de l'onde initiale et $r = -r'$ d'après l'équation (4.89). Le signe moins indique un changement de phase que nous étudierons plus tard. De manière similaire, les ondes transmises $\vec{E}_{1t}, \vec{E}_{2t}, \vec{E}_{3t}, \dots$ auront des amplitudes $E_0 t t', E_0 t r'^2 t', E_0 t r'^4 t', \dots$. Considérons l'ensemble des rayons parallèles en réflexion. Chaque rayon a une phase bien définie par rapport à tous les autres rayons réfléchis. Les différences de phase proviennent d'une combinaison des différences de chemin optique et des changements de phase à la réflexion. Néanmoins, les ondes sont mutuellement cohérentes, et si l'on les fait converger au foyer P à l'aide d'une lentille, elles interféreront toutes. L'expression de l'éclairement résultant a une forme particulièrement simple dans deux cas particuliers.

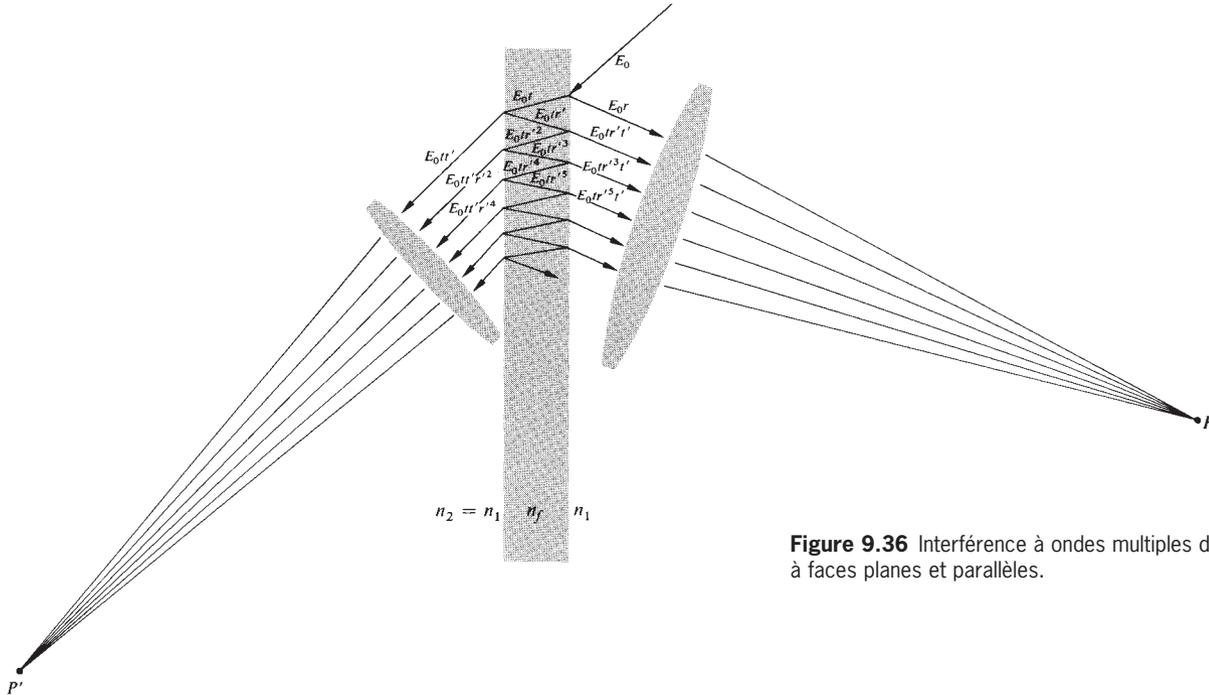


Figure 9.36 Interférence à ondes multiples dans une lame à faces planes et parallèles.

La différence de chemin optique entre deux rayons successifs est donnée par :

$$\Lambda = 2n_f d \cos \theta_i \quad [9.33]$$

Toutes les ondes, excepté la première \vec{E}_{1r} , subissent un nombre impair de réflexions à l'intérieur du film. Il découle de la figure 4.44 qu'à chaque réflexion interne la composante du champ parallèle au plan d'incidence subit un changement de phase de 0 ou de π , en fonction de l'angle d'incidence interne $\theta_i < \theta_c$. Manifestement, il ne se produit aucun déphasage relatif entre ces ondes s'il y a un nombre impair de telles réflexions (figure 9.37). Comme pour le premier cas particulier, si $\Lambda = m\lambda$, la deuxième, la troisième, la quatrième onde et les ondes successives seront en phase en P. Toutefois, l'onde \vec{E}_{1r} de par sa réflexion sur la face supérieure du film sera déphasée de 180° par rapport à toutes les autres. Le changement de phase provient du fait que $r = -r'$ et que r' n'apparaît que pour les puissances impaires. La somme des amplitudes scalaires, qui est l'amplitude totale réfléchie au point P, est :

$$E_{0r} = E_{0r} - (E_{0tr}t' + E_{0tr^3}t' + E_{0tr^5}t' + \dots)$$

ou
$$E_{0r} = E_{0r} - E_{0tr}t'(1 + r^2 + r^4 + \dots)$$

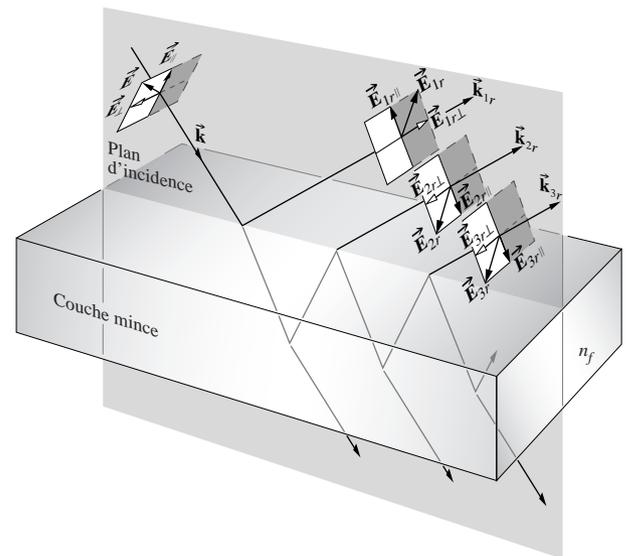


Figure 9.37 Déphasages provenant uniquement des réflexions (internes $\theta_i < \theta_p$).

où comme $\Lambda = m\lambda$, nous avons seulement remplacé r' par $-r$. La série géométrique entre parenthèses converge vers la somme finie $1/(1 - r^2)$ tant que $r^2 < 1$, de telle sorte que :

$$E_{0r} = E_0r - \frac{E_0trt'}{(1 - r^2)} \quad (9.49)$$

On a démontré au paragraphe 4.10, dans l'étude, par le traitement de Stokes, du principe de réversibilité (équation 4.86), que $tt' = 1 - r^2$, et il s'ensuit que :

$$E_{0r} = 0$$

Ainsi, lorsque $\Lambda = m\lambda$ la deuxième, la troisième, la quatrième onde et les suivantes annuleront exactement la première onde réfléchie, comme le montre la figure 9.38. Dans ce cas, il n'y a aucune réflexion ; toute l'énergie est transmise. Le *second cas particulier* survient lorsque $\Lambda = (m + \frac{1}{2})\lambda$ ou lorsque le premier et le second rayons sont en phase, et toutes les autres ondes suivantes sont déphasées de $\lambda/2$; autrement dit, la seconde onde est déphasée avec la troisième, qui est déphasée avec la quatrième, et ainsi de suite. L'*amplitude scalaire* résultante est alors :

$$E_{0r} = E_0r + E_0trt' - E_0tr^3t' + E_0tr^5t' - \dots$$

ou
$$E_{0r} = E_0r + E_0rtt'(1 - r^2 + r^4 - \dots)$$

La série entre parenthèses est égale à $1/(1 + r^2)$, auquel cas :

$$E_{0r} = E_0r \left[1 + \frac{tt'}{(1 + r^2)} \right]$$

Encore une fois, $tt' = 1 - r^2$; et par conséquent, comme le montre la figure 9.39,

$$E_{0r} = \frac{2r}{(1 + r^2)} E_0$$

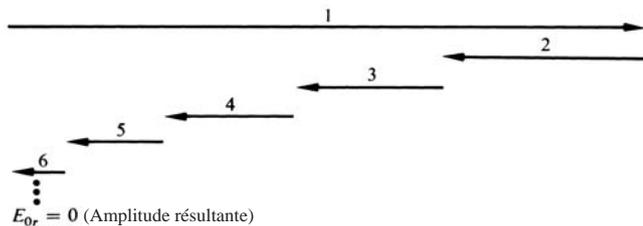


Figure 9.38 Diagramme avec phaseurs.

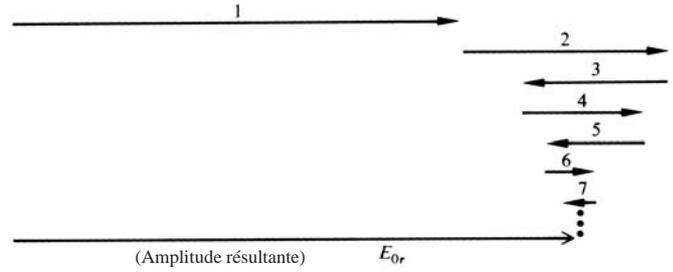


Figure 9.39 Diagramme avec phaseurs.

Puisque cet arrangement particulier résulte de l'addition de la première et de la deuxième onde, qui ont des amplitudes relativement grandes, il devrait produire un éclaircissement important en réflexion. Cet éclaircissement est proportionnel à $E_{0r}^2/2$, ainsi d'après l'équation (3.44) :

$$I_r = \frac{4r^2}{(1 + r^2)^2} \left(\frac{E_0^2}{2} \right) \quad (9.50)$$

On démontrera plus tard qu'il s'agit en fait du maximum $(I_r)_{\max}$.

Abordons maintenant, de manière plus générale, le problème des interférences à ondes multiples, en utilisant une représentation complexe. À nouveau, posons $n_1 = n_2$, ce qui nous évite d'avoir à introduire différents facteurs de réflexion et de transmission à chaque interface. Les champs optiques au point P sont donnés par :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1r} &= E_0r e^{i\omega t} \\ \tilde{E}_{2r} &= E_0tr't' e^{i(\omega t - \delta)} \\ \tilde{E}_{3r} &= E_0tr^3t' e^{i(\omega t - 2\delta)} \\ &\vdots \\ \tilde{E}_{Nr} &= E_0tr^{(2N-3)}t' e^{i[\omega t - (N-1)\delta]} \end{aligned}$$

où $E_0e^{i\omega t}$ est l'onde incidente.

Les termes $\delta, 2\delta, \dots, (N-1)\delta$ sont les contributions en phase venant de la différence de chemin optique entre rayons successifs ($\delta = k_0\Lambda$). Il existe une contribution de phase additionnelle venant de la distance optique traversée pour atteindre le point P , mais elle est commune à chaque rayon et l'on n'en tient pas compte. Le changement de phase subi par le premier rayon lors de la réflexion est pris en compte par la quantité r' . L'*onde scalaire réfléchie* résultante est alors :

$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_{1r} + \tilde{E}_{2r} + \tilde{E}_{3r} + \dots + \tilde{E}_{Nr}$$

ou après substitution (figure 9.40) :

$$\tilde{E}_r = E_0 r e^{i\omega t} + E_0 t r' t' e^{i(\omega t - \delta)} + \dots + E_0 t r'^{(2N-3)} t'^N \times e^{i[\omega t - (N-1)\delta]}$$

que l'on peut réécrire :

$$\tilde{E}_r = E_0 e^{i\omega t} \left\{ r + r' t t' e^{-i\delta} [1 + (r'^2 e^{-i\delta}) + (r'^2 e^{-i\delta})^2 + \dots + (r'^2 e^{-i\delta})^{N-2}] \right\}$$

Si $|r'^2 e^{-i\delta}| < 1$, et si le nombre de termes de la série tend vers l'infini, la série converge. L'onde résultante devient :

$$\tilde{E}_r = E_0 e^{i\omega t} \left[r + \frac{r' t t' e^{-i\delta}}{1 - r'^2 e^{-i\delta}} \right] \quad (9.51)$$

Dans le cas où l'absorption est nulle, aucune énergie n'est retirée aux ondes, on peut utiliser les relations $r = -r'$ et $tt' = 1 - r^2$ pour réécrire l'équation (9.51) de la façon suivante :

$$\tilde{E}_r = E_0 e^{i\omega t} \left[\frac{r(1 - e^{-i\delta})}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \right]$$

L'éclairement en P est alors $I_r = \tilde{E}_r \tilde{E}_r^* / 2$, et par conséquent,

$$I_r = \frac{E_0^2 r^2 (1 - e^{-i\delta})(1 - e^{+i\delta})}{2(1 - r^2 e^{-i\delta})(1 - r^2 e^{+i\delta})}$$

qui peut être transformé en :

$$I_r = I_i \frac{2r^2(1 - \cos \delta)}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta} \quad (9.52)$$

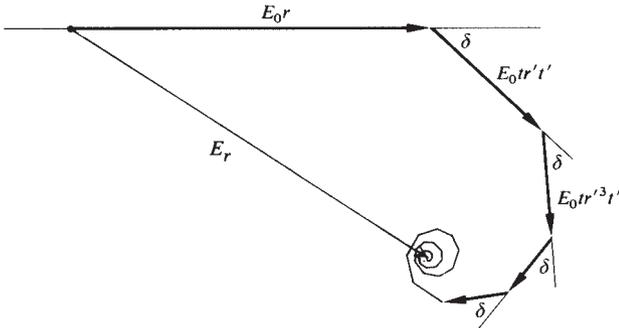


Figure 9.40 Diagramme avec phaseurs.

Le symbole $I_i = E_0^2/2$ représente l'éclairement incident, comme E_0 était l'amplitude de l'onde incidente. De même, les amplitudes des ondes transmises sont données par :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1t} &= E_0 t t' e^{i\omega t} \\ \tilde{E}_{2t} &= E_0 t t' r'^2 e^{i(\omega t - \delta)} \\ \tilde{E}_{3t} &= E_0 t t' r'^4 e^{i(\omega t - 2\delta)} \\ &\vdots \\ \tilde{E}_{Nt} &= E_0 t t' r'^{2(N-1)} e^{i[\omega t - (N-1)\delta]} \end{aligned}$$

on peut les sommer pour obtenir :

$$\tilde{E}_t = E_0 e^{i\omega t} \left[\frac{t t'}{1 - r'^2 e^{-i\delta}} \right] \quad (9.53)$$

(Ce qui nous intéresse est l'éclairement, et l'on a donc négligé un facteur commun de $e^{-i\delta/2}$, venant de la transmission à travers le film. Il contribue à la différence de phase de $\pi/2$ entre les ondes réfléchies et transmises, mais cela n'est pas notre sujet ici.)

En multipliant l'équation (9.53) par son complexe conjugué (problème 9.39), on trouve l'éclairement du faisceau transmis :

$$I_t = \frac{I_i (t t')^2}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta} \quad (9.54)$$

En utilisant la relation trigonométrique $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2(\delta/2)$ (9.52), les équations (9.52) et (9.54) deviennent :

$$I_r = I_i \frac{[2r/(1 - r^2)]^2 \sin^2(\delta/2)}{1 + [2r/(1 - r^2)]^2 \sin^2(\delta/2)} \quad (9.55)$$

et

$$I_t = I_i \frac{1}{1 + [2r/(1 - r^2)]^2 \sin^2(\delta/2)} \quad (9.56)$$

dans lesquelles l'énergie n'est pas absorbée, d'où $tt' + r^2 = 1$. Si effectivement il n'y a pas d'absorption, l'éclairement à l'entrée devrait être exactement égal à la somme des éclairements en réflexion et en transmission. Il résulte des équations (9.55) et (9.56) que c'est effectivement le cas, à savoir :

$$I_i = I_r + I_t \quad (9.57)$$

En revanche, cela ne se vérifiera pas si le film diélectrique est recouvert d'une fine couche de métal semi-transparent, car les courants de surface induits dans le métal dissiperont une partie de l'énergie électromagnétique incidente.

Considérons les ondes en transmission décrites par l'équation (9.54). Il se produira un maximum lorsque le dénominateur sera aussi petit que possible, à savoir lorsque $\cos \delta = 1$, auquel cas $\delta = 2\pi m$ et :

$$(I_t)_{\max} = I_i$$

Sous ces conditions, l'équation (9.52) montre que :

$$(I_r)_{\min} = 0$$

comme on pouvait s'y attendre à partir de l'équation (9.57). Encore une fois, à partir de l'équation (9.54), il est clair qu'il produira un minimum d'éclairement en transmission quand le dénominateur est à son maximum, c'est-à-dire lorsque $\cos \delta = -1$. Dans ce cas, $\delta = (2m + 1)\pi$ et :

$$(I_t)_{\min} = I_i \frac{(1 - r^2)^2}{(1 + r^2)^2} \quad (9.58)$$

Le maximum d'éclairement en réflexion est alors :

$$(I_r)_{\max} = I_i \frac{4r^2}{(1 + r^2)^2} \quad (9.59)$$

Notons qu'une figure de franges d'égale inclinaison constante a ses maxima pour $\delta = (2m + 1)\pi$ ou :

$$\frac{4\pi n_f}{\lambda_0} d \cos \theta_i = (2m + 1)\pi$$

qui est le résultat auquel nous sommes arrivés précédemment dans l'équation (9.36) en utilisant seulement les deux premières ondes réfléchies. Notons par ailleurs que l'équation (9.59) vérifie le fait que l'équation (9.50) était bien au maximum.

La forme des équations (9.55) et (9.56) suggère l'introduction d'une nouvelle quantité, le *coefficient de finesse* F , tel que :

$$F \equiv \left(\frac{2r}{1 - r^2} \right)^2 \quad (9.60)$$

ce qui permet d'écrire les équations précédentes de la façon suivante :

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{F \sin^2(\delta/2)}{1 + F \sin^2(\delta/2)} \quad (9.61)$$

et

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)} \quad (9.62)$$

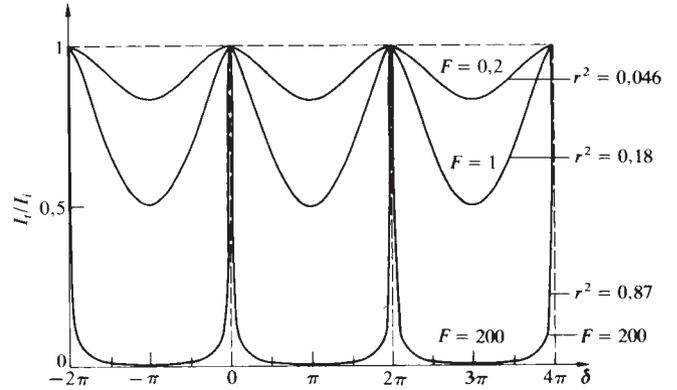


Figure 9.41 Fonction d'Airy.

Le terme $[1 + F \sin^2(\delta/2)]^{-1} \equiv \mathcal{A}(\theta)$ est connu sous le nom de **fonction d'Airy**. Il représente la distribution de l'éclairement en transmission et son graphe est tracé sur la figure 9.41 ; la fonction complémentaire $[1 - \mathcal{A}(\theta)]$, à savoir l'équation (9.61) est également représentée à la figure 9.42. Lorsque $\delta/2 = m\pi$, la fonction Airy est égale à l'unité pour toutes les valeurs de F et donc de r . Quand r tend vers 1, la densité de flux transmise est très petite, sauf à l'intérieur de pics étroits centrés autour des points $\delta/2 = m\pi$. L'interférence à ondes multiples implique une nouvelle redistribution de l'éclairement par rapport au motif sinusoïdal caractéristique de l'interférence à deux ondes (auquel ressemblent les courbes à ondes multiples correspondant à de faibles valeurs du facteur de réflexion). On exposera cet effet plus tard quand on étudiera les réseaux de diffraction. Nous verrons alors ce même effet de pic, créé par l'accroissement du nombre de sources cohérentes

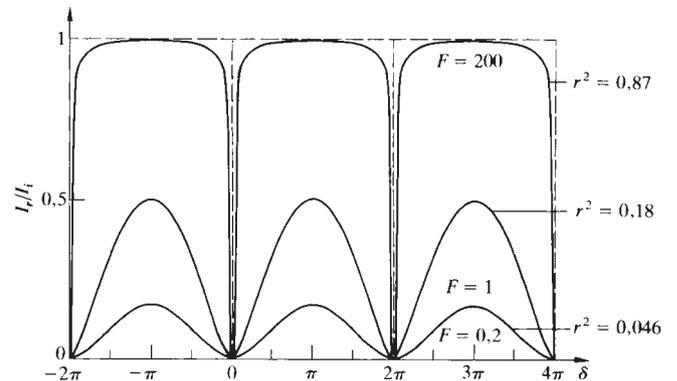


Figure 9.42 Fonction complémentaire de la fonction d'Airy.

qui participent au processus d'interférence. Rappelons que la fonction Airy est en fait une fonction de θ_i ou de θ_r par le biais de sa dépendance en δ , ce qui résulte des équations (9.34) et (9.35), d'où la notation $\mathcal{A}(\theta)$. Chaque pic dans la courbe d'éclairement de flux correspond à un δ particulier et donc à un θ_i particulier. Pour une lame à faces planes et parallèles, les franges en transmission consisteront en une série d'anneaux fins brillants, sur un fond quasiment noir. En réflexion, les franges seront fines et sombres sur un fond lumineux presque uniforme.

On peut rendre nettes et fines des franges d'égale épaisseur en appliquant un léger revêtement argenté sur les faces réfléchissantes appropriées afin de produire des interférences à ondes multiples.

9.6.1 L'interféromètre Fabry-Pérot

L'interféromètre à ondes multiples, construit pour la première fois par Charles Fabry et Alfred Pérot à la fin du XIX^e siècle, est d'un intérêt contemporain considérable. Non seulement il constitue un système spectroscopique à fort pouvoir de résolution, mais il sert de cavité résonnante basique pour les lasers. En principe, le système repose sur deux surfaces hautement réfléchissantes planes, parallèles, séparées par une distance d . Il s'agit de la configuration la plus simple, mais nous verrons également d'autres formes largement utilisées. En pratique, on utilise deux plans étalons semi-argentés ou aluminés comme surfaces réfléchissantes. L'épaisseur d'air associée varie généralement de quelques millimètres à quelques centimètres lorsque l'appareil est utilisé de manière interférométrique, et souvent jusqu'à des longueurs considérablement plus grandes lorsqu'il est utilisé comme cavité résonnante d'un laser. Si l'on peut faire varier mécaniquement cet intervalle en translatant l'un des miroirs, il se rapporte à un interféromètre. Lorsque les miroirs sont fixes et ajustés en parallélisme au moyen de cales (l'invar ou le quartz sont souvent employés), on parle d'**étalon** (bien qu'il soit toujours un interféromètre au sens large du terme). Si les deux surfaces d'une simple lame de quartz sont convenablement polies et argentées, celle-ci servira également d'étalon, l'interstice n'ayant pas besoin d'être de l'air. Les faces non argentées des lames sont souvent taillées en léger biseau (quelques minutes d'arc) pour réduire la figure d'interférence provenant des réflexions sur ces faces.

La figure 9.43 montre un étalon éclairé par une source étendue, qui pourrait être un arc à mercure ou un faisceau laser He-Ne de quelques centimètres de diamètre. Cela peut s'effectuer en éclairant la pupille de sortie d'un télescope mis au point à l'infini,

et en diffusant la lumière par une lame de verre dépoli. On n'a tracé qu'un seul des rayons émis d'un point S_1 de la source à travers l'étalon. Entrant par la lame partiellement argentée, il est de nombreuses fois réfléchi à l'intérieur de l'étalon. Les rayons transmis sont collectés par une lentille et focalisés sur un écran, où ils interfèrent pour former soit une tache brillante, soit une tache sombre. Considérons ce plan d'incidence particulier, qui contient tous les rayons réfléchis. Un autre rayon émis d'un point différent S_2 , parallèle au rayon original et situé dans ce plan d'incidence, formera une tache au même point P sur l'écran. Comme nous le verrons, la discussion du paragraphe précédent est à nouveau applicable, de sorte que l'équation (9.54) détermine l'éclairement I_t en transmission.

Les ondes multiples produites dans la cavité soit de S_1 soit de S_2 , sont cohérentes entre elles quand elles arrivent en P . Cependant, les rayons provenant de S_1 sont complètement incohérents avec ceux venant de S_2 , de sorte qu'il n'y a aucune interférence mutuelle durable. La contribution à l'éclairement I_t en P est simplement la somme des deux contributions de l'éclairement.

Tous les rayons ayant le même angle engendreront une frange circulaire d'éclairement uniforme (figure 9.44). Avec une source étendue diffuse, les franges d'interférences seront des cercles concentriques étroits, correspondant à une figure d'interférence à ondes multiples en transmission.

On peut observer visuellement le système de franges en regardant directement dans l'étalon, en regardant à l'infini. Le travail de la lentille de focalisation, qui n'est plus alors nécessaire, est fait par l'œil. Pour de grandes valeurs de d , les anneaux seront très resserrés, et un télescope pourrait être nécessaire pour les agrandir. Un monocle bon marché remplira la même fonction et permettra de photographier les franges localisées à l'infini. Comme on pouvait s'y attendre d'après les considérations du paragraphe 9.5, il est possible de produire des franges réelles non localisées grâce à une source ponctuelle brillante.

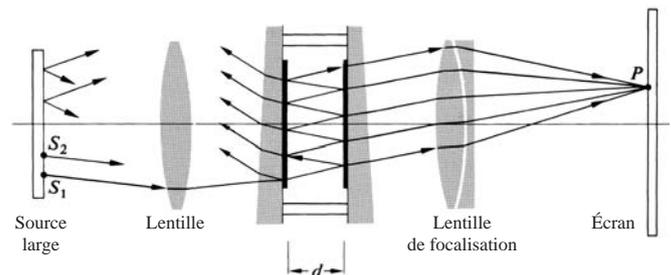


Figure 9.43 Étalon Fabry-Pérot.

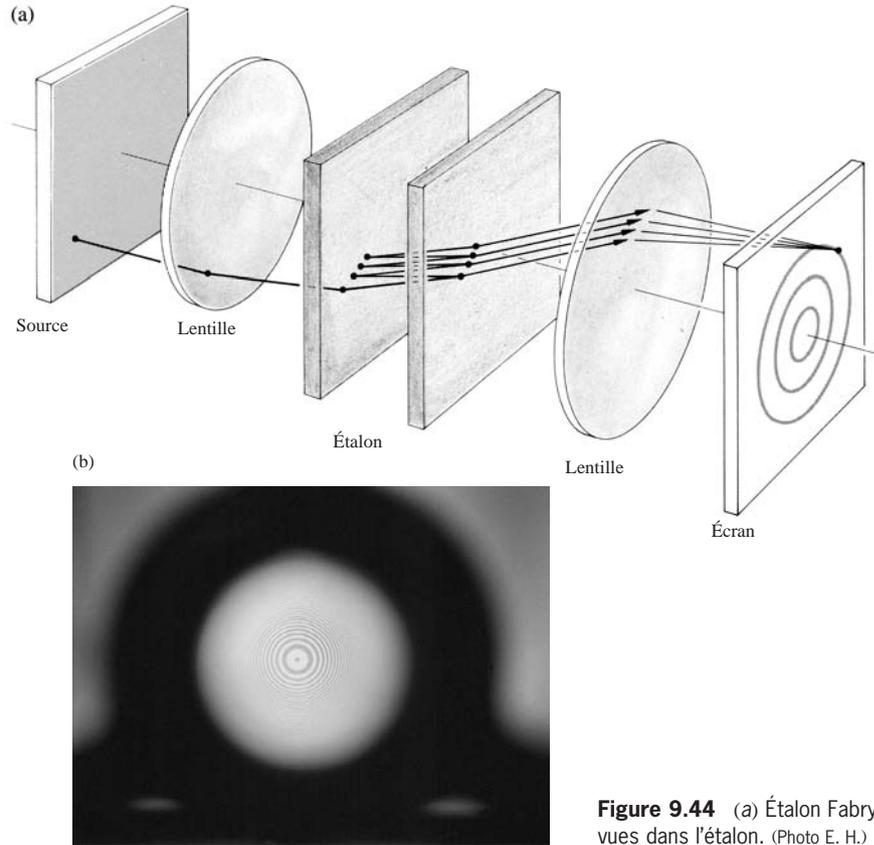


Figure 9.44 (a) Étalon Fabry-Pérot. (b) Franges à symétrie axiale vues dans l'étalon. (Photo E. H.)

Les films métalliques semi-transparents souvent utilisés pour augmenter le facteur de réflexion ($R = r^2$) absorberont une partie A du flux ; cette fraction est dénommée facteur *d'absorption*.

L'expression :

$$tt' + r^2 = 1$$

ou
$$T + R = 1 \quad [4.60]$$

où T est le facteur de transmission, doit maintenant se réécrire ainsi :

$$T + R + A = 1 \quad (9.63)$$

Une autre complication introduite par les films métalliques est le déphasage additionnel $\phi(\theta_i)$, qui peut différer de zéro ou de π . La différence de phase entre les deux ondes successivement transmises est alors de :

$$\delta = \frac{4\pi n_f d \cos \theta_i}{\lambda_0} + 2\phi \quad (9.64)$$

Dans les conditions présentes, θ_i est petit et ϕ peut être considéré comme constant. En général, d est tellement grand, et λ_0 tellement petit que ϕ peut être négligé. Nous pouvons maintenant exprimer l'équation (9.54) comme :

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \delta}$$

ou de manière équivalente :

$$\frac{I_t}{I_i} = \left(\frac{T}{1 - R} \right)^2 \frac{1}{1 + [4R/(1 - R)^2] \sin^2(\delta/2)} \quad (9.65)$$

En utilisant l'équation (9.63) et la définition de la fonction d'Airy, nous obtenons :

$$\frac{I_t}{I_i} = \left[1 - \frac{A}{(1 - R)} \right]^2 \mathcal{A}(\theta) \quad (9.66)$$

à comparer avec l'équation où l'absorption est nulle :

$$\frac{I_t}{I_i} = \mathcal{A}(\theta) \quad [9.62]$$

Dans la mesure où la fraction absorbée A n'est jamais nulle, les maxima en transmission $(I_t)_{\max}$ seront toujours légèrement inférieurs à I_i . (Rappelons-nous que pour $(I_t)_{\max}$, $\mathcal{A}(\theta) = 1$.)

En conséquence, le *pic de transmission* est défini par $(I_t/I_i)_{\max}$:

$$\frac{(I_t)_{\max}}{I_i} = \left[1 - \frac{A}{(1-R)} \right]^2 \quad (9.67)$$

Un film d'argent d'une épaisseur de 50 nm sera proche de sa valeur maximum R (par exemple, environ 0,94), alors que T et A vaudront respectivement 0,01 et 0,05. Dans ce cas, le pic de transmission sera réduit à 1/36. L'éclairement relatif de la figure d'interférence sera toujours déterminé par la fonction d'Airy, puisque :

$$\frac{I_t}{(I_t)_{\max}} = \mathcal{A}(\theta) \quad (9.68)$$

Une mesure de la finesse des franges, c'est-à-dire de la rapidité avec laquelle l'éclairement décroît de chaque côté du maximum, est donnée par la largeur totale à la mi-hauteur γ , montrée en radian, sur la figure 9.45, lorsque $I_t = (I_t)_{\max}/2$.

Les pics de transmission ont lieu pour des différences de phase $\delta_{\max} = 2\pi m$. Par conséquent, l'éclairement diminuera à la moitié de sa valeur maximale [i.e. $\mathcal{A}(\theta) = \frac{1}{2}$] à chaque fois que $\delta = \delta_{\max} \pm \delta_{1/2}$. Vu que :

$$\mathcal{A}(\theta) = [1 + F \sin^2(\delta/2)]^{-1}$$

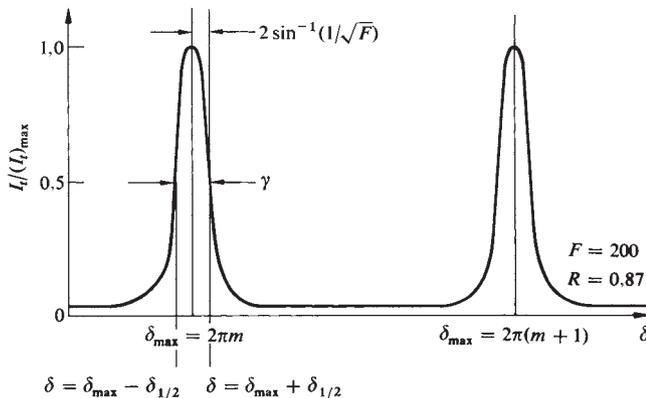


Figure 9.45 Franges de Fabry-Pérot.

alors, quand :

$$[1 + F \sin^2(\delta_{1/2}/2)]^{-1} = \frac{1}{2}$$

il s'ensuit que :

$$\delta_{1/2} = 2 \sin^{-1}(1/\sqrt{F})$$

Comme F est en général plutôt grand, $\sin^{-1}(1/\sqrt{F}) \approx 1/\sqrt{F}$, et donc la largeur $\gamma = 2\delta_{1/2}$ devient :

$$\gamma = 4/\sqrt{F} \quad (9.69)$$

Il faut noter que $F = 4R/(1-R)^2$, de telle sorte que plus R est grand, plus les pics de transmission sont étroits.

Une autre quantité d'un intérêt particulier est le rapport entre la distance séparant deux maxima adjacents et la demi-largeur. Connue sous le nom de **finesse**, $\mathcal{F} \equiv 2\pi/\gamma$ ou d'après l'équation (9.69),

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} \quad (9.70)$$

dans le visible, la finesse de la plupart des Fabry-Pérot est d'environ 30. La limitation physique sur \mathcal{F} est imposée par les défauts de parallélisme et de planéité des miroirs. Gardons à l'esprit que, à mesure que la finesse augmente, la largeur décroît, ainsi que le pic de transmission. On peut atteindre une finesse d'environ 1000 avec des systèmes à miroirs sphériques avec des couches minces diélectriques.*

Spectroscopie Fabry-Pérot

On utilise souvent l'interféromètre de Fabry-Pérot pour examiner les structures détaillées de raies spectrales. Nous n'essaierons pas de traiter de manière exhaustive la spectroscopie interférentielle, mais plutôt de définir la terminologie adaptée, en soulignant brièvement les résultats appropriés.†

*L'article « Multiple Beam Interferometry », de H. D. Polster, *Appl. Opt.* **8**, 522 (1969), est, sur ce thème, très intéressant. Voir aussi « The Optical Computer », E. Abraham, C. Seaton, et S. Smith, *Sci. Am.* (Feb. 1983), p. 85, pour une discussion de l'utilisation de l'interféromètre de Fabry-Pérot comme transistor optique.

†On peut trouver un traitement plus complet dans Born et Wolf, *Principles of Optics*, et dans W. E. Williams, *Applications of Interferometry*, pour ne citer que deux ouvrages.

Comme nous l'avons vu, une onde purement monochromatique produit un système de franges circulaires qui lui est propre. Comme δ est fonction de λ_0 , si la source est composée de deux composantes monochromatiques de cette nature, on obtient deux systèmes d'anneaux superposés. Lorsque les franges individuelles se chevauchent partiellement, il existe une certaine ambiguïté sur la possibilité de les discerner l'une de l'autre, c'est-à-dire de décréter qu'elles sont *résolues*. On utilise généralement le critère de Lord Rayleigh* pour résoudre les images de deux fentes superposées d'éclairement égal, même s'il est quelque peu arbitraire dans l'application présente. Son utilisation permettra toutefois d'établir une comparaison avec les instruments à prisme ou à réseau. La caractéristique principale de ce critère est que les franges sont *en limite de résolution* lorsque l'éclairement résultant au milieu de deux franges vaut $8/\pi^2$ fois l'éclairement maximal. Cela veut simplement dire que l'on ne voit qu'une seule frange large brillante avec une zone centrale grise. Afin d'être un peu plus analytique sur ce point, examinons la figure 9.46, en gardant présente à l'esprit l'origine de la demi-largeur. Considérons le cas où les deux franges constituantes ont le même éclairement, $(I_a)_{\max} = (I_b)_{\max}$. Les pics résultants, ayant lieu à $\delta = \delta_a$ et $\delta = \delta_b$, auront des éclairements égaux,

$$(I_t)_{\max} = (I_a)_{\max} + I' \quad (9.71)$$

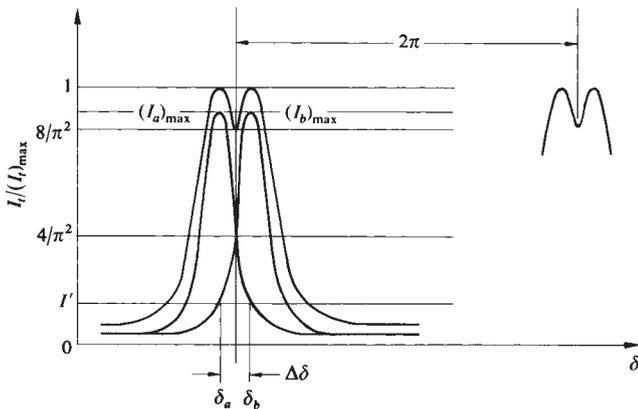


Figure 9.46 Superposition de franges.

*On reconsidérera dans le chapitre suivant le critère en liaison avec la diffraction (figure 10.26).

Au creux central, l'éclairement $(8/\pi^2)(I_t)_{\max}$ est la somme des deux contributions en éclairement, de telle sorte que, d'après l'équation (9.68),

$$(8/\pi^2) \frac{(I_t)_{\max}}{(I_a)_{\max}} = [\mathcal{A}(\theta)]_{\delta=\delta_a+\Delta\delta/2} + [\mathcal{A}(\theta)]_{\delta=\delta_b+\Delta\delta/2} \quad (9.72)$$

En utilisant $(I_t)_{\max}$ donné par l'équation (9.71), ainsi que le fait que :

$$\frac{I'}{(I_a)_{\max}} = [\mathcal{A}(\theta)]_{\delta=\delta_a+\Delta\delta}$$

nous pouvons résoudre l'équation (9.72) pour $\Delta\delta$. Pour de grandes valeurs de F ,

$$(\Delta\delta) \approx \frac{4,2}{\sqrt{F}} \quad (9.73)$$

Cela représente le déphasage, $(\Delta\delta)_{\min}$, séparant deux franges en limite de résolution, qui peut être relié aux incréments minimums équivalents, d'une longueur d'onde $(\Delta\lambda_0)_{\min}$ en fréquence $(\Delta\nu)_{\min}$, ou en nombre d'onde $(\Delta k)_{\min}$. D'après l'équation (9.64), nous avons, pour $\delta = 2\pi m$:

$$m\lambda_0 = 2n_f d \cos \theta_i + \frac{\phi\lambda_0}{\pi} \quad (9.74)$$

En abandonnant le terme $\phi\lambda_0/\pi$, clairement négligeable, puis en dérivant l'expression, nous obtenons :

$$m(\Delta\lambda_0) + \lambda_0(\Delta m) = 0$$

ou
$$\frac{\lambda_0}{(\Delta\lambda_0)} = - \frac{m}{(\Delta m)}$$

Le signe moins sera omis, puisqu'il signifie seulement que l'ordre augmente quand λ_0 diminue. Lorsque δ varie de 2π , m varie de 1,

$$\frac{2\pi}{(\Delta\delta)} = \frac{1}{(\Delta m)}$$

et donc
$$\frac{\lambda_0}{(\Delta\lambda_0)} = \frac{2\pi m}{(\Delta\delta)} \quad (9.75)$$

Le rapport entre λ_0 et la différence de longueur d'onde minimale résolue, $(\Delta\lambda_0)_{\min}$, est dénommé le **pouvoir de résolution chromatique** \mathcal{R} d'un spectroscopie. À incidence presque normale,

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\lambda_0}{(\Delta\lambda_0)_{\min}} \approx \mathcal{F} \frac{2n_f d}{\lambda_0} \quad (9.76)$$

ou
$$\mathcal{R} \approx \mathcal{F} m$$

Pour une longueur d'onde de 500 nm, $n_f d = 10$ mm, et $R = 90\%$, le pouvoir de résolution est bien supérieur au million, chiffre atteint par les plus fines ondes des réseaux de diffraction. Il s'ensuit également dans cet exemple que $(\Delta\lambda_0)_{\min}$ est inférieur à un millionième de λ_0 . En termes de fréquence, la **largeur de bande résolue minimale** est :

$$(\Delta\nu)_{\min} = \frac{c}{\mathcal{F}2n_f d} \quad (9.77)$$

vu que $|\Delta\nu| = |c\Delta\lambda_0/\lambda_0^2|$.

Si l'on augmente la séparation entre les deux composantes spectrales présentes dans la source, les pics, qui se superposent dans la figure 9.46, se séparent. Si l'on augmente encore la différence de longueur d'onde, la frange d'ordre m pour une longueur d'onde λ_0 s'approche de l'ordre $(m + 1)$ pour l'autre longueur d'onde $(\lambda_0 - \Delta\lambda_0)$. La différence de longueur d'onde pour laquelle le chevauchement se reproduit est l'**intervalle spectral libre**. D'après l'équation (9.75), un changement de 2π dans δ correspond à $(\Delta\lambda_0)_{\text{fsr}} = \lambda_0/m$, ou, sous incidence presque normale,

$$(\Delta\lambda_0)_{\text{fsr}} \approx \lambda_0^2/2n_f d \quad (9.78)$$

et de même :

$$(\Delta\nu)_{\text{fsr}} \approx c/2n_f d \quad (9.79)$$

Poursuivons l'exemple précédent (i.e. $\lambda_0 = 500$ nm et $n_f d = 10$ mm), $(\Delta\lambda_0)_{\text{fsr}} = 0,0125$ nm. Si nous essayons d'augmenter le pouvoir de résolution en augmentant simplement d , la gamme spectrale libre va diminuer, créant une confusion due à la superposition des ordres. Il est nécessaire que $(\Delta\lambda_0)_{\min}$ soit aussi petit que possible et que $(\Delta\lambda_0)_{\text{fsr}}$ soit aussi grand que possible. Cependant,

$$\frac{(\Delta\lambda_0)_{\text{fsr}}}{(\Delta\lambda_0)_{\min}} = \mathcal{F} \quad (9.80)$$

Ce résultat ne devrait pas être trop surprenant au vu de la définition originelle de \mathcal{F} .

Les applications et les configurations de l'interféromètre de Fabry-Pérot sont nombreuses. On a disposé des étalons à la suite les uns des autres avec des spectroscopes à réseaux et à prismes, et l'on a remplacé les revêtements métalliques des miroirs par des couches minces diélectriques.

Les techniques de balayage sont très utilisées car elles tirent avantage de la linéarité des détecteurs photoélectriques par rapport aux plaques photographiques, et elles permettent d'obtenir des mesures de flux plus fiables. La configuration de base pour le *balayage sur l'axe* est illustrée en figure 9.47. Le

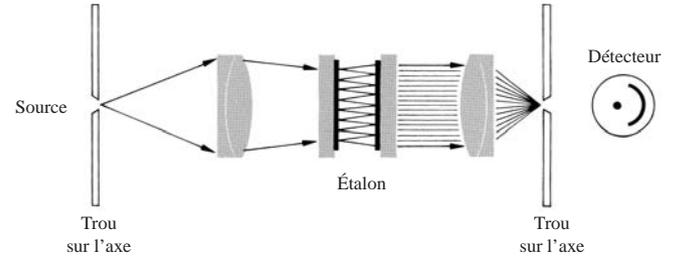


Figure 9.47 Balayage sur l'axe.

balayage est effectué en faisant varier δ , en changeant n_f ou d plutôt que $\cos \theta$. Dans certains systèmes, on fait légèrement varier n_f en jouant sur la pression de l'air à l'intérieur de l'étalon. Dans d'autres montages, la vibration mécanique d'un miroir avec un déplacement de $\lambda_0/2$ sera suffisante pour balayer l'intervalle spectral libre, ce qui correspond à $\Delta\delta = 2\pi$. Une technique courante pour y arriver est d'utiliser un miroir monté sur un transducteur piézoélectrique, dont la longueur, et donc d , varie en fonction d'une tension appliquée. Le profil de la tension détermine le mouvement du miroir.

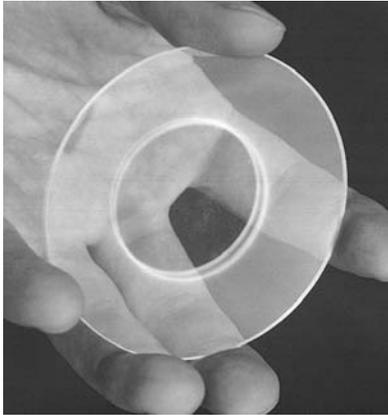
Au lieu d'enregistrer sur une plaque photographique l'éclairement sur une grande région de l'espace, à un instant donné, cette méthode enregistre l'éclairement sur une grande période dans le temps, en un point donné de l'espace.

La configuration réelle de l'étalon lui-même a également subi des variations significatives. Pierre Connes a décrit pour la première fois l'*interféromètre de Fabry-Pérot à miroir sphérique* en 1956. Depuis, les systèmes à miroirs sphériques jouent un rôle de premier plan comme cavités laser, et trouvent également un usage croissant en tant qu'analyseurs de spectres.

9.7 Application des couches simples et des multicouches

Les utilisations optiques des couches minces diélectriques sont très nombreuses de nos jours. Les revêtements pour éliminer les réflexions parasites sur diverses surfaces, depuis les vitres jusqu'aux lentilles d'appareils photographiques de très haute qualité, tout cela est désormais chose courante (voir photo). Multicouches, diviseurs de faisceaux non absorbants et miroirs dichroïques (diviseurs de faisceaux sélectifs en transmission et en réflexion) peuvent être achetés dans le commerce.

La figure 9.48 est une coupe illustrant l'utilisation d'un *miroir froid* avec un *réflecteur chaud* pour canaliser l'infrarouge



Ce disque de verre a reçu un traitement antireflet de forme circulaire dans la région centrale de ses deux faces. (Photo E. H.)

à l'arrière d'un projecteur de cinéma. L'intense rayonnement infrarouge indésirable émis par la source est prélevé du faisceau afin d'éviter que le film photographique n'ait des problèmes de chaleur. La moitié supérieure de la figure 9.48 représente l'arrière d'un miroir argenté ordinaire à titre de comparaison. Les piles solaires, une des principales réserves énergétiques pour les engins spatiaux, et même pour les casques et visières des astronautes, sont protégées par des revêtements similaires qui contrôlent les échanges thermiques.

On peut réaliser des filtres multicouches, bandes passantes larges ou étroites qui ne transmettent que sur une gamme spectrale spécifique depuis l'infrarouge jusqu'à l'ultraviolet. Dans le visible, par exemple, ils jouent un rôle important dans la

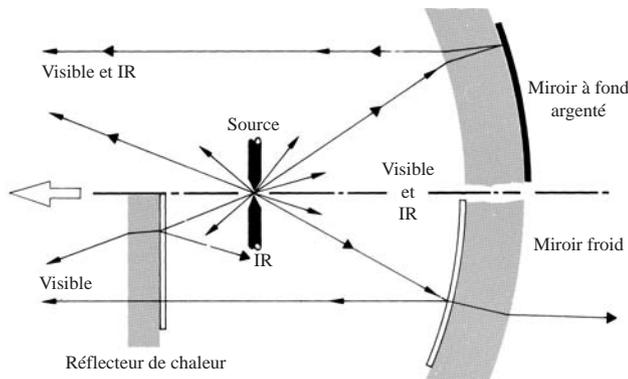


Figure 9.48 Schéma composite montrant un système ordinaire dans la première moitié du haut, et un système traité dans la moitié du bas.

séparation des images pour les caméras de télévision en couleurs ; en infrarouge, on les utilise dans les systèmes de guidage de missiles, dans les lasers à CO₂, et dans les senseurs d'horizon pour satellites. Les applications de ces couches minces sont multiples, tout comme leurs structures, qui vont de monocouches aux superpositions complexes d'une centaine de couches ou plus.

Le développement de la théorie des multicouches que l'on fera ici traitera des champs magnétique et électrique *globaux* et de leurs conditions aux limites dans les différentes régions. Il constitue une approche beaucoup plus pratique que la technique des ondes multiples que l'on utilisait il y a quelques années.*

9.7.1 Traitement mathématique

Considérons l'onde polarisée linéairement de la figure 9.49, qui arrive sur une couche mince diélectrique séparant deux

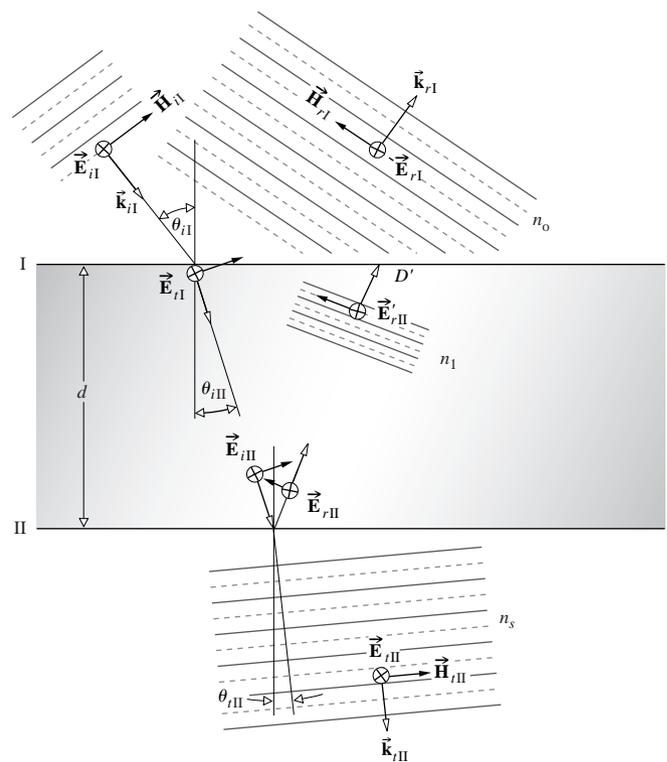


Figure 9.49 Champs aux limites.

*Pour une discussion très abordable et non mathématique, voir P. Baumeister et G. Pincus, « Optical Interference Coatings », *Sci. Amer.* **223**, 59 (Décembre 1970).

milieux transparents semi-infinis. En pratique, c'est une couche diélectrique d'épaisseur égale à une fraction de longueur d'onde, déposée sur une lentille, un miroir ou un prisme. Dès à présent, il faut être précis sur le point suivant : chacune des ondes E_{rI} , E'_{rII} , E_{III} , et ainsi de suite, représente la résultante de toutes les ondes possibles qui se propagent dans cette direction, en ce point dans le milieu, ce qui suppose que la sommation des champs est déjà effectuée. Comme nous l'avons vu au paragraphe 4.6.2, les conditions aux limites imposent que les composantes tangentielles des champs électrique (\vec{E}) et magnétique ($\vec{H} = \vec{B}/\mu$) soient continues au passage aux limites (i.e. elles sont égales des deux côtés). À la limite I :

$$E_I = E_{II} + E_{rI} = E_{II} + E'_{rII} \quad (9.81)$$

et

$$H_I = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (E_{II} - E_{rI}) n_0 \cos \theta_{II}$$

$$H_I = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (E_{II} - E'_{rII}) n_1 \cos \theta_{III} \quad (9.82)$$

où l'on utilise le fait que, dans les milieux non magnétiques, \vec{E} et \vec{H} sont liés par l'intermédiaire de l'indice de réfraction et du vecteur de propagation unitaire :

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n \hat{\mathbf{k}} \times \vec{E}$$

À la limite II :

$$E_{II} = E_{III} + E_{rII} = E_{III} \quad (9.83)$$

et

$$H_{II} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (E_{III} - E_{rII}) n_1 \cos \theta_{III}$$

$$H_{II} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{rII} n_s \cos \theta_{III} \quad (9.84)$$

le substrat ayant un indice n_s . Selon l'équation (9.33), une onde qui traverse le film une fois va subir un déphasage de $k_0(2n_1d \cos \theta_{III})/2$, qui sera noté k_0h , ainsi :

$$E_{III} = E_{rI} e^{-ik_0h} \quad (9.85)$$

et

$$E_{rII} = E'_{rII} e^{+ik_0h} \quad (9.86)$$

Les équations (9.83) et (9.84) peuvent maintenant être réécrites sous la forme :

$$E_{II} = E_{rI} e^{-ik_0h} + E'_{rII} e^{+ik_0h} \quad (9.87)$$

et

$$H_{II} = (E_{rI} e^{-ik_0h} - E'_{rII} e^{+ik_0h}) \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_1 \cos \theta_{III} \quad (9.88)$$

Ces deux dernières équations peuvent être résolues en E_{rI} et en E'_{rII} , qui une fois introduits dans les équations (9.81) et (9.82), donnent :

$$E_I = E_{II} \cos k_0h + H_{II}(i \sin k_0h)/Y_I \quad (9.89)$$

et

$$H_I = E_{II} Y_I i \sin k_0h + H_{II} \cos k_0h \quad (9.90)$$

où :

$$Y_I \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_1 \cos \theta_{III}$$

Quand \vec{E} est dans le plan d'incidence, les calculs ci-dessus aboutissent à des équations similaires, à condition que :

$$Y_I \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_1 / \cos \theta_{III}$$

En notation matricielle, les relations linéaires précédentes prennent la forme :

$$\begin{bmatrix} E_I \\ H_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_0h & (i \sin k_0h)/Y_I \\ Y_I i \sin k_0h & \cos k_0h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{II} \\ H_{II} \end{bmatrix} \quad (9.91)$$

ou

$$\begin{bmatrix} E_I \\ H_I \end{bmatrix} = \mathcal{M}_I \begin{bmatrix} E_{II} \\ H_{II} \end{bmatrix} \quad (9.92)$$

La *matrice caractéristique* \mathcal{M}_I relie les champs entre eux aux deux limites adjacentes. Il s'ensuit donc, que s'il y a deux couches minces sur le substrat, il y aura trois limites ou interfaces, et alors

$$\begin{bmatrix} E_{II} \\ H_{II} \end{bmatrix} = \mathcal{M}_{II} \begin{bmatrix} E_{III} \\ H_{III} \end{bmatrix} \quad (9.93)$$

En multipliant les deux côtés de cette expression par \mathcal{M}_I , on obtient :

$$\begin{bmatrix} E_I \\ H_I \end{bmatrix} = \mathcal{M}_I \mathcal{M}_{II} \begin{bmatrix} E_{III} \\ H_{III} \end{bmatrix} \quad (9.94)$$

En général, si p est le nombre de couches, chacune ayant des valeurs particulières de n et de h qui lui sont propres, alors la première et la dernière limite sont liées par :

$$\begin{bmatrix} E_I \\ H_I \end{bmatrix} = \mathcal{M}_I \mathcal{M}_{II} \cdots \mathcal{M}_p \begin{bmatrix} E_{(p+1)} \\ H_{(p+1)} \end{bmatrix} \quad (9.95)$$

La matrice caractéristique du système entier est le résultat du produit (dans l'ordre qui convient) des matrices 2×2 individuelles, c'est-à-dire,

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_I \mathcal{M}_{II} \cdots \mathcal{M}_p = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (9.96)$$

Pour voir comment tout cela fonctionne, nous allons exprimer les facteurs de réflexion et de transmission en amplitude en utilisant la procédure ci-dessus. En reformulant l'équation (9.92) en termes de conditions aux limites [(9.81), (9.82) et (9.84)] et en posant :

$$Y_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_0 \cos \theta_{iI}$$

et

$$Y_s = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_s \cos \theta_{iII}$$

on obtient :

$$\begin{bmatrix} (E_{iI} + E_{rI}) \\ (E_{iI} - E_{rI})Y_0 \end{bmatrix} = \mathcal{M}_1 \begin{bmatrix} E_{iII} \\ E_{iII}Y_s \end{bmatrix}$$

Après le développement des matrices, la dernière relation devient :

$$1 + r = m_{11}t + m_{12}Y_s t$$

et

$$(1 - r)Y_0 = m_{21}t + m_{22}Y_s t$$

Vu que :

$$r = E_{rI}/E_{iI} \quad \text{et} \quad t = E_{iII}/E_{iI}$$

en conséquence,

$$r = \frac{Y_0 m_{11} + Y_0 Y_s m_{12} - m_{21} - Y_s m_{22}}{Y_0 m_{11} + Y_0 Y_s m_{12} + m_{21} + Y_s m_{22}} \quad (9.97)$$

et

$$t = \frac{2Y_0}{Y_0 m_{11} + Y_0 Y_s m_{12} + m_{21} + Y_s m_{22}} \quad (9.98)$$

Pour trouver r ou t de n'importe quelle configuration de couches, il suffit de calculer la matrice caractéristique de chacune, de multiplier ces matrices et de substituer les éléments de la matrice résultante dans les équations ci-dessus.

9.7.2 Couches antireflets

Considérons à présent le cas très important de l'incidence normale, c'est-à-dire,

$$\theta_{iI} = \theta_{iII} = \theta_{iIII} = 0$$

qui est non seulement le plus simple, mais celui qui rapproche fréquemment de situations pratiques. Si l'on applique un indice à r pour indiquer le nombre de couches présentes, le

facteur de réflexion en amplitude pour une couche unique devient :

$$r_1 = \frac{n_1(n_0 - n_s) \cos k_0 h + i(n_0 n_s - n_1^2) \sin k_0 h}{n_1(n_0 + n_s) \cos k_0 h + i(n_0 n_s + n_1^2) \sin k_0 h} \quad (9.99)$$

En multipliant r_1 par son complexe conjugué on obtient le facteur de réflexion en flux :

$$R_1 = \frac{n_1^2(n_0 - n_s)^2 \cos^2 k_0 h + (n_0 n_s - n_1^2)^2 \sin^2 k_0 h}{n_1^2(n_0 + n_s)^2 \cos^2 k_0 h + (n_0 n_s + n_1^2)^2 \sin^2 k_0 h} \quad (9.100)$$

Cette formule devient particulièrement simple quand $k_0 h = \frac{1}{2}\pi$, ce qui équivaut à dire que l'épaisseur optique h du film est un multiple impair de $\frac{1}{4}\lambda_0$. Dans ce cas, $d = \frac{1}{4}\lambda_f$ et :

$$R_1 = \frac{(n_0 n_s - n_1^2)^2}{(n_0 n_s + n_1^2)^2} \quad (9.101)$$

qui, de manière assez remarquable, sera égal à zéro lorsque :

$$n_1^2 = n_0 n_s \quad (9.102)$$

En général, on choisit d de telle sorte que h soit égal à $\frac{1}{4}\lambda_0$ dans la partie jaune-vert du visible, là où l'œil est le plus sensible. La cryolite ($n = 1,35$), un composé de fluorure d'aluminium et de sodium, et le fluorure de magnésium ($n = 1,38$) sont des couches à indice faible très courant. Parce que MgF_2 est de loin le plus résistant, il est beaucoup plus utilisé. Sur un substrat de verre, chacune de ces couches a un indice trop important pour satisfaire à l'équation (9.102). Pourtant, une simple couche de MgF_2 d'épaisseur $\frac{1}{4}\lambda_0$ va réduire le facteur de réflexion du verre d'environ 4 % à un peu plus de 1 % sur le visible. Le fait d'appliquer des couches antireflets sur les composants optiques est maintenant une pratique usuelle. Sur les lentilles des appareils photographiques, de tels revêtements diminuent le voile causé par la lumière parasite diffusée à l'intérieur, et augmentent nettement la luminosité de l'image. Aux longueurs d'onde situées de part et d'autre du jaune-vert, R augmente et la surface de la lentille apparaît bleu-rouge en réflexion. Pour un revêtement antireflet à double couche, quart d'onde,

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_I \mathcal{M}_{II}$$

ou plus spécifiquement :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & i/Y_1 \\ iY_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & i/Y_2 \\ iY_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.103)$$

Sous incidence normale cela devient :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} -n_2/n_1 & 0 \\ 0 & -n_1/n_2 \end{bmatrix} \quad (9.104)$$

En substituant les éléments appropriés de la matrice dans l'équation (9.97), on obtient r_2 qui, une fois élevé au carré, donne le facteur de réflexion :

$$R_2 = \left[\frac{n_2^2 n_0 - n_s n_1^2}{n_2^2 n_0 + n_s n_1^2} \right]^2 \quad (9.105)$$

Pour que R_2 soit nul à une longueur d'onde donnée, on doit avoir :

$$\left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 = \frac{n_s}{n_0} \quad (9.106)$$

Ce type de dépôt est une *double-quart d'onde à minimum unique*. Lorsque n_1 et n_2 sont aussi petits que possible, le facteur de réflexion aura son minimum nul le plus large à la fréquence choisie. Il devrait être clair, d'après l'équation (9.106), que $n_2 > n_1$, on désignera un système (verre)-(haut indice)-(bas indice)-(air) par la symbologie *gHLa*. On utilise souvent le dioxyde de zirconium ($n = 2,1$), le dioxyde de titane ($n = 2,40$) et le sulfate de zinc ($n = 2,32$) pour des couches *H*, alors que le fluorure de magnésium ($n = 1,38$) et le fluorure de cérium ($n = 1,63$) servent souvent de couches *L*.

On peut définir d'autres combinaisons à double ou triple couche pour satisfaire des besoins spécifiques en matière de réponse spectrale, d'angle d'incidence, de coût, et autres contraintes. La photo ci-contre est une scène photographiée à travers un zoom à 15 éléments, avec une lampe de 150 W pointée directement vers l'appareil. Les éléments du zoom ont été traités avec une seule couche de MgF_2 . Lorsqu'un revêtement antireflet triple couche est utilisé (voir la photo), l'amélioration du contraste et la réduction de l'éblouissement sont évidentes.



Objectif traité avec une seule couche de MgF_2 . (Photo Optical Coating Laboratory, Inc. Santa Rosa, CA.)



Objectif traité avec une structure multicouche. (Photo Optical Coating Laboratory, Inc., Santa Rosa, CA.)

9.7.3 Systèmes périodiques multicouches

Le modèle le plus simple de système périodique est l'*empilement quart d'onde*, qui est constitué d'un grand nombre de couches quart d'onde. La structure périodique de matériaux d'indices alternativement haut et bas, illustrée en figure 9.50 est désignée par :

$$g(HL)^3a$$

La figure 9.51 illustre la forme générale d'une portion de la courbe du facteur de réflexion spectral pour quelques filtres

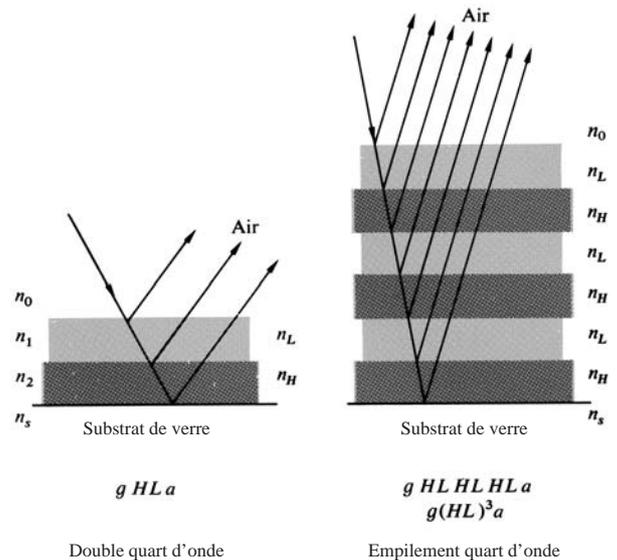


Figure 9.50 Structure périodique. La réfraction a été omise pour des raisons de simplicité.

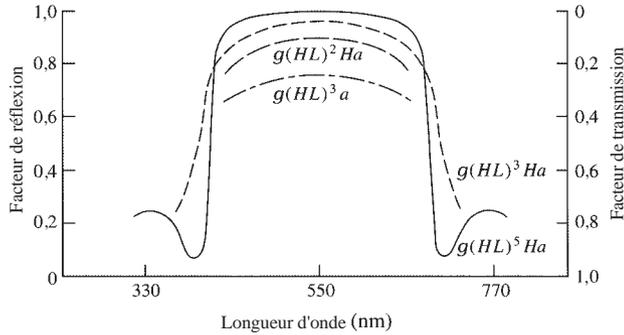


Figure 9.51 Facteurs de réflexion et de transmission spectrale pour plusieurs structures périodiques.

multicouches. La largeur de la zone centrale à haute réflectivité est une fonction croissante du rapport d'indices n_H/n_L , et sa hauteur augmente avec le nombre de couches. Notons qu'on peut encore augmenter le facteur de réflexion maximal d'une structure périodique telle que $g(HL)^m a$ en ajoutant une autre couche H , afin qu'elle soit de la forme $g(HL)^m Ha$. Des surfaces de miroirs à haute réflectance peuvent être produites en utilisant cette configuration. On peut réduire le petit pic sur le côté de la zone centrale aux basses longueurs d'onde, par l'ajout d'un film huitième d'onde de faible indice à chaque extrémité de l'empilement, auquel cas le dispositif complet sera désigné par :

$$g(0,5L)(HL)^m H(0,5L)a$$

Cela aura pour effet d'augmenter le facteur de transmission à haute fréquence et basse longueur d'onde et d'obtenir un *filtre passe-haut*. De même, la structure :

$$g(0,5H)L(HL)^m(0,5H)a$$

correspond en grande partie au cas où les couches H des extrémités ont une épaisseur de $\lambda_0/8$. Elle a un facteur de transmission plus important pour les longueurs d'onde élevées, donc basses fréquences et sert de *filtre passe-bas*.

Lorsque l'incidence n'est plus normale, jusqu'à environ 30° , il peut fréquemment y avoir une légère dégradation dans la réponse des revêtements à couches minces. En général, le fait d'augmenter l'angle d'incidence décale toute la courbe du facteur de réflexion vers des longueurs d'ondes légèrement plus faibles. Ce genre de comportement est mis en évidence par diverses structures périodiques que l'on trouve à l'état naturel, par exemple les plumes de paon et de colibri, les ailes des papillons et le dos de plusieurs sortes de scarabées.

Le dernier système multicouche qui reste à étudier est *le filtre interférentiel* ou, plus précisément, *le filtre Fabry-Pérot*. Si la séparation entre les lames d'un étalon est de l'ordre de λ , les pics de transmission seront très éloignés en longueur d'onde. Il sera alors possible de bloquer tous les pics sauf un en utilisant des filtres absorbants en verre coloré ou en gélatine. La lumière transmise correspond à un seul pic pointu, et l'étalon sert de filtre passe-bande étroit. De tels dispositifs peuvent être fabriqués en déposant un film de métal semi-transparent sur un support en verre, suivi d'une cale en MgF_2 , et un d'un autre revêtement métallique.

Les filtres Fabry-Pérot, tous diélectriques, et non absorbants pour la plupart, ont une structure analogue, et en voici deux exemples possibles :

$$g HLH LL HLH a$$

et

$$g HLHL HH LHLH a$$

La matrice caractéristique pour le premier des deux est :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_H \mathcal{M}_L \mathcal{M}_H \mathcal{M}_L \mathcal{M}_L \mathcal{M}_H \mathcal{M}_L \mathcal{M}_H$$

mais, d'après l'équation (9.104) :

$$\mathcal{M}_L \mathcal{M}_L = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathcal{M}_L \mathcal{M}_L = -\mathcal{I}$$

où \mathcal{I} est la matrice unité ou identité. La double couche centrale, correspondant à la cavité Fabry-Pérot, a une épaisseur égale à une demi-longueur d'onde ($d = \frac{1}{2}\lambda_f$). Elle n'a donc pas d'effet sur la réflectance à la longueur d'onde particulière étudiée. Ainsi, on dit qu'il s'agit d'une couche absente, et, par conséquent,

$$\mathcal{M} = -\mathcal{M}_H \mathcal{M}_L \mathcal{M}_H \mathcal{M}_H \mathcal{M}_L \mathcal{M}_H$$

Les mêmes conditions prévalent encore et toujours au centre et il en résulte finalement que :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

À la fréquence pour laquelle le filtre a été conçu, r à incidence normale, selon l'équation (9.97), se réduit à :

$$r = \frac{n_0 - n_s}{n_0 + n_s}$$



À la figure 9.16, la différence de chemin optique dépend de λ (i.e., la couleur de la lumière) et de l'angle d'observation. De manière similaire, l'encre utilisée pour imprimer les caractères des billets de banque américains contient dorénavant des particules structurées qui produisent des interférences colorées. L'encre est infusée avec de petites paillettes orientées dans la même direction. Chaque paillette est un filtre interférentiel multicouche. Ici, le chiffre 20 passe du noir au vert suivant l'angle d'observation.

qui est la valeur pour le substrat sans revêtement. En particulier, pour le verre ($n_s = 1,5$), dans l'air ($n_0 = 1$) le pic de transmission théorique est de 96 % (en négligeant les réflexions de la surface arrière du substrat, ainsi que les pertes dans le filtre bloquant et les films eux-mêmes).

9.8 Applications de l'interférométrie

L'interféromètre a eu beaucoup d'applications, dont, certaines n'ont eu qu'un intérêt historique ou pédagogique, alors que d'autres sont utilisées de manière intensive. L'avènement du laser et la disponibilité de sources quasi monochromatiques hautement cohérentes ont facilité la conception de nouvelles configurations d'interféromètres.

9.8.1 Interférence en lumière diffuse

La première étude connue des franges d'interférence en lumière diffuse se trouve sans doute dans *Optiks* de Sir Isaac Newton (1704, livre 2, partie IV). Ici, ce phénomène nous intéresse doublement. Premièrement, il permet de voir très facilement de belles franges d'interférence colorées. Deuxièmement il est à la base d'un interféromètre remarquablement simple et très utile.

Pour voir les franges, saupoudrons du talc ordinaire à la surface de n'importe quel miroir argenté sur la face arrière (de la rosée fera l'affaire), sans trop se soucier de l'épaisseur ni de l'uniformité du dépôt. L'utilisation d'une ponctuelle source brillante est au contraire cruciale ; on peut fabriquer une source satisfaisante en collant un morceau de carton lourd avec un trou d'environ 5 mm de diamètre sur une bonne lampe de poche. Au départ, on se tiendra à un mètre du miroir ; les franges seront

trop serrées et trop proches pour être visibles si l'on est plus près. Il faut tenir la lampe de poche contre la joue et éclairer le miroir afin d'y voir la réflexion la plus brillante de l'ampoule. Les franges seront alors clairement visibles sous la forme d'un grand nombre de bandes alternativement brillantes et sombres.

Sur la figure 9.52 deux rayons cohérents quittant la source ponctuelle arrivent au point P après avoir emprunté des routes

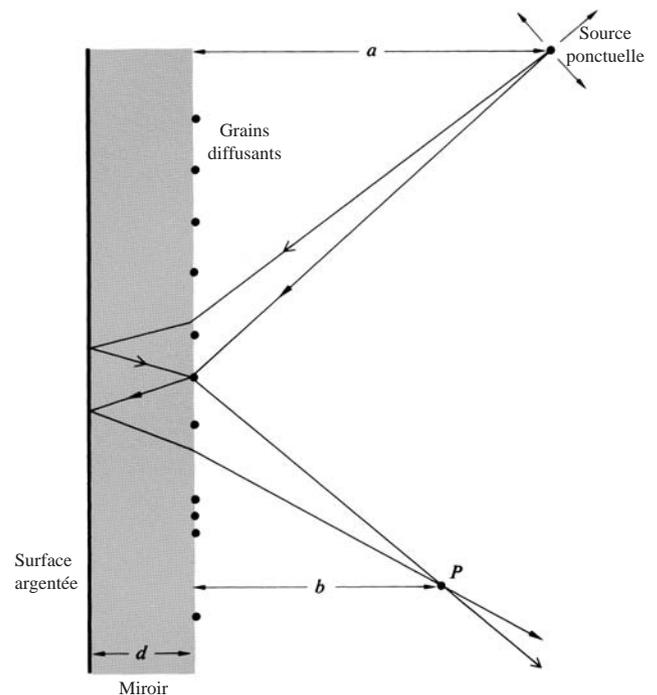


Figure 9.52 Interférence de la lumière diffusée.

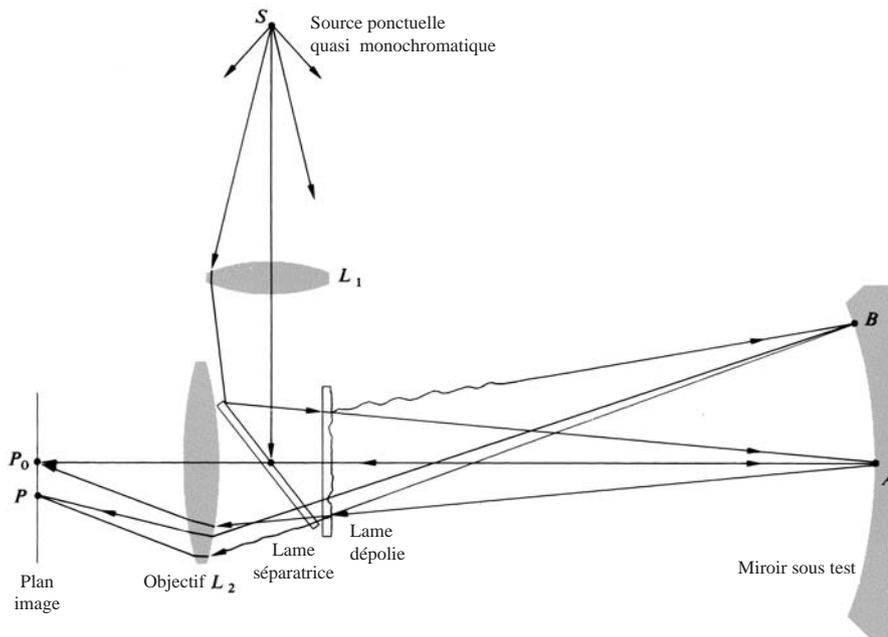


Figure 9.53 Montage avec lame dépolie. Adapté de R. M. Scott, *Appl. Opt.* **8**, 531 (1969).

différentes. Un des rayons est réfléchi sur le miroir et diffusé par un grain de talc transparent vers le point P . Le second rayon est, d'abord, diffusé vers le bas par le grain, après quoi il traverse le miroir et est réfléchi vers P . La différence de chemin optique résultante détermine l'état d'interférence en P . En incidence normale, le motif est une série d'anneaux concentriques de rayon* :

$$\rho \approx \left[\frac{nm\lambda a^2 b^2}{d(a^2 - b^2)} \right]^{1/2}$$

À présent, considérons un dispositif apparenté, très utile pour tester les systèmes optiques. C'est une **lame dépolie**, assez rugueuse en surface. Dans un montage tel que celui de la figure 9.53, elle sert de lame séparatrice. Dans cette application, il doit y avoir un centre de symétrie, c'est-à-dire que chaque point de diffusion doit avoir un double, placé symétriquement par rapport à un point central.

Dans le système que nous étudions, une source ponctuelle quasi monochromatique S est projetée par la lentille L_1 sur la surface, au point A du miroir testé. Une partie de la lumière qui vient

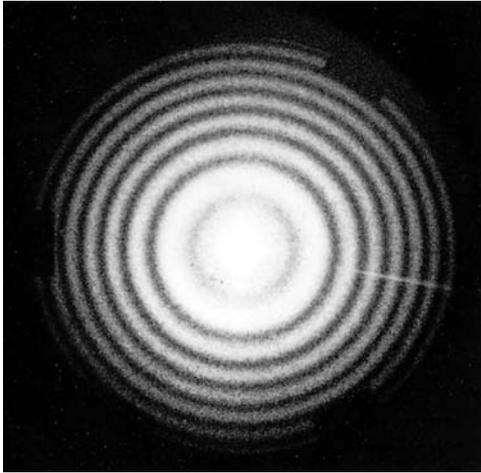
de la source est diffusée par le dépoli et éclaire donc la totalité de la surface du miroir. Le miroir réfléchit en retour la lumière sur le dépoli. Cette onde, ainsi que la lumière formant l'image de la source ponctuelle au point A , traverse à nouveau le dépoli et atteint finalement le plan image (sur un écran ou sur un appareil photo), sur lesquels se forment des franges. La formation de ces franges traduit un processus d'interférence, qui se produit car chaque point dans le plan image final est éclairé par de la lumière ayant suivi deux chemins différents, l'un prenant son origine en A et l'autre en un point B , qui réfléchit la lumière diffusée. Ainsi, aussi étranges qu'elles puissent paraître au premier coup d'œil, des franges bien définies apparaissent (voir photo).

En examinant de manière un peu plus détaillée le passage de la lumière dans ce système, considérons la lumière incidente sur le dépoli et supposons que l'onde soit plane, comme dans la figure 9.54. Après être passée par le dépoli, le front d'onde plan incident \vec{E}_i se transforme en un front d'onde transmis \vec{E}_T . Nous examinons cette onde, divisée à son tour en une série de composantes de Fourier qui sont des ondes planes, c'est-à-dire,

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \quad (9.107)$$

Deux de ces composantes apparaissent sur la figure 9.54a. À présent supposons que nous attachions une signification

*Pour plus de détails, voir A. J. deWitte, « Interference in Scattered Light », *Am. J. Phys.* **35**, 301 (1967).



Fringes en lumière diffuse.

particulière à ces composantes ; on choisira \vec{E}_1 pour représenter la lumière se déplaçant jusqu'au point A sur la figure 9.53, et \vec{E}_2 pour celle qui se déplace vers B . L'analyse des étapes suivantes pourrait continuer de la même manière. Soit la portion du front d'onde revenant de A représentée par le front d'onde \vec{E}_A en figure 9.54b. Le dépoli va le transformer en une onde transmise irrégulière, notée \vec{E}_{AT} sur la même figure. Cela correspond à nouveau à une configuration compliquée, mais on peut la diviser en composantes de Fourier qui sont des ondes planes, comme dans le cas ci-dessus. Dans la figure 9.54b, on représente deux de ces fronts d'onde, l'un se déplaçant vers la gauche et l'autre incliné d'un angle θ . Ce dernier,

noté $\vec{E}_{A\theta}$, est focalisé par la lentille L_2 au point P sur l'écran (figure 9.53).

Le front d'onde qui revient de B vers le dépoli est noté \vec{E}_B sur la figure 9.54c. En traversant la lame dispersive, il se transforme en l'onde \vec{E}_{BT} . L'une des composantes de Fourier de ce front d'onde, notée $\vec{E}_{B\theta}$, est inclinée d'un angle θ et sera donc focalisée au même point P sur l'écran.

Dans la mesure où il se produit des franges, cela veut dire que certaines des ondes arrivant en P sont cohérentes. Pour obtenir l'éclairement résultant I_P , il faut d'abord additionner les amplitudes de toutes les ondes arrivant en P , c'est-à-dire \vec{E}_P , puis élever au carré \vec{E}_P et effectuer sa moyenne temporelle.

Dans l'étude ci-dessus, on n'a considéré que deux points source sur le miroir étaient pris en compte. En fait, bien sûr, la totalité de la surface du miroir est illuminée par la lumière continue, et chacun des points va servir de source secondaire pour les ondes qui reviennent. Toutes les ondes vont être déformées par le dépoli et peuvent à leur tour être décomposées en ondes planes. Dans chaque famille d'ondes planes, il s'en trouvera une inclinée d'un angle θ , et toutes se focaliseront au même point P sur l'écran. L'amplitude résultante aura alors la forme :

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{A\theta} + \vec{E}_{B\theta} + \dots$$

On peut considérer que la lumière qui arrive sur le plan image est constituée de deux champs optiques d'intérêt particulier. L'un des deux résulte de la lumière qui n'a été diffusée qu'à l'aller lors de son passage à travers la lame vers le miroir, et l'autre, de la lumière qui n'a été diffusée que lors du retour vers le plan image. Le premier éclaire largement le

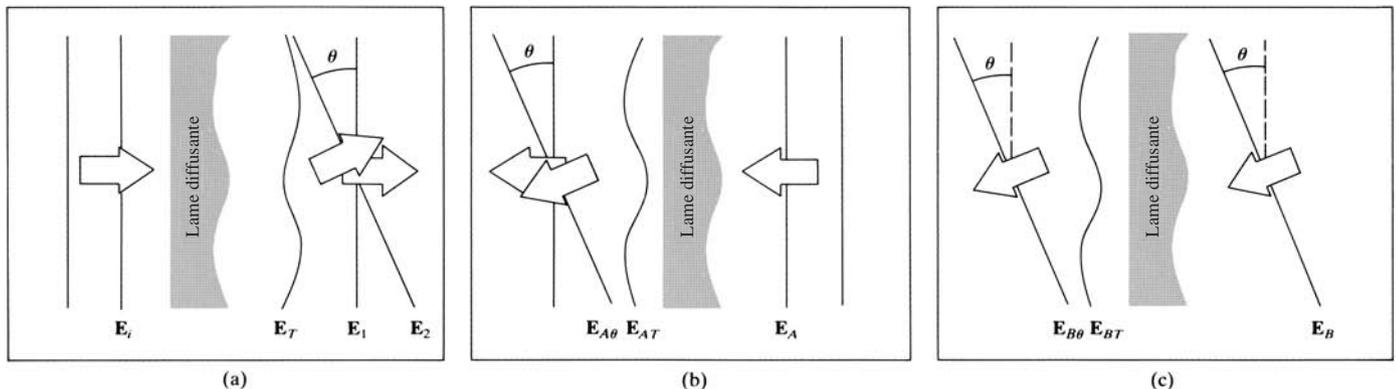


Figure 9.54 Fronts d'onde traversant une lame diffusante (dépolie).

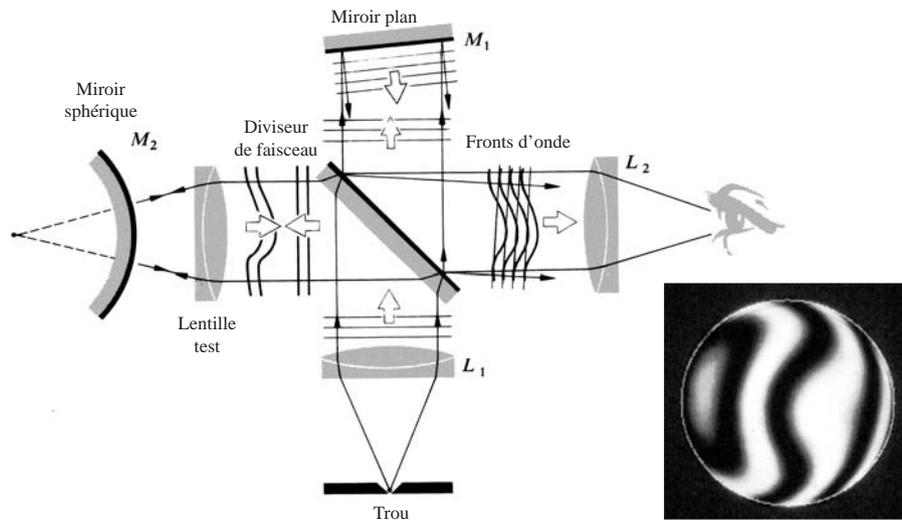


Figure 9.55 Interféromètre de Twyman-Green. (Photo E. H.)

miroir test et produit finalement une image de ce dernier sur l'écran. Le second, qui était initialement focalisé dans la région de A , diffuse une grosse tache à travers l'écran. On choisit le point A afin que la petite zone qui l'entoure soit dépourvue d'aberrations. Dans ce cas, l'onde réfléchie en A sert de référence au front d'onde correspondant à la surface totale du miroir. La figure d'interférence montrera, sous la forme de franges de contour, toutes les imperfections de la surface du miroir.*

9.8.2 L'interféromètre Twyman-Green

L'interféromètre Twyman-Green est essentiellement une variation de celui de Michelson. C'est un instrument de grande importance dans le domaine du contrôle en optique moderne. Il comprend (figure 9.55) une source ponctuelle quasi monochromatique et une lentille L_1 , lesquelles fournissent des *ondes planes* entrantes, et une lentille L_2 , focalisée dans l'œil afin que la totalité du champ, (c'est-à-dire

n'importe quelle portion de M_1 et M_2) soit visible. Un laser continu constitue une source supérieure privilégiée, car il permet de grandes différences de chemin optique des temps d'exposition photographique courts, ce qui minimise les effets vibrations. Les versions laser du Twyman-Green sont parmi les outils de test les plus efficaces en optique. Le dispositif présenté sur la figure 9.55, est destiné au contrôle d'une lentille. Le centre de courbure du miroir sphérique M_2 coïncide avec le foyer de la lentille. Si la lentille étudiée n'a pas d'aberration, la surface d'onde réfléchie revenant vers la lame séparatrice sera plane. S'il y a de l'astigmatisme, de la coma, ou de l'aberration sphérique le front d'onde sera déformé et l'on observera ou on prendra une photographie de motif de franges caractéristique de ces distorsions. En remplaçant M_2 par un miroir plan, on peut également tester d'autres éléments (prismes, lames optiques, etc.). L'opticien, après interprétation des franges, fait des repères sur la surface pour repolir la surface afin d'en corriger les imperfections. Dans le cas des systèmes optiques tels que les télescopes, caméras de reconnaissance aérienne ou autres systèmes de qualité, les interférogrammes sont analysés par ordinateur pour produire automatiquement des lignes de contour ou des vues en perspective tridimensionnelle du front d'onde issu de l'élément testé. On peut utiliser ces procédures tout au long du processus de fabrication pour assurer la plus haute qualité optique. Cette technique permet de contrôler des systèmes optiques complexes avec des aberrations d'une fraction de longueur d'onde.

*Pour plus de détails sur le dépoli, on peut consulter les articles assez succints de J. M. Burch, *Nature* **171**, 889 (1953), et *J. Opt. Soc. Am.* **52**, 600 (1962). D'autres références figurent aussi dans J. Strong, *Concepts of Classical Optics*, p. 383. Voir également R. M. Scott, « Scatter Plate Interferometry », *Appl. Opt.* **8**, 531 (1969), et J. B. Houston, Jr., « How to Make and Use a Scatterplate Interferometer », *Optical Spectra* (Juin 1970), p. 32.

9.8.3 L'interféromètre en anneau de Sagnac

L'interféromètre de Sagnac est largement utilisé pour mesurer des vitesses de rotation. En tout cas le *laser en anneau laser*, qui est pour l'essentiel un interféromètre de Sagnac avec un laser dans un ou plusieurs de ses bras, a spécialement été conçu dans ce but. Le premier gyroscope laser en anneau est né en 1963, et le travail continue sur plusieurs dispositifs similaire (voir photo). Les premières expériences qui donnèrent l'impulsion à ces efforts furent celles de Sagnac qui, en 1911, faisait tourner tout l'interféromètre, les miroirs, la source, le détecteur, autour d'un axe perpendiculaire passant en son centre (figure 9.56). On rappelle, d'après le paragraphe 9.4.2, que deux faisceaux superposés traversent l'interféromètre, l'un dans le sens des aiguilles d'une montre et l'autre en sens inverse. La rotation réduit effectivement le chemin suivi par un faisceau par rapport à celui qui est comparé au chemin suivi par l'autre. Dans l'interféromètre, il en résulte un décalage des franges proportionnel à la vitesse angulaire de rotation ω . Dans un laser en anneau, c'est une différence de fréquence entre les deux faisceaux qui est proportionnelle à ω .

Considérons le dispositif qui est dépeint sur la figure 9.56. Le sommet A (et tous les autres) se déplace à une vitesse linéaire $v = R\omega$, où R est la moitié de la diagonale du carré. En utilisant un raisonnement classique, on trouve que le temps de parcours de la lumière le long de AB est de :

$$t_{AB} = \frac{R\sqrt{2}}{c - v/\sqrt{2}}$$



Un des premiers gyrolaser en anneau. (Photo Autonetics, filiale de Boeing North America, Inc.)

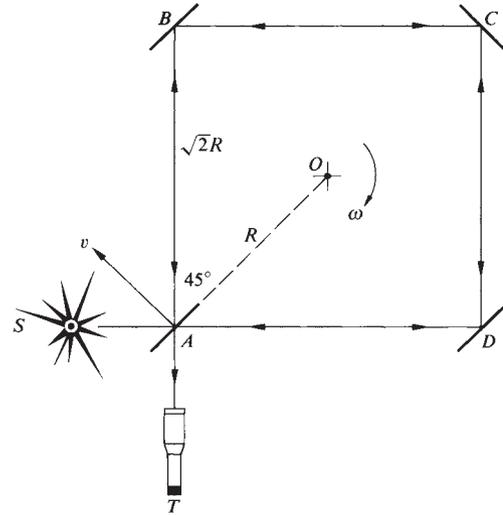


Figure 9.56 Interféromètre de Sagnac pour la gyrométrie. À l'origine, il était de $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ avec $\omega = 120$ tours/min.

ou
$$t_{AB} = \frac{2R}{\sqrt{2}c - \omega R}$$

Les durées des trajets mis par la lumière de A jusqu'à D est :

$$t_{AD} = \frac{2R}{\sqrt{2}c + \omega R}$$

Le temps total pour le trajet dans le sens des aiguilles d'une montre et dans le sens inverse est donné respectivement par :

$$t_{\odot} = \frac{8R}{\sqrt{2}c + \omega R}$$

et
$$t_{\ominus} = \frac{8R}{\sqrt{2}c - \omega R}$$

Pour $\omega R \ll c$ la différence entre les deux est de :

$$\Delta t = t_{\ominus} - t_{\odot}$$

ou en utilisant la série binomiale,

$$\Delta t = \frac{8R^2\omega}{c^2}$$

on peut l'exprimer en termes d'aire $A = 2R^2$ du carré formé par les faisceaux de lumière soit,

$$\Delta t = \frac{4A\omega}{c^2}$$

Si $\tau = \lambda/c$ est la période de la lumière monochromatique utilisée, alors le déplacement fractionnel des franges, donné par $\Delta N = \Delta t/\tau$ est :

$$\Delta N = \frac{4A\omega}{c\lambda}$$

un résultat qui a été vérifié expérimentalement. En particulier, Michelson et Gale* ont utilisé cette méthode pour déterminer la vitesse angulaire de la Terre.

Le traitement classique précédent est manifestement un peu simple, dans la mesure où il envisage des vitesses supérieures à c , une supposition contraire aux règles de la relativité spéciale. De plus, il apparaît que comme le système accélère, la relativité générale prévaut. En fait ces formalismes mènent au même résultat.

9.8.4 Interférométrie radar

En février 2000, la navette spatiale Endeavour acheva sa mission qui était de créer une carte « tridimensionnelle » de la Terre couvrant 119 millions de kilomètres carrés. Cet exploit fut accompli grâce à l'utilisation d'un radar à ouverture unique (SAR). En général, plus la pupille d'un système est grande plus sa résolution est de qualité (p. 487) et la technique SAR utilise le mouvement d'un avion ou d'un vaisseau spatial et un traitement de signal *ad hoc* pour simuler une grande antenne.

En utilisant une antenne à balayage électronique (p. 105), la navette émet un faisceau radar qui oscille perpendiculairement à son vecteur vitesse et couvre une bande de 225 km de large sur la surface de la Terre (figure 9.57). Volant à l'envers, Endeavour laissait tendre vers la terre un mât de 60 m avec deux antennes réceptrices au bout (figure 9.58). Le SAR émettait environ 1700 impulsions par seconde depuis l'aire de chargement où était située son antenne principale, qui était à la fois émettrice et réceptrice. En fait, la mission utilisa deux radars différents : un système en bande C fonctionnant à une longueur d'onde de 5,6 cm qui fournissait la plupart de la couverture, et un système en bande X de 3 cm et de plus haute résolution qui donnait une vue en détail sur une bande de 50 km (figure 9.57). Une image radar comporte un très grand nombre de petits points ou pixels (p. 490). Le pixel est le plus petit élément d'information dans l'image. Pour le système principal à bande C, chaque pixel a un diamètre d'environ 12,5 m, et le plus petit objet qui peut être résolu fait environ 30 m.

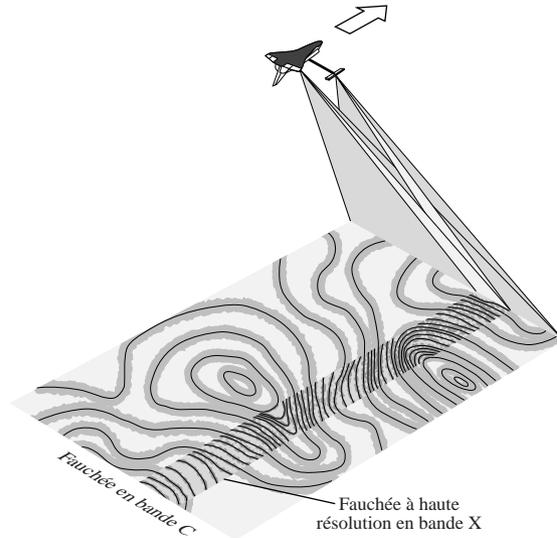


Figure 9.57 Lorsque la navette était en orbite, ses deux systèmes radar balayaient une bande sur la surface de la Terre.

Ordinairement, un système radar envoie une impulsion (de largeur 10-50 μs) et, en collectant l'onde rétro diffusée, il enregistre l'amplitude et le temps mis pour faire un aller-retour. Cela donne une idée de la taille et de l'emplacement de la cible. Toutefois, pour mesurer l'altitude des points à la surface de la Terre la *shuttle radar topography mission* (SRTM) a utilisé l'interférométrie, d'une manière proche des expériences de Young (p. 409) mais menées à l'envers. En tout cas,

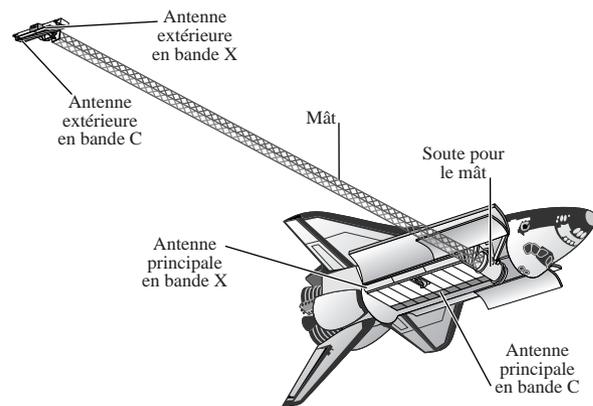


Figure 9.58 La navette Endeavour comportait une antenne principale, émettrice-réceptrice en bande C, dans sa soute et une seconde antenne réceptrice au bout d'un mât de 60 m de long.

*Michelson et Gale, *Astrophys. J.* **61**, 140 (1925).

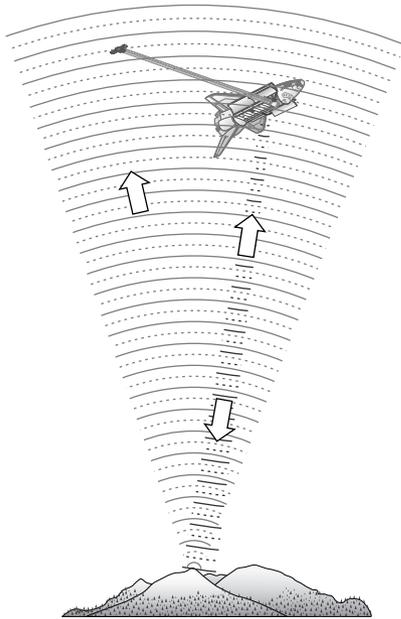


Figure 9.59 Une impulsion radar émise de la navette touche le sol et se réfléchit. L'écho est reçu par les antennes intérieure et extérieure.

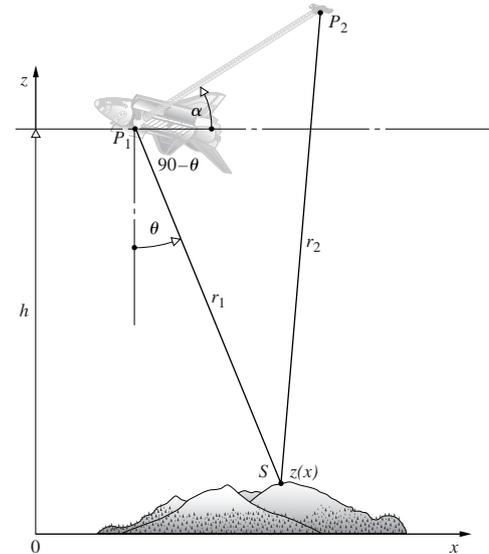
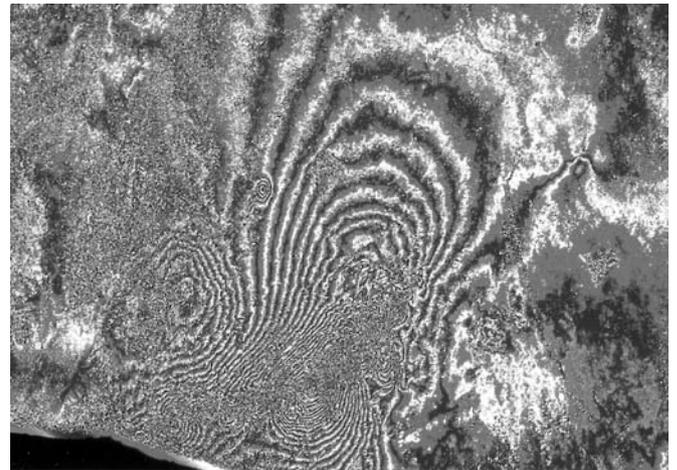


Figure 9.60 Géométrie élémentaire de l'interféromètre à SAR. La source ponctuelle S est un point au sol qui réfléchit l'impulsion radar en direction de la navette. Les points P_1 et P_2 correspondent aux deux récepteurs, l'un sur le mât et l'autre dans la soute de la navette.

des techniques interférométriques similaires sont d'une importance grandissante dans l'astronomie optique et la radio astronomie.

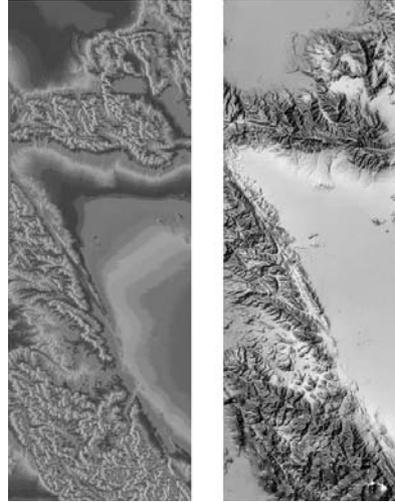
Le SAR est un système d'imagerie cohérente et contient des informations sur l'amplitude et la phase de l'écho radar pendant l'acquisition et le traitement des données. Un signal, émis par la navette (un peu comme le flash d'un appareil photo mais avec un spectre mieux contrôlé) ; frappe le sol (figure 9.59) et retourne vers les deux antennes, l'une dans l'aire de chargement (P_1) l'autre au bout du mât (P_2), à 60 m de distance. Les deux échos radar sont numérisés et enregistrés pour des traitements postérieurs, et affichés sous forme d'image. Il appartient au problème 48 (figure 9.60) de montrer qu'on peut exprimer la topographie, *le relief* $z(x)$ fonction de l'altitude h de la navette, *de l'angle de vue* du radar θ , et la mesure du déphasage, ou *phase interférométrique* ϕ entre les deux signaux ;

$$z(x) = h - \frac{(\lambda\phi/2\pi)^2 - a^2}{2a \sin(\alpha - \theta) - (\lambda\phi/2\pi)} \cos \theta \quad (9.108)$$



Un radar à synthèse d'ouverture a été utilisé pour produire cet interférogramme du tremblement de terre de juin 1992 à Landers, en Californie. Les images prises par le satellite ERS-1 avant et après le phénomène ont été recombinaées pour créer la figure de franges qui révèle la modification du relief. La photo couvre une surface d'environ 125 km sur 175 km. (Photo Didier Massonnet, Centre national d'études spatiales, France.)

Un tel interféromètre mesure ϕ , la différence de phase entre les signaux détectés aux extrémités de sa base, en faisant interférer analytiquement ces signaux grâce à un procédé appelé *corrélation* (p. 563). Lorsqu'on recombine, au sol, les deux ensembles indépendants de données, chacun provenant d'une antenne, le résultat brut est un interférogramme ou carte de franges (voir photo) qui encode la topographie. L'interférogramme correspond à une collection de « franges d'égale altitude » ou si l'on préfère, de contours d'égale altitude. Mais il faut affiner ces informations, car les élévations absolues des contours sont inconnues. On détermine la hauteur de chaque contour, $z(x)$, par triangulation, grâce à une connaissance précise de la longueur du pylône et de son orientation. Les données collectées au-dessus des océans permettent de fixer comme référence le niveau de la mer pour toutes les altitudes. Après une quantité considérable de calculs, pixel par pixel, une carte topographique en 3D est finalement élaborée (voir photo).



Images radar de la faille de San Andreas, Californie, prises par la navette spatiale Endeavour en 2000. L'image de gauche (qui est bien meilleure en couleurs) montre un interférogramme du terrain ; l'image de droite est la carte tridimensionnelle correspondante qui résulte de l'analyse de toutes les données.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Les solutions complètes des exercices (excepté ceux ayant un astérisque) figurent à la fin de l'ouvrage.

9.1 Revenons au paragraphe 9.1, soit :

$$\tilde{\mathbf{E}}_1(\vec{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_1(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

et

$$\tilde{\mathbf{E}}_2(\vec{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_2(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

où les formes des surfaces d'ondes ne sont pas explicitement spécifiées, et où $\tilde{\mathbf{E}}_1$ et $\tilde{\mathbf{E}}_2$ sont des vecteurs complexes dépendant de la position dans l'espace et de l'angle de phase initial. Montrer que le terme d'interférence est alors donné par :

$$I_{12} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{E}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2^* + \tilde{\mathbf{E}}_1^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2) \quad (9.109)$$

Il faudra évaluer les termes de la forme :

$$\langle \tilde{\mathbf{E}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2 e^{-2i\omega t} \rangle_T = (\tilde{\mathbf{E}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2 / T) \int_t^{t+T} e^{-2i\omega t'} dt'$$

pour $T \gg \tau$ (voir à nouveau le problème 3.10). Montrer que l'équation (9.109) mène à l'équation (9.11) pour des ondes planes.

9.2 Au paragraphe 9.1, on a étudié la distribution spatiale de l'énergie pour deux sources ponctuelles. On a mentionné que, dans le cas où la séparation $a \gg \lambda$, la moyenne de I_{12} dans l'espace est nulle. Pourquoi cela est-il vrai ? Qu'arrive-t-il lorsque a est très inférieur à λ ?

9.3* Considérer la figure 2.22 et démontrer que si deux ondes planes électromagnétiques formant un angle θ ont la même amplitude, E_0 , la figure d'interférence qui en résulte dans le plan xy est une distribution d'éclairement en cosinus carré donnée par :

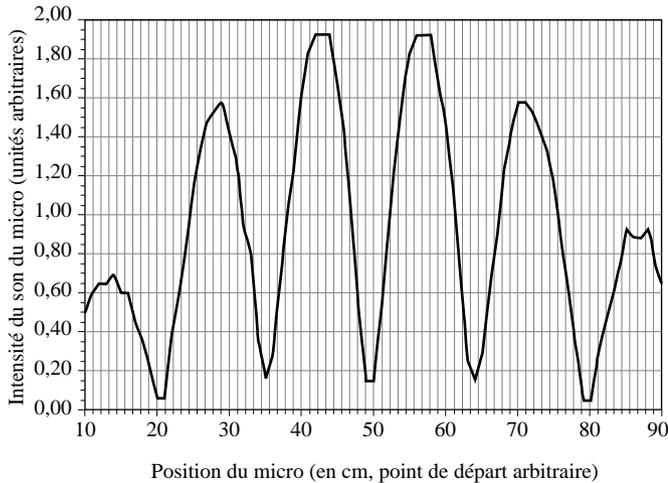
$$I(y) = 4E_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} y \sin \theta\right)$$

Localiser les zéros de l'éclairement. Quelle est la valeur de l'interfrange ? Qu'arrive-t-il à l'interfrange lorsque θ augmente ? Comparer cette analyse avec celle menant à l'équation (9.17). [Astuce : commencer avec les expressions des ondes du paragraphe 2.7, avec des phases appropriées, et les écrire sous forme d'exponentielles.]

9.4 Peut-on obtenir une figure d'interférence avec l'expérience de Young (figure 9.8) si l'on remplace la fente source S par un seul long filament d'ampoule ? Que se passe-t-il si l'on remplace les fentes S_1 et S_2 par ces mêmes ampoules ?

9.5* La figure P.9.5 montre le graphe du signal en sortie d'un petit microphone lorsque deux enceintes séparées de 15 cm l'une de l'autre sont pointées vers lui, à une distance de 1,5 m. Sachant que la vitesse du son à 20 °C est de 343 m/s, déterminer la fréquence approximative à laquelle les enceintes fonctionnent. Étudier la nature de la figure et expliquer pourquoi elle possède un minimum central.

Figure P.9.5 (CENCO.)



9.6* Deux antennes radios émettant en phase à 1,0 MHz sont séparées de 600 m le long d'une ligne nord-sud. Un récepteur radio, placé à 2 km vers l'est, est équidistant des deux antennes émettrices et reçoit un signal assez fort. À quelle distance vers le nord faudrait-il déplacer ce récepteur pour détecter un signal presque aussi fort ?

9.7 Un faisceau laser He-Ne ($\lambda_0 = 632,8$ nm) est incident sur un écran contenant deux fentes horizontales très étroites séparées de 0,200 mm. Une figure d'interférence apparaît sur un écran blanc à 1,00 m de distance.

- À quelle distance (en radians et en millimètres) au-dessus et au-dessous de l'axe central sont situés les premiers zéros de l'éclairement ?
- À quelle distance (en mm) de l'axe se trouve la cinquième frange brillante ?
- Comparer ces deux résultats.

9.8* Des ondes planes émises dans le rouge par un laser à rubis ($\lambda_0 = 694,3$ nm) dans l'air arrivent sur deux fentes parallèles pratiquées dans un écran opaque. Une figure d'interférence se forme sur un mur à grande distance, et l'on voit la quatrième frange brillante à $1,0^\circ$ au-dessus de l'axe central. Calculer la distance de séparation entre les deux fentes.

9.9* Un bristol percé de deux trous d'aiguille de 0,08 nm de diamètre et dont les centres sont séparés de 0,10 mm, est éclairé dans le bleu par un laser ionique à argon ($\lambda_0 = 487,99$ nm). Si l'on veut que les franges soient séparées de 10 mm sur l'écran d'observation, à quelle distance doit-on placer celui-ci ?

9.10* Un faisceau de lumière blanche est incident sur deux longues fentes étroites et l'on observe le résultat sur un écran éloigné. Si la

frange rouge du premier ordre ($\lambda_0 = 780$ nm) recouvre la frange violette du second ordre, quelle est la longueur d'onde de cette dernière ?

9.11* En considérant l'expérience de la double fente, donner l'expression de la distance $y_{m'}$ entre l'axe central et le m' ^{ième} minimum de l'éclairement, si les premières franges sombres situées de chaque côté du maximum central correspondent à $m' = \pm 1$. Identifier et justifier toutes les approximations faites.

9.12* À partir de l'expérience de Young, déterminer de combien se déplace, en vertical, le m ^{ième} maximum si l'on interpose une fine lame de verre parallèle, d'indice n et d'épaisseur d , juste derrière l'une des fentes. Identifier les suppositions faites.

9.13* Des ondes monochromatiques arrivent avec un angle d'incidence θ , sur un écran contenant deux fentes étroites séparées par une distance a . Déterminer l'angle qui localise le m ^{ième} maximum à partir de l'axe central.

9.14* De la lumière solaire, incidente sur un écran contenant deux longues fentes étroites éloignées de 0,20 mm, projette une figure sur une feuille de papier blanc 2 m plus loin. Quelle est la distance qui sépare la frange violette ($\lambda_0 = 400$ nm) dans le premier ordre de la frange rouge ($\lambda_0 = 600$ nm) dans le second ordre ?

9.15 Afin d'examiner les conditions dans lesquelles les approximations de l'équation (9.23) sont valables :

- appliquer la loi des cosinus au triangle S_1S_2P de la figure 9.8c pour obtenir :

$$\frac{r_2}{r_1} = \left[1 - 2 \left(\frac{a}{r_1} \right) \sin \theta + \left(\frac{a}{r_1} \right)^2 \right]^{1/2}$$

- développer cette expression en série de Maclaurin pour obtenir :

$$r_2 = r_1 - a \sin \theta + \frac{a^2}{2r_1} \cos^2 \theta + \dots$$

- à la lumière de l'équation (9.17), montrer que, pour que $(r_1 - r_2)$ soit égal à $a \sin \theta$, il faut que $r_1 \gg a^2/\lambda$.

9.16 Un faisceau d'électrons, ayant chacun une énergie de 0,5 eV, est incident sur une paire de fentes extrêmement fines séparées de 10^{-2} mm. Quelle est la distance entre minima successifs sur un écran situé à 20 m derrière les fentes ? ($m_e = 9,108 \times 10^{-31}$ kg, $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19}$ J.)

9.17* On souhaite produire des franges d'interférences en éclairant un montage quelconque (expérience de Young, couche mince, interféromètre de Michelson, etc.) avec une lumière de longueur d'onde moyenne 500 nm, ayant une largeur de raie de $2,5 \times 10^{-3}$ nm. À quelle différence de chemin optique approximative peut-on s'attendre à ce que les franges disparaissent ? [Astuce : penser à la longueur de cohérence et étudier le problème 7.39.]

9.18* Soit un écran opaque comportant trois fentes horizontales très étroites. Les distances des deuxième et troisième fentes à la première (centre à centre) sont respectivement a et $5a/2$ (a) Écrire une expression exponentielle complète en termes de δ pour l'amplitude du champ électrique en un point P situé sur un écran éloigné dans la direction θ , et où $\delta = ka \sin \theta$. Démontrer que :

$$I(\theta) = \frac{I(0)}{3} + \frac{2I(0)}{9}(\cos \delta + \cos 3\delta/2 + \cos 5\delta/2)$$

Vérifier qu'à $\theta = 0$, $I(\theta) = I(0)$.

9.19* Pour le biprisme de Fresnel de la figure 9.13, montrer que a est donné par $a = 2d(n - 1)\alpha$.

9.20* Dans le cas du double miroir de Fresnel, $s = 2$ m, $\lambda_0 = 589$ nm, et la séparation des franges est de 0,5 mm. Quel est l'angle d'inclinaison des miroirs, si la distance du point source réel à l'intersection des deux miroirs est 1 m ?

9.21* On utilise un biprisme de Fresnel pour obtenir des franges à partir d'une source ponctuelle placée à 2 m de l'écran, le prisme étant à mi-chemin entre la source et l'écran. Considérant que la longueur d'onde de la lumière est $\lambda_0 = 500$ nm et l'indice de réfraction du verre $n = 1,5$, quel est l'angle du prisme, si la séparation entre les franges est de 0,5 mm ?

9.22 Quelle est l'expression générale de l'interfrange pour un biprisme de Fresnel d'indice n immergé dans un milieu d'indice de réfraction n' ?

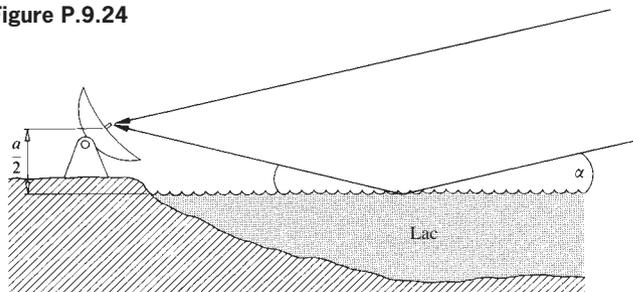
9.23 En utilisant un miroir de Lloyd, on observe des franges en rayons X, dont l'espacement est de 0,002 5 cm. La longueur d'onde utilisée est de 8,33 Å. Si la distance source-écran est de 3 m, à quelle hauteur au-dessus du plan du miroir la source ponctuelle de rayons X est-elle placée ?

9.24 Soit une antenne en bordure d'un lac recevant le signal radio issu d'une étoile (figure P.9.24) qui se lève au-dessus de l'horizon. Écrire les expressions pour δ et pour la position angulaire de l'étoile lorsque l'antenne détecte le premier maximum.

9.25* Si la lame de la figure 9.17 est du verre dans l'air, montrer que les amplitudes de E_{1r} , E_{2r} , et E_{3r} sont respectivement $0,2E_{0i}$, $0,192E_{0i}$, et $0,008E_{0i}$, où E_{0i} est l'amplitude de l'onde incidente. Utiliser les coefficients de Fresnel en incidence normale, en supposant qu'il n'y a pas d'absorption. Répéter les calculs pour un film d'eau dans l'air.

9.26 Une bulle de savon entourée d'air a un indice de réfraction de 1,34. Si une région de la bulle apparaît d'un rouge brillant ($\lambda_0 = 633$ nm) sous incidence normale, quelle est son épaisseur minimale à cet endroit-là ?

Figure P.9.24



9.27* On éclaire en lumière blanche un mince film d'alcool éthylique ($n = 1,36$) étalé sur une lame de verre plane et l'on obtient diverses couleurs en réflexion. Si une région du film ne réfléchit fortement que du vert (500 nm), déterminer son épaisseur.

9.28* Une mince pellicule de savon, d'indice 1,34, a une épaisseur de 550 nm. Déterminer les longueurs d'onde dans le vide des rayonnements visibles qui ne sont pas réfléchis lorsqu'elle est éclairée par dessus en lumière solaire.

9.29 Considérer les franges de Haidinger correspondant à une lame d'épaisseur 2 mm et d'indice de réfraction 1,5. Pour un éclairage monochromatique à $\lambda_0 = 600$ nm, déterminer la valeur de m pour l'anneau central ($\theta_i = 0$). Est-il sombre ou brillant ?

9.30 On éclaire une lame de microscope (ou encore mieux, une lamelle, qui est plus mince). On peut observer facilement des franges colorées avec une lampe fluorescente ordinaire (bien que certaines des versions les plus récentes ne fonctionnent pas bien) en tant que source étendue ou grâce à un réverbère à mercure comme source ponctuelle. Décrire les franges obtenues. On incline ensuite la lame. Le motif change-t-il ? Répéter les conditions des figures 9.18 et 9.19. Essayer à nouveau avec un film de plastique pour aliments tendu sur le haut d'une tasse.

9.31 La figure P.9.31 illustre un dispositif utilisé pour tester les lentilles. Montrer que :

$$d = x^2(R_2 - R_1)/2R_1R_2$$

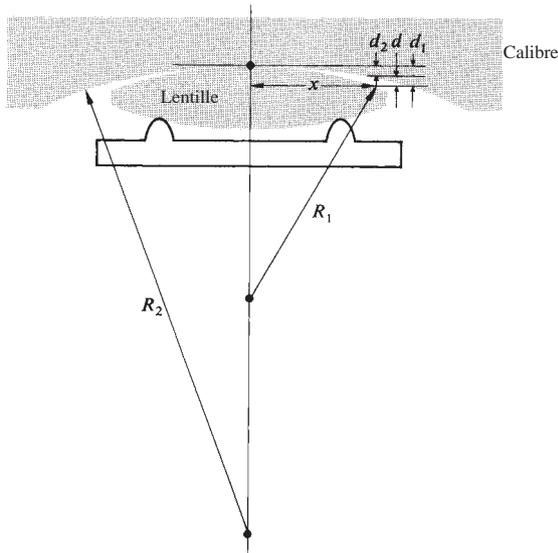
lorsque d_1 et d_2 sont négligeables par rapport à $2R_1$ et $2R_2$, respectivement (se rappeler du théorème de géométrie plane qui établit un rapport entre les produits des segments de cordes). Démontrer que le rayon de la $m^{\text{ième}}$ frange sombre est alors :

$$x_m = [R_1R_2m\lambda_f/(R_2 - R_1)]^{1/2}$$

Comment relier cela à l'équation (9.43) ?

9.32* On observe les anneaux de Newton d'une lentille en lumière quasi monochromatique de 500 nm de longueur d'onde. Si le 20^e anneau brillant a un rayon de 1 cm, quel est le rayon de courbure de la lentille ?

Figure P.9.31



9.33 On éclaire en incidence normale, à $\lambda = 500$ nm, une lame d'indice de réfraction 1,5 et formant un coin. On observe les franges en réflexion. Quel est l'angle du coin, si la séparation des franges est de $\frac{1}{3}$ cm ?

9.34* On forme un coin d'air entre deux lames de verre grâce à un morceau de papier de $7,618 \times 10^{-5}$ m d'épaisseur qui sert de cale à une des extrémités. Si l'on éclaire par dessus à la longueur d'onde de 500 nm, déterminer le nombre de franges brillantes qui seront visibles sur le coin.

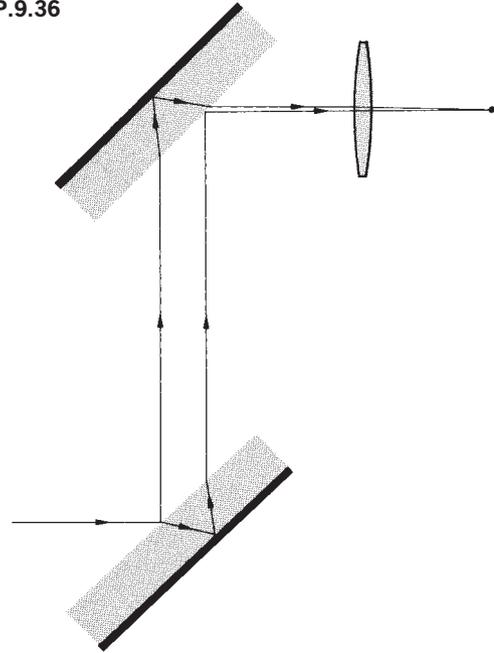
9.35 On éclaire en monochromatique un interféromètre de Michelson. On déplace un de ses miroirs de $2,53 \times 10^{-5}$ m, et l'on observe un défilement consécutif de 92 paires de franges, sombres et brillantes. Déterminer la longueur d'onde du faisceau incident.

9.36* On déplace l'un des miroirs d'un interféromètre de Michelson et l'on observe un défilement de 1000 paires de franges par rapport au réticule d'une lunette d'observation. Si le dispositif est éclairé par une lumière de 500 nm, de quelle distance le miroir a-t-il été déplacé ?

9.37* Supposons que l'on place une cuve de 10 cm de long avec des fenêtres planes et parallèles dans un des bras d'un interféromètre de Michelson fonctionnant à 600 nm. Si l'indice de réfraction de l'air est 1,000 29 et que l'on pompe entièrement l'air de la cuve, combien de paires de franges défilent dans le processus ?

9.38* La figure P.9.38 montre une des variantes de l'interféromètre de Jamin. Comment fonctionne-t-il ? À quelle fin peut-on l'employer ?

Figure P.9.36



9.39 En partant de l'équation (9.53) en transmission, calculer l'éclairement, c'est-à-dire l'équation (9.54).

9.40 Sachant que les miroirs d'un interféromètre de Fabry-Pérot ont un facteur de réflexion en amplitude de $r = 0,894 4$, trouver :

- le coefficient de finesse ;
- la demi-largeur ;
- la finesse ;
- le *contraste* défini par :

$$C \equiv \frac{(I_t/I_i)_{\max}}{(I_t/I_i)_{\min}}$$

9.41 Pour compléter le calcul de la formule de l'incrément de phase minimal séparant deux franges de Fabry-Pérot résolubles, c'est-à-dire,

$$(\Delta\delta) \approx 4.2/\sqrt{F} \quad [9.73]$$

On se satisfera du fait que :

$$[\mathcal{A}(\theta)]_{\delta = \delta_a \pm \Delta\delta/2} = [\mathcal{A}(\theta)]_{\delta = \Delta\delta/2}$$

Montrer alors que l'équation (9.72) peut être reformulée comme :

$$2[\mathcal{A}(\theta)]_{\delta = \Delta\delta/2} = 0,81 \{1 + [\mathcal{A}(\theta)]_{\delta = \Delta\delta}\}$$

Lorsque F est grand, γ est petit, et $\sin(\Delta\delta) = \Delta\delta$. Démontrer que l'on retrouve l'équation (9.73).

9.42 Soit la figure d'interférence d'un interféromètre de Michelson obtenue dans le cas de deux faisceaux de même éclairage. En utilisant l'équation (9.17), calculer la demi-largeur. Quelle est la séparation, en termes de δ , entre deux maxima adjacents ? Quelle est alors la finesse ?

9.43* On acceptera ici le fait qu'une couche d'épaisseur $\lambda_f/4$ et d'indice n_1 réduit toujours le facteur de réflexion du substrat sur lequel elle est déposée, tant que $n_s > n_1 > n_0$. Considérons le cas simple de l'incidence normale et de $n_0 = 1$. Démontrer que ces hypothèses sont équivalentes au fait que les ondes réfléchies par les deux interfaces s'annulent l'une l'autre.

9.44 Vérifier qu'on peut augmenter le facteur de réflexion d'un substrat si l'on le recouvre d'une couche $\lambda_f/4$ d'indice élevé, c'est-à-dire tel que $n_1 > n_s$. Démontrer que les ondes réfléchies interfèrent constructivement. Un empilement de quarts d'onde $g(HL)^mHa$ peut être considéré comme un assemblage de telles structures.

9.45 Déterminer l'indice de réfraction et l'épaisseur de la couche que l'on doit déposer sur une surface de verre ($n_g = 1,54$) de manière à ne pas réfléchir, sous incidence normale, la longueur d'onde de 540 nm.

9.46 On veut traiter une lentille en verre d'indice 1,55 avec une couche mince de fluorure de magnésium pour augmenter la transmission dans le jaune ($\lambda_0 = 550$ nm), à incidence normale. Quelle épaisseur doit être déposée sur la lentille ?

9.47* Sur un objectif d'appareil photo d'indice 1,55 on a déposé une couche mince de cryolite ($n \approx 1,30$) afin de diminuer la réflexion dans le vert ($\lambda_0 = 500$ nm). Quelle épaisseur doit être déposée sur l'objectif ?

9.48* À partir de la figure 9.60 qui décrit la géométrie d'un interféromètre radar sur la navette spatiale, démontrer que :

$$z(x) = h - r_1 \cos \theta$$

Ensuite, utiliser la loi des cosinus pour démontrer que l'équation (9.108) est correcte.

10

Diffraction

10.1 Considérations préliminaires

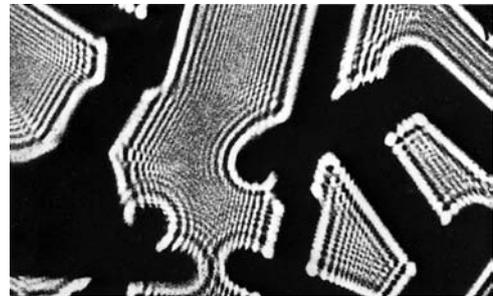
Un corps opaque placé à mi-chemin entre un écran et une source ponctuelle projette une ombre complexe faite de parties sombres et claires, assez différente de ce qu'on pourrait attendre des dogmes de l'Optique géométrique (voir photos)*. Les travaux de Francesco Grimaldi dans les années 1600 constituent la première étude détaillée de cette *dévi*ation de la lumière par rapport à la propagation rectiligne, phénomène qu'il nomma « diffractio ». Cet effet est une caractéristique générale des phénomènes ondulatoires et se manifeste quand une portion de front d'onde, qu'elle soit sonore, matérielle ou lumineuse, rencontre un obstacle. Si une onde subit quelque part une altération, en phase ou en amplitude, par un obstacle transparent ou opaque, il apparaît de la diffraction†. Les différentes zones du front d'onde se propagent au-delà de l'obstacle, se recombinent et interfèrent, ce qui entraîne une distribution d'éclairement particulière que l'on appelle *figure de diffraction*. En fait, il n'y a

.....
*Cet effet est facilement observable bien qu'il soit nécessaire de disposer d'une source suffisamment puissante. On peut installer une lampe haute intensité en face d'un petit trou. Si l'on regarde l'ombre projetée par un objet, par exemple une pointe de crayon, illuminé par le point source, on observe une zone singulièrement brillante démarquant le contour de l'ombre de l'objet, puis une ligne sombre et même une autre bande légèrement illuminée au-delà. On peut également réaliser une expérience similaire en observant l'ombre projetée par sa propre main éclairée directement par le Soleil.

.....
†On aborde rarement la diffraction associée aux obstacles transparents. Pourtant, si vous avez déjà roulé en automobile, de nuit, avec des gouttes de pluie sur vos lunettes, vous êtes sans doute un familier de ce phénomène ! Si vous n'avez jamais eu cette opportunité, vous pouvez déposer quelques gouttes d'eau ou de salive sur un verre plat, le placer à proximité de vos yeux et regarder directement un point source. Vous observerez alors des franges sombres et brillantes.



(a)



(b)

(a) L'ombre d'une main tenant une pièce de monnaie et éclairée par un faisceau He-Ne sans lentille, projetée directement sur un papier polaroïd 10 cm × 12,5 cm de 3 000 ASA. (photo E. H.) (b) Un exemple de diffraction de Fresnel : un faisceau d'électrons est diffracté par des cristaux d'oxyde de zinc. (D'après H. Boersch, *Handbuch der Physik*, édité par S.Flügge, Springer-Verlag, Heidelberg.)

pas de distinction significative entre les *interférences* et la *diffr*action. Bien que ce ne soit pas toujours approprié, il est cependant devenu habituel de parler d'interférences lorsque l'on considère l'interaction d'un nombre réduit d'ondes, et de diffr

cela, on parle d'interférences à ondes multiples dans certaines situations, et de diffraction par un réseau dans d'autres.

Il serait intéressant d'étudier la diffraction sous l'angle de la théorie de la lumière qui est actuellement la plus puissante : l'Électrodynamique Quantique (QED), mais cette approche ne serait pas pratique du tout. Son analyse de la diffraction est extrêmement compliquée et n'apporte que peu d'explications supplémentaires au phénomène. On *pourrait* donc se limiter à une description qualitative des applications de la QED pour quelques situations élémentaires. Cependant, pour ce qui nous concerne, la théorie ondulatoire classique, qui fournit un formalisme simple et efficace, sera plus que suffisante. Si nécessaire, nous introduirons également certaines notions d'analyse de Fourier mais le traitement détaillé de ce sujet fera l'objet du chapitre suivant.

Le principe de Huygens-Fresnel

Comme approche initiale du problème, rappelons le principe de Huygens (paragraphe 4.4.2). On peut considérer chaque point d'un front d'onde comme une source d'ondelettes secondaires sphériques, à partir desquelles on détermine la progression du front d'onde, ou d'une de ses portions, à travers l'espace. À un instant donné, on suppose que la forme du front d'onde est l'enveloppe de ces ondelettes secondaires (figure 4.26). Cette procédure ne prend pas en compte le comportement individuel de chaque ondelette et ne s'intéresse qu'à la portion commune avec l'enveloppe. Par conséquent, le principe de Huygens seul n'est pas capable de rendre compte dans les détails des phénomènes de diffraction. Cette limitation se manifeste dans la vie courante. Les ondes sonores (par exemple, $\nu = 500$ Hz, $\lambda \approx 68$ cm) contournent facilement les objets massifs comme des poteaux téléphoniques ou des arbres, alors que ces derniers projettent une ombre distincte lorsqu'ils sont éclairés. Or, le principe de Huygens ne fait pas intervenir la longueur d'onde et conduit à la même configuration du front d'onde dans les deux cas cités.

Ce problème fut résolu par Fresnel qui eut l'idée d'introduire le concept d'interférence. Le **principe d'Huygens-Fresnel** qui en résulta stipule que *chaque point non obstrué d'un front d'onde, à un instant donné, peut être considéré comme une source d'ondelettes secondaires sphériques (de la même longueur d'onde que l'onde primaire)*. Pour un point quelconque situé au-delà, l'amplitude du champ optique est la superposition de toutes ces ondelettes (en tenant compte de leur amplitude et de leur phase relative).

Pour appliquer qualitativement ces notions aussi simplement que possible, considérons les photos de cuve à ondes ci-contre,

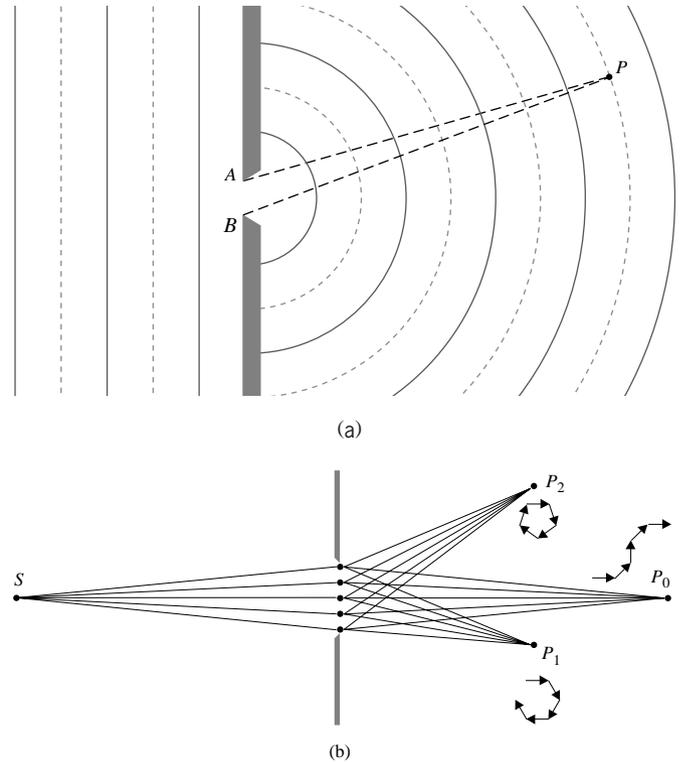
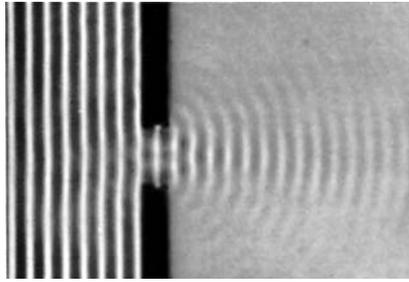


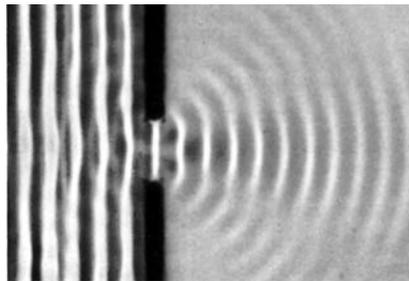
Figure 10.1 Diffraction par une petite ouverture. (a) Représentation classique de l'onde. (b) Représentation via la QED et les amplitudes de probabilité.

ainsi que les illustrations de la figure 10.1. Si chaque point non obstrué de l'onde plane incidente agit comme une source secondaire cohérente, la différence de chemin optique maximale entre ces sources sera $\Lambda_{\max} = |\overline{AP} - \overline{BP}|$, correspondant aux deux points source situés à chaque extrémité de l'ouverture. Mais Λ_{\max} est plus petit ou égal à \overline{AB} , l'égalité se produisant lorsque P est situé dans le plan de l'ouverture. Lorsque $\lambda > \overline{AB}$, comme sur la figure 10.3, il s'ensuit que $\lambda > \Lambda_{\max}$, et comme les ondes étaient initialement en phase, elles interfèrent toutes constructivement (à différents degrés) en tout point P (voir la photographie (c) de la cuve à ondes). De ce fait, *si la longueur d'onde est grande devant l'ouverture considérée, les ondes se dispersent dans toutes les directions au-delà de l'obstruction*, et plus l'ouverture est petite, plus les ondes diffractées deviennent circulaires (ce résultat est discuté du point de vue de l'analyse de Fourier p. 413).

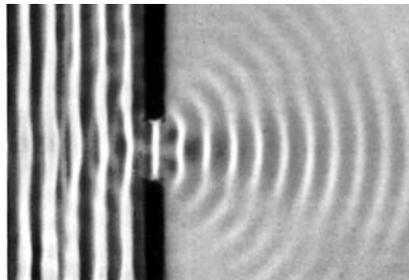
La situation s'inverse lorsque $\lambda < \overline{AB}$ (photo (a) de la cuve à ondes). La zone où $\lambda > \Lambda_{\max}$ est limitée à une petite région



(a)



(b)



(c)

Diffraction par une ouverture, pour différents λ , visualisée à l'aide d'une cuve à vagues. (Photo PSSC Physics, D. C. Heath, Boston, 1960.)

qui s'étend directement en face de l'ouverture, et c'est seulement à l'intérieur de cette zone que les ondelettes interfèrent constructivement. À l'extérieur, certaines ondelettes peuvent interférer de manière destructive, ce qui correspond aux « zones d'ombre ». Gardons en mémoire que l'ombre géométrique, idéale, correspond à $\lambda \rightarrow 0$.

Du point de vue de la physique classique, le comportement de la lumière au-delà d'un écran diffractant s'explique par les interférences entre la multitude d'ondelettes qui, émises par l'ouverture, se combinent (comme des phaseurs) en chaque point de la région, en se renforçant ou en s'annulant suivant les différences de chemin optique (*OPL*).

Du point de vue de la Mécanique quantique (paragraphe 4.11.1), l'explication de la répartition de la lumière au-delà de l'écran diffractant vient du fait que les densités de probabilité de la multitude de photons passant par l'ouverture « interfèrent ». De la même manière, les densités de probabilité se combinent (comme des phaseurs) en chaque point de la région, en se renforçant ou en s'annulant suivant l'*OPL*. Lorsque la taille de l'ouverture est de l'ordre de quelques longueurs d'onde (photographie (a) de la cuve à ondes), les nombreux chemins possibles pour aller en un point P correspondent à une large gamme de phases de phaseurs. Considérons tous les chemins menant à un point situé dans l'alignement de l'ouverture, comme P_0 . La ligne droite entre S et P_0 correspond à un chemin minimum. Tous les autres chemins menant de l'ouverture à P_0 sont plus longs (cela dépend de la taille de l'ouverture) et possèdent des phaseurs (que l'on considère tous comme faisant la même taille) qui sont groupés autour de cette valeur stationnaire de l'*OPL*, comme ceux de la figure 4.68. Leur angle de phase font entre eux de petites différences (la moitié en positif, la moitié en négatif). Si on les additionne à la queue leu leu, ils tournent dans une direction, puis dans une autre, pour produire une densité de probabilité résultante qui est élevée. Un compteur de photons situé en P_0 verra beaucoup de lumière. En dehors de cet axe, l'*OPL* n'est pas stationnaire ; les phaseurs présentent entre eux des différences de phase relativement grandes pour chaque chemin, qui sont toutes dans le même sens. Mis à la queue leu leu, ils décrivent des spirales, mais leur contribution globale est réduite ou nulle. Un détecteur de photons en P_1 décèlerait donc peu de photons et un autre placé en P_2 en détecterait encore moins.

Avec une ouverture encore plus petite, le nombre de photons détectés en P_1 et P_2 augmente au détriment de P_0 . Pour un trou très étroit, tous les chemins menant à P_1 ou P_2 sont très rapprochés et pratiquement identiques. Leur différence de phase est en conséquence plus petite, les spirales de phaseurs ne se referment plus sur elles-mêmes, et les densités de probabilité résultantes, bien que petites, sont partout non nulles.

Qualitativement, la QED et le principe classique de Huygens-Fresnel conduisent tous les deux à la même conclusion générale : la lumière se diffracte à cause des interférences.

Le principe d'Huygens-Fresnel a des limitations (que nous examinerons plus tard), en plus du fait qu'il ne reste qu'une hypothèse à ce point de notre présentation. Gustav Kirchhoff a développé une théorie plus rigoureuse, basée directement sur la solution de l'équation d'onde différentielle. Bien que contemporain à Maxwell, Kirchhoff réalisa ce travail avant que la propagation des ondes électromagnétiques, démontrée par

Hertz en 1887, ne soit généralement diffusée. Kirchhoff utilisa l'ancienne théorie de la propagation de la lumière dans un solide élastique. Son analyse fouillée apporta du crédit aux suppositions de Fresnel et conduisit à une formulation encore plus précise du principe d'Huygens, présenté alors comme une conséquence directe de l'équation d'onde. Pourtant, la théorie de Kirchhoff reste une approximation qui n'est valide que pour des longueurs d'onde suffisamment petites, c'est-à-dire lorsque les dimensions de l'ouverture diffractante sont bien supérieures à λ . La principale difficulté vient du fait que l'on cherche à résoudre une équation différentielle partielle avec des conditions aux limites imposées par l'obstruction. On ne peut obtenir de solution rigoureuse que dans quelques cas très particuliers. Cependant, la théorie de Kirchhoff fonctionne assez bien, même si elle s'appuie sur des ondes scalaires, sans prendre en compte le caractère vectoriel transverse de la lumière*.

Il reste vrai que trouver une solution exacte à un problème de diffraction particulier reste l'une des difficultés les plus ardues de l'Optique. La première de ces solutions exactes, utilisant la théorie électromagnétique de la lumière, fut publiée par Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868-1951) en 1896. Bien que les conditions du problème fussent physiquement irréalisables (elles comprenaient une surface diffractante infiniment fine mais opaque, parfaitement plane et conductrice), le résultat eut malgré tout une grande valeur car il fournissait un aperçu très riche sur les phénomènes fondamentaux impliqués.

Même de nos jours, des solutions rigoureuses n'ont toujours pas été trouvées dans la plupart des configurations de diffraction usuelles. Par nécessité, nous nous appuyerons donc sur les traitements approchés de Huygens-Fresnel et de Kirchhoff. La recherche scientifique continue pourtant à approfondir cette question. Récemment, des chercheurs se sont servis de micro-ondes pour pouvoir étudier plus aisément certaines caractéristiques de la diffraction, qu'il aurait été pratiquement impossible de faire ressortir en optique. Ces investigations ont aussi montré que la théorie de Kirchhoff est un outil particulièrement valable†. Mais dans la plupart des cas que nous allons considérer, le principe d'Huygens-Fresnel, qui est plus simple, nous suffira amplement.

.....
*Une formulation vectorielle de la théorie de Kirchhoff scalaire est discutée dans J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, p. 283. Voir aussi Sommerfeld, *Optics*, p. 325 ; B. B. Baker et E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens's Principle*, bonne référence générale pour l'étude de la diffraction. Aucun de ces textes n'est simple d'approche.
.....

†C. L. Andrews, *Am. J. Phys.* **19**, 250 (1951) ; S. Silver, *J. Opt. Soc. Am.* **52**, 131 (1962).

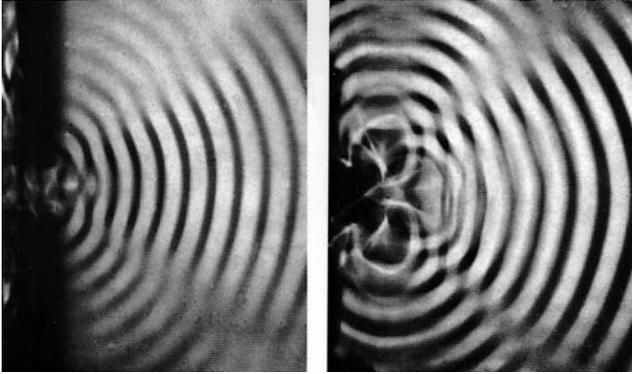
10.1.1 Obstructions opaques

On peut envisager la diffraction comme étant issue de l'interaction entre les ondes électromagnétiques et un obstacle physique. Notre première analyse se doit de réexaminer brièvement les mécanismes impliqués. Que se passe-t-il véritablement à l'intérieur de l'objet opaque ?

Un premier point de vue consiste à considérer l'obstacle comme un ensemble continu, c'est-à-dire à négliger sa structure microscopique. Dans le cas d'une feuille de métal non absorbante (de conductivité infinie, donc sans pertes par effet Joule), on peut écrire les équations de Maxwell pour le métal et pour le milieu environnant, puis les raccorder à la jonction métal-milieu. On peut obtenir des solutions précises pour des configurations très simples. Les ondes réfléchies et diffractées résultent alors de la distribution du courant dans la feuille de métal.

Plaçons-nous à présent à une échelle submicroscopique, et considérons le nuage électronique de chaque atome de l'écran diffractant en train de vibrer sous l'effet du champ électrique de l'onde incidente. Le modèle classique où un « électron-oscillateur » vibre et réémet à la fréquence de la source convient parfaitement, et on peut se passer de la description de la mécanique quantique. L'amplitude et la phase d'un oscillateur de l'écran sont déterminées par le champ électrique qui l'environne localement. Ce champ est lui-même la superposition du champ incident et des champs créés par les autres électrons oscillants. On peut déjà noter une propriété évidente d'un grand écran opaque sans ouverture, qu'il soit une feuille de papier noir ou d'aluminium : il n'y a pas de champ optique derrière lui. Les électrons situés à proximité de la surface éclairée oscillent sous l'effet de l'onde incidente. Ils émettent alors un rayonnement qui est finalement réfléchi dans l'espace initial ou absorbé par le matériau de l'écran, ou les deux. Quoi qu'il en soit, l'effet combiné de l'onde incidente et des champs engendrés par les électrons en oscillation font qu'il n'y a pas de lumière derrière l'obstacle. Cela semble être le résultat d'un remarquable équilibre, mais il n'en est rien. Si l'onde incidente n'était pas complètement annulée, elle se propagerait en profondeur dans le matériau de l'obstacle, et entraînerait encore plus d'électrons à rayonner. L'onde s'affaiblirait de plus en plus jusqu'à disparaître complètement (si l'écran était suffisamment épais...). Un matériau ordinairement opaque, comme l'argent, devient partiellement transparent pour des épaisseurs suffisamment petites (on peut voir à travers une feuille d'argent : se rappeler les miroirs argentés séparateurs).

Maintenant, enlevons un petit disque de matière au centre de l'écran. Il est évident que la lumière peut alors passer à travers



Photos prises à l'aide d'une cuve à vagues. Dans un cas, les ondes sont simplement diffractées par une fente. Dans l'autre cas, une série de points sources, régulièrement espacés au niveau de l'ouverture précédente, produisent la même figure. (Photos PSSC *Physics*, D. C. Heath, Boston, 1960.)

l'ouverture. Les oscillateurs qui couvraient uniformément le disque ont été enlevés en même temps que lui, et les électrons restants qui occupent le reste de l'écran ne subissent plus leur influence. En première approximation, on peut alors *considérer que les interactions mutuelles des oscillateurs sont pour l'essentiel négligeables*, c'est-à-dire que les électrons de l'écran ne sont pas du tout affectés par le retrait de ceux du disque central. Au-delà de l'ouverture, le champ est le même que celui qui existait avant le retrait du disque, donc zéro, auquel on doit enlever la contribution des électrons du disque lui-même. Sans tenir compte du signe, tout se passe comme si on avait enlevé la source et l'écran, et qu'il ne restait plus que les électrons-oscillateurs du disque tout seul. En d'autres termes, on peut considérer que le champ de diffraction provient uniquement d'un ensemble imaginaire d'oscillateurs indépendants, lesquels sont distribués uniformément au niveau de la région de l'ouverture. Cela est évidemment l'essence du principe d'Huygens-Fresnel.

Cependant, il ne faut pas s'attendre à une absence d'interactions absolument totale entre les électrons-oscillateurs, mais plutôt à un effet de courte portée puisque les champs d'oscillateurs chutent rapidement avec la distance. Grâce à cette approche plus réaliste d'un point de vue physique, les électrons situés très proches du bord de l'ouverture sont affectés lorsque le disque est enlevé. Pour les ouvertures de grande dimension, le nombre d'oscillateurs est bien supérieur dans le disque que sur le bord, et si le point d'observation est suffisamment loin et droit devant l'ouverture, le principe de Huygens-Fresnel fonctionne très bien (voir les photos). En revanche, pour de très petites ouvertures ou pour un point

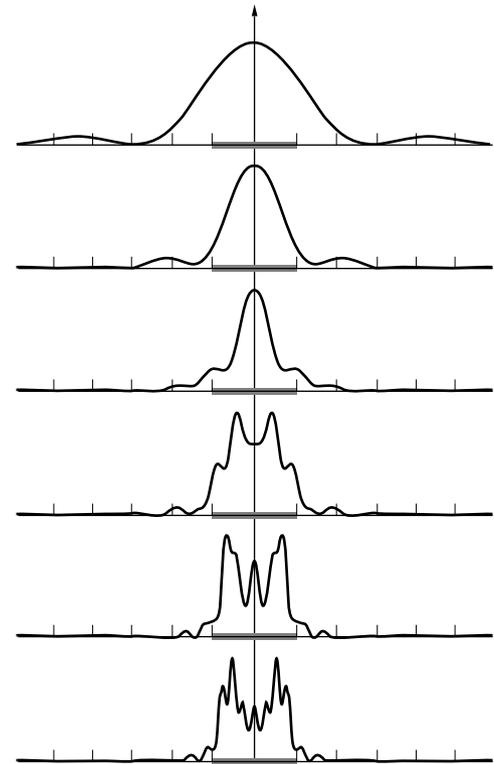


Figure 10.2 Succession de figures de diffraction formées par une seule fente pour des distances de plus en plus grandes. De bas en haut, ces figures évoluent, de la diffraction de Fresnel (observation proche, tout en bas) à celle de Fraunhofer (observation lointaine, tout en haut). (D'après *Fundamentals of Waves and Oscillations* de K. U. Ingard.)

d'observation proche, les effets de côté deviennent importants et le problème plus difficile. En effet, pour un point appartenant à l'ouverture, on comprend que les électrons-oscillateurs du pourtour extérieur ont, du fait de leur proximité, d'autant plus d'influence que l'ouverture est petite. On doit alors s'éloigner quelque peu du principe d'Huygens-Fresnel.

10.1.2 La diffraction de Fresnel et la diffraction de Fraunhofer

Considérons un écran opaque Σ percé d'une petite ouverture unique, éclairé par une source ponctuelle très éloignée, S . Le plan d'observation σ est un autre écran parallèle à Σ , et très proche de lui. Avec ces conditions, on peut observer sur σ une image projetée de l'ouverture, clairement reconnaissable malgré de légères franges sur la périphérie (figure 10.2). En

revanche, si l'on éloigne σ de Σ , l'image de l'ouverture, bien que toujours facilement identifiable, comporte beaucoup plus de franges. Ces deux conditions d'observation caractérisent deux types de diffraction. Pour un plan d'observation proche de l'ouverture, on parle de diffraction de **Fresnel**, ou de diffraction en **champ proche**. Si l'on éloigne progressivement ce plan d'observation, on constate que les franges se modifient au fur et à mesure. À une très grande distance de Σ , la figure projetée s'est considérablement étalée et n'a que peu ou pas de ressemblance avec la forme de l'ouverture initiale. Si l'on continue à éloigner σ , on modifie uniquement la taille et non plus la forme de l'image que l'on obtient. On est alors en diffraction de **Fraunhofer**, ou diffraction en **champ lointain**. Notons cependant que, si l'on pouvait réduire suffisamment la longueur d'onde de la radiation incidente, le motif que l'on obtiendrait se transformerait en un motif de la diffraction de Fresnel. Si la longueur d'onde λ tendait vers zéro, les franges de diffraction disparaîtraient et l'image obtenue correspondrait exactement aux contours de l'ouverture, comme le prévoit l'Optique géométrique. Considérons à nouveau le montage du début. Si l'on déplace cette fois le point source vers Σ , le front d'onde qui est incident sur l'ouverture n'est plus plan mais sphérique, et l'on observe alors un motif de diffraction de Fresnel, même si le plan d'observation est éloigné.

Considérons maintenant un montage comprenant uniquement une source ponctuelle S et un point d'observation P , tous deux à très grande distance de Σ (problème 10.1). *Tant que l'on peut considérer les ondes incidentes et émergentes comme planes (ou différant d'un plan par une faible fraction de longueur d'onde) au niveau de l'ouverture diffractante (ou des obstacles), on est dans le domaine de la diffraction de Fraunhofer.* Une autre façon d'appréhender cela est de réaliser que la *phase* de chaque contribution en P , qui est due aux différences de chemin traversé, est cruciale pour la détermination du champ résultant. De plus, si les fronts d'onde qui arrivent sur l'ouverture et qui en sortent sont plans, alors ces différences de chemin sont calculables par une fonction linéaire des deux variables d'espace dans l'ouverture. *Cette linéarité par rapport aux deux variables d'espace de l'ouverture est le critère mathématique caractéristique de la diffraction de Fraunhofer.* En revanche, si S et P sont trop proches de Σ pour que l'on puisse considérer que la courbure des fronts d'onde incidents et émergents est négligeable, c'est la diffraction de Fresnel qui prévaut.

On peut considérer que chaque point de l'ouverture est une source d'ondelettes de Huygens, et se préoccuper de leur

intensité relative. Lorsque S est à faible distance de l'ouverture, par rapport à sa taille, celle-ci est éclairée par un front d'onde sphérique. Les distances entre S et chaque point de l'ouverture sont différentes, et l'intensité du champ électrique incident (qui décroît avec la distance) varie d'un point à un autre de l'ouverture diffractante. La situation serait différente si l'onde incidente était plane et homogène. Ces considérations sont également vraies pour les ondes diffractées par l'ouverture en P . Même si elles sont de même amplitude à l'origine, les ondes qui convergent en un point P proche de l'ouverture sont sphériques et varient en amplitude, à cause des différences de distance entre P et les différentes parties de l'ouverture. Idéalement, pour un point P « à l'infini » (quoi que cela signifie), les ondes qui y arrivent sont alors planes et l'on n'a plus besoin de se préoccuper des variations d'intensité locales du champ électromagnétique. Ce point de vue contribue aussi à la simplification du cas limite de Fraunhofer.

Si l'on est en présence d'une ouverture ou d'un obstacle dont la plus grande dimension est a , la formule empirique suivante permet de dire si l'on se trouve dans les conditions de la diffraction de Fraunhofer :

$$R > a^2/\lambda$$

où R désigne la plus petite des distances entre S et Σ ou entre Σ et P (voir le problème 10.1). Bien sûr, lorsque $R = \infty$, il n'y a plus vraiment de condition sur la taille finie de l'ouverture. D'autre part, on remarquera qu'un accroissement de λ fait pencher le phénomène du côté de la diffraction de Fraunhofer.

Si, en théorie, la condition de Fraunhofer est assurée lorsque S et P sont effectivement à l'infini, en pratique, on peut réaliser cette condition avec un montage à deux lentilles identique à celui de la figure 10.3. L'idée consiste à placer la source ponctuelle S au foyer F_1 de la première lentille L_1 et de prendre le plan focal image de la seconde lentille L_2 comme plan d'observation. Dans la terminologie de l'optique géométrique, on dit que le plan de la source et le plan σ sont conjugués.

Les mêmes idées peuvent être généralisées à tout montage formant une image d'une source étendue ou d'un objet (problème 10.5). En effet, l'image serait alors une figure de diffraction de Fraunhofer. Du fait de ces considérations d'ordre pratique, mais aussi à cause de sa simplicité, nous allons donc étudier en premier la diffraction de Fraunhofer et non pas celle de Fresnel, bien que la première soit un cas particulier de la seconde.

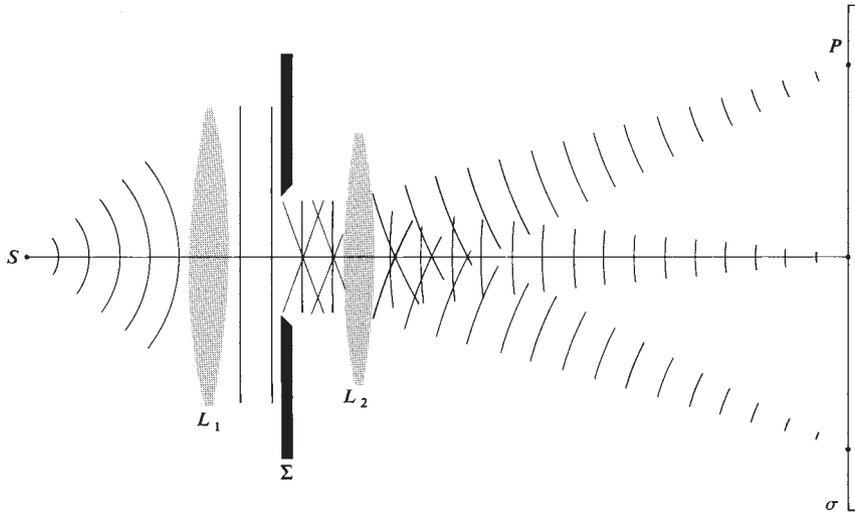


Figure 10.3 Diffraction de Fraunhofer avec deux lentilles : cette configuration permet de positionner la source et les images de diffraction à des distances convenables de l'ouverture diffractante.

10.1.3 Plusieurs oscillateurs cohérents

Dans un premier temps, nous allons faire le lien entre les interférences et la diffraction grâce au montage simple de la figure 10.3. Comme on l'a vu précédemment, on peut considérer l'ouverture diffractante comme une barrette linéaire de N oscillateurs ponctuels cohérents (ou antennes radiatives), tous identiques même en terme de polarisation. Pour le moment, on supposera que ces oscillateurs sont en phase. La figure montre des rayons, tous pratiquement parallèles entre eux et qui se rencontrent en un point P situé à grande distance. Si la dimension de la barrette d'oscillateurs est suffisamment petite, on peut considérer que les différentes amplitudes des ondes qui arrivent en P sont à peu près égales ; les distances parcourues étant presque identiques. Ainsi :

$$E_0(r_1) = E_0(r_2) = \dots = E_0(r_N) = E_0(r)$$

La somme de ces ondelettes sphériques qui interfèrent produit, en ce point P , un champ électrique dont la valeur est donnée par la partie réelle de l'expression :

$$\tilde{E} = E_0(r)e^{i(kr_1 - \omega t)} + E_0(r)e^{i(kr_2 - \omega t)} + \dots + E_0(r)e^{i(kr_N - \omega t)} \quad (10.1)$$

Il est clair, d'après le paragraphe 9.1, que nous n'avons pas besoin de considérer ici la nature vectorielle du champ électrique pour cette configuration. On peut donc écrire :

$$\tilde{E} = E_0(r)e^{-i\omega t} e^{ikr_1} \times [1 + e^{ik(r_2 - r_1)} + e^{ik(r_3 - r_1)} + \dots + e^{ik(r_N - r_1)}]$$

La différence de phase entre deux sources adjacentes est exprimée par l'expression $\delta = k_0\Lambda$. Or, pour un milieu d'indice n , on a $\Lambda = nd \sin \theta$. On obtient donc ici : $\delta = kd \sin \theta$. D'après la figure 10.4, il ressort par conséquent que $\delta = k(r_2 - r_1)$, $2\delta = k(r_3 - r_1)$, et ainsi de suite, de sorte que le champ en P peut être exprimé par :

$$\tilde{E} = E_0(r)e^{-i\omega t} e^{ikr_1} \times [1 + (e^{i\delta}) + (e^{i\delta})^2 + (e^{i\delta})^3 + \dots + (e^{i\delta})^{N-1}] \quad (10.2)$$

Or, la série géométrique entre crochets a pour valeur :

$$(e^{i\delta N} - 1)/(e^{i\delta} - 1)$$

Ce qui peut également être arrangé sous la forme :

$$\frac{e^{iN\delta/2} [e^{iN\delta/2} - e^{-iN\delta/2}]}{e^{i\delta/2} [e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2}]}$$

ou, de manière équivalente :

$$e^{i(N-1)\delta/2} \left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right)$$

Ainsi, le champ en P peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{E} = E_0(r)e^{-i\omega t} e^{i[kr_1 + (N-1)\delta/2]} \left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right) \quad (10.3)$$

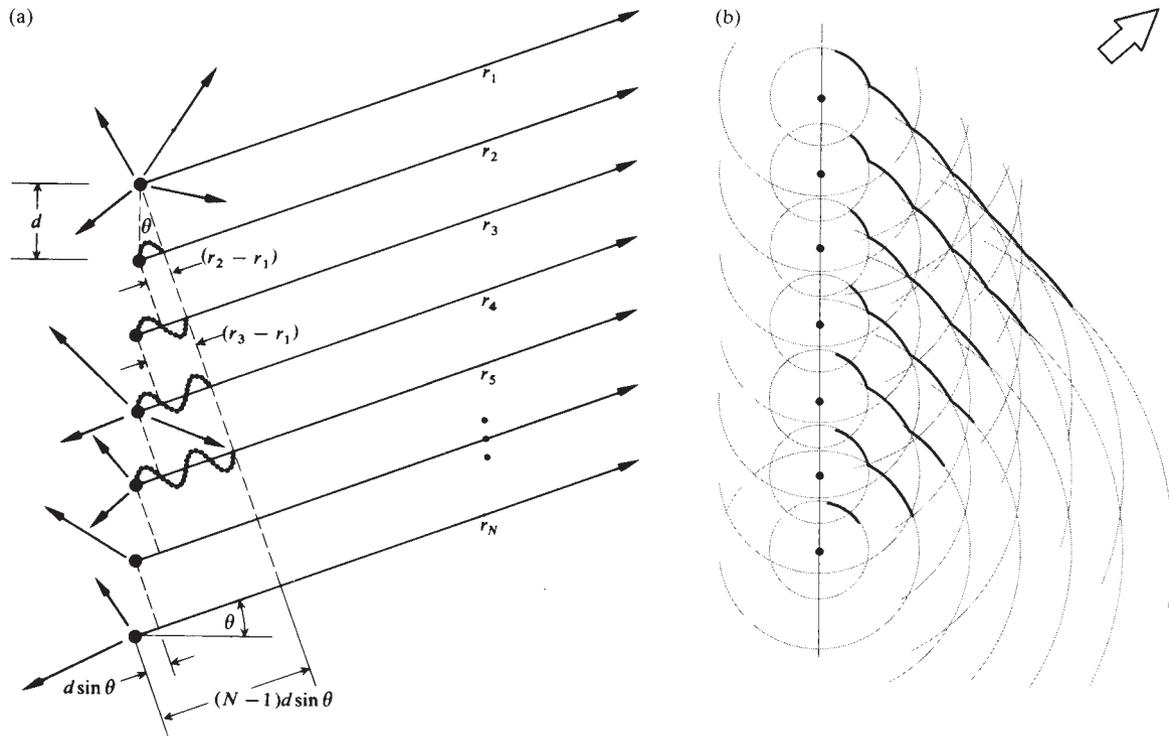


Figure 10.4 Un réseau linéaire d'oscillateurs cohérents en phase. (a) Noter que l'angle montré est, ici, $\delta = \pi$. Pour $\theta = 0$, δ serait nul. (b) Un des nombreux ensembles de fronts d'onde émis par un alignement de points sources cohérents.

Si l'on définit R comme étant la distance entre le centre de la barrette d'oscillateurs et le point P , on a alors :

$$R = \frac{1}{2}(N - 1)d \sin \theta + r_1$$

L'équation (10.3) devient alors :

$$\tilde{E} = E_0(r) e^{i(kR - \omega t)} \left(\frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right) \quad (10.4)$$

Finalement, l'éclairement étant proportionnel à $\tilde{E}\tilde{E}^*/2$, celui de la figure de diffraction qui est dû à un alignement de N sources ponctuelles identiques, cohérentes et placées régulièrement est égal à :

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \quad (10.5)$$

.....
*On peut aussi installer un laser He-Ne pour produire de magnifiques figures sans employer de lentilles auxiliaires, mais cela nécessite beaucoup d'espace.

où I_0 est l'éclairement en P qui serait dû à l'une quelconque des sources individuelles (voir Problème 10.2 pour une méthode de détermination graphique de l'éclairement). Pour $N = 0$, $I = 0$, pour $N = 1$, $I = I_0$ et pour $N = 2$, $I = 4I_0 \cos^2(\delta/2)$, en accord avec l'équation (9.17). La dépendance de I en fonction de θ devient alors évidente car on peut écrire :

$$I = I_0 \frac{\sin^2[N(kd/2) \sin \theta]}{\sin^2[(kd/2) \sin \theta]} \quad (10.6)$$

Le terme en $\sin^2 [N(kd/2) \sin \theta]$ subit des fluctuations rapides alors que la fonction qui le module, $\{\sin [(kd/2) \sin \theta]\}^{-2}$, varie relativement lentement. La totalité de l'expression donne finalement une série de pics principaux pointus qui sont séparés par de petits maxima secondaires. Les maxima principaux sont obtenus dans les directions θ_m telles que $\delta = 2m\pi$, où $m = 0, \pm 1, \pm 2$. Comme $\delta = kd \sin \theta$, on a donc :

$$d \sin \theta_m = m\lambda \quad (10.7)$$



Le radiotélescope interférométrique de l'université de Sydney, en Australie ($N = 32$, $\lambda = 21$ cm, $d = 7$ m, diamètre 2 m, extension est-ouest de plus de 2 km).

(Photo W. N. Christiansen.)

Comme $[\sin^2 N\delta/2]/[\sin^2 \delta/2] = N^2$ pour $\delta = 2m\pi$ (d'après la règle de l'Hospital), les maxima principaux ont des valeurs en $N^2 I_0$. Ce résultat est logique car tous les oscillateurs sont en phase pour ces orientations. Le système émet un maximum d'énergie dans la direction perpendiculaire à la barrette d'oscillateurs ($m = 0$, $\theta_0 = 0$ et π). À mesure que θ augmente, δ croît également et I tombe à zéro pour $N\delta/2 = \pi$, son premier minimum. Notons également que si $d < \lambda$ dans l'équation (10.7), le seul cas qui se présente correspond à $m=0$, ou maximum principal d'ordre zéro. Donc, si l'on observe une source linéaire d'électrons-oscillateurs, séparés par des distances atomiques, on peut s'attendre à ne voir que cet unique maximum principal dans le champ de lumière.

Un réseau d'antennes, semblable à celui représenté dans la photographie ci-contre, peut émettre un rayonnement dans le lobe étroit qui correspond à un maximum principal (les paraboles réfléchissent en avant et le diagramme de rayonnement n'est plus symétrique par rapport à l'axe commun). Supposons qu'on dispose d'un système dans lequel on puisse introduire un déphasage ε entre oscillateurs adjacents. Dans ce cas, on a :

$$\delta = kd \sin \theta + \varepsilon$$

Les différents maxima principaux sont alors obtenus pour les nouveaux angles :

$$d \sin \theta_m = m\lambda - \varepsilon/k$$

Concentrons-nous sur le maximum central $m = 0$. On peut modifier son orientation θ_0 à volonté en ajustant simplement la valeur de ε .

Le principe du retour inverse de la lumière, qui postule que s'il n'y a pas d'absorption, le trajet de la lumière est réversible, conduit à la même répartition du champ d'une antenne, en

émission comme en réception. Fonctionnant en radiotélescope, le dispositif peut ainsi être « pointé » dans différentes directions en introduisant le déphasage approprié ε sur la sortie d'une antenne individuelle. Pour un ε donné, la réponse du système correspond au signal incident sur le dispositif en provenance d'une direction spécifique de l'espace (voir la discussion sur le radar en dispositif phasé p. 105).

Le télescope de la photographie ci-dessus constitue le premier interféromètre radio multiple. Il fut dessiné par W. N. Christiansen et construit en Australie en 1951. Il est composé de 32 antennes paraboliques de 2 mètres de diamètre, conçues pour fonctionner en phase à la fréquence de la raie d'émission de l'hydrogène (21 cm). Les antennes sont disposées tous les 7 m sur une ligne orientée est-ouest. Cet arrangement particulier utilise la rotation de la Terre comme mécanisme de balayage*.

Examinons à présent la figure 10.5 qui représente une source linéaire constituée idéalement d'électrons oscillateurs. (Par exemple, les sources secondaires, suivant le principe d'Huygens-Fresnel, d'une fente de largeur bien plus petite que λ , qui serait éclairée par une onde plane.) Chaque point émet alors une ondelette sphérique :

$$E = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r} \right) \sin(\omega t - kr)$$

*Voir E. Brookner, « Phased-Array Radars », *Sci. Am.* (Février 1985), p. 94.

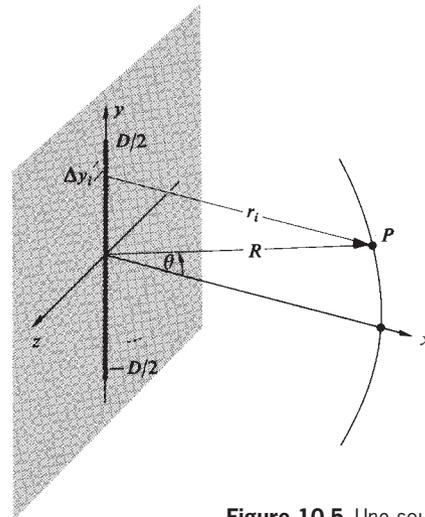


Figure 10.5 Une source linéaire cohérente.

dont l'amplitude est inversement proportionnelle à r , la quantité \mathcal{E}_0 désignant ce que l'on nommera **la vigueur de la source**. La configuration présente est différente de celle de la figure 10.4, car les sources sont ici très faibles, leur nombre, N , très grand et leur séparation très petite. Une petite longueur finie Δy_i de la source contient ainsi $\Delta y_i(N/D)$ émetteurs, D étant la longueur totale de la source. Imaginons que celle-ci soit divisée en M segments identiques (l'indice i allant donc de 1 à M). La contribution du $i^{\text{ème}}$ segment à l'amplitude du champ électrique en P est :

$$E_i = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r_i} \right) \sin(\omega t - kr_i) \left(\frac{N \Delta y_i}{D} \right)$$

à condition que Δy_i soit suffisamment petit pour que les contributions des oscillateurs du $i^{\text{ème}}$ segment soient quasiment en phase en P ($r_i = \text{constante}$), et que leurs champs s'y additionnent alors constructivement. En faisant tendre N vers l'infini, on obtient une source linéaire continue (cohérente). Cette description, assez réaliste à une échelle macroscopique, peut être également utilisée pour des problèmes à géométrie plus complexe. Lorsqu'on fait tendre N vers l'infini, la « vigueur » d'un oscillateur individuel doit se rapprocher de zéro, vu que la contribution totale de la source doit rester finie. On peut ainsi définir **la vigueur de source par unité de longueur** (linéique), \mathcal{E}_L , avec :

$$\mathcal{E}_L \equiv \frac{1}{D} \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathcal{E}_0 N) \quad (10.8)$$

Le champ total en P dû aux M segments est donc :

$$E = \sum_{i=1}^M \frac{\mathcal{E}_L}{r_i} \sin(\omega t - kr_i) \Delta y_i$$

Pour une source linéaire continue, la longueur Δy_i devient infinitésimale ($M \rightarrow \infty$) et le signe « somme » se transforme en intégrale. On a :

$$E = \mathcal{E}_L \int_{-D/2}^{+D/2} \frac{\sin(\omega t - kr)}{r} dy \quad (10.9)$$

où $r = r(y)$. L'approximation à faire pour calculer l'équation (10.9) dépend de la position de P par rapport à la source, et c'est cela qui fait la distinction entre la diffraction de Fraunhofer et celle de Fresnel. Bien sûr, dans la réalité physique, il n'existe pas de source cohérente vraiment linéaire, mais cette représentation fournit un modèle mathématique puissant pour expliciter le phénomène de diffraction.

10.2 La diffraction de Fraunhofer

10.2.1 Diffraction par une fente unique

Examinons à nouveau la figure 10.5 et considérons que le point d'observation est très éloigné de la source cohérente linéaire ($R \gg D$). Dans ces conditions, $r(y)$ ne s'écarte jamais vraiment de sa valeur moyenne R , de sorte qu'en P , la quantité (\mathcal{E}_L/R) est à peu près constante pour tous les éléments dy . D'après l'équation (10.9), le champ en P qui est dû au segment élémentaire dy de source s'écrit donc :

$$dE = \frac{\mathcal{E}_L}{R} \sin(\omega t - kr) dy \quad (10.10)$$

Où $(\mathcal{E}_L/R) dy$ est l'amplitude de l'onde. On notera que la phase de l'onde est bien plus sensible aux variations de $r(y)$ que son amplitude, et que les approximations sur la phase sont donc à effectuer avec précaution. On peut développer $r(y)$ en fonction de y , comme on l'a fait dans le problème 9.15 :

$$r = R - y \sin \theta + (y^2/2R) \cos^2 \theta + \dots \quad (10.11)$$

Où θ est l'angle entre l'axe qui définit la direction de P (depuis le centre de la source), et le plan xz , perpendiculaire à la source. On peut négliger le troisième terme tant que sa contribution maximale est insignifiante, c'est-à-dire lorsque $y = \pm D/2$; ainsi $(\pi D^2/4\lambda R) \cos^2 \theta$ doit être négligeable. Cela est vrai quel que soit l'angle θ si R est suffisamment grand. On est alors dans la *condition de Fraunhofer* où la distance r varie linéairement en y : la distance au point d'observation et donc la phase de sa contribution en ce point peuvent s'écrire comme des fonctions linéaires de la variable d'espace y sur la source. En remplaçant dans l'équation (10.10) et en intégrant, on obtient donc :

$$E = \frac{\mathcal{E}_L}{R} \int_{-D/2}^{+D/2} \sin[\omega t - k(R - y \sin \theta)] dy \quad (10.12)$$

Et finalement :

$$E = \frac{\mathcal{E}_L D}{R} \frac{\sin[(kD/2) \sin \theta]}{(kD/2) \sin \theta} \sin(\omega t - kR) \quad (10.13)$$

On peut simplifier cette expression en posant :

$$\beta \equiv (kD/2) \sin \theta \quad (10.14)$$

et donc :

$$E = \frac{\mathcal{E}_L D}{R} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \sin(\omega t - kR) \quad (10.15)$$

Par ailleurs, la quantité mesurable est l'éclairement, que l'on exprimera (en laissant de côté les constantes) $I(\theta) = \langle E^2 \rangle_T$, donc :

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}_L D}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad (10.16)$$

où $\langle \sin^2(\omega t - kR) \rangle_T = \frac{1}{2}$. Lorsque $\theta = 0$, $\sin \beta / \beta = 1$ et $I(\theta) = I(0)$, ce qui correspond au *maximum principal*. Dans l'approximation de Fraunhofer, l'éclairement théorique donné par une source cohérente linéaire est donc :

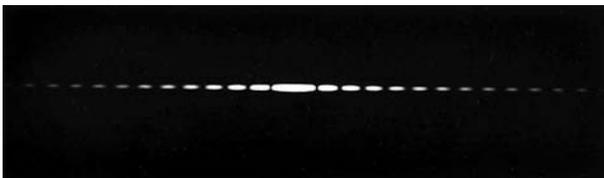
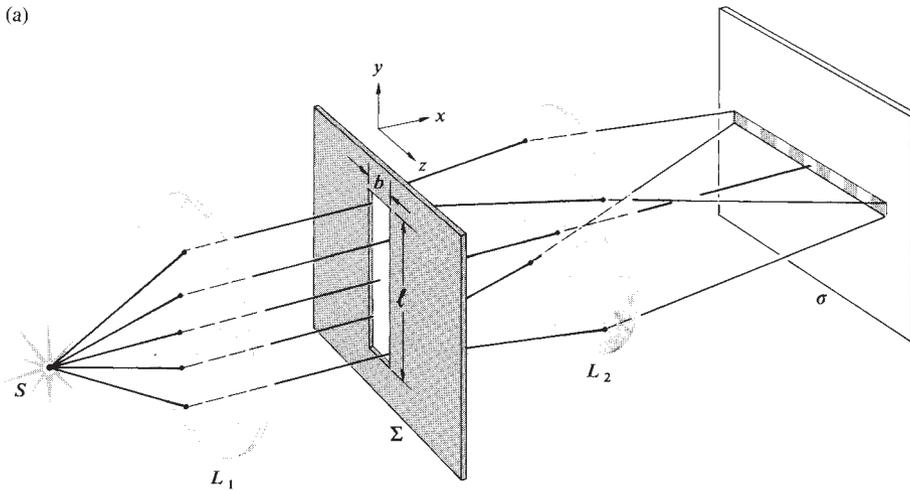
$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad (10.17)$$

En utilisant la *fonction sinc* (voir Table 1 de l'annexe mathématique et p. 53) :

$$I(\theta) = I(0) \operatorname{sinc}^2 \beta$$

Il y a une symétrie par rapport à l'axe y et cette expression est valable dans n'importe quel plan contenant cet axe. Dans le cas où $D \gg \lambda$, notons que l'éclairement décroît extrêmement rapidement dès que θ s'écarte de zéro, puisque $\beta = (\pi D / \lambda) \sin \theta$. Cela provient du fait que β devient très grand pour des sources de grande longueur D (par exemple, un centimètre pour de la lumière visible). Du fait de l'équation (10.15), la phase de l'ensemble de la source linéaire est équivalente à celle d'une source ponctuelle unique qui serait située au centre de la ligne, à une distance R de P . Finalement, si une source linéaire cohérente est relativement longue ($D \gg \lambda$), on peut la traiter comme une source ponctuelle qui rayonne essentiellement dans le plan perpendiculaire à la source linéaire, c'est-à-dire suivant $\theta = 0$. En d'autres termes, son émission ressemble à une onde circulaire dans ce plan, xz . Par contraste, notons que si $\lambda \gg D$, β est petit, $\sin \beta \approx \beta$, et $I(\theta) \approx I(0)$. L'éclairement est alors constant pour tout θ , et la ligne source s'apparente à un point source émettant des ondes sphériques.

Intéressons-nous à présent au problème de la diffraction de Fraunhofer par une fente ou par une ouverture rectangulaire longue et étroite (figure 10.6), qui pourrait avoir typiquement une largeur de plusieurs centaines de λ pour une longueur ℓ de



(b)

Figure 10.6 (a) Diffraction de Fraunhofer par une fente unique. (b) Figure de diffraction obtenue avec une fente éclairée verticalement illuminée par un point source.

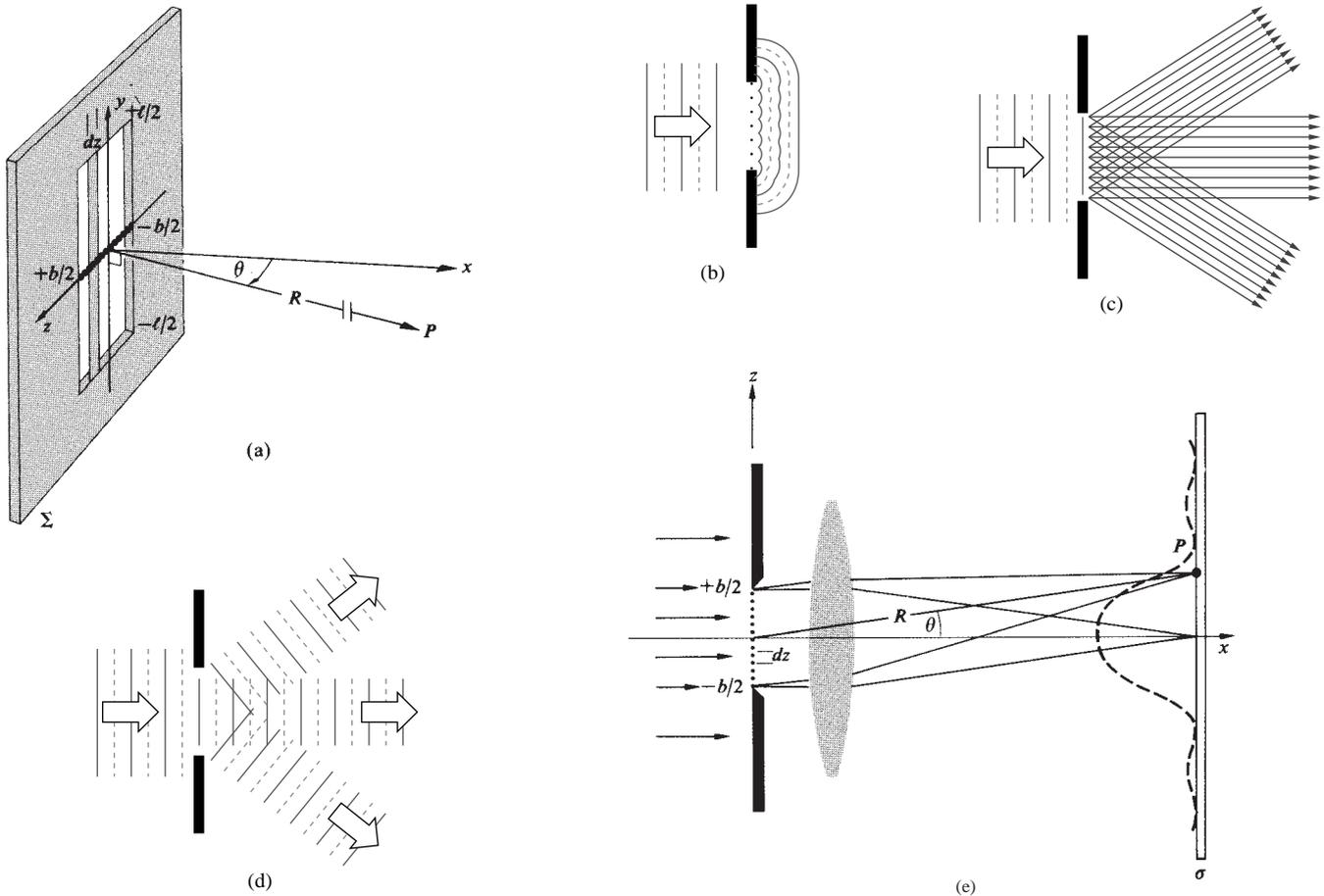


Figure 10.7 (a) On considère que le point P de σ est situé à une distance infinie de Σ . (b) Ondelettes de Huygens émises au niveau de l'ouverture. (c) Représentation équivalente en termes de rayons. Des rayons parallèles sont émis dans plusieurs directions. (d) Ces faisceaux de rayons parallèles correspondent à des ondes planes, qui peuvent être vues comme les composantes de Fourier à trois dimensions. (e) Fente unique éclairée par des ondes planes monochromatiques.

quelques centimètres. La procédure d'analyse consiste alors à diviser la fente en une juxtaposition de longues bandes élémentaires (dz par ℓ) parallèles à l'axe y , comme le montre la figure 10.7. Chacune de ces bandes se comporte comme une longue source linéaire cohérente, que l'on peut remplacer par un émetteur ponctuel sur l'axe z . En effet, chacun de ces points émet une onde circulaire dans le plan xz (ou plan $y = 0$). Cette approche est raisonnable, puisque la fente est longue, et que les fronts d'onde émergents ne sont pratiquement pas obstrués dans la direction parallèle à la fente. Il y aura ainsi très peu de diffraction dans la direction parallèle aux côtés de la fente. Le problème se réduit alors à trouver, dans le plan xz , le champ

qui résulte de la contribution d'un nombre infini de points sources répartis sur la largeur de la fente, le long de l'axe z . Il suffit donc d'évaluer l'intégrale de la contribution dE de chaque segment dz , dans l'approximation de Fraunhofer. Mais, encore une fois, cette situation est équivalente au cas d'une source linéaire cohérente. Comme on l'a déjà vu, la solution complète est donc, pour la fente :

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad [10.17]$$

pourvu que :

$$\beta = (kb/2) \sin \theta \quad (10.18)$$

où θ est l'angle entre la direction d'observation et le plan xy (voir problème 10.3). Notons qu'ici, la source linéaire est courte, $D = b$, β n'est pas grand et, bien que l'éclairement chute rapidement, des maxima secondaires seront observables. Les extrema de $I(\theta)$ sont obtenus pour les valeurs de β telles que $dI/d\beta = 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{dI}{d\beta} = I(0) \frac{2 \sin \beta (\beta \cos \beta - \sin \beta)}{\beta^3} = 0 \quad (10.19)$$

Les valeurs minimales de l'éclairement, égales à zéro, se produisent lorsque $\sin \beta = 0$, donc pour :

$$\beta = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots \quad (10.20)$$

Il découle aussi de l'équation (10.19) que lorsque :

$$\begin{aligned} \beta \cos \beta - \sin \beta &= 0 \\ \tan \beta &= \beta \end{aligned} \quad (10.21)$$

On peut trouver graphiquement les solutions de cette équation transcendante, comme le montre la figure 10.8. Les points d'intersection des courbes $f_1(\beta) = \tan \beta$ avec la droite $f_2(\beta) = \beta$ sont communs aux deux courbes et satisfont donc l'équation (10.21). Un seul maximum existe entre deux minima adjacents [équation (10.20)]. $I(\theta)$ doit donc avoir ses maxima secondaires pour ces valeurs de β (à savoir : $\pm 1,4303\pi, \pm 2,4590\pi, \pm 3,4707\pi, \dots$).

La figure 10.9 illustre assez simplement ce qui se passe. Considérons que chaque point de l'ouverture émet des rayons dans toutes les directions du plan xz . La lumière, qui continue à se propager directement vers l'avant, sur la figure 10.9a, est le faisceau qui n'est pas diffracté. Tous ses rayons arrivent en phase sur l'écran d'observation, où ils forment un point lumineux central. Si l'écran n'est pas à l'infini, les rayons qui convergent sur lui ne sont pas vraiment parallèles, mais avec l'écran à l'infini, ou mieux encore, avec une lentille à la place, les rayons se comportent suivant la figure ; la figure 10.9b montre un faisceau qui émerge sous un angle θ_1 , tel que la différence de chemin optique entre ses rayons extrêmes, ceux du haut et ceux du bas de l'ouverture, soit $b \sin \theta_1$, est égale à une longueur d'onde. Le rayon passant par le milieu de la fente va alors être retardé de $\frac{1}{2}\lambda$ par rapport au rayon du haut et il l'annule exactement. De la même manière, un rayon provenant d'une position décalée en dessous du milieu va annuler un rayon décalé au-dessous du sommet de la même quantité et ainsi de suite. D'un bord à l'autre de la fente, les paires de

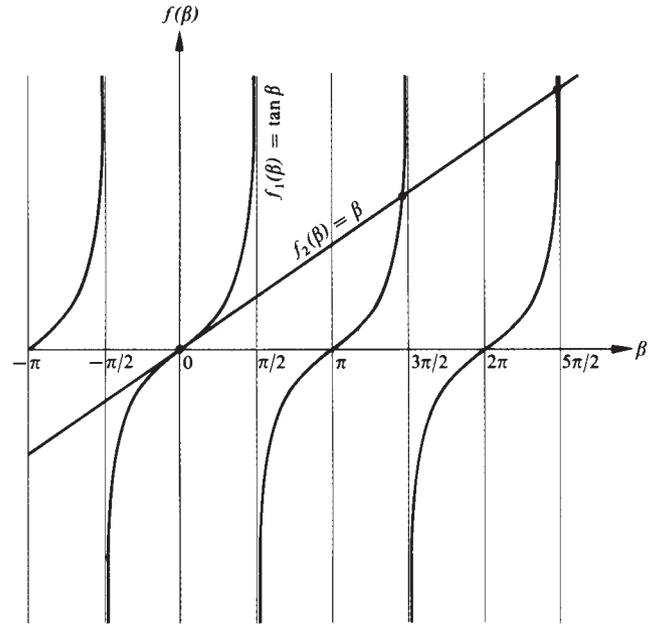


Figure 10.8 Les points d'intersection de la droite et de la courbe sont les solutions de l'équation (10.21).

rayons s'annulent deux à deux, entraînant un minimum. L'éclairement chute de part et d'autre de son maximum central pour atteindre le premier zéro à $\sin \theta_1 = \pm \lambda/b$.

À mesure que l'angle θ croît, une petite fraction des rayons va de nouveau interférer constructivement, et l'éclairement va augmenter à nouveau pour former un pic secondaire. Si l'on fait croître encore l'angle θ , on atteint un autre minimum, comme le montre la figure 10.9c. À présent, imaginons que l'ouverture soit divisée en quatre quartiers. Rayon par rayon, le quartier le plus haut va annuler celui qui le précède et le troisième annule le quatrième. Les paires de rayons qui sont localisées au même endroit sur deux quartiers adjacents ont un déphasage de $\lambda/2$ et interfèrent de manière destructive. L'éclairement est donc nul lorsque :

$$b \sin \theta_m = m\lambda$$

où $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, ce qui est équivalent à l'équation (10.20), avec $\beta = m\pi = (kb/2) \sin \theta_m$.

Il faut cependant être prudent car le principe de Huygens-Fresnel ne prend pas en compte, comme il le faudrait, des variations en fonction de l'angle de l'amplitude de chaque

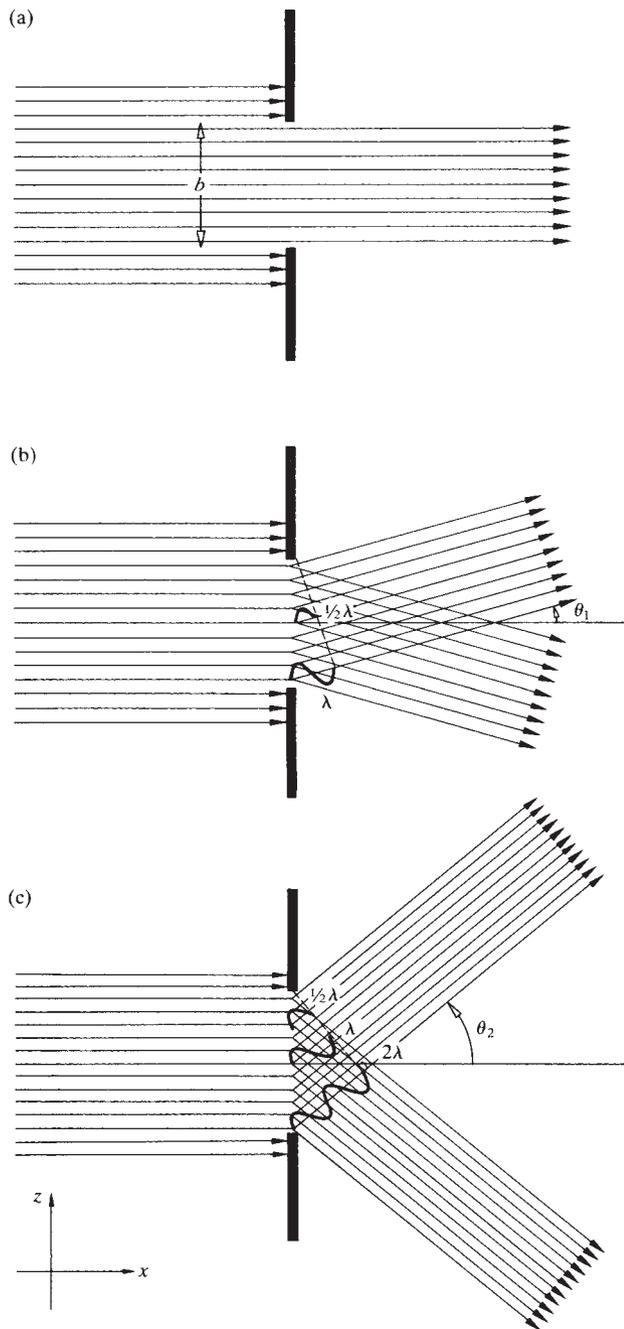


Figure 10.9 Diffraction de la lumière dans plusieurs directions. Ici, l'ouverture considérée est une fente simple, comme à la figure 10.7.

ondelette secondaire. On reviendra sur ce point lorsque l'on considérera le *facteur d'obliquité* dans la diffraction de Fresnel, où cet effet est important. En ce qui concerne la diffraction de Fraunhofer, la distance entre l'ouverture et le plan d'observation est suffisamment grande et l'on n'a pas besoin de prendre en compte ce facteur, pourvu que θ reste petit.

La figure 10.10 représente un tracé de la variation de l'éclairement exprimée par l'équation (10.17). Considérons certains points de cette courbe, par exemple, le troisième maximum secondaire obtenu à $\beta = 3,4707\pi$. À β constant, une augmentation de la largeur b de la fente entraîne une diminution en θ , puisque $\beta = (\pi b/\lambda) \sin \theta$. Dans ces conditions, la figure se resserre vers le maximum principal, comme pour une diminution de λ . Si la source émet de la lumière blanche, les maxima secondaires se manifestent sous forme d'une succession de couleurs qui se termine dans le rouge sur le bord pour des valeurs extrêmes de θ . Chaque composante colorée possède des minima et des maxima secondaires pour des angles dont les valeurs sont caractéristiques de la longueur d'onde (problème 10.6). En effet, seule la région centrale autour de $\theta = 0$ est blanche, car toutes les composantes colorées s'y superposent de façon constructive.

Si l'on enlevait la fente Σ de la figure 10.6, l'image du point source S se trouverait au centre de la figure de diffraction. Avec ce type d'éclairage, la figure de diffraction obtenue avec la fente en place est une série de traits dans le plan yz de l'écran σ , un peu comme une image étalée de S (figure 10.6b). Si l'on remplace, dans le plan focal objet du collimateur L_1 , la source ponctuelle S par une source linéaire incohérente, orientée parallèlement à la fente, la figure de diffraction se trouvera élargie en une série de bandes lumineuses. Tout point de la source linéaire produit une figure de diffraction indépendante qui est décalée, par rapport aux autres, le long de l'axe y . S'il n'y avait pas d'écran diffractant, l'image de la source serait une ligne parallèle à la fente originale. En présence d'un écran diffractant, l'image de la ligne est étalée, comme l'était le point image de la source S (figure 10.11). N'oublions pas que c'est la petite dimension de la fente diffractante qui provoque cet étalement.

On peut observer facilement la figure de diffraction d'une fente seule sans équipement particulier. N'importe quelle source convient (par exemple, la lumière d'un lampadaire éloigné, de nuit, une petite lampe incandescente, un filet de lumière solaire perçant à travers un volet ou un rideau). Tout ce qui ressemble à une source ponctuelle ou linéaire peut servir. En fait, la meilleure source est peut-être une ampoule ordinaire transparente et à filament rectiligne (celles où le filament est vertical et fait environ 7 cm de long). Pour fabriquer une fente diffractante,

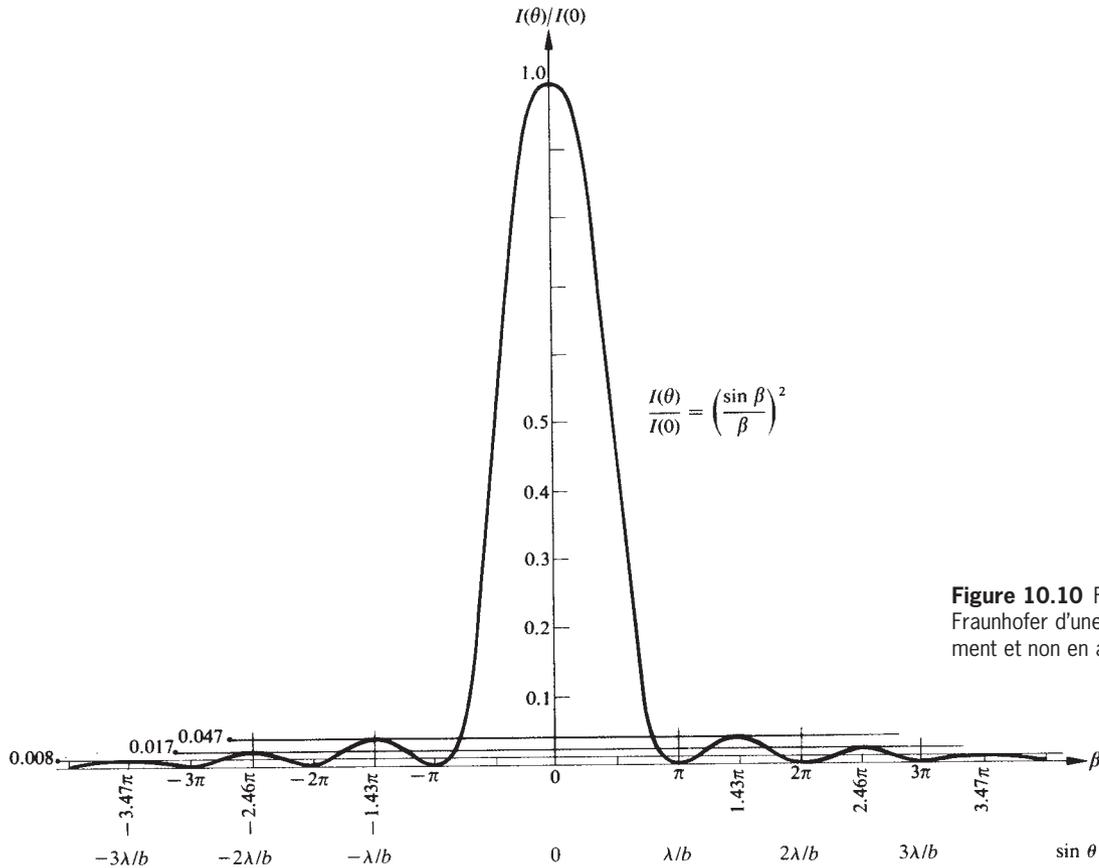


Figure 10.10 Figure de diffraction de Fraunhofer d'une fente simple (loi en éclaircissement et non en amplitude).

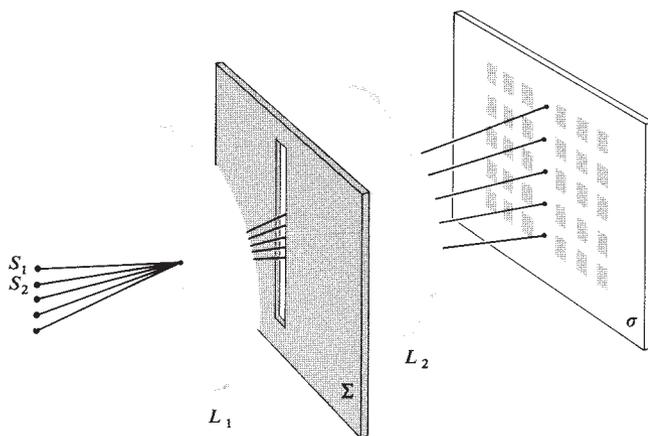


Figure 10.11 Figure de diffraction d'une fente éclairée par une fente source, parallèle. Voir la première photographie de la figure 10.14.

on peut imaginer toutes sortes de montages : un peigne ou une fourchette dont on a incliné les dents pour réduire l'espacement, une lamelle de microscope sur laquelle on a déposé de l'encre de chine noire et que l'on a soigneusement rayée... Un petit palmer plat peut aussi constituer une très bonne fente de largeur réglable. Il suffit de régler sa largeur à quelques centièmes de millimètres et de disposer cette fente devant l'œil, parallèlement au filament de l'ampoule, et de regarder alors à l'infini, par-delà la fente, votre œil jouant le rôle de L_2 .

10.2.2 La fente double

D'après la figure 10.7, il semble au premier abord que la localisation du maximum principal soit toujours alignée avec le centre de l'ouverture diffractante. Cette assertion n'est, cependant, généralement pas vraie. La figure de diffraction est en fait

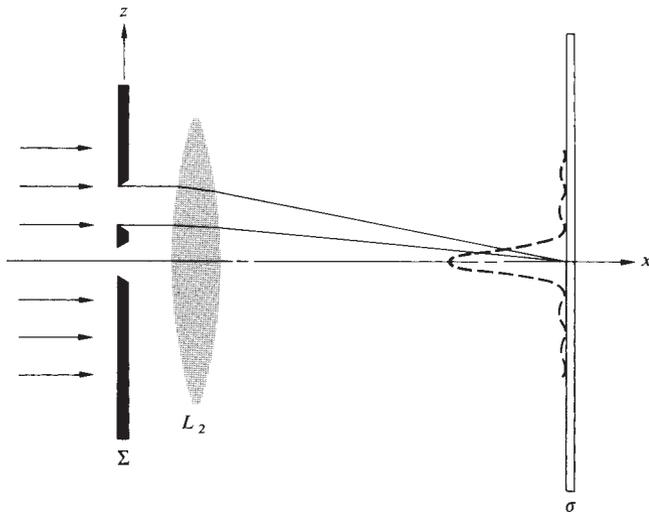


Figure 10.12 Diffraction par une fente double (deux fentes identiques parallèles).

centrée suivant l'axe de la lentille, et elle garde exactement la même forme et la même localisation quelle que soit la position de la fente, tant que son orientation ne change pas et que les approximations faites sont valables (figure 10.12). Toute onde qui se propage parallèlement à l'axe de la lentille converge au foyer image de L_2 . C'est donc à cet endroit que se situe l'image de S , ainsi que le centre de la figure de diffraction. Supposons maintenant que nous n'ayons, non pas une fente diffractante unique, mais deux, de largeur b , parallèles entre elles, et séparées par une distance a de centre à centre (figure 10.13). Si elle était seule, chaque fente produirait une figure de diffraction sur l'écran d'observation σ . Les contributions respectives de chacune des deux fentes s'y superposent, et, bien qu'elles soient essentiellement égales en amplitude, elles peuvent présenter des différences de phase significatives. Comme c'est la même onde primaire qui excite les deux sources secondaires des deux fentes, les ondelettes qui en résultent sont cohérentes et peuvent interférer. Si l'onde plane primaire arrive en Σ sous un certain angle θ_i (voir problème 10.3), il existe une différence de phase constante entre les sources secondaires. Pour une incidence normale, les ondelettes sont

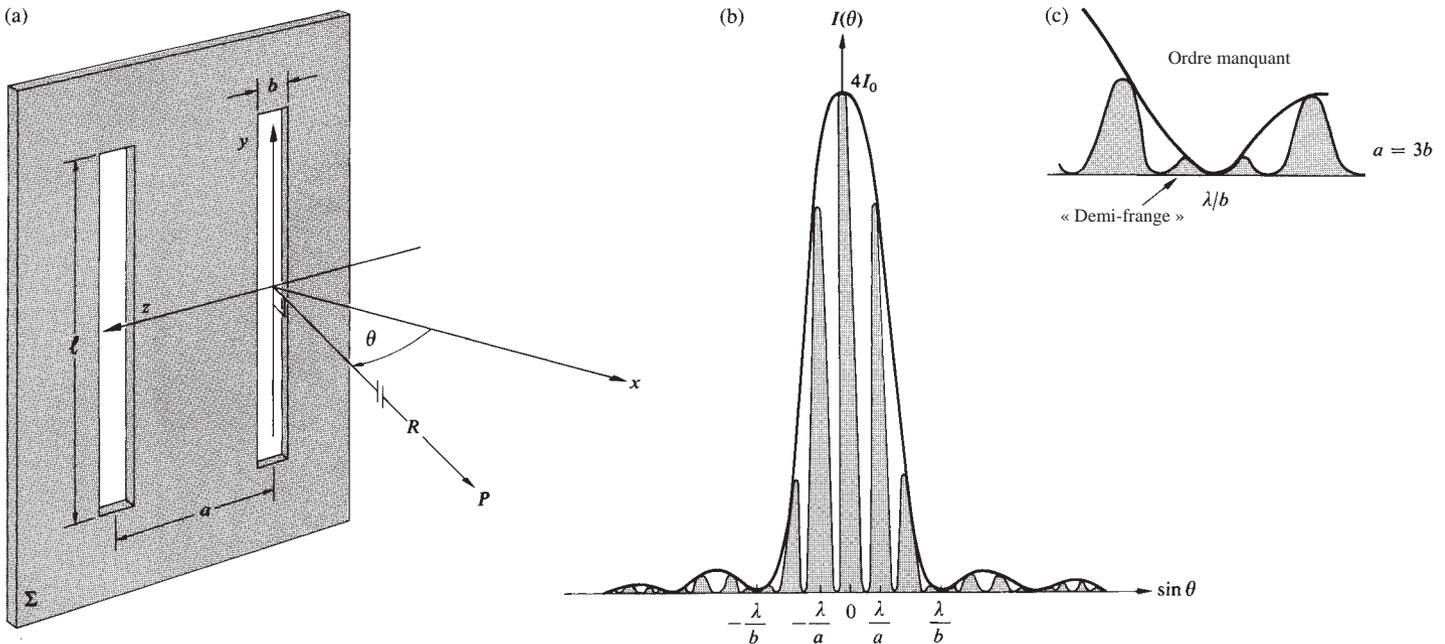


Figure 10.13 (a) Paramètres descriptifs du montage de diffraction avec une fente double. Le point P de l'écran d'observation σ est considéré comme infiniment éloigné. (b) Figure obtenue dans le cas où $a = 3b$.

émises en phase. L'état d'interférence en un point d'observation quelconque est déterminé par les différences entre les chemins optiques parcourus par les ondelettes qui se superposent, en provenance des deux fentes. Comme on le verra, la distribution de l'éclairement (figure 10.14) résulte de la modulation d'une figure d'interférence à deux fentes, à variation rapide, par la figure de diffraction d'une fente unique.

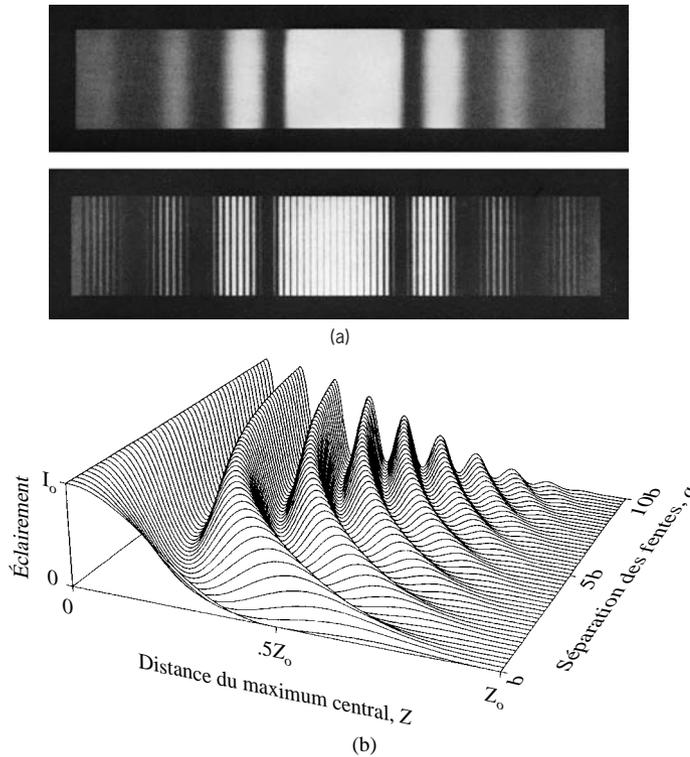


Figure 10.14 Figures de diffraction obtenues avec une fente simple et une fente double. (a) Photographies prises en lumière monochromatique. Les fines hachures proviennent uniquement de l'impression. (Photos M. Cagnet, M. Francon, et J. C. Thierr : *Atlas optique des Erscheinungen*, Berlin – Heidelberg – New York : Springer, 1962.) (b) Lorsque l'espace entre les fentes est égal à b , les deux fentes n'en font plus qu'une (de largeur $2b$) et l'on retrouve la figure de la fente simple. Cela correspond à la courbe du premier plan. La courbe la plus éloignée correspond à une distance entre fentes égale à $a = 10b$. Noter que les figures de fente double ont leur premier minimum de diffraction à une distance Z_0 du maximum central. Noter également comment les courbes évoluent vers le profil de la figure 10.13b, à mesure que la largeur de fente b diminue par rapport à la distance de séparation a . (D'après « Graphical Representations of Fraunhofer Interference and Diffraction » *Am. J. Phys.*, 62, 6, (1994), A. B. Bartlett, University of Colorado et B. Mechtly, Northeast Missouri State University et l'American Association of Physics Teachers.)

Afin d'obtenir une expression du champ optique en un point de σ , il suffit de reformuler l'analyse développée pour la fente unique. Chacune des deux ouvertures est divisée en bandes élémentaires (dz par ℓ), qui se comportent comme une infinité de sources ponctuelles alignées le long de l'axe z . Dans l'approximation de Fraunhofer, leur contribution totale au champ électrique [équation (10.12)] est alors :

$$E = C \int_{-b/2}^{b/2} F(z) dz + C \int_{a-b/2}^{a+b/2} F(z) dz \quad (10.22)$$

où $F(z) = \sin [\omega t - k(R - z \sin \theta)]$. Le coefficient C correspond au rapport entre l'intensité linéique de la source secondaire (supposée indépendante de z sur chaque ouverture), et de la distance R , entre l'origine et le point P , prise comme constante. Comme nous sommes uniquement concernés par l'éclairement relatif de σ , la valeur exacte de C n'a que peu d'importance pour le moment. L'intégration de l'équation (10.22) donne :

$$E = bC \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) [\sin(\omega t - kR) + \sin(\omega t - kR + 2\alpha)] \quad (10.23)$$

Avec $\alpha \equiv (ka/2) \sin \theta$ et, comme précédemment, $\beta \equiv (kb/2) \sin \theta$. Cela est simplement la somme en P de champs issus de chacune des fentes, comme le donne l'équation (10.15). La distance entre la première fente et P est R , donnant une contribution de phase de $-kR$. La distance entre la seconde fente et P est $(R - a \sin \theta)$ ou $(R - 2\alpha/k)$, ce qui entraîne un terme de phase égal à $(-kR + 2\alpha)$, comme dans la deuxième fonction sinus. La quantité 2β est la différence de phase ($k\Delta$) entre deux rayons quasiment parallèles, arrivant au point P de σ , des deux bords extrêmes de l'une des fentes. La quantité 2α est la différence de phase entre deux ondes qui arrivent en P ; l'une provenant d'un point quelconque sur la première fente et l'autre du point correspondant sur la seconde. Si l'on simplifie encore l'équation (10.23), on obtient :

$$E = 2bC \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \cos \alpha \sin(\omega t - kR + \alpha)$$

Cette expression, élevée au carré et moyennée sur un intervalle de temps relativement long est l'éclairement :

$$I(\theta) = 4I_0 \left(\frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \right) \cos^2 \alpha \quad (10.24)$$

Dans la direction $\theta = 0$ (i.e. lorsque $\beta = \alpha = 0$), I_0 est la contribution en éclairement de chacune des fentes individuelles et $I(0) = 4I_0$ est l'éclaircement total. Le facteur 4 vient du fait que l'amplitude du champ électrique au centre est le double de ce qu'elle serait avec une seule des fentes.

Si, dans l'équation (10.24), β devient extrêmement petit, ($k\beta \ll 1$) alors $(\sin \beta)/\beta \approx 1$ et l'équation se réduit à l'expression de l'éclaircement pour une paire de sources linéaires allongées, c'est-à-dire l'expérience de Young [(équation (9.17))]. Si, d'un autre côté, $a = 0$, les deux sources n'en forment plus qu'une. Dans ce cas, $\alpha = 0$ et l'équation (10.24) devient $I(\theta) = 4I_0(\sin^2 \beta)/\beta^2$. Elle correspond donc à l'équation (10.17) obtenue pour la fente unique, mais avec une intensité de source deux fois plus importante. On voit donc que l'on peut considérer l'expression complète comme le résultat d'un terme d'interférence en $\cos^2 \alpha$ modulé par un terme de diffraction en $(\sin^2 \beta)/\beta^2$. Si les fentes ont une largeur finie mais très petite, la figure de diffraction de l'une ou de l'autre sera uniforme sur une large région centrale, et des bandes, similaires aux franges idéales de l'expérience de Young, apparaîtront dans cette région. Pour les directions angulaires θ telles que :

$$\beta = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$$

Les effets de la diffraction sont tels qu'aucune lumière ne parvient jusqu'à σ , et il ne peut donc pas y avoir d'interférences. Aux points de σ tels que :

$$\alpha = \pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \dots$$

Les diverses contributions au champ électrique sont complètement déphasées et s'annulent, quelle que soit la quantité de lumière rendue disponible par la diffraction.

La figure 10.13b représente la distribution relative d'éclaircement dans la figure de diffraction de Fraunhofer par deux fentes. On notera que c'est la combinaison des figures 9.9 et 10.6. La courbe représentée est celle obtenue dans le cas particulier, où $a = 3b$ (i.e. $\alpha = 3\beta$). On peut aussi en déduire l'aspect qu'aurait la figure pour $a = mb$ (m étant un nombre quelconque). Il y aurait $2m$ franges lumineuses (en comptant les « franges fractionnaires »)* dans le pic de diffraction central (problème 10.10). Il peut arriver qu'un pic d'interférence et un creux de diffraction correspondent à la même valeur de θ . Dans ce cas, il n'y a pas de lumière pour produire, à cette

position précise, un processus d'interférence. Le pic supprimé est alors qualifié d'*ordre manquant*.

Il est assez facile d'observer expérimentalement des figures de diffraction de fentes doubles. Un filament rectiligne d'ampoule tubulaire est, là encore, la meilleure source linéaire. Pour les fentes, on peut toujours employer une lame de microscope avec un dépôt d'encre de Chine ou, mieux encore, avec une suspension colloïdale de graphite dans de l'alcool (c'est plus opaque). La manipulation consiste à tracer sur l'encre sèche deux fentes parallèles à l'aide d'une lame de rasoir. Il s'agit alors de s'installer à environ 3 m de la source, en tenant la lame de microscope préparée devant son œil, de manière à ce que les fentes soient parallèles au filament de la lampe. L'œil, regardant à l'infini, sert de lentille de focalisation. On doit normalement voir les franges caractéristiques. On peut interposer ensuite un film plastique rouge ou bleu et observer l'effet sur la largeur des franges. On peut constater également ce qu'il se passe lorsque l'on recouvre l'une, puis les deux fentes diffractantes, avec une autre lamelle de microscope. On pourra aussi déplacer lentement les fentes dans la direction des z , puis, en les laissant immobiles, déplacer l'œil dans la même direction. On vérifiera ainsi que la position du centre de la figure de diffraction est bien déterminée par celle de la lentille (l'œil) et non par celle de l'ouverture.

10.2.3 Diffraction par des fentes multiples

La procédure d'obtention de la loi d'éclaircement dans la figure de diffraction par des fentes multiples est la même que celle utilisée dans le cas de deux fentes, mais les limites de l'intégration doivent être convenablement adaptées au problème. Considérons le cas de N fentes parallèles, infiniment longues et étroites, de largeur b , séparées par la distance a , de centre à centre (figure 10.15). Comme précédemment, on place l'origine du système de coordonnées au centre de la première fente. Le champ optique total en un point de l'écran d'observation σ , est donné par :

$$\begin{aligned} E = C \int_{-b/2}^{b/2} F(z) dz + C \int_{a-b/2}^{a+b/2} F(z) dz \\ + C \int_{2a-b/2}^{2a+b/2} F(z) dz + \dots \\ + C \int_{(N-1)a-b/2}^{(N-1)a+b/2} F(z) dz \end{aligned} \quad (10.25)$$

*Notons que m ne doit pas forcément être un entier. Si m est un entier, on observe des « demi-franges », comme dans la figure 10.13c.

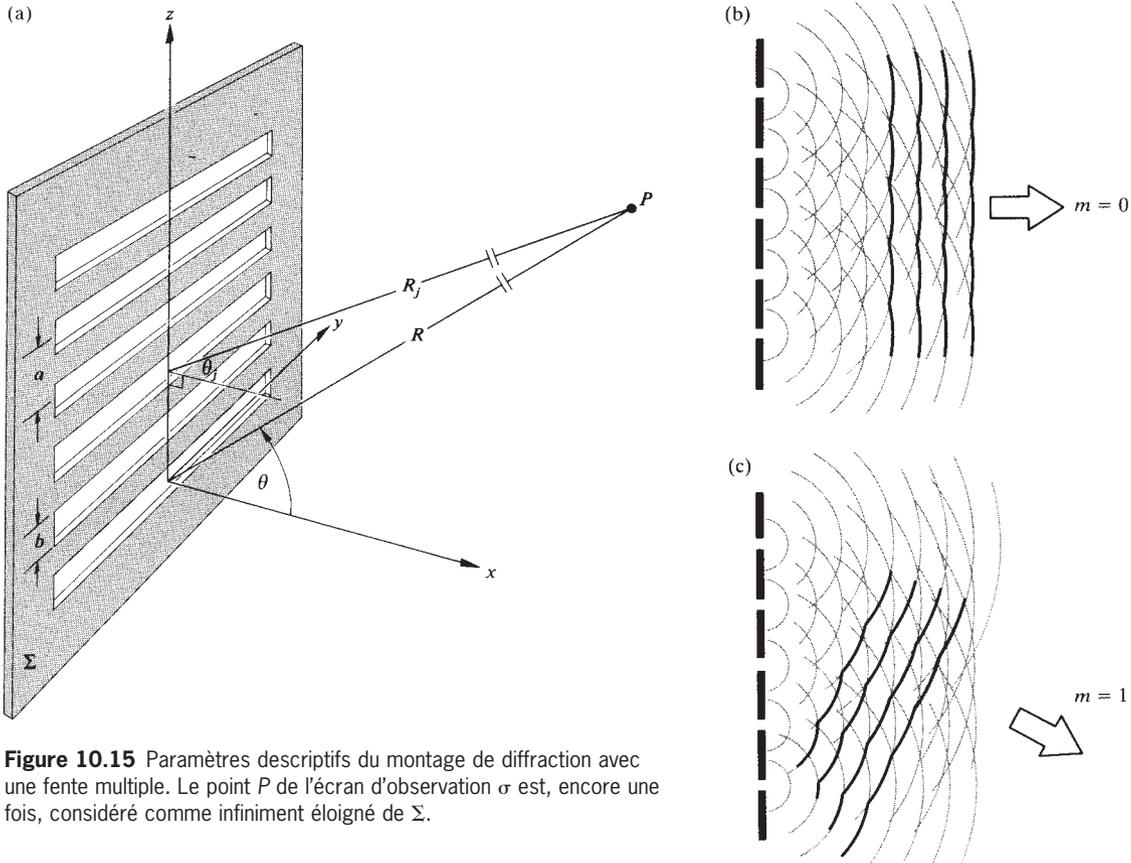


Figure 10.15 Paramètres descriptifs du montage de diffraction avec une fente multiple. Le point P de l'écran d'observation σ est, encore une fois, considéré comme infiniment éloigné de Σ .

où, comme précédemment, $F(z) = \sin[\omega t - k(R - z \sin \theta)]$. Cela est valable dans les conditions de Fraunhofer et l'ouverture doit donc être configurée de telle manière que les fentes soient tout près de l'origine. L'approximation [équation (10.11)] :

$$r = R - z \sin \theta \quad (10.26)$$

s'applique à l'ensemble des fentes. La contribution de la $j^{\text{ème}}$ fente (dans la convention où la première fente est indicée 0) s'obtient en évaluant uniquement son intégrale correspondante dans l'équation (10.25), c'est-à-dire :

$$E_j = \frac{C}{k \sin \theta} [\sin(\omega t - kR) \sin(kz \sin \theta) - \cos(\omega t - kR) \cos(kz \sin \theta)]_{ja-b/2}^{ja+b/2}$$

Sous réserve de pouvoir écrire : $\theta_j \approx \theta$. Après quelques remaniements, on obtient :

$$E_j = bC \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \sin(\omega t - kR + 2\alpha_j) \quad (10.27)$$

Toujours avec $\beta = (kb/2) \sin \theta$ et $\alpha = (ka/2) \sin \theta$. Notons que cette expression est équivalente à celle obtenue pour une source linéaire [équation (10.15)] ou, bien sûr, pour une fente unique, où, en accord avec l'équation (10.26) et la figure 10.15, $R_j = R - ja \sin \theta$, et donc $-kR + 2\alpha j = -kR_j$. Le champ optique total, donné par l'équation (10.25), est simplement la somme des contributions de chacune des fentes :

$$E = \sum_{j=0}^{N-1} E_j$$

$$\text{ou bien } E = \sum_{j=0}^{N-1} bC \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \sin(\omega t - kR + 2\alpha j) \quad (10.28)$$

On peut écrire cette expression sous la forme de la partie imaginaire d'une exponentielle complexe :

$$E = \text{Im} \left[bC \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) e^{i(\omega t - kR)} \sum_{j=0}^{N-1} (e^{i2\alpha})^j \right] \quad (10.29)$$

Mais nous avons déjà évalué la même série géométrique lorsque nous avons cherché à simplifier l'équation (10.2). On peut ainsi écrire l'équation (10.29) sous la forme :

$$E = bC \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right) \sin[\omega t - kR + (N-1)\alpha] \quad (10.30)$$

La distance entre le centre de cette matrice diffractante et le point P est égale à $[R - (N-1)(a/2) \sin \theta]$. Par conséquent, la phase de E en P correspond à celle d'une onde qui serait émise par un point source situé au centre de cette matrice. La loi en éclairement est alors :

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \quad (10.31)$$

Notons que I_0 est l'éclairement que l'on obtiendrait si l'on n'y avait, dans la direction $\theta = 0$, qu'une seule fente, et que $I(0) = N^2 I_0$. En d'autres termes, les ondes arrivant en P dans la direction frontale sont toutes en phase. Leurs champs s'ajoutent constructivement. Chaque fente, prise individuellement, engendrerait précisément la même distribution d'éclairement. Les contributions des diverses fentes se superposent et conduisent à un système d'interférence à ondes multiples, modulé par une enveloppe, qui correspond à la figure de diffraction d'une fente unique. Si l'on réduisait la largeur de chaque fente à zéro, l'équation (10.31) deviendrait l'expression de l'éclairement obtenu pour un ensemble cohérent et linéaire d'oscillateurs

[équation (10.6)]. Comme dans le traitement précédent [équation (10.17)], les **maxima principaux** s'obtiennent lorsque $(\sin N\alpha / \sin \alpha) = N$, c'est-à-dire, lorsque :

$$\alpha = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$$

Ou, de manière équivalente, comme $\alpha = (ka/2) \sin \theta$,

$$a \sin \theta_m = m\lambda \quad (10.32)$$

avec $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Il en découle un résultat assez général, à savoir que les directions (valeurs de θ) dans lesquelles se produisent les maxima sont indépendantes de N (si $N \geq 2$). Les minima (éclairage nul) se produisent lorsque $(\sin N\alpha / \sin \alpha)^2 = 0$, ou lorsque :

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{N}, \pm \frac{2\pi}{N}, \pm \frac{3\pi}{N}, \dots, \pm \frac{(N-1)\pi}{N}, \pm \frac{(N+1)\pi}{N}, \dots \quad (10.33)$$

Entre deux maxima principaux consécutifs (i.e. sur la gamme de α de π), il y aura donc $(N-1)$ minima. Et, bien sûr, entre deux minima consécutifs, il y aura un **maximum secondaire**. Le terme $(\sin N\alpha / \sin \alpha)^2$, que l'on peut considérer comme celui qui est représentatif des effets d'interférence, possède un numérateur variant rapidement et un dénominateur variant lentement. Les maxima subsidiaires sont donc situés approximativement aux points où $\sin N\alpha$ a sa plus grande valeur, c'est-à-dire :

$$\alpha = \pm \frac{3\pi}{2N}, \pm \frac{5\pi}{2N}, \dots \quad (10.34)$$

Les $(N-2)$ *maxima secondaires* entre deux maxima principaux consécutifs sont nettement visibles sur la figure 10.16. On peut avoir une idée de l'éclairement en ces pics en réécrivant l'équation (10.31) sous la forme :

$$I(\theta) = \frac{I(0)}{N^2} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \quad (10.35)$$

Où $|\sin N\alpha| = 1$ aux points d'intérêt. Pour de grandes valeurs de N , α est petit et $\sin^2 \alpha \approx \alpha^2$. Au premier pic secondaire, $\alpha = 3\pi/2N$, et, dans ce cas :

$$I \approx I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{2}{3\pi} \right)^2 \quad (10.36)$$

Et la valeur de l'éclairement a chuté à environ $\frac{1}{22}$ de celle du maximum principal voisin (voir problème 10.12). Comme $(\sin \beta) / \beta$ varie lentement pour de faibles valeurs de β , il diffère

peu de 1, à proximité du maximum principal d'ordre zéro, et donc : $I/I(0) \approx \frac{1}{22}$. Pour le pic secondaire suivant, ce rapport tombe à $\frac{1}{62}$ et il continue à décroître, à mesure que α tend vers la valeur qu'il prend à mi-chemin entre les maxima principaux. Pour ce point de symétrie, $\alpha \approx \pi/2$, $\sin \alpha \approx 1$, et le rapport des éclairissements atteint sa valeur la plus basse, soit approximativement $1/N^2$. Ensuite, $\alpha > \pi/2$, et les éclairissements des maxima secondaires recommencent à croître.

Si l'on essaye d'obtenir les mêmes franges que celles de la figure 10.16 en utilisant une ampoule tubulaire et des fentes artisanales, on aura sans doute de la difficulté à voir distinctement les maxima secondaires. En fait, la seule différence observable entre la fente double et la fente multiple sera un élargissement apparent des zones sombres entre les maxima principaux. Comme indiqué sur la figure 10.16, ces régions sombres deviennent effectivement plus larges que les bandes brillantes au fur et à mesure que N augmente, et les pics secondaires disparaissent. Si l'on considère que chaque maximum principal est délimité en largeur par deux zéros adjacents, alors chacun s'étend sur une longueur en θ , ($\sin \theta \approx \theta$) d'approximativement $2\lambda/Na$. À mesure que N augmente, les maxima principaux maintiennent leur espacement relatif (λ/a), mais ils deviennent de plus en plus étroits. La figure 10.17 montre le cas de six fentes, avec $a = 4b$.

Concernant la fente multiple, le terme d'interférence de l'équation (10.35) est de la forme $(\sin^2 N\alpha)/N^2 \sin^2 \alpha$. Ainsi, lorsque N est important, on peut interpréter $(N^2 \sin^2 \alpha)^{-1}$ comme une enveloppe en dessous de laquelle $\sin^2 N\alpha$ varie rapidement. Notons que, pour α petit, ce terme d'interférence s'apparente à $\text{sinc}^2 N\alpha$.

10.2.4 L'ouverture rectangulaire

Considérons la configuration de la figure 10.18. Une onde plane monochromatique se propageant dans la direction des x rencontre un écran diffractant opaque Σ . Comme précédemment, on veut évaluer la répartition de l'éclairissement en champ lointain ou, ce qui revient au même, en un point arbitraire éloigné P . D'après le principe de Huygens-Fresnel, on peut considérer qu'un élément d'aire dS de cette ouverture est constitué de sources secondaires cohérentes ponctuelles, dont les contributions en P restent en phase et interfèrent constructivement, si la dimension de dS est de l'ordre de λ , et quel que soit θ . On peut donc en conclure que dS émet une onde sphérique (problème 10.13). Si l'on appelle \mathcal{E}_A , la vigueur de la source par unité de surface, considérée ici comme constante sur toute l'extension

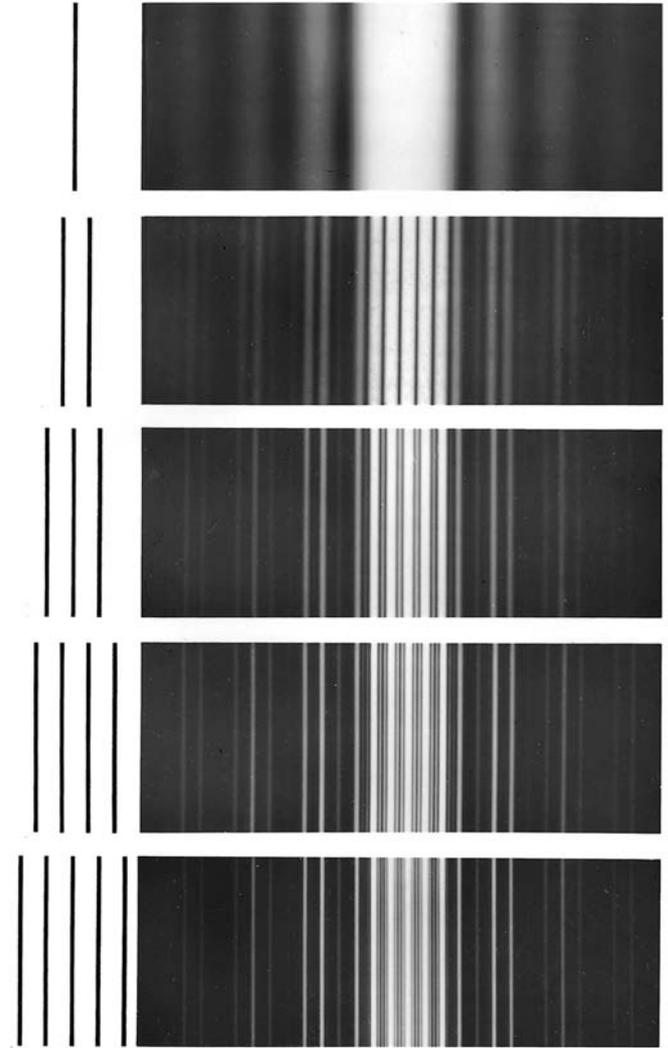


Figure 10.16 Figures de diffraction obtenues pour plusieurs configurations de fentes, indiquées sur la gauche. (Francis Weston Sears, *Optics*. Addison Wesley Longman, Inc.)

de l'ouverture lumineuse, la perturbation optique en P due à dS est la partie réelle ou la partie imaginaire de l'expression :

$$dE = \left(\frac{\mathcal{E}_A}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)} dS \quad (10.37)$$

Ce choix ne dépend que de la préférence personnelle à travailler avec des sinus ou des cosinus (il n'y a pas de différence, excepté un déphasage). La distance entre dS et P est :

$$r = [X^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2]^{1/2} \quad (10.38)$$

Et, comme on le sait, les conditions de Fraunhofer s'obtiennent lorsque cette distance tend vers l'infini. Comme précédemment, il suffit de remplacer, dans le terme d'amplitude, r par la distance \overline{OP} , c'est-à-dire par R , tant que l'ouverture est relativement petite. Pour ce qui est de la phase, l'approximation de

r doit être traitée plus précautionneusement ; $k = 2\pi/\lambda$ est un grand nombre. Pour cela, on développe l'équation (10.38), et, en utilisant :

$$R = [X^2 + Y^2 + Z^2]^{1/2} \quad (10.39)$$

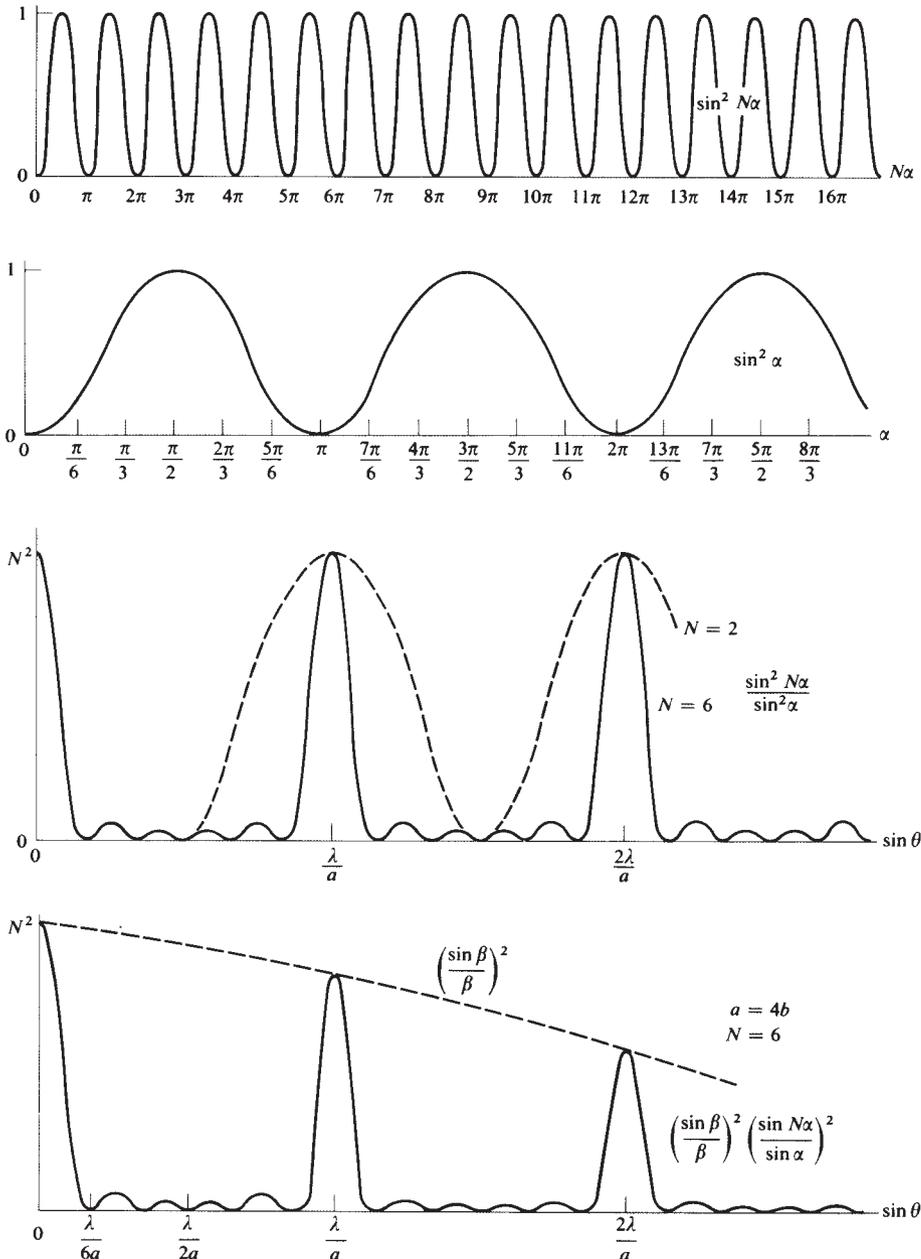


Figure 10.17 Profils obtenus pour un cas de diffraction par une fente multiple ($a = 4b$, $N = 6$).

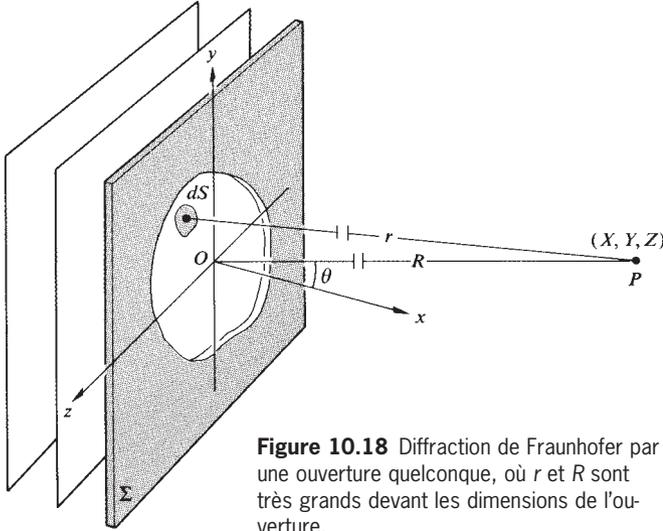


Figure 10.18 Diffraction de Fraunhofer par une ouverture quelconque, où r et R sont très grands devant les dimensions de l'ouverture.

on obtient :

$$r = R[1 + (y^2 + z^2)/R^2 - 2(Yy + Zz)/R^2]^{1/2} \quad (10.40)$$

Dans le cas du champ lointain, R est très grand par rapport aux dimensions de l'ouverture. De ce fait, le terme en $(y^2 + z^2)/R^2$ est certainement négligeable. Même si Y et Z peuvent être assez grands, nous nous limiterons à des directions assez proches de l'axe (θ relativement faible), ce qui relativise le problème de la directionnalité des émetteurs (« facteur d'obliquité »). Maintenant :

$$r = R[1 - 2(Yy + Zz)/R^2]^{1/2}$$

En faisant un développement binomial de cette expression et en ne gardant que les deux premiers termes, on obtient :

$$r = R[1 - (Yy + Zz)/R^2]$$

La perturbation totale arrivant en P est donc :

$$\tilde{E} = \frac{\mathcal{E}_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \iint_{\text{Ouverture}} e^{ik(Yy + Zz)/R} dS \quad (10.41)$$

Considérons la configuration particulière de la figure 10.19. L'équation (10.41) peut alors être écrite sous la forme :

$$\tilde{E} = \frac{\mathcal{E}_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \int_{-b/2}^{b/2} e^{ikYy/R} dy \int_{-a/2}^{a/2} e^{ikZz/R} dz$$

où $dS = dy dz$. Avec $\beta' \equiv kbY/2R$ et $\alpha' \equiv kaZ/2R$, on obtient :

$$\int_{-b/2}^{+b/2} e^{ikYy/R} dy = b \left(\frac{e^{i\beta'} - e^{-i\beta'}}{2i\beta'} \right) = b \left(\frac{\sin \beta'}{\beta'} \right)$$

Et, de manière similaire,

$$\int_{-a/2}^{+a/2} e^{ikZz/R} dz = a \left(\frac{e^{i\alpha'} - e^{-i\alpha'}}{2i\alpha'} \right) = a \left(\frac{\sin \alpha'}{\alpha'} \right)$$

Ainsi :

$$\tilde{E} = \frac{A \mathcal{E}_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \left(\frac{\sin \alpha'}{\alpha'} \right) \left(\frac{\sin \beta'}{\beta'} \right) \quad (10.42)$$

où A représente l'aire de l'ouverture. Comme $I = \langle (\text{Re } \tilde{E})^2 \rangle_T$,

$$I(Y, Z) = I(0) \left(\frac{\sin \alpha'}{\alpha'} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta'}{\beta'} \right)^2 \quad (10.43)$$

où $I(0)$ est l'éclairement en P_0 , c'est-à-dire à $Y = 0$ et $Z = 0$ (voir photos p. 483). Pour les valeurs de Y et de Z telles que $\alpha' = 0$ ou $\beta' = 0$, $I(Y, Z)$ prend la forme familière de la figure 10.10. Lorsque β' ou α' sont des multiples entiers non nuls de π (ou, ce qui revient au même, lorsque Y et Z sont respectivement des multiples entiers non nuls de $\lambda R/b$ et $\lambda R/a$), $I(Y, Z) = 0$ et l'on obtient une grille rectangulaire de lignes nodales, comme le montre la figure 10.20. Notons que la figure le long des axes Y et Z varie de façon *inversement* proportionnelle aux dimensions en y et z de l'ouverture. Une ouverture rectangulaire horizontale produit une figure de diffraction dont la partie centrale a la forme d'un rectangle vertical.

Le long de l'axe β' , la valeur de α' est nulle et les maxima secondaires sont localisés approximativement à mi-distance entre les zéros, donc à : $\beta'_m = \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \pm 7\pi/2, \dots$. À chaque maximum secondaire, $\sin \beta'_m = 1$. Bien sûr, le long de l'axe β' , on a : $(\sin \alpha')/\alpha' = 1$, puisque $\alpha' = 0$; les éclairements relatifs sont donc simplement donnés par :

$$\frac{I}{I(0)} = \frac{1}{\beta_m'^2} \quad (10.44)$$

De la même manière, le long de l'axe α' :

$$\frac{I}{I(0)} = \frac{1}{\alpha_m'^2} \quad (10.45)$$

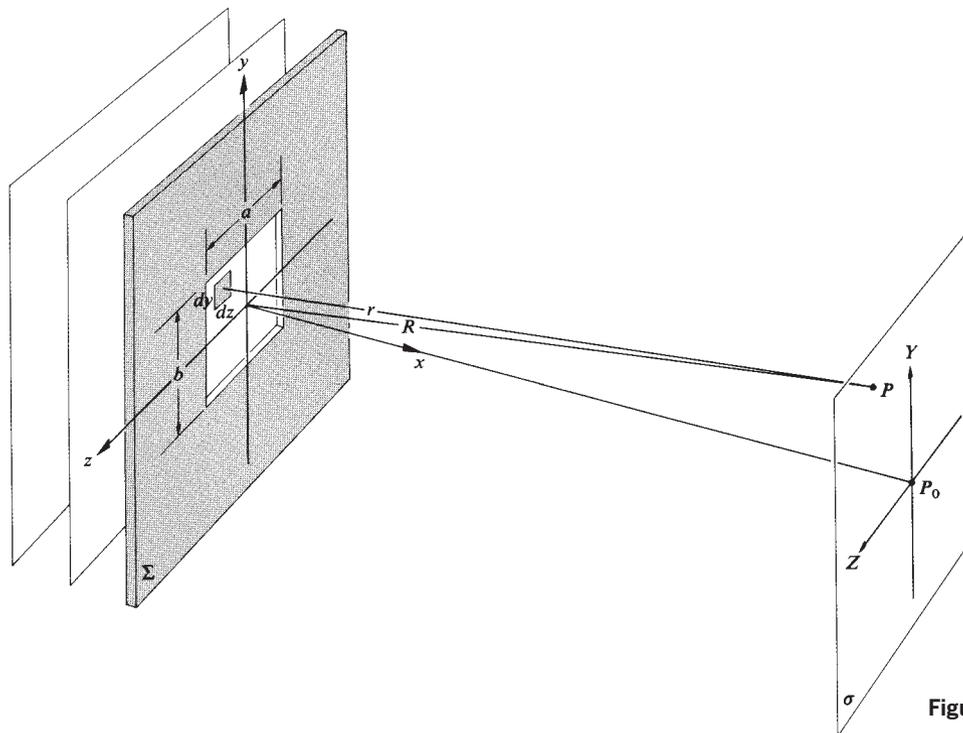


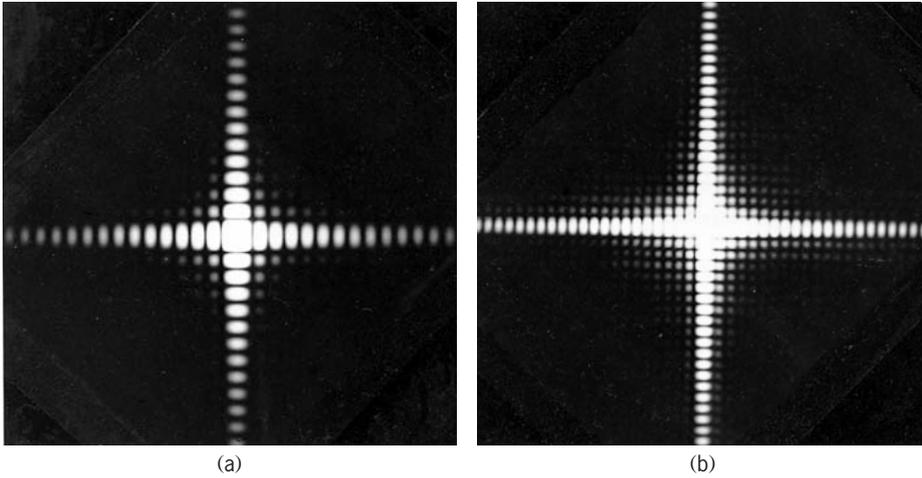
Figure 10.19 Une ouverture rectangulaire.

L'éclairement relatif* chute rapidement de 1 à $\frac{1}{22}$ à $\frac{1}{62}$ à $\frac{1}{122}$, et ainsi de suite. Les pics secondaires en dehors de l'axe sont encore plus étroits. Par exemple, les pics secondaires aux quatre coins du maximum central (dont les coordonnées correspondent à des combinaisons appropriées de $\beta' = \pm 3\pi/2$ et $\alpha' = \pm 3\pi/2$) ont chacun un éclairement relatif égal à $(\frac{1}{22})^2$.

*Ces photographies ont été prises en Travaux Pratiques de 1^{er} cycle, avec un laser He-Ne de 1,5 mW en tant que source d'ondes planes. Le dispositif était installé dans une longue pièce sombre et la figure obtenue directement sur un film Polaroid de 10 × 12,5 cm (3 000 ASA). Ce film était situé à environ 20 m d'une petite ouverture sans aucune lentille de focalisation. L'obturateur, placé directement devant le laser, était un montage en carton, réalisé par un étudiant. De ce fait, on ne connaît pas précisément les temps d'exposition. N'importe quel obturateur d'appareil photo (un SLR avec l'objectif enlevé et le dos ouvert) aurait pu servir, mais l'utilisation du carton était plus distrayante.

10.2.5 L'ouverture circulaire

La diffraction de Fraunhofer par une ouverture circulaire a une importance pratique évidente dans l'étude des instruments optiques. Considérons le montage typique où des ondes planes rencontrent un écran Σ avec une ouverture circulaire et où la figure de diffraction en champ lointain s'étale sur un écran éloigné σ . En utilisant une lentille de focalisation L_2 , on peut rapprocher σ de l'ouverture sans modifier la figure de diffraction. Maintenant, si l'on place L_2 au niveau de Σ , sur l'ouverture diffractante, sans intercepter quoi que ce soit du flux transmis par cette dernière, la figure de diffraction ne change pas de forme. L'onde qui traverse Σ est délimitée par l'ouverture, seul un cylindre circulaire de lumière se propage à travers L_2 pour former une image dans son plan focal. Cela correspond de manière évidente au processus qui se déroule dans un œil, dans un instrument astronomique, un microscope ou dans l'objectif d'un appareil photo. L'image d'un point source éloigné, formée par une lentille convergente parfaite, sans aberrations, n'est pas un point, mais une figure de diffraction. Par sa dimension finie, un système optique ne peut collecter qu'une



(a) Figures de diffraction obtenues avec une ouverture carrée. (b). Même dispositif exposé de manière à distinguer quelques termes moins visibles. (Photos E. H.)

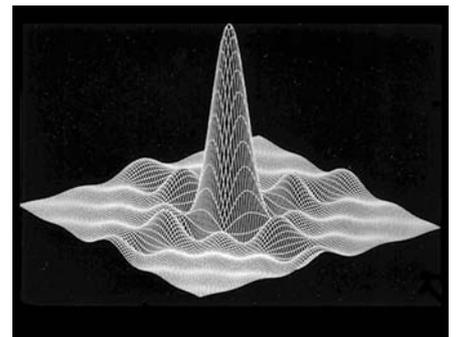
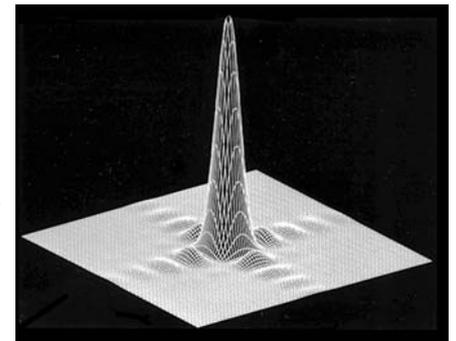
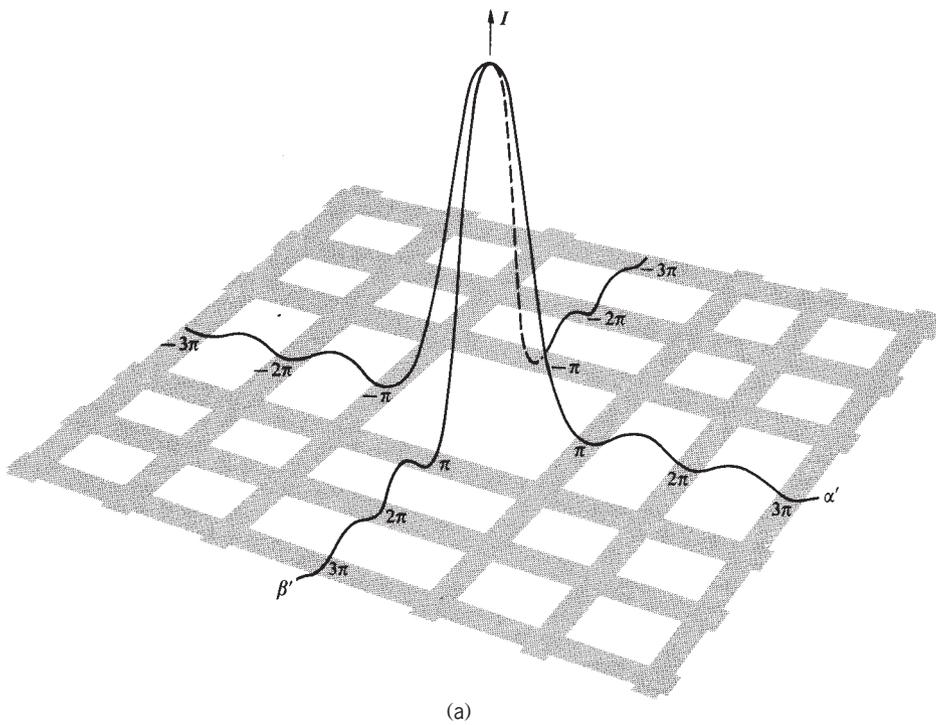


Figure 10.20 (a) Distribution d'éclairement pour une ouverture carrée. (b) Éclairement produit par une ouverture carrée en diffraction de Fraunhofer. (c) Champ électrique produit par une ouverture carrée en diffraction de Fraunhofer. (Photos R. G. Wilson, Illinois Wesleyan University.)

fraction d'un front d'onde incident et ne peut donc pas former une image parfaite. Comme on l'a démontré dans le paragraphe précédent, l'expression du champ optique en P produit en champ lointain par une ouverture arbitraire, est :

$$\tilde{E} = \frac{\mathcal{E}_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \iint_{\text{Ouverture}} e^{ik(Yy + Zz)/R} dS \quad [10.41]$$

Pour une ouverture circulaire, des considérations de symétrie suggèrent d'utiliser les coordonnées sphériques, à la fois dans le plan de l'ouverture et dans celui d'observation (figure 10.21). On a alors :

$$\begin{aligned} z &= \rho \cos \phi & y &= \rho \sin \phi \\ Z &= q \cos \Phi & Y &= q \sin \Phi \end{aligned}$$

Un élément de surface dS a pour expression :

$$dS = \rho \, d\rho \, d\phi$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation (10.41), on obtient donc :

$$\tilde{E} = \frac{\mathcal{E}_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \int_{\rho=0}^a \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{i(k\rho q/R) \cos(\phi - \Phi)} \rho \, d\rho \, d\phi \quad (10.46)$$

Du fait de la complète symétrie axiale du problème, la solution cherchée doit être indépendante de Φ . On peut donc se contenter de résoudre l'équation (10.46) par exemple pour $\Phi = 0$, ce qui simplifie légèrement la tâche.

La partie de la double intégrale associée avec la variable ϕ ,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k\rho q/R) \cos \phi} d\phi$$

est une expression bien connue dans les techniques mathématiques pour la physique. C'est une fonction unique, dans le sens où on ne peut pas l'approximer à l'aide des fonctions hyperboliques, exponentielles ou trigonométriques usuelles. En fait, la quantité :

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iu \cos v} dv \quad (10.47)$$

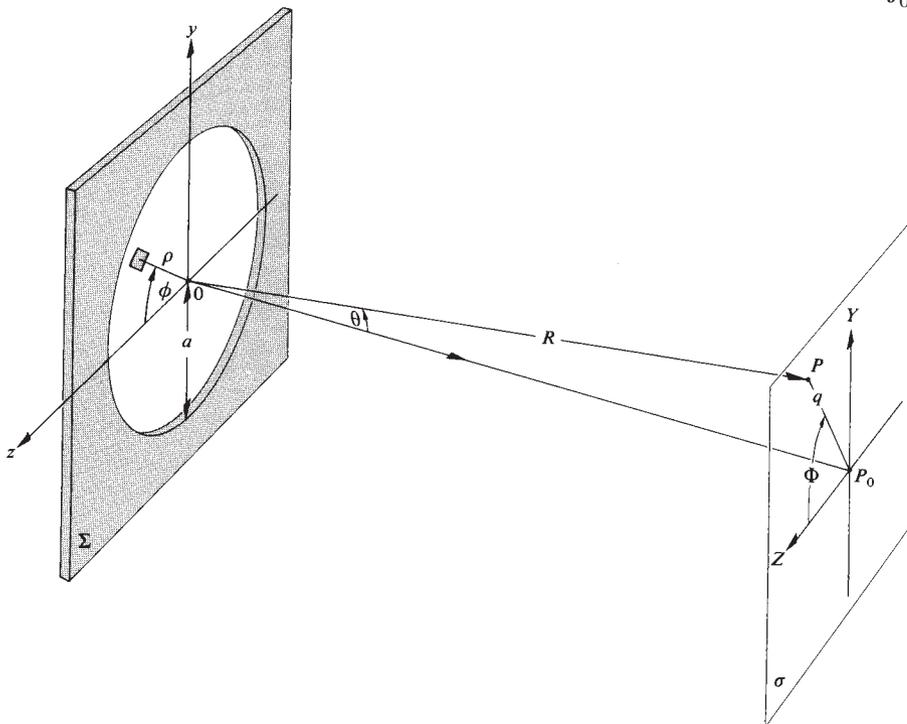


Figure 10.21 Géométrie avec une ouverture circulaire.

est connue sous le nom de *fonction de Bessel* (de première espèce) d'ordre zéro. Plus généralement :

$$J_m(u) = \frac{i^{-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(mv+u\cos v)} dv \quad (10.48)$$

représente la fonction de Bessel d'ordre m . Les valeurs numériques de $J_0(u)$ et $J_1(u)$ sont tabulées dans la plupart des manuels de mathématiques. Comme les fonctions sinus et cosinus, les fonctions de Bessel peuvent se développer en séries mathématiques. Comme on le voit sur la figure 10.22, $J_0(u)$ et $J_1(u)$ sont des fonctions oscillantes lentement décroissantes et qui n'ont rien d'effrayant.

On peut donc réécrire l'équation (10.46) sous la forme :

$$\tilde{E} = \frac{\mathcal{E}_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} 2\pi \int_0^a J_0(k\rho q/R) \rho d\rho \quad (10.49)$$

Une autre propriété particulière des fonctions de Bessel est qu'elles satisfont la relation de récurrence suivante :

$$\frac{d}{du} [u^m J_m(u)] = u^m J_{m-1}(u)$$

Lorsque $m = 1$, cela entraîne donc que :

$$\int_0^u u' J_0(u') du' = u J_1(u) \quad (10.50)$$

où u' est une variable muette. Si l'on retourne à présent à l'intégrale de l'équation (10.49) et que l'on effectue le changement de variable $w = k\rho q/R$, on a alors : $d\rho = (R/kq) dw$ et :

$$\int_{\rho=0}^{\rho=a} J_0(k\rho q/R) \rho d\rho = (R/kq)^2 \int_{w=0}^{w=kaq/R} J_0(w) w dw$$

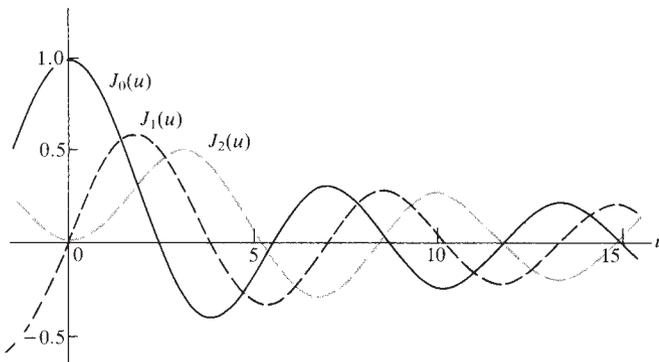


Figure 10.22 Fonctions de Bessel.

En utilisant l'équation (10.50), on obtient :

$$\tilde{E}(t) = \frac{\mathcal{E}_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} 2\pi a^2 (R/kaq) J_1(kaq/R) \quad (10.51)$$

L'éclairement au point P est $\langle (\text{Re } \tilde{E})^2 \rangle$ ou $\frac{1}{2} \tilde{E} \tilde{E}^*$, ainsi,

$$I = \frac{2\mathcal{E}_A^2 A^2}{R^2} \left[\frac{J_1(kaq/R)}{kaq/R} \right]^2 \quad (10.52)$$

où A représente l'aire de l'ouverture circulaire. Afin de trouver l'éclairement au centre de la figure (i.e. à P_0), on pose : $q = 0$. Il résulte de la relation de récurrence précédente ($m = 1$) que :

$$J_0(u) = \frac{d}{du} J_1(u) + \frac{J_1(u)}{u} \quad (10.53)$$

D'après l'équation (10.47), on voit que $J_0(0) = 1$. De même, d'après l'équation (10.48), $J_1(0) = 0$. Lorsque u tend vers zéro, le quotient $J_1(u)/u$ tend vers la même limite que le rapport entre les dérivées du numérateur et du dénominateur (règle de l'Hospital), c'est-à-dire respectivement $dJ_1(u)/du$ et 1. Mais cela signifie que la partie droite de l'équation (10.53) est le double de cette valeur limite, c'est-à-dire : $J_1(u)/u = \frac{1}{2}$ à $u = 0$. L'éclairement en P_0 est donc :

$$I(0) = \frac{\mathcal{E}_A^2 A^2}{2R^2} \quad (10.54)$$

Ce résultat est identique à celui obtenu dans le cas de l'ouverture rectangulaire [équation (10.43)]. Si l'on considère que R est à peu près constant pour tous les points de la figure de diffraction, on peut écrire :

$$I = I(0) \left[\frac{2J_1(kaq/R)}{kaq/R} \right]^2 \quad (10.55)$$

Comme $\sin \theta = q/R$, on peut exprimer l'éclairement sous la forme d'une fonction de θ ,

$$I(\theta) = I(0) \left[\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2 \quad (10.56)$$

On peut voir le tracé de cette fonction sur la figure 10.23. Du fait de la symétrie axiale du problème, le maximum central correspond à un pic circulaire de forte intensité, connu sous le nom de *disque d'Airy*. C'est en effet Sir George Biddell Airy (1801-1892), titulaire de la Chaire d'Astronomie Royale d'Angleterre, qui fut le premier à obtenir l'équation (10.56).

Le disque central est entouré par un anneau noir correspondant au premier zéro de la fonction $J_1(u)$. À partir du tableau 10.1, on voit que $J_1(u) = 0$ lorsque $u = 3,83$, c'est-à-dire lorsque $kaq/R = 3,83$. On peut donc considérer que le rayon q_1 du premier anneau noir constitue la limite du disque d'Airy. Ce rayon est donné par :

$$q_1 = 1,22 \frac{R\lambda}{2a} \quad (10.57)$$

Si la lentille est focalisée sur l'écran σ , sa focale est telle que : $f \approx R$, et donc :

$$q_1 \approx 1,22 \frac{f\lambda}{D} \quad (10.58)$$

où D est le diamètre de l'ouverture, soit, en d'autres termes :

$$D = 2a. \text{ Le diamètre du disque d'Airy est donc } 2q_1 \approx 2,44 \frac{f\lambda}{D}.$$

Dans le visible ($\lambda = 0,5 \mu\text{m}$), $2,44\lambda \approx 1 \mu\text{m}$. Il en résulte que, dans le visible, le diamètre du disque d'Airy en micromètres est très grossièrement égal au nombre d'ouverture f/D de la lentille. Comme le montrent les diverses photographies, q_1 est inversement proportionnelle au diamètre de l'ouverture

diffRACTANTE. Lorsque D tend vers λ , le disque d'Airy peut donc devenir extrêmement large. Dans ce cas, l'ouverture circulaire agit pratiquement comme un émetteur ponctuel d'ondes sphériques.

Les zéros d'ordre supérieur s'obtiennent pour des valeurs de kaq/R égales à 7,02 ; 10,17 et ainsi de suite. Les maxima secondaires sont localisés aux endroits où u satisfait la condition :

$$\frac{d}{du} \left[\frac{J_1(u)}{u} \right] = 0$$

ce qui est équivalent à $J_2(u) = 0$. À partir des tables de valeurs, on voit que ces pics secondaires se produisent lorsque kaq/R est égal à 5,14 ; 8,42 ; 11,6... Pour ces valeurs, $I/I(0)$ chute respectivement de 1 à 0,0175 ; 0,00042 et 0,00016 (problème 10.22).

En ce qui concerne la forme des lentilles optiques, il apparaît donc que les ouvertures circulaires sont préférables aux ouvertures rectangulaires, puisque pour les premières, le pic central est certes plus large, mais la courbe d'éclairement relatif chute plus rapidement lorsqu'on s'en éloigne (ses flancs sont plus raides). Il est également intéressant de connaître exactement

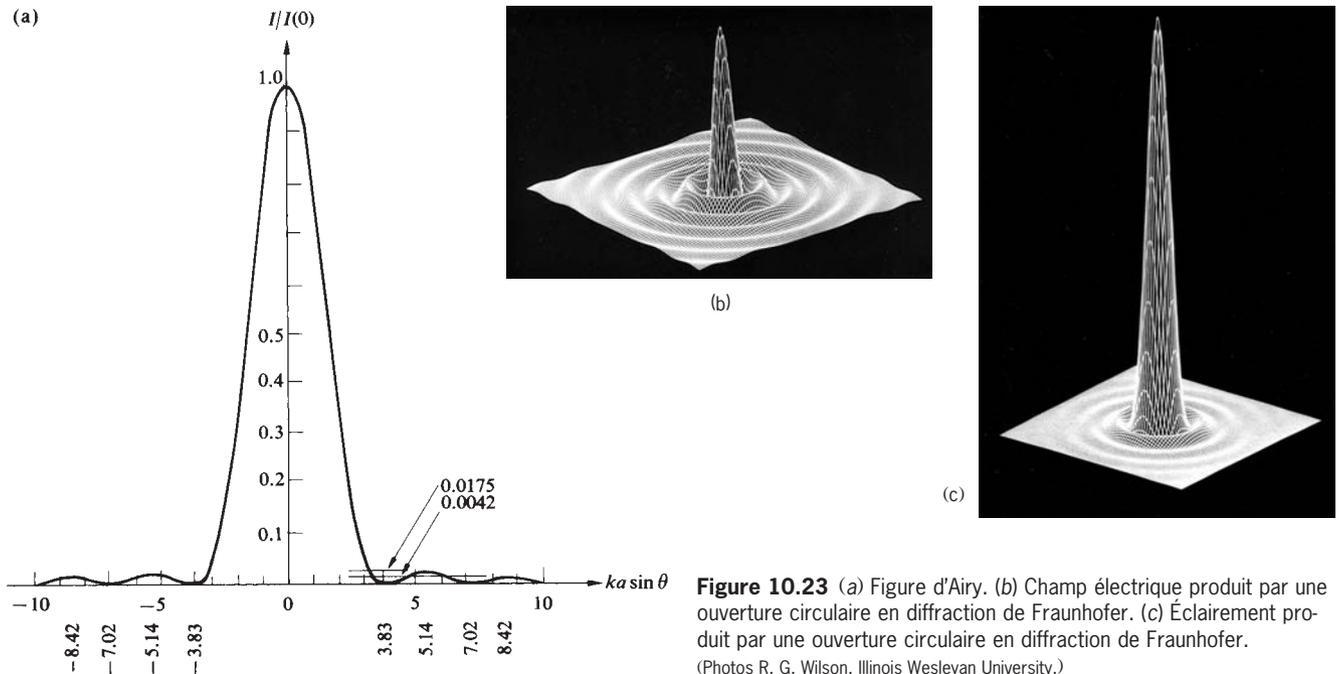
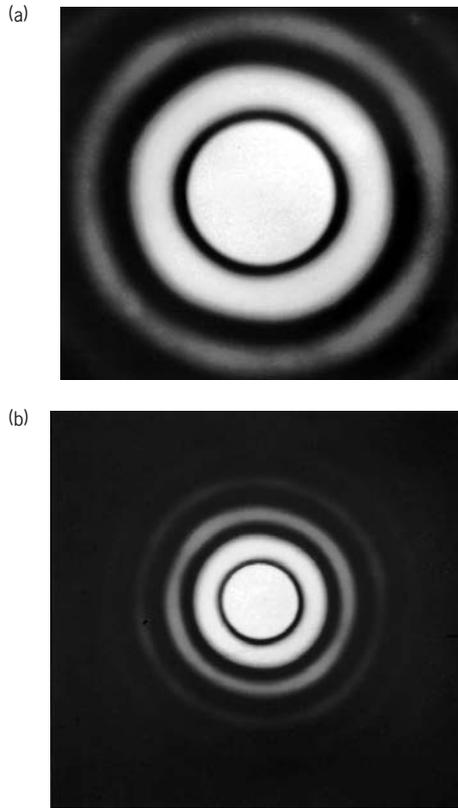


Figure 10.23 (a) Figure d'Airy. (b) Champ électrique produit par une ouverture circulaire en diffraction de Fraunhofer. (c) Éclairement produit par une ouverture circulaire en diffraction de Fraunhofer. (Photos R. G. Wilson, Illinois Wesleyan University.)



Anneaux d'Airy obtenus en utilisant une ouverture circulaire de 0,5 mm de diamètre (a) et 1 mm de diamètre (b). (photo E. H.)

quelle fraction de l'énergie incidente sur σ est comprise dans les différents maxima. Cependant, ce calcul est assez compliqué et l'on se contentera donc d'annoncer les résultats*. En intégrant la répartition en éclairissement sur une région particulière de la figure de diffraction, on trouve en fait que 84 % de la lumière est contenue dans le disque d'Airy et que 91 % est contenue dans les limites du deuxième anneau noir.

10.2.6 Résolution des systèmes d'imagerie

Considérons un système de lentilles formant l'image d'un objet étendu. Si l'objet est lumineux par lui-même, on peut l'assimiler à un ensemble de sources ponctuelles incohérentes.

*Voir Born and Wolf, *Principles of Optics*, p. 398, ou bien le texte de Towne, *Wave Phenomena*, p. 464.

Tableau 10.1 Fonction de Bessel*

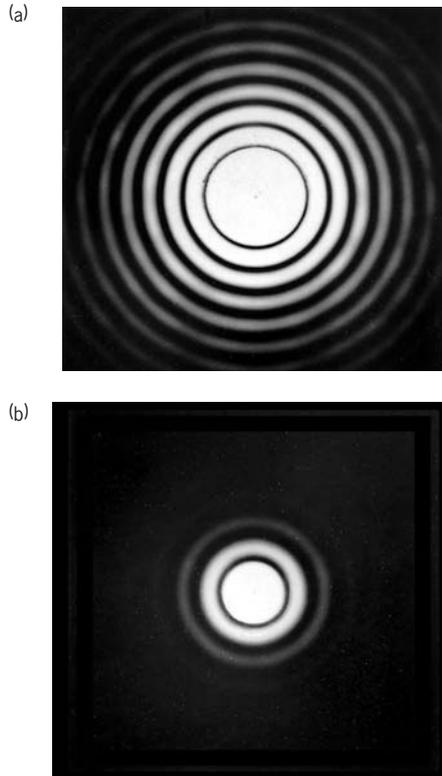
x	$J_1(x)^*$	x	$J_1(x)$	x	$J_1(x)$
0,0	0,0000	3,0	0,339 1	6,0	-0,276 7
0,1	0,049 9	3,1	0,300 9	6,1	-0,255 9
0,2	0,099 5	3,2	0,261 3	6,2	-0,232 9
0,3	0,148 3	3,3	0,220 7	6,3	-0,208 1
0,4	0,196 0	3,4	0,179 2	6,4	-0,181 6
0,5	0,242 3	3,5	0,137 4	6,5	-0,153 8
0,6	0,286 7	3,6	0,095 5	6,6	-0,125 0
0,7	0,329 0	3,7	0,053 8	6,7	-0,095 3
0,8	0,368 8	3,8	0,012 8	6,8	-0,065 2
0,9	0,405 9	3,9	-0,027 2	6,9	-0,034 9
1,0	0,440 1	4,0	-0,066 0	7,0	-0,004 7
1,1	0,470 9	4,1	-0,103 3	7,1	0,025 2
1,2	0,498 3	4,2	-0,138 6	7,2	0,054 3
1,3	0,522 0	4,3	-0,171 9	7,3	0,082 6
1,4	0,541 9	4,4	-0,202 8	7,4	0,109 6
1,5	0,557 9	4,5	-0,231 1	7,5	0,135 2
1,6	0,569 9	4,6	-0,256 6	7,6	0,159 2
1,7	0,577 8	4,7	-0,279 1	7,7	0,181 3
1,8	0,581 5	4,8	-0,298 5	7,8	0,201 4
1,9	0,581 2	4,9	-0,314 7	7,9	0,219 2
2,0	0,576 7	5,0	-0,327 6	8,0	0,234 6
2,1	0,568 3	5,1	-0,337 1	8,1	0,247 6
2,2	0,556 0	5,2	-0,343 2	8,2	0,258 0
2,3	0,539 9	5,3	-0,346 0	8,3	0,265 7
2,4	0,520 2	5,4	-0,345 3	8,4	0,270 8
2,5	0,497 1	5,5	-0,341 4	8,5	0,273 1
2,6	0,470 8	5,6	-0,334 3	8,6	0,272 8
2,7	0,441 6	5,7	-0,324 1	8,7	0,269 7
2,8	0,409 7	5,8	-0,311 0	8,8	0,264 1
2,9	0,375 4	5,9	-0,295 1	8,9	0,255 9

* $J_1(x) = 0$ pour $x = 0, 3,832, 7,016, 10,173, 13,324, \dots$

D'après E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, reproduit avec l'autorisation de John Wiley & Sons, Inc.

D'autre part, un objet vu en réflexion présente certainement une corrélation de phase entre ses différents points diffusants. Lorsque les points de l'objet sont effectivement incohérents entre eux, le système optique forme une image qui consiste en une distribution de taches d'Airy, partiellement superposées, mais indépendantes. Avec des optiques parfaites, sans aberrations, l'étalement de chaque point par la diffraction représente donc la limite ultime dans une image.

Simplifions quelque peu le problème en supposant que l'on ne considère que deux points sources éloignés, incohérents et



(a) Anneaux d’Airy obtenus avec un long temps d’exposition (ouverture circulaire de 1,5 mm de diamètre). (b) Idem, avec un temps d’exposition plus court. (Photos E.H.)

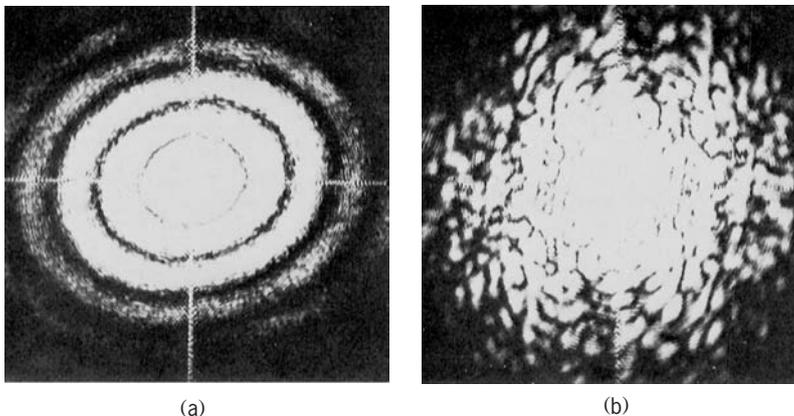
de même intensité. Cela peut, par exemple, être deux étoiles observées à travers l’objectif d’un télescope, où la pupille d’entrée est l’ouverture diffractante. Dans les paragraphes précédents, on a vu que le rayon du disque d’Airy était donné par $q_1 = 1,22f\lambda/D$. Si l’on effectue des mesures angulaires, alors $\Delta\theta = 1,22\lambda/D$, car $q_1/f = \sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$. Pour chaque étoile, le disque d’Airy a un rayon angulaire $\Delta\theta$ par rapport au point image géométrique (figure 10.24). Si la séparation angulaire entre les deux étoiles est $\Delta\varphi$ et si $\Delta\varphi \gg \Delta\theta$, les images seront distinctes et aisément distinguables ou résolues. Pour des étoiles de plus en plus proches l’une de l’autre, leurs images respectives se rapprochent puis se superposent avant de se mélanger en un amas confus de franges. Si l’on applique le critère de Lord Rayleigh, on dit que les étoiles sont *en limite de résolution* lorsque le centre du disque d’Airy de l’une coïncide avec le premier minimum de la tache d’Airy de l’autre (on peut sans doute arriver à trouver une définition plus rigoureuse, mais le critère de Rayleigh a au moins le mérite d’être très simple et facile à retenir*). La *séparation angulaire correspondante* ou *limite de résolution angulaire* est :

$$(\Delta\varphi)_{\min} = \Delta\theta = 1,22\lambda/D \quad (10.59)$$

Ce cas est représenté à la figure 10.25. En posant $\Delta\ell$, la séparation centre à centre des images, la **limite de résolution** est :

$$(\Delta\ell)_{\min} = 1.22f\lambda/D \quad (10.60)$$

.....
 *Selon les propres mots de Rayleigh : « Cette règle est pratique du fait de sa simplicité et elle est suffisamment précise en comparaison de l’incertitude colportée par le terme résolution ». Voir le paragraphe 9.6.1 pour de plus amples approfondissements.



On étudie la diffraction comme moyen possible d’analyse automatique rapide dans le cadre des tests de Pap, pour les cellules cancéreuses. (a) Figure de diffraction de Fraunhofer pour une cellule cervicale normale. (b) Figure de diffraction de Fraunhofer pour une cellule malade : les deux images sont très différentes.

(Photos Benjamin J. Pernick.)

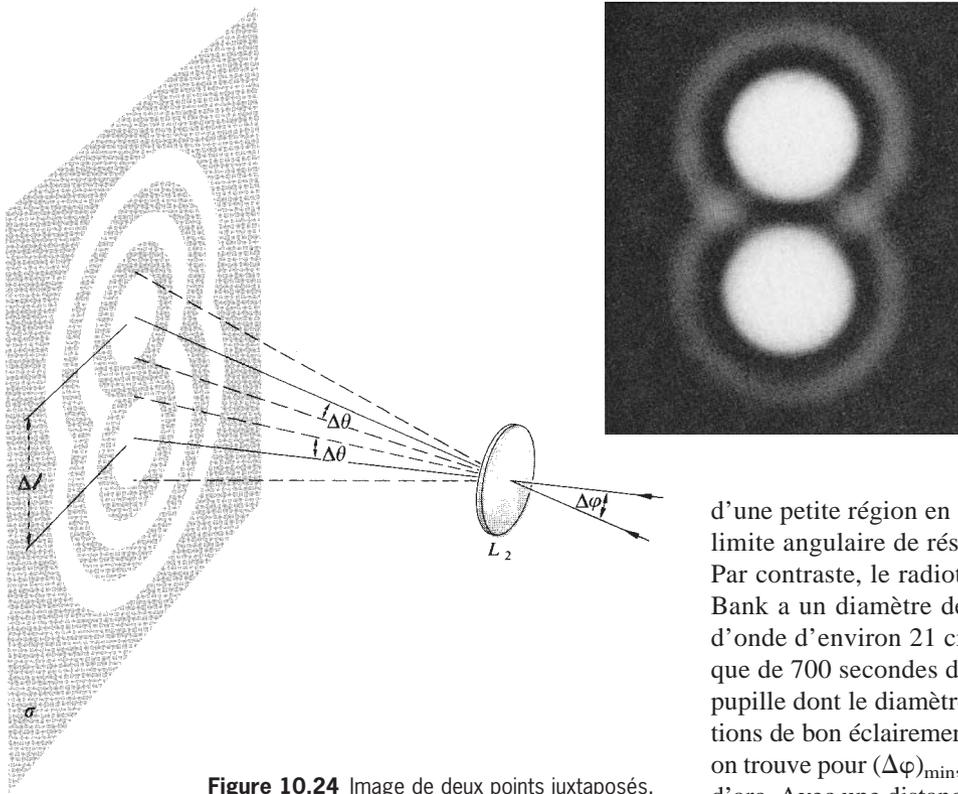


Figure 10.24 Image de deux points juxtaposés.

Le **pouvoir séparateur** (ou *pouvoir de résolution*) d'un système d'imagerie est généralement défini par $1/(\Delta\varphi)_{\min}$ ou par $1/(\Delta\ell)_{\min}$.

Si l'on veut augmenter le pouvoir séparateur d'un instrument optique, une façon d'y parvenir est de le faire fonctionner à des longueurs d'onde plus faibles. Ainsi, en microscopie, observer en ultraviolet à la place du visible permet la perception de détails plus fins. Le microscope électronique (à faisceau d'électrons) utilise des longueurs d'onde de 10^4 à 10^5 fois plus petites que celles du visible. Cette technique permet donc d'examiner des objets qui, dans le spectre visible, seraient complètement brouillés par les effets de la diffraction. Le pouvoir séparateur peut également être accru en augmentant la taille de l'ouverture collectrice, lentille ou miroir, ce qui est fait dans le cas des instruments astronomiques. En effet, en plus de collecter davantage de lumière, cela permet d'obtenir un disque d'Airy plus petit, d'où une image plus fine et plus brillante. Le télescope de l'Observatoire du Mont Palomar possède un miroir de 5 m de diamètre (en négligeant l'obstruction

d'une petite région en son centre). À 550 nm, il possède une limite angulaire de résolution de $2,7 \times 10^{-2}$ seconde d'arc. Par contraste, le radiotélescope de l'observatoire de Jodrell Bank a un diamètre de 6,30 m mais opère à des longueurs d'onde d'environ 21 cm. Son pouvoir séparateur n'est donc que de 700 secondes d'arc. L'œil humain a, quant à lui, une pupille dont le diamètre peut varier de 2 mm dans des conditions de bon éclairage à 8 mm. Avec 2 mm et $\lambda = 550$ nm, on trouve pour $(\Delta\varphi)_{\min}$, une valeur à peu près égale à 1 minute d'arc. Avec une distance focale d'environ 20 mm, le diamètre de la tache sur la rétine est de l'ordre de 6 700 nm. C'est environ deux fois l'espacement moyen entre deux récepteurs. On devrait donc être capable de résoudre deux points séparés d'environ 3 cm, à une centaine de mètres. La plupart des gens ne font pas aussi bien, plutôt 1 cm à 10 m.

Un autre critère pour évaluer le pouvoir de résolution a été proposé par C. Sparrow et il paraît plus adapté. Rappelons qu'à la limite de Rayleigh, il y a un minimum central entre deux pics adjacents (ou « selle de cheval »). Si l'on rapproche encore les deux points sources, la zone commune se réduit et finit par disparaître complètement. La séparation angulaire correspondant à cette configuration est la limite de Sparrow. Le maximum résultant possède un large sommet aplati. En d'autres termes, à l'origine, qui est le centre du pic, la dérivée seconde de la fonction d'éclairement est nulle ; il n'y a pas de changement de pente (figure 10.26).

Contrairement au critère de Rayleigh, qui assume tacitement l'incohérence, celui de Sparrow peut être clairement étendu aux sources cohérentes. De plus, des études astronomiques d'étoiles d'égale intensité ont montré que le critère de Sparrow est, de loin, le plus réaliste des deux.

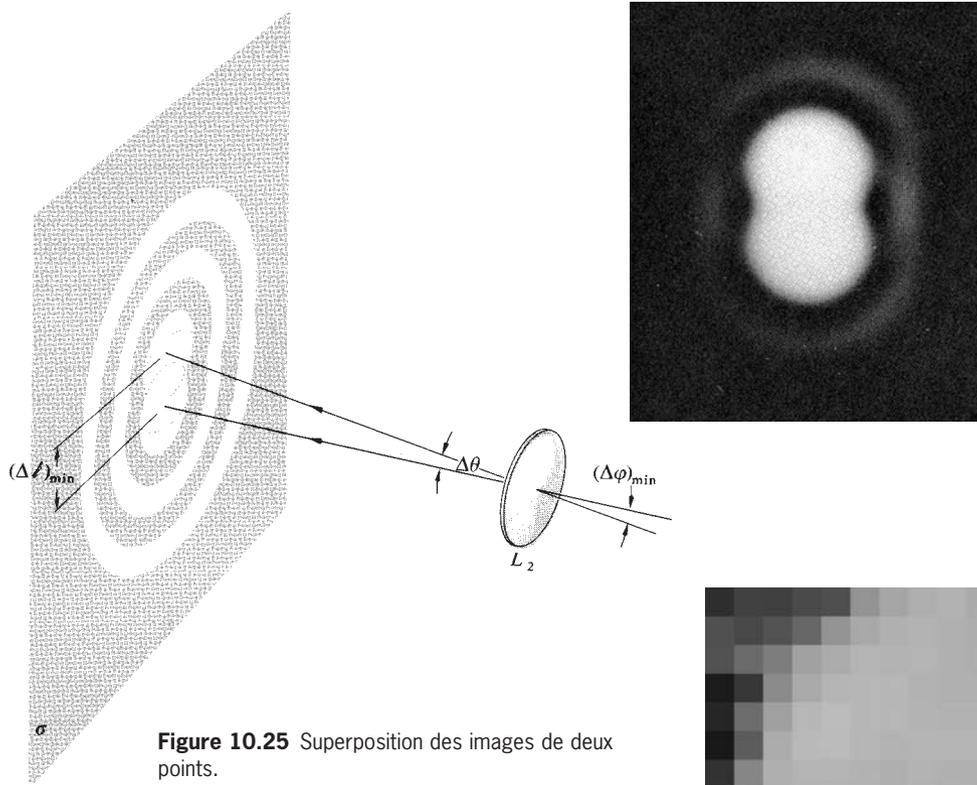


Figure 10.25 Superposition des images de deux points.

10.2.7 Le faisceau de Bessel d'ordre zéro

Lorsque de la lumière émerge d'une ouverture circulaire étroite, le disque d'Airy central du faisceau diffracté augmente avec la distance, via l'équation (10.57) ; le faisceau s'élargit au fur et à mesure qu'il se propage. Bien qu'ils soient souvent considérés comme constitués de rayons strictement parallèles, les faisceaux laser divergent également. La plus simple configuration de faisceau laser, et l'une des plus communes, est le faisceau gaussien, de mode TEM_{00} (p. 611). Si on appelle D_0 , le *diamètre de waist* (i.e. le diamètre du faisceau là où il est le plus étroit), celui-ci va doubler (en section), après avoir

Cette image est constituée de seulement 750 pixels. Il est difficile de reconnaître le sujet lorsqu'on la regarde de près, car nos yeux peuvent, dans ce cas, résoudre les carrés des pixel individuels. Pour mieux voir l'image globale, il faut réduire cette capacité en diminuant, par exemple, l'ouverture de l'œil, D (en fermant les paupières) ou en réduisant la dimension angulaire de chaque pixel (en s'éloignant de la photographie). En suivant ce petit protocole, on devrait voir le portrait de l'humble auteur de cet ouvrage ! (photo E.H.)



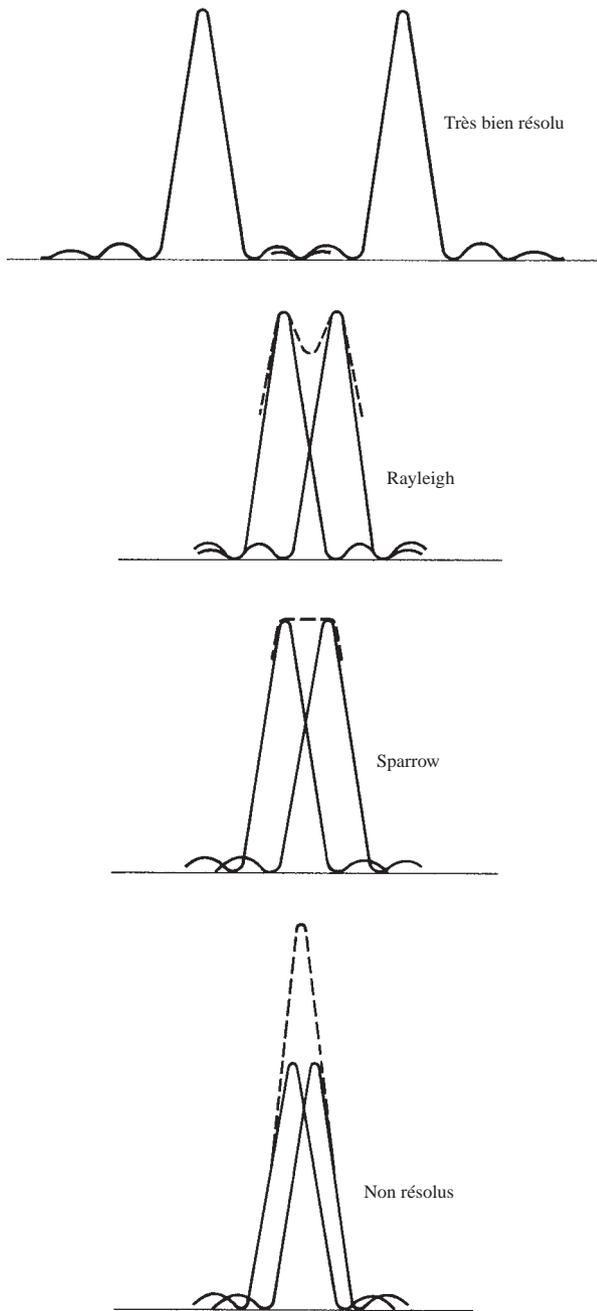
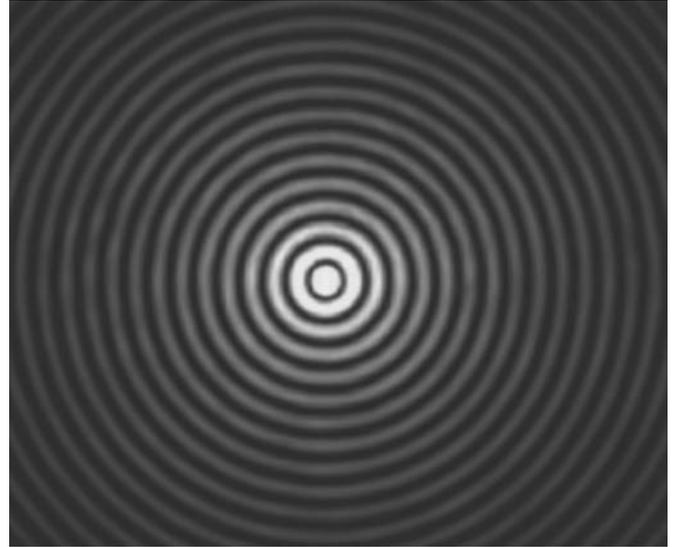


Figure 10.26 Critères de Rayleigh et de Sparrow pour la séparation des images de deux points en recouvrement.



Faisceau de Bessel. (Photo Ryan P. MacDonald.)

parcouru une distance z_R . Ce paramètre caractéristique dénommé la *distance de Rayleigh*, est tel que : $z_R = \pi D_0^2 / 4\lambda$. Donc, tous les faisceaux lumineux réels ont une divergence, aussi bien collimatés soient-ils.

Néanmoins, il existe une classe de solutions à l'équation d'onde différentielle en espace libre qui sont « non diffractantes ». La plus simple de ces solutions, sous forme de faisceau qui ne s'étale pas, correspond à une onde monochromatique qui se propage dans la direction z , avec un champ électrique proportionnel à la fonction de Bessel d'ordre zéro, J_0 :

$$\tilde{E}(r, \theta, z, t) \propto J_0(k_{\perp} r) e^{i(k_{\parallel} z - \omega t)}$$

Ici, $E(r, \theta, z, t)$ est exprimé en coordonnées cylindriques (p. 33), $k_{\parallel} = k \cos \phi$, $k_{\perp} = k \sin \phi$, et l'angle ϕ est fixé entre 0 et 90° . Notons que, lorsque $\phi = 0$, $\sin \phi = 0$, $J_0(0) = 1$ et la solution est une onde plane. Les ondes planes idéales ne s'étalent pas au cours de leur propagation. Mais, une fois encore, elles ne sont pas localisées dans un faisceau étroit, et elles n'existent pas dans la réalité.

Lorsqu'on étudiera les transformées de Fourier, au chapitre 11, on verra, qu'en général, on peut considérer une onde complexe, $E(r, \theta, z, t)$, comme la superposition d'un nombre infini d'ondes planes choisies sur un ensemble continu de valeurs de k . En particulier, $E(r, \theta, z, t)$ peut être considérée comme une superposition d'un nombre infini d'ondes planes, dont chacune a un vecteur de propagation (ou si l'on préfère,

vecteurs d'onde) porté par le cône de demi-angle au sommet ϕ (mesuré depuis l'axe central, l'axe des z). Cela constitue la caractéristique déterminante du **faisceau de Bessel** (ou faisceau J_0).

Comme l'éclairement dû au faisceau est proportionnel à \tilde{E}^* , toutes ses dépendances en z disparaissent ; $I(r, \theta, t) \propto J_0^2(k_{\perp}r)$ et cet éclairement est le même dans tous les plans perpendiculaires à l'axe z . Cela signifie que la section transverse ne s'étend pas à mesure que l'onde avance. Le faisceau consiste en une région centrale étroite (de diamètre $2,405/k_{\perp}$), entourée d'anneaux concentriques (voir photo ci-dessus). Chaque anneau transporte à peu près la même énergie que le pic central, qui recueille seulement 5 % de l'énergie totale.

En réalité, il est impossible de créer des ondes planes parfaites qui permettraient de fabriquer un faisceau J_0 idéal. Une onde plane devrait avoir une dimension transverse infinie et représente donc un cas idéal. Au mieux, on ne peut construire qu'une onde qui approxime un faisceau J_0 sur une région finie de l'espace. Plusieurs méthodes ont été utilisées pour cela.

La figure 10.27a montre un procédé élégant pour obtenir un quasi-faisceau J_0 . On illumine une petite ouverture en anneau ($\approx 10 \mu\text{m}$), d'un diamètre égal à quelques millimètres (a), par des ondes planes monochromatiques de longueur d'onde λ . Chaque point de l'ouverture se comporte comme un point source d'ondes sphériques. L'ouverture en anneau est située dans le plan focal objet d'une lentille de rayon R . Chaque ondelette sphérique quitte la lentille comme une onde plane se propageant avec un angle ϕ tel que :

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}a/f\right)$$

Sur la figure 10.27b, la région de superposition des ondes planes s'étend jusqu'à une distance z_{max} où $\tan \phi = R/z_{\text{max}} = \frac{1}{2}a/f$ et donc :

$$z_{\text{max}} = \frac{2Rf}{a}$$

Cela est la longueur de propagation ou portée du faisceau de Bessel. Si a est maintenu petit et R est grand, celle-ci peut être supérieure à la distance de Rayleigh d'un faisceau gaussien de diamètre comparable*.

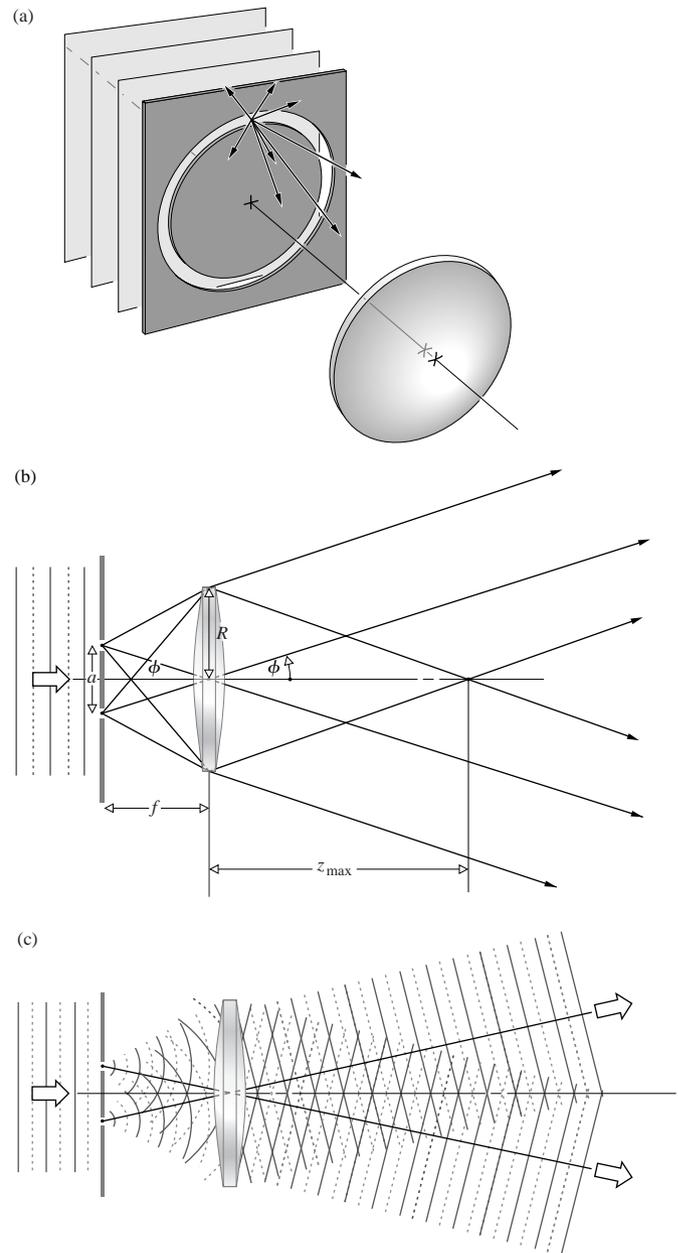
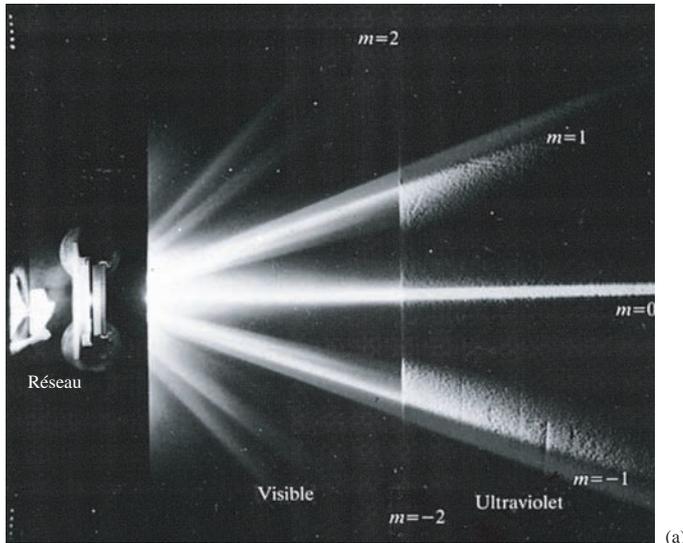
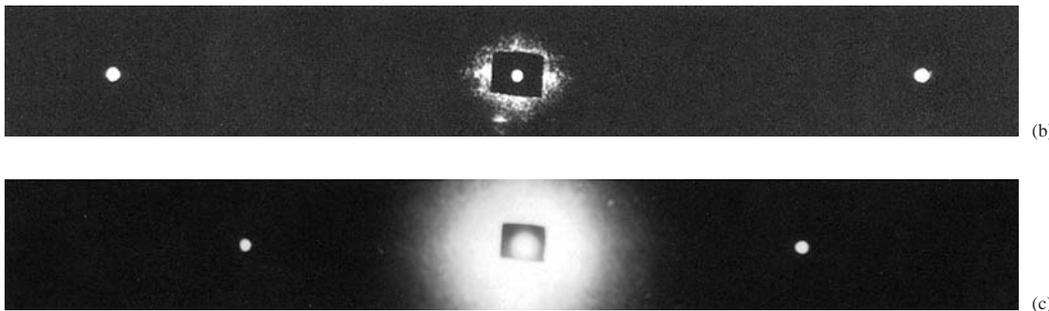


Figure 10.27 Montage permettant de produire un faisceau de Bessel avec une fente circulaire. (a) Une ouverture en anneau est éclairée par des ondes planes. (b) L'ouverture est placée dans le plan focal objet d'une lentille de telle manière que les rayons émergents soient parallèles. (c) Les ondes planes, qui ont toutes leurs vecteurs de propagation contenus dans un cône, se superposent à une distance de z_{max} .

*Lord Rayleigh, « On the passage of electric waves through tubes, or the vibrations of dielectric cylinders », *Phil. Mag.*, S. 5, **43**, 261, 125 (Feb. 1897). J. Durnin, « Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory », *J. Opt. Soc. Am. A* **4**, 651 (1987). J. Durnin, J. J. Miceli, Jr. and J. H. Eberly, « Diffraction-Free Beams », *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1499 (1987). C. A. McQueen, J. Arit, and K. Dholakia, « An experiment to study a "nondiffracting" light beam », *Am. J. Phys.* **67**, 912 (1999).



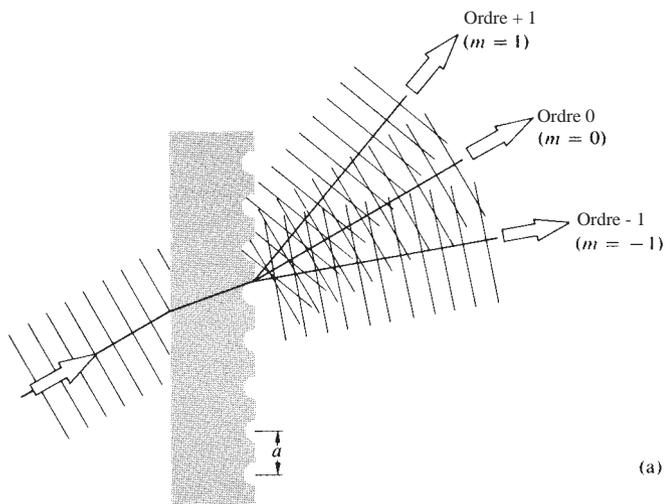
Lumière diffractée par un réseau. (a) La région de gauche correspond au visible, celle de droite, à l'ultraviolet. (Photo Klinger Educational Prod. Corp., College Point, N.Y.) (b),(c) Vues de face des faisceaux diffractés $m = 0$ et $m = \pm 1$ provenant d'un faisceau laser He-Ne dirigé sur un réseau de 530 traits/mm. (b) Réseau dans l'air ($\lambda = 632,8$ nm). (c) Réseau immergé dans l'eau. Avec la mesure de l'angle θ_1 , l'équation des réseaux donne $\lambda_w = 471$ nm et donc $n_w = 1,34$. (Photo A. F. Leung, The Chinese University of Hong Kong.)



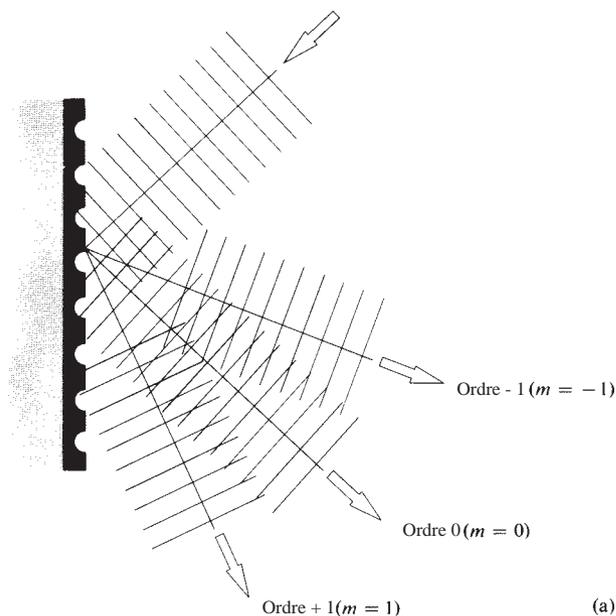
10.2.8 Le réseau de diffraction

Un **réseau de diffraction** est une matrice périodique d'éléments diffractants, transparents ou opaques, qui modifie la phase et/ou l'amplitude d'un faisceau émergent. On a, par exemple, déjà étudié le cas de fentes multiples au paragraphe 10.2.3. Il semble que cette configuration ait été mise au point par l'astronome américain David Rittenhouse vers 1785. Quelques années plus tard, Joseph Von Fraunhofer redécouvrit ce principe de manière indépendante, et contribua fortement non seulement à la théorie mais aussi à la technologie des réseaux. Les premiers composants étaient en effet des assemblages à fentes multiples, consistant habituellement en grilles de fils ou de filaments très fins tendus entre deux vis parallèles qui assuraient leur espacement. En traversant un tel composant, une onde rencontre une alternance de zones opaques et transparentes de sorte qu'elle subit une modulation en *amplitude*. En

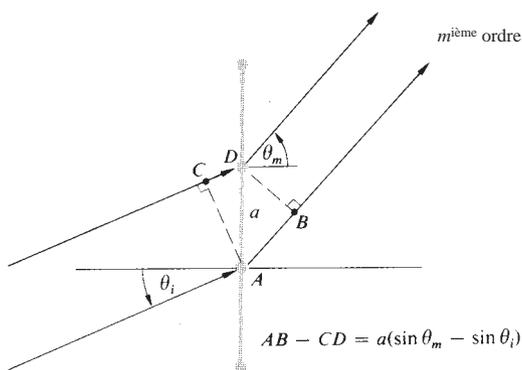
conséquence, on dit qu'une configuration multifente est un **réseau d'amplitude en transmission**. Une autre forme de réseau en transmission, également très commune, est une lame de verre transparente sur laquelle on a gravé des traits parallèles entre eux (figure 10.28a). Chacune des stries étant une source de lumière diffuse, elles forment, ensemble, une matrice régulière de sources linéaires parallèles. Lorsque le réseau est totalement transparent, la modulation en amplitude est négligeable, mais les variations régulières de l'épaisseur optique du réseau entraînent une modulation de phase. Un tel composant constitue un **réseau de phase en transmission** (voir photo). Dans la représentation de Huygens-Fresnel, on peut considérer que les ondelettes sont rayonnées avec des phases différentes à la surface du réseau. Le front d'onde émergent présente donc des variations périodiques de forme, plutôt que d'amplitude. Cette déformation de l'onde correspond à la distribution angulaire des ondes planes qui la composent.



(a)



(a)

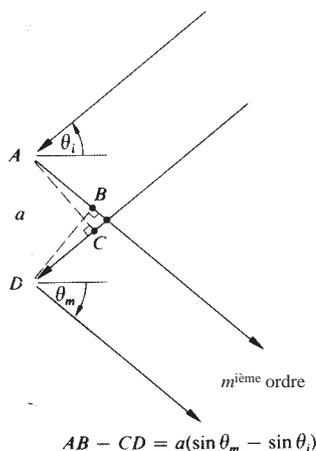


(b)

Figure 10.28 Réseau en transmission.

Lorsqu'ils se réfléchissent sur ce genre de réseau, les rayons, diffusés par les différents éléments périodiques en surface, arrivent en un point P avec une phase relative bien définie. La figure d'interférence qui résulte de cette réflexion est très similaire à celle obtenue en transmission. Les réseaux spécialement réalisés pour fonctionner de cette manière sont appelés **réseaux de phase en réflexion** (figure 10.29). Ils sont généralement tracés sur de minces films d'aluminium déposés par évaporation sur des lames de verre optique. L'aluminium étant assez mou, est enlevé avec un outil à pointe de diamant. Ce métal présente aussi l'avantage d'être un bon réflecteur dans l'ultraviolet.

La technologie des réseaux gravés est extrêmement délicate et n'est que parcimonieusement employée. Dans la pratique, la plupart des réseaux sont des *répliques* en plastiques de réseaux



(b)

Figure 10.29 Réseau en réflexion.

de haute qualité. À l'heure actuelle, un grand nombre de réseaux sont réalisés par holographie (p. 639).

Si l'on regarde à travers un réseau en transmission éclairé par une source linéaire éloignée parallèle aux stries, l'œil sert de lentille de focalisation pour la figure de diffraction. Souvenons-nous de l'analyse du paragraphe 10.2.3 et de l'expression :

$$a \sin \theta_m = m\lambda$$

[10.32]

connue sous le nom d'**équation du réseau** pour l'incidence normale. Les valeurs de m définissent l'ordre des divers maxima principaux. Pour une source à spectre large et continu, comme un filament de tungstène, l'image de l'ordre $m = 0$ (ou ordre zéro) correspond à une vision en lumière blanche qui n'est pas défléchie ($\theta_0 = 0$) de la source (voir photo). L'équation du réseau dépend de λ , de sorte que, pour $m \neq 0$, on obtient diverses images colorées de la source, dans des directions (θ_m) légèrement différentes, et qui s'étalent de façon continue. Les régions correspondant à de faibles maxima secondaires se présentent sous forme de bandes sombres. Le spectre du premier ordre $m = \pm 1$ apparaît de chaque côté de $\theta = 0$. Il est suivi par les spectres d'ordres supérieurs, $m = \pm 2, \pm 3, \dots$ en alternance avec les zones plus sombres. Notons que le nombre d'ordres visibles est d'autant plus petit que le paramètre a de l'équation (10.32) (ou *pas du réseau*) est petit.

Il n'est pas surprenant que l'équation du réseau soit en fait l'équation (9.29), qui donne l'emplacement des maxima dans l'expérience de la double fente de Young. Dans le cas du réseau, les maxima d'interférence, situés aux mêmes angles pour tous les couples de fentes, sont simplement plus fins que pour la double fente (de la même manière que l'interférence à ondes multiples d'un étalon Fabry-Pérot fait que les franges sont plus fines que dans un interféromètre à deux ondes). Dans le cas de la double fente, lorsque le point d'observation est quelque peu décalé par rapport à un maximum d'éclairement, les deux ondes, qui proviennent de l'une ou de l'autre fente, sont encore plus ou moins en phase, et l'éclairement, bien que réduit, est toujours appréciable. De ce fait, les franges brillantes sont assez larges. En revanche, dans le cas de systèmes à ondes multiples, les ondes interfèrent constructivement au centre exact d'un maximum, mais une petite variation angulaire peut entraîner un déphasage de $\frac{1}{2}\lambda$ de certaines ondes par rapport à d'autres. Par exemple, supposons que P soit légèrement décalé par rapport à θ_1 , de sorte que : $a \sin \theta = 1,010 \lambda$ au lieu de $1,000 \lambda$. Chaque onde, parmi celles provenant des différentes fentes, arrive en P décalée de $0,01 \lambda$ par rapport à la précédente. Ainsi, l'onde qui provient de la 51^e fente a été décalée de $\frac{1}{2} \lambda$ et sa contribution annule celle de la première fente. La même chose arrive pour les paires de fentes 2-52, 3-53 et ainsi de suite. Le résultat est une chute rapide de l'éclairement en dehors des maxima.

Considérons à présent la situation plus générale d'une incidence oblique, comme sur les figures 10.28 et 10.29. L'équation du réseau, en transmission ou en réflexion, devient :

$$a(\sin \theta_m - \sin \theta_i) = m\lambda \quad (10.61)$$

Même pour un réseau en transmission (problème 10.37), cette expression est indépendante de l'indice de réfraction. Cependant, un des principaux inconvénients des composants vus jusqu'ici (et en fait, une des raisons de leur obsolescence) est qu'ils dispersent d'une façon peu efficace l'énergie lumineuse disponible dans un grand nombre d'ordres. Pour un réseau comme celui de la figure 10.29, la plus grande partie de la lumière incidente subit une *réflexion spéculaire*, comme dans le cas d'un miroir plan. Il résulte de l'équation du réseau que $\theta_m = \theta_i$ correspond à l'ordre zéro, $m = 0$. Puisque toutes les longueurs d'onde présentes dans le spectre se retrouvent dans l'ordre 0, toute cette lumière est perdue inutilement, en tout cas pour des utilisations spectroscopiques.

Dans un article de l'*Encyclopédia Britannica* de 1888, Lord Rayleigh suggéra qu'il était possible, en tout cas théoriquement, de prélever de l'énergie à l'ordre zéro – inutile – et de la reporter dans des ordres supérieurs. Très motivé, le physicien américain Robert Williams Wood (1868-1955) réussit, en 1910, à graver des traits au profil contrôlé, comme le montre la figure 10.30. La plupart des réseaux modernes sont de type profilé ou **blazé**. Les positions angulaires θ_m des ordres non nuls sont déterminées par a , λ , et bien sûr, θ_i . Mais θ_i et θ_m sont mesurés par rapport à la normale du plan du réseau, sans rapport avec l'inclinaison individuelle des surfaces. D'un autre côté, la direction du pic dans le cas de la diffraction par une seule facette correspond à la *réflexion spéculaire* sur cette facette, et cela pour chaque trait. Cette direction est donc conditionnée par l'*angle de blaze* γ et elle peut varier indépendamment de θ_m . Cela est analogue au cas de la matrice d'antennes, qui a été abordé au paragraphe 10.1.3, où l'on pouvait contrôler la direction de la figure d'interférence [équation (10.6)] en ajustant le déphasage relatif entre sources, sans changer leurs orientations.

Considérons la situation de la figure 10.31, où l'onde incidente est normale au plan d'un réseau blazé en réflexion, ce qui entraîne que $\theta_i = 0$, et donc, pour $m = 0$, $\theta_0 = 0$. Pour une *réflexion spéculaire*, $\theta_i - \theta_r = 2\gamma$ (figure 10.30), la majeure partie de la radiation diffractée est concentrée dans la direction $\theta_r = -2\gamma$ (θ_r est négatif car les rayons incidents et réfléchis sont du même côté de la normale au réseau). Cela correspond à un ordre non nul particulier, d'un côté de l'image centrale, lorsque $\theta_m = -2\gamma$. En d'autres termes, $a \sin (-2\gamma) = m\lambda$ pour les valeurs désirées de λ et m .

Spectroscopie par réseaux

La mécanique quantique, développée au début des années 1920, se concentra initialement sur le domaine de la physique

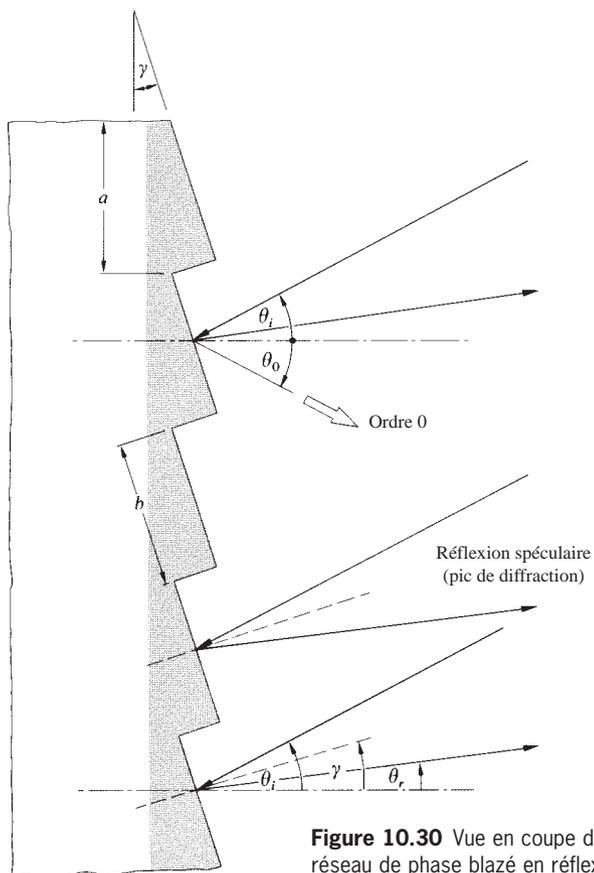


Figure 10.30 Vue en coupe d'un réseau de phase blazé en réflexion.

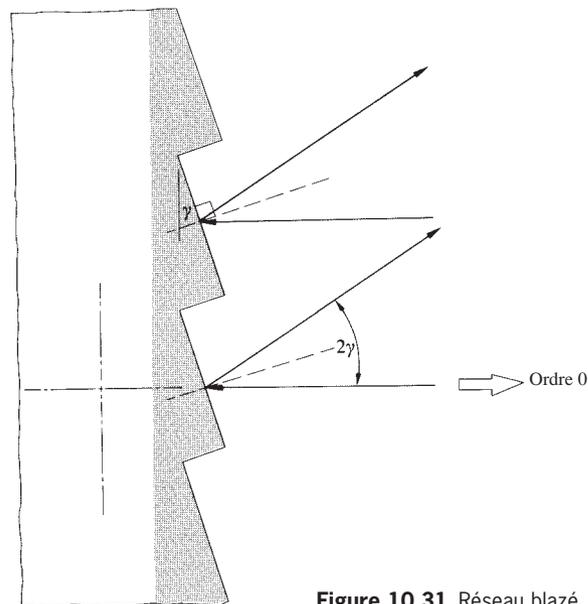


Figure 10.31 Réseau blazé.

atomique, où elle émit des hypothèses sur la structure détaillée de l'atome d'hydrogène à partir de l'analyse de son rayonnement. Ce fut la spectroscopie qui en fournit les preuves expérimentales. Le besoin de réseaux plus grands et plus performants était ainsi devenu une nécessité. Depuis cette époque, les spectromètres à réseaux n'ont cessé d'être utilisés par les scientifiques, depuis les rayons X mous à l'infrarouge lointain. Les astrophysiciens s'en servent pour étudier l'origine de l'univers,

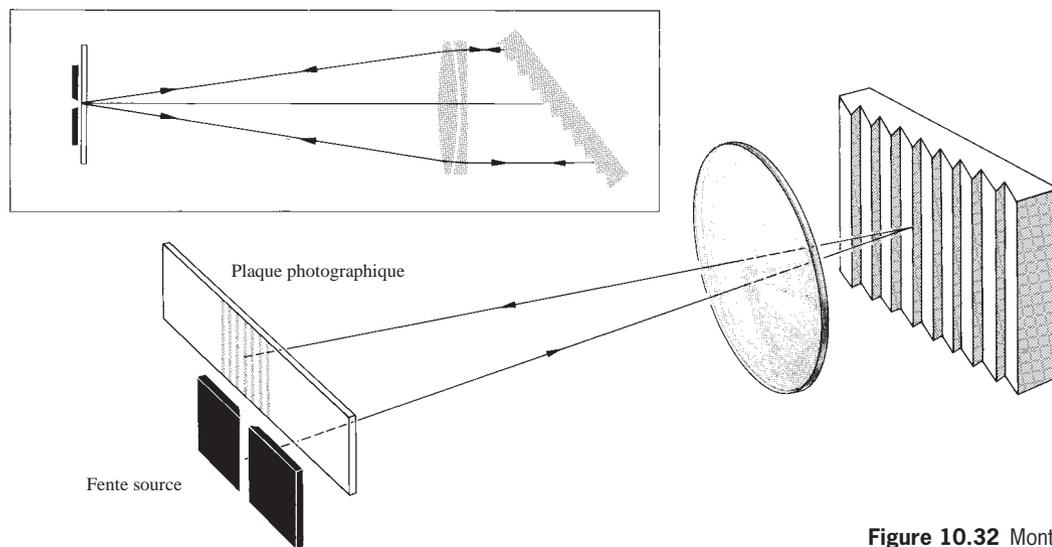


Figure 10.32 Montage en autocollimation de Littrow.

la température d'une étoile, la rotation d'une galaxie ou encore le décalage vers le rouge du spectre d'un quasar. Dans les années 1950, les physiciens George R. Harrison et George W. Stroke réussirent à accroître considérablement la qualité des réseaux de haute résolution, en utilisant un graveur* dont les opérations étaient contrôlées par un servomécanisme guidé par interférométrie.

Examinons à présent en détail quelques-unes des caractéristiques principales d'un réseau. Considérons une source incohérente quasi monochromatique. On peut définir la largeur effective d'une ligne spectrale en sortie comme étant la largeur angulaire entre les zéros situés de part et d'autre d'un maximum principal. En d'autres termes, d'après l'équation (10.33), $\Delta\alpha = 2\pi/N$. En incidence oblique, on peut redéfinir α comme étant égale à $(ka/2)(\sin\theta - \sin\theta_i)$. Ainsi, un petit changement en α est donné par :

$$\Delta\alpha = (ka/2) \cos\theta (\Delta\theta) = 2\pi/N \quad (10.62)$$

où l'angle d'incidence est constant, c'est-à-dire : $\Delta\theta_i = 0$. Ainsi, même lorsque la lumière incidente est monochromatique :

$$\Delta\theta = 2\lambda/(Na \cos\theta_m) \quad (10.63)$$

est la *largeur angulaire d'une raie spectrale* due à un *élargissement instrumental*. On constate donc que cette largeur est inversement proportionnelle à la dimension du réseau, Na . Un autre paramètre très important est la variation de l'angle de diffraction par rapport à la longueur d'onde du rayonnement, ou **dispersion angulaire**, qui, comme dans le cas du prisme, est définie par :

$$\mathcal{D} \equiv d\theta/d\lambda \quad (10.64)$$

En différenciant l'équation des réseaux, on obtient :

$$\mathcal{D} = m/(a \cos\theta_m) \quad (10.65)$$

Cela signifie que la séparation angulaire entre deux raies monochromatiques de longueurs d'onde différentes est proportionnelle à l'ordre dans lequel on fait travailler le réseau.

*Pour plus de détails sur ces machines merveilleuses, voir A. R. Ingalls, *Sci. Amer.* **186**, 45 (1952), ou l'article de E. W. Palmer et J. F. Verrill, *Contemp. Phys.* **9**, 257 (1968).

On utilise le plus souvent des réseaux plans, blazés, avec des sillons à profil quasiment rectangulaire, où le vecteur de propagation est presque normal à l'une des faces des sillons. C'est la condition d'*autocollimation* pour laquelle θ_i et θ_m sont situés du même côté de la normale et $\gamma \approx \theta_i \approx -\theta_m$ (figure 10.32). Ainsi :

$$\mathcal{D}_{\text{auto}} = (2 \tan \theta_i)/\lambda \quad (10.66)$$

qui est indépendante de a .

Lorsque la différence de longueurs d'onde entre deux raies est assez petite pour qu'elles se superposent, le pic résultant devient quelque peu ambigu. Le pouvoir de résolution spectral \mathcal{R} d'un spectromètre est alors défini par :

$$\mathcal{R} \equiv \lambda/(\Delta\lambda)_{\min} \quad [9.76]$$

où $(\Delta\lambda)_{\min}$ est la plus petite différence de longueurs d'onde que l'on peut résoudre ou **limite de résolution**, et λ est la longueur d'onde moyenne. Le critère de Rayleigh pour la résolution de deux pics de même niveau requiert que le maximum principal de l'un doit coïncider avec le premier minimum de l'autre (comparer cela avec l'énoncé équivalent du paragraphe 9.6.1). En limite de résolution, la séparation angulaire est égale à la moitié de la largeur angulaire d'un pic, comme le montre la figure 10.26, ou, d'après l'équation (10.63) :

$$(\Delta\theta)_{\min} = \lambda/(Na \cos\theta_m)$$

En appliquant cette expression à la dispersion, on obtient :

$$(\Delta\theta)_{\min} = (\Delta\lambda)_{\min} m/(a \cos\theta_m)$$

Cette combinaison de ces deux équations nous conduit à une expression de \mathcal{R} ; en fait,

$$\lambda/(\Delta\lambda)_{\min} = mN \quad (10.67)$$

$$\mathcal{R} = \frac{Na(\sin\theta_m - \sin\theta_i)}{\lambda} \quad (10.68)$$

Le pouvoir de résolution est donc une fonction de la longueur du réseau Na , de l'angle d'incidence et de λ . Un réseau de 15 cm de long avec 6 000 traits par centimètre a donc un total de 9×10^4 traits et un pouvoir de résolution, dans le second ordre, de $1,8 \times 10^5$. Au voisinage de 540 nm, ce réseau pourra donc résoudre une différence de longueur d'onde de 0,003 nm. Notons que le pouvoir de résolution ne peut excéder $2Na/\lambda$,

ce qui se passe lorsque $\theta_i = -\theta_m = 90^\circ$. Les plus grandes valeurs de \mathcal{R} sont obtenues lorsque le réseau est utilisé en autocollimation, c'est-à-dire :

$$\mathcal{R}_{\text{auto}} = \frac{2Na \sin \theta_i}{\lambda} \quad (10.69)$$

Et encore, θ_i et θ_m sont du même côté de la normale. Pour des réseaux blazés de Harrison de 260 mm à environ 75° dans une monture Littrow, avec $\lambda = 500$ nm, le pouvoir de résolution maximal est légèrement supérieur à 10^6 .

À présent, examinons le problème de la superposition des ordres. L'équation du réseau montre clairement qu'une raie à 600 nm dans le premier ordre aura précisément la même position θ_m qu'une raie à 300 nm dans le deuxième ordre ou qu'une raie à 200 nm dans le troisième. Si deux raies de longueurs d'onde λ et $(\lambda + \Delta\lambda)$ coïncident dans des ordres successifs ($m+1$) et m , alors :

$$a(\sin \theta_m - \sin \theta_i) = (m+1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda)$$

Cette différence précise de longueurs d'onde est appelée la **gamme** ou l'**intervalle spectral libre** (noté *fsr* pour le terme anglais *free spectral range*) :

$$(\Delta\lambda)_{\text{fsr}} = \lambda/m \quad (10.70)$$

qui a déjà été défini pour l'interféromètre de Fabry-Pérot, dont on rappelle que le pouvoir de résolution est donné par :

$$\mathcal{R} = \mathcal{F}m \quad [9.76]$$

On doit donc considérer que N est la finesse d'un réseau (problème 10.38).

Un réseau à haute résolution, blazé pour le premier ordre, de manière à élargir le plus possible sa gamme spectrale libre, nécessite donc une densité importante de traits (jusqu'à environ 1 200 par millimètre) pour atteindre un excellent pouvoir de résolution. L'équation (10.68) montre qu'il est possible de conserver un pouvoir de résolution élevé avec un nombre plus faible de sillons et un pas plus grand, de façon à garder une longueur de réseau, Na , constante, mais cela conduit à augmenter m et à réduire ainsi la gamme spectrale libre, conditionnée par

le chevauchement des ordres. Si on maintient N constant tout en agrandissant le pas a , \mathcal{R} augmente, comme m , de sorte que $(\Delta\lambda)_{\text{fsr}}$ décroît encore. Dans cette configuration, la largeur angulaire d'une raie est réduite (i.e. raies spectrales plus fines), le réseau est moins fin, mais la dispersion dans un ordre donné est plus faible, ce qui rapproche entre elles les lignes du spectre.

Jusqu'à présent, nous avons considéré un type particulier de structure périodique, les *réseaux linéaires*. De nombreuses informations supplémentaires sont disponibles dans la littérature* en ce qui concerne leur forme, leur fabrication, leur monture, leur utilisation, etc.

Quelques objets familiers peuvent également servir de réseau rudimentaire. Les sillons d'un disque vinyle marchent très bien à incidence rasante. De même, les CD constituent de très bons réseaux en réflexion. De manière assez surprenante, avec $\theta_i \approx 90^\circ$, même un peigne ordinaire aux dents assez resserrées (ou une rangée d'agrafes neuves) peut effectuer une certaine analyse spectrale de la lumière blanche. Le principe en est exactement le même que celui du réseau en réflexion. Dans une lettre à un ami, datée du 12 mai 1673, James Gregory indiquait que la lumière du Soleil produisait un motif coloré en passant en travers d'une plume. Il demandait aussi que ces observations soient communiquées à M. Newton. Il est vrai que les plumes d'oiseaux constituent de bons réseaux en transmission.

Réseaux bi et tridimensionnels

Supposons qu'un écran diffractant Σ contienne un grand nombre, N , d'objets diffractants identiques (ouvertures, ou obstacles) répartis à la surface de Σ d'une manière complètement aléatoire, mais orientés de manière similaire. Imaginons aussi que cet écran diffractant soit éclairé par des ondes planes, focalisées par une lentille parfaite L_2 , après être sorties de Σ (figure 10.12). Ces ouvertures individuelles génèrent des figures de diffraction de Fraunhofer identiques, qui se superposent dans le plan image σ . S'il n'y a pas de périodicité régulière dans la disposition des ouvertures, on doit s'attendre à ce que les ondes aient des phases relatives aléatoires en arrivant en un point P arbitraire de σ . Il faut être prudent, cependant, car il existe une exception, lorsque P est sur l'axe central,

*Voir F. Kneubühl, « Diffraction Grating Spectroscopy », *Appl. Opt.* **8**, 505 (1969) ; R. S. Longhurst, *Geometrical and Physical Optics* ; et l'article de G. W. Stroke dans *l'Encyclopedia of Physics*, Vol. 29, édité par S. Flügge, p. 426.

.....
*Pour un traitement statistique, consulter J. M. Stone, *Radiation and Optics*, p. 146, et Sommerfeld, *Optics*, p. 194. Voir aussi « Diffraction Plates for Classroom Demonstrations », par R. B. Hoover, *Am. J. Phys.* **37**, 871 (1969) et T. A. Wiggins, « Hole Gratings for Optics Experiments », *Am. J. Phys.* **53**, 227 (1985).

c'est-à-dire au point $P = P_0$. Tous les rayons, provenant de toutes les ouvertures, parallèles à l'axe central, parcourent des longueurs de chemins optiques identiques avant d'atteindre P_0 . Ils y arrivent donc en phase et interfèrent constructivement.

À présent, considérons un groupe de rayons parallèles dirigés arbitrairement (dans une direction autre que celle de l'axe central), chacun étant émis par une ouverture différente. Ces rayons se focalisent en un point particulier de σ , avec une phase quelconque comprise entre 0 et 2π . Ce que l'on veut déterminer ici est le champ qui résulte de la superposition de N phaseurs d'amplitude égale, ayant chacun une phase relative aléatoire. La solution de ce problème nécessite une analyse poussée en termes de théorie de la probabilité qui dépasse quelque peu le cadre de notre propos*. L'idée essentielle est que la somme d'un grand nombre de phaseurs, d'angles aléatoires, n'est pas nulle, comme on pourrait le croire. Pour des raisons statistiques, commençons l'analyse du problème en considérant un grand nombre d'écrans individuels, contenant chacun N ouvertures diffractantes aléatoires, éclairés par une onde monochromatique. Il ne faut pas être surpris si les figures de diffraction de deux distributions aléatoires différentes de, par exemple, $N = 100$ ouvertures, présentent des dissemblances, même si elles sont petites. Ces figures sont vraiment différentes et ce, d'autant plus que N est faible. En effet, on peut s'attendre à ce que leurs similarités apparaissent statistiquement si l'on envisage un très grand nombre de ces masques, d'où l'approche générale suivie ici.

Si les distributions d'éclairement individuelles résultantes sont moyennées en un point, *hors de l'axe*, de σ , on trouve que l'éclairement moyen (I_{av}) y est égal à N fois l'éclairement (I_0) qui serait dû à une seule ouverture : $I_{av} = NI_0$. En fait, le résultat peut différer assez fortement de cette valeur moyenne, et ce, quelle que soit la valeur de N . Ces fluctuations d'un point à un autre par rapport à la moyenne se manifestent dans chaque figure particulière sous la forme d'une granularité qui a tendance à montrer une structure radiale ressemblant à des fibres. Si cette tavelure fine est moyennée sur une petite région de la figure, la valeur résultante est NI_0 , à condition, néanmoins, que cette région contienne un grand nombre de ces fluctuations.

Bien sûr, les résultats expérimentaux ne reproduisent généralement pas exactement la théorie : une source monochromatique ou un réseau aléatoire d'objets diffractants (qui ne se chevauchent pas) ne représente qu'une modélisation idéale. Cependant, avec un écran contenant N ouvertures disposées « aléatoirement » et éclairées par une onde plane quasi monochromatique, on peut s'attendre à observer une distribution de tavelures ressemblant étroitement à celle que produirait une

seule ouverture, mais N fois plus intense. De plus, on retrouvera un point brillant sur l'axe, en son centre, dont l'éclairement sera N^2 fois plus important que celui dû à une seule ouverture. Si l'écran contient N ouvertures rectangulaires (figure 10.33a), la figure résultante (figure 10.33b) ressemblera aux images de la page 483. De la même manière, l'ensemble des trous circulaires décrit à la figure 10.33c produira les anneaux de diffraction de la figure 10.33d.

Plus le nombre d'ouvertures augmente, plus le point central devient brillant et finit par obscurcir le reste de la figure. On notera également que les considérations précédentes sont vraies lorsque toutes les ouvertures sont éclairées de manière totalement cohérente. La distribution en éclairement du flux diffracté est déterminée par le degré de cohérence (voir chapitre 12). La figure observée peut alors aller du cas où il n'y a pas d'interférences (avec de la lumière complètement incohérente), au cas d'une illumination complètement cohérente (problème 10.40), qui a déjà été discuté.

On peut obtenir le même type d'effet avec ce que l'on appelle un *réseau de phase* bidimensionnel. Par exemple, le halo ou la couronne, que l'on voit souvent lorsque l'on observe la Lune ou le Soleil, résulte de la diffraction causée par des gouttelettes de vapeur d'eau (i.e. des particules de nuage) disposées aléatoirement dans l'atmosphère. Si l'on veut reproduire cet effet, on peut embuer une lamelle de microscope (ou éventuellement y apposer un mince film de poudre de talc, avant de l'embuer), puis regarder ensuite une source ponctuelle de lumière blanche. On devrait voir des anneaux colorés concentriques [équation (10.56)], entourant un disque central blanc. Si l'on ne voit qu'une tache blanche, c'est que les gouttelettes ont des dimensions trop différentes les unes des autres, et il faut essayer à nouveau avec du talc. Remarquons aussi que l'on peut voir ces beaux systèmes d'anneaux colorés à travers les *mailles* d'un collant ordinaire en nylon. Si l'on possède une lampe à vapeur de mercure (comme celles des éclairages urbains), on n'aura pas de problèmes pour observer toutes les raies émises par le mercure dans le visible. Si l'on ne possède pas ce genre de matériel, on peut masquer une lampe fluorescente et laisser une petite ouverture en guise de point source. On pourra remarquer un accroissement de la symétrie dans la figure de diffraction à mesure que l'on augmente le nombre de couches de nylon. C'est d'ailleurs grâce à ce détail que Rittenhouse, l'inventeur du réseau, s'intéressa à ce domaine ; mais lui utilisa un mouchoir en soie !

Considérons un arrangement régulier à deux dimensions d'éléments diffractants (figure 10.34), éclairé sous incidence normale par une onde plane, dont chacun se comporte comme

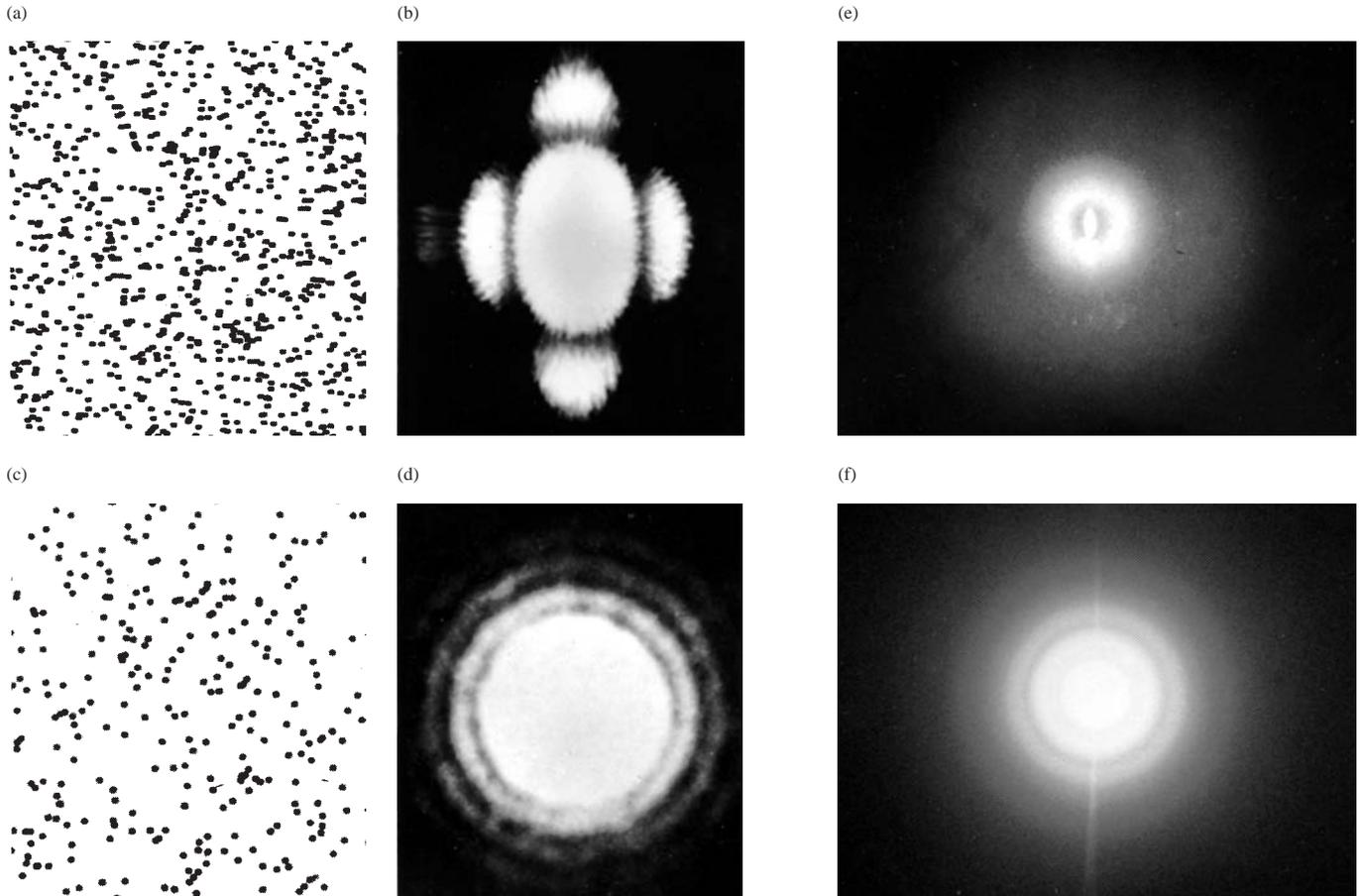


Figure 10.33 (a) Réseau aléatoire d'ouvertures rectangulaires. (b) Figure de Fraunhofer résultante, en lumière blanche. (c) Ensemble aléatoire d'ouvertures circulaires. (d) Figure de Fraunhofer résultante, en lumière blanche. (Photos The Ealing Corporation et Richard B. Hoover.) (e) Une flamme de bougie vue à travers un verre embué. Les couleurs spectrales sont visibles, sous forme d'anneaux concentriques. (photo E. H.) (f) Exemple similaire, résultant de l'observation d'une source ponctuelle en lumière blanche, à travers une plaque de verre recouverte de spores sphériques transparents de lycopode. (Photo E. H.)

une source cohérente. À cause de la périodicité régulière de la matrice d'émetteurs, la phase de chaque onde émergente est liée à celle des autres, d'une façon bien définie. Il y a alors des directions particulières dans lesquelles les interférences constructives prédominent. Cela arrive évidemment lorsque les distances entre chaque élément diffractant et P sont telles que les ondes sont pratiquement en phase à l'arrivée. Ce phénomène est visible en regardant une source ponctuelle à travers un bout de tissu fin à trame carrée (par ex., du nylon ; voir figure 10.34a), ou le maillage en métal très fin de certaines passoires. L'image diffractée est effectivement la superposition de deux figures de

réseaux à angle droit. On peut examiner attentivement le centre du motif afin de voir sa structure en forme de grille.

En ce qui concerne la faisabilité de *réseaux tridimensionnels*, il semble qu'il n'y ait pas de difficulté conceptuelle particulière. Une répartition de centres diffusants, disposés régulièrement dans l'espace entraîne certainement des maxima d'interférence dans des directions privilégiées. En 1912, Max von Laue (1879-1960) conçut l'idée ingénieuse d'utiliser la structure régulière des atomes dans un cristal comme réseau tridimensionnel. Il ressort de l'équation des réseaux [équation (10.61)] que, si λ est bien supérieure au pas

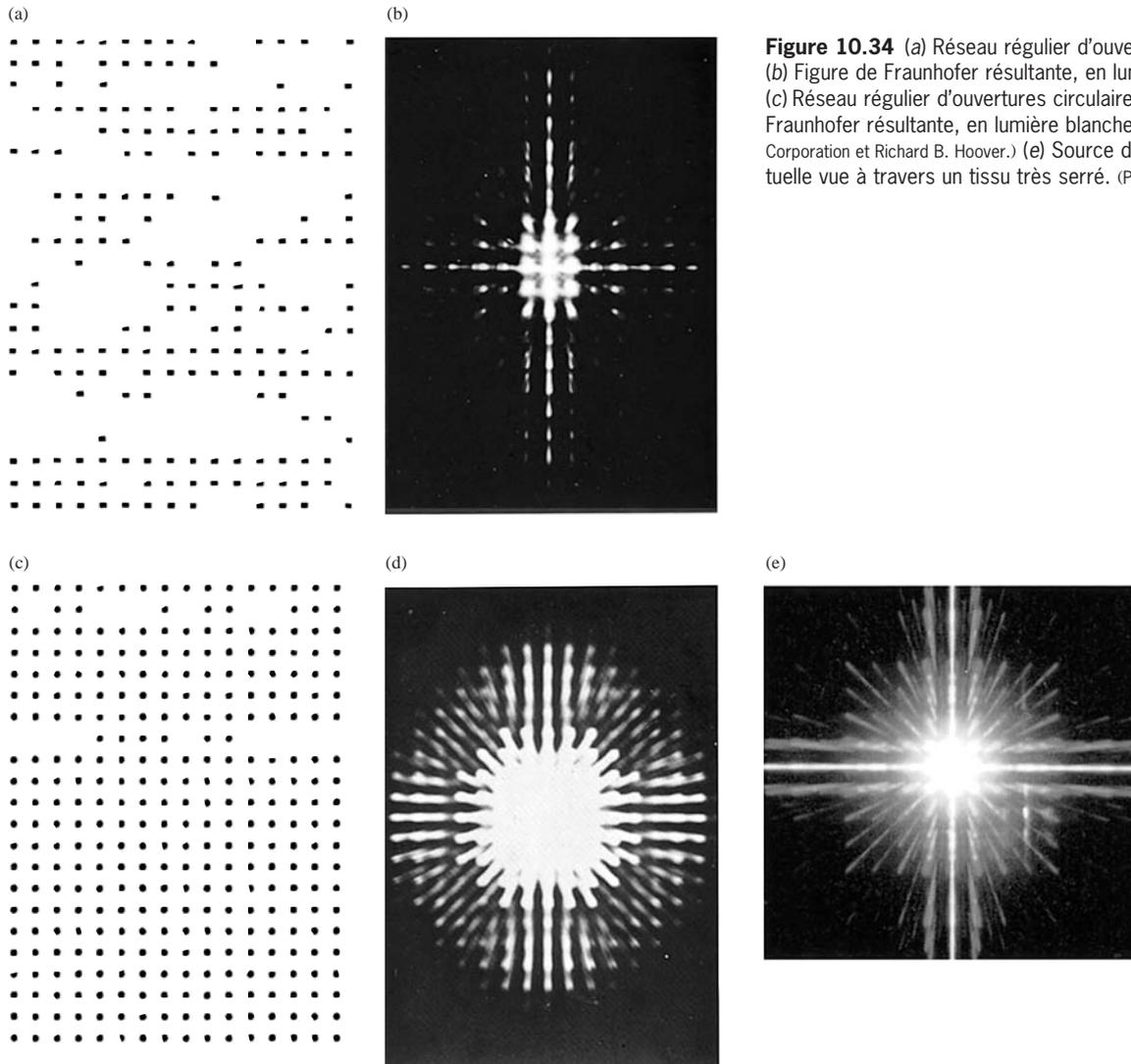


Figure 10.34 (a) Réseau régulier d'ouvertures rectangulaires. (b) Figure de Fraunhofer résultante, en lumière blanche. (c) Réseau régulier d'ouvertures circulaires. (d) Figure de Fraunhofer résultante, en lumière blanche. (Photos The Ealing Corporation et Richard B. Hoover.) (e) Source de lumière blanche ponctuelle vue à travers un tissu très serré. (Photo E. H.)

du réseau, seul l'ordre zéro ($m = 0$) est possible, ce qui équivaut à $\theta_0 = \theta_i$, c'est-à-dire à la réflexion spéculaire. Comme l'espacement entre les atomes d'un cristal est typiquement de l'ordre de quelques angströms ($1 \text{ \AA} = 10^{-1} \text{ nm}$), la lumière ne peut être diffractée que dans l'ordre zéro.

La solution proposée par von Laue fut de sonder le réseau d'atomes non pas avec de la lumière, mais avec des rayons X, dont les longueurs d'onde sont comparables aux distances interatomiques (figure 10.35a). Il dirigea un étroit faisceau de lumière blanche (émise par un tube à rayons X) sur un monocristal très fin. La plaque photosensible (figure 10.35b) révéla

alors une figure de Fraunhofer, consistant en un ensemble de points lumineux à des positions très précises. Ces points, où les interférences sont constructives, apparaissaient chaque fois que l'angle entre le faisceau et les plans atomiques du cristal obéissait à la loi de Bragg :

$$2d \sin \theta = m\lambda \quad (10.71)$$

Notons que, lorsque l'on travaille avec des rayons X, θ est traditionnellement mesuré à partir du plan et non de la normale à ce plan. Chaque ensemble de plans atomiques diffracte une

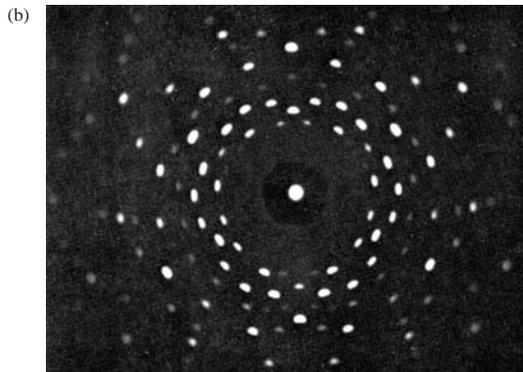
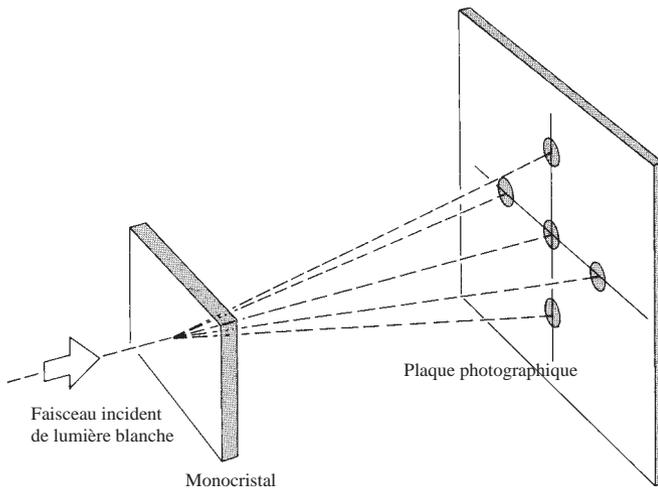
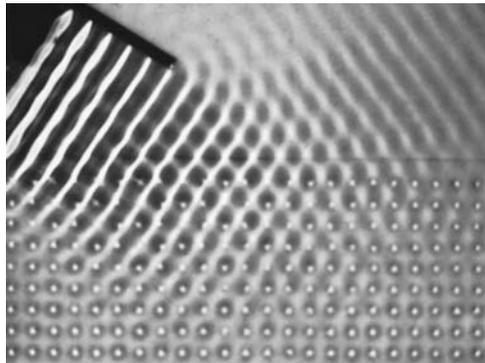


Figure 10.35 (a) Diffraction de Laue en transmission. (b) Figure de diffraction de rayons X par des atomes de quartz (SiO_2).



Vaguelettes d'eau réfléchies par un réseau de petites pointes agissant comme des diffuseurs ponctuels dans une cuve à vagues. (Photo PSSC Physics, D. C. Heath, Boston, 1960.)

longueur d'onde particulière dans une direction caractéristique. La photo ci-contre montre un phénomène analogue dans une cuve à ondes.

Au lieu de réduire λ à l'échelle des rayons X, on pourrait aussi travailler avec un modèle atomique dont on aurait multiplié les dimensions par un facteur d'un milliard, et réaliser ainsi une matrice tridimensionnelle de billes de métal, qui pourrait servir de réseau diffractant pour des micro-ondes.

10.3 Diffraction de Fresnel

10.3.1 La propagation libre d'une onde sphérique

Dans la configuration de Fraunhofer, le système diffractant était relativement petit, et le point d'observation très éloigné. Avec ces conditions, on peut ne pas tenir compte de certaines difficultés du principe de Huygens-Fresnel qui posent problème. Il s'agit à présent d'étudier ce qui se passe en champ proche, à proximité immédiate des éléments diffractants. Ainsi, certaines des approximations faites précédemment risquent d'être inappropriées. Retournons, dans un premier temps, au principe de Huygens-Fresnel, afin de l'examiner plus précisément. À tout instant, chaque point du front d'onde primaire se comporte comme un émetteur continu d'ondelettes secondaires sphériques. Mais, si chaque ondelette se propage uniformément dans toutes les directions, on comprend qu'en plus de l'onde qui s'éloigne, il y ait aussi une onde qui revienne vers la source. Or, expérimentalement, on ne constate rien de tel, et il faut donc modifier quelque peu le profil d'émission des émetteurs secondaires. Afin de décrire la directionnalité des émissions secondaires, on introduit ici la fonction $K(\theta)$, dénommée de **facteur d'obliquité** ou **d'inclinaison**. Fresnel avait reconnu la nécessité d'introduire un tel paramètre, mais il ne fit que des hypothèses sur sa forme*, et nous

*Il est intéressant de lire les propres explications de Fresnel, en gardant à l'esprit qu'il considérait la lumière comme une vibration élastique de l'éther.

Comme l'impulsion communiquée à chaque partie de l'onde primitive est dirigée suivant la normale, le mouvement qui est communiqué à l'éther doit être plus intense dans cette direction que dans les autres ; les rayons qui émaneraient de lui, s'il agissait seul, seraient de moins en moins intenses à mesure qu'ils s'écarteraient de cette direction.

La recherche de la loi selon laquelle leur intensité varie suivant chaque centre de perturbation est, sans nul doute, une tâche très difficile...

devons à Kirchhoff la formulation actuelle de $K(\theta)$ qui, comme on le verra au paragraphe 10.4, s'écrit :

$$K(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \quad (10.72)$$

Comme le montre la figure 10.36, θ est l'angle par rapport à la normale au front d'onde primaire, \vec{k} . Cette fonction a sa

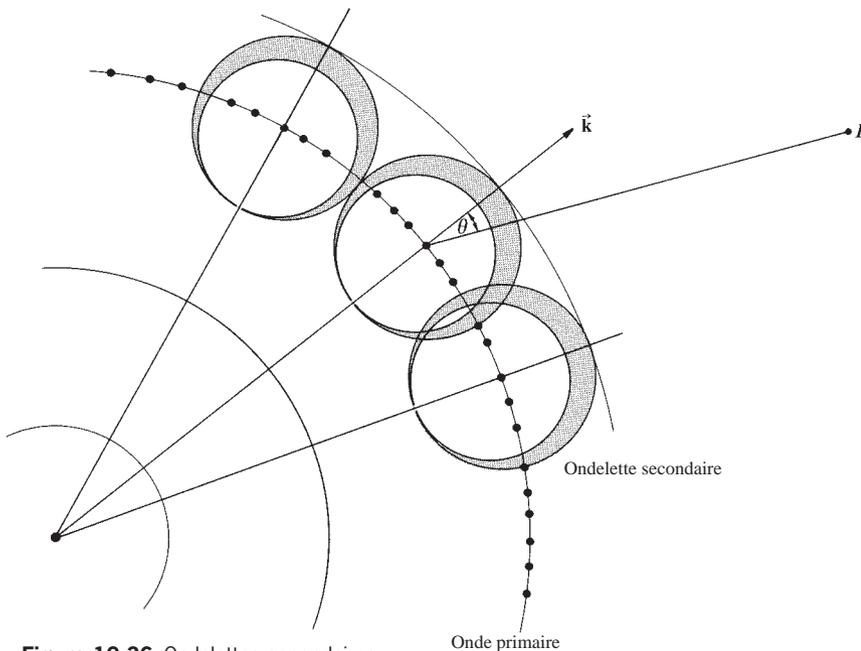


Figure 10.36 Ondelettes secondaires.

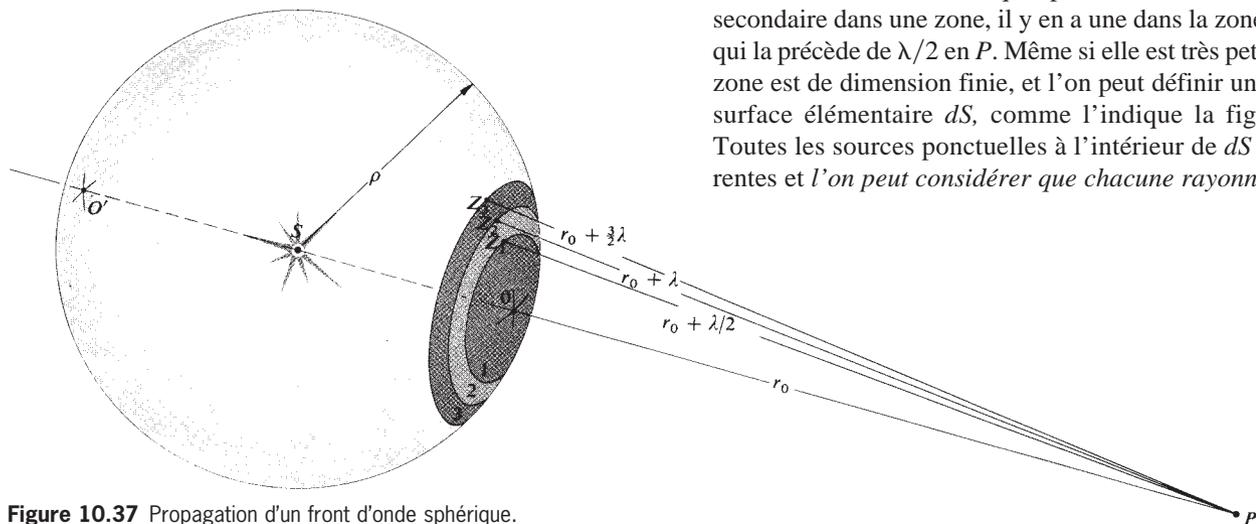


Figure 10.37 Propagation d'un front d'onde sphérique.

valeur maximale, $K(\theta) = 1$, dans la direction frontale et élimine l'onde de retour puisque $K(\pi) = 0$.

Examinons à présent la propagation libre d'une onde monochromatique sphérique émise par un *point source* S . Si le principe de Huygens-Fresnel est correct, on doit être capable d'additionner les ondelettes secondaires arrivant en un point P et d'obtenir ainsi l'onde primaire non obstruée. Ce qui suit va nous éclairer sur ce principe de reconnaître certaines de ses limitations et de développer une méthode très pratique. Considérons la figure 10.37. La surface sphérique correspond au front d'onde primaire, à un instant arbitraire t' après que l'onde a été émise par la source S à $t = 0$. La perturbation, de rayon ρ , peut être représentée par n'importe quelle expression mathématique pouvant décrire une onde sphérique harmonique, par exemple :

$$E = \frac{\mathcal{E}_0}{\rho} \cos(\omega t' - k\rho) \quad (10.73)$$

Comme cela apparaît sur la figure, on a divisé le front d'onde en différentes régions annulaires. Les frontières entre ces régions correspondent aux intersections du front d'onde avec une série de sphères centrées en P , de rayons $r_0 + \lambda/2$, $r_0 + \lambda$, $r_0 + 3\lambda/2$, et ainsi de suite. Celles-ci constituent les **zones de Fresnel** ou **zones de demi-période**.

Notons que pour une source ponctuelle secondaire dans une zone, il y en a une dans la zone adjacente qui la précède de $\lambda/2$ en P . Même si elle est très petite, chaque zone est de dimension finie, et l'on peut définir un anneau de surface élémentaire dS , comme l'indique la figure 10.38. Toutes les sources ponctuelles à l'intérieur de dS sont cohérentes et l'on peut considérer que chacune rayonne en phase

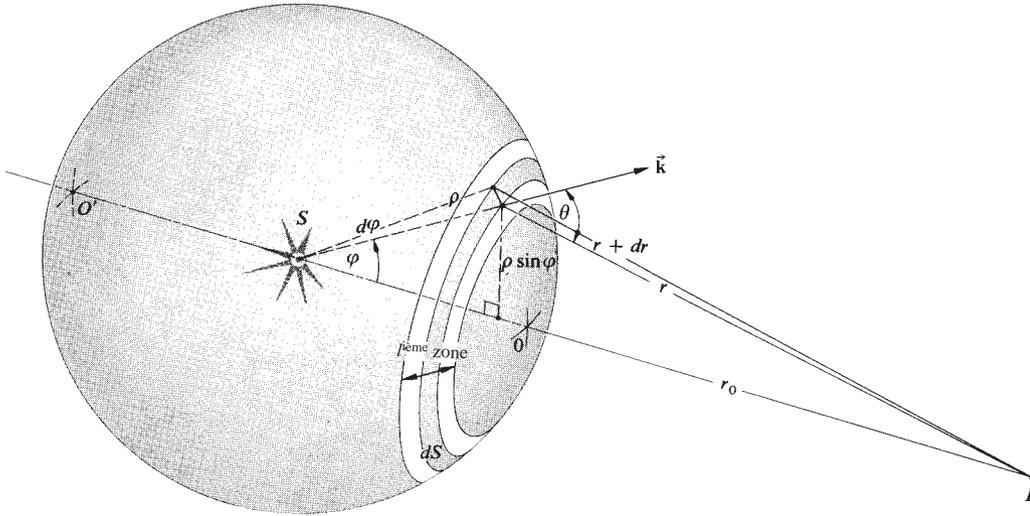


Figure 10.38 Propagation d'un front d'onde sphérique.

avec l'onde primaire [équation (10.73)]. Les ondelettes secondaires parcourent une distance r pour atteindre P , et elles y arrivent à l'instant t avec la même phase, $\omega t - k(\rho + r)$. L'amplitude de l'onde primaire à une distance ρ de S est \mathcal{E}_0/ρ . On estime, par conséquent, que la vigueur du rayonnement \mathcal{E}_A , par unité de surface d'émission secondaire sur dS , est proportionnelle à \mathcal{E}_0/ρ , à une constante multiplicative Q près, c'est-à-dire : $\mathcal{E}_A = Q\mathcal{E}_0/\rho$. La contribution d'un champ électrique au point P par les sources secondaires de dS est :

$$dE = K \frac{\mathcal{E}_A}{r} \cos [\omega t - k(\rho + r)] dS \quad (10.74)$$

Le facteur d'obliquité doit varier lentement et l'on peut considérer qu'il est constant sur une zone de Fresnel. Pour obtenir l'expression de dS en fonction de r , on peut écrire :

$$dS = \rho d\varphi 2\pi(\rho \sin \varphi)$$

Et, si l'on applique la loi des cosinus, on obtient :

$$r^2 = \rho^2 + (\rho + r_0)^2 - 2\rho(\rho + r_0)\cos \varphi$$

Après différentiation, on obtient donc :

$$2r dr = 2\rho(\rho + r_0) \sin \varphi d\varphi$$

avec ρ et r_0 constants. En utilisant la valeur de $d\varphi$, on trouve que la surface élémentaire dS s'exprime sous la forme :

$$dS = 2\pi \frac{\rho}{(\rho + r_0)} r dr \quad (10.75)$$

La perturbation arrivant en P et provenant de la $l^{\text{ème}}$ zone est donc :

$$E_l = K_l 2\pi \frac{\mathcal{E}_A \rho}{(\rho + r_0)} \int_{r_{l-1}}^{r_l} \cos[\omega t - k(\rho + r)] dr$$

Ainsi :

$$E_l = \frac{-K_l \mathcal{E}_A \rho \lambda}{(\rho + r_0)} [\sin(\omega t - k\rho - kr)]_{r=r_{l-1}}^{r=r_l}$$

En introduisant le fait que $r_{l-1} = r_0 + (l-1)\lambda/2$ et que $r_l = r_0 + l\lambda/2$, l'expression se réduit à (problème 10.42) :

$$E_l = (-1)^{l+1} \frac{2K_l \mathcal{E}_A \rho \lambda}{(\rho + r_0)} \sin [\omega t - k(\rho + r_0)] \quad (10.76)$$

On peut remarquer que l'amplitude de E_l alterne entre des valeurs positives et négatives, selon que l est pair ou impair, ce qui signifie que les contributions provenant de zones adjacentes sont en opposition de phase et tendent à s'annuler. On voit que c'est ici que le facteur d'obliquité joue un rôle crucial. À mesure que l croît, θ croît également mais K décroît, ce qui fait que deux contributions successives ne s'annulent pas complètement. Il est intéressant de remarquer que E_l/K_l est indépendant des variables de position. Bien que les aires de chaque zone soient à peu près égales, elles augmentent légèrement lorsque l croît, donc lorsque le nombre d'émetteurs augmente. Mais la distance moyenne entre chaque zone et P augmente

également, de telle manière que E_l/K_l demeure constant (voir problème 10.43)

En P , la somme des perturbations optiques provenant de toutes les m zones s'écrit donc :

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_m$$

Comme elles sont alternées en signe, on peut écrire :

$$E = |E_1| - |E_2| + |E_3| - \dots \pm |E_m| \quad (10.77)$$

Si m est impair, les séries peuvent être reformulées de deux manières, comme :

$$E = \frac{|E_1|}{2} + \left(\frac{|E_1|}{2} - |E_2| + \frac{|E_3|}{2} \right) + \left(\frac{|E_3|}{2} - |E_4| + \frac{|E_5|}{2} \right) + \dots \\ + \left(\frac{|E_{m-2}|}{2} - |E_{m-1}| + \frac{|E_m|}{2} \right) + \frac{|E_m|}{2} \quad (10.78)$$

Ou bien, comme :

$$E = |E_1| - \frac{|E_2|}{2} - \left(\frac{|E_2|}{2} - |E_3| + \frac{|E_4|}{2} \right) \\ - \left(\frac{|E_4|}{2} - |E_5| + \frac{|E_6|}{2} \right) + \dots \\ + \left(\frac{|E_{m-3}|}{2} - |E_{m-2}| + \frac{|E_{m-1}|}{2} \right) - \frac{|E_{m-1}|}{2} + |E_m| \quad (10.79)$$

Il y a maintenant deux possibilités : soit $|E_l|$ est plus grand que la moyenne arithmétique de ses deux termes voisins, $|E_{l-1}|$ et $|E_{l+1}|$, soit il est plus petit, et cela pose une vraie question sur la vitesse de variation de $K(\theta)$. Lorsque :

$$|E_l| > (|E_{l-1}| + |E_{l+1}|)/2$$

Chaque terme entre parenthèse est négatif. Il résulte de l'équation (10.78) que :

$$E < \frac{|E_1|}{2} + \frac{|E_m|}{2} \quad (10.80)$$

De même, d'après l'équation (10.79) :

$$E > |E_1| - \frac{|E_2|}{2} - \frac{|E_{m-1}|}{2} + |E_m| \quad (10.81)$$

Comme le facteur d'obliquité varie entre 1 et 0 de la première à la dernière zone, on peut négliger sa variation entre deux zones adjacentes. On peut donc écrire : $|E_1| \approx |E_2|$ et $|E_{m-1}| \approx |E_m|$. Avec le même degré d'approximation, l'équation (10.81) devient :

$$E > \frac{|E_1|}{2} + \frac{|E_m|}{2} \quad (10.82)$$

On en conclut donc, avec les équations (10.80) et (10.82), que :

$$E \approx \frac{|E_1|}{2} + \frac{|E_m|}{2} \quad (10.83)$$

On obtient le même résultat lorsque :

$$|E_l| < (|E_{l-1}| + |E_{l+1}|)/2$$

Si le dernier terme, $|E_m|$, de la série de l'équation (10.77) correspond à m pair, le même raisonnement (problème 10.44) conduit à :

$$E \approx \frac{|E_1|}{2} - \frac{|E_m|}{2} \quad (10.84)$$

Fresnel fit l'hypothèse que le facteur d'obliquité était tel que la dernière zone à contribuer correspondait à $\theta = 90^\circ$, c'est-à-dire :

$$K(\theta) = 0 \text{ for } \pi/2 \leq |\theta| \leq \pi$$

Dans ce cas, les équations (10.83) et (10.84) se réduisent toutes les deux à :

$$E \approx \frac{|E_1|}{2} \quad (10.85)$$

lorsque $|E_m|$ tend vers zéro, parce que $K_m(\pi/2) = 0$. L'autre alternative est d'utiliser l'expression plus correcte de Kirchhoff pour le facteur d'inclinaison, et de diviser l'onde sphérique *entière* en différentes zones, telles que la dernière (la $m^{\text{ème}}$) entoure O' . θ vaut alors π , $K_m(\pi) = 0$, $|E_m| = 0$ et encore une fois, $E \approx |E_1|/2$. *La perturbation optique engendrée par le front d'onde entier non obstrué est approximativement égale à la moitié de la contribution de la première zone.*

Si l'onde primaire se propageait simplement de S à P , en un temps t , elle pourrait s'écrire :

$$E = \frac{\mathcal{E}_0}{(\rho + r_0)} \cos [\omega t - k(\rho + r_0)] \quad (10.86)$$

Pourtant, la perturbation qui est synthétisée par les ondelettes secondaires [équation (10.76) et (10.85)] est :

$$E = \frac{K_1 \mathcal{E}_A \rho \lambda}{(\rho + r_0)} \sin [\omega t - k(\rho + r_0)] \quad (10.87)$$

Ces deux équations doivent cependant être exactement équivalentes, et il faut interpréter les constantes de l'équation (10.87) pour qu'il en soit ainsi. Notons que l'on a une certaine latitude pour y arriver. Il est préférable que le facteur d'obliquité soit égal à 1 dans la direction frontale. On posera donc : $K_1 = 1$ (plutôt que $1/\lambda$), d'où il résulte que Q doit être égal à $1/\lambda$. Dans ce cas, $\mathcal{E}_A \rho \lambda = \mathcal{E}_0$, ce qui est correct au point de vue des dimensions. Gardons en mémoire que \mathcal{E}_A est la vigueur de la source d'ondelettes secondaires par unité de surface, sur le front d'onde primaire de rayon ρ , et que \mathcal{E}_0/ρ est l'amplitude de cette onde primaire $E_0(\rho)$. Ainsi, $\mathcal{E}_A = E_0(\rho)/\lambda$. Il y a un autre problème, à savoir la différence de phase de $\pi/2$ entre les équations (10.86) et (10.87). On peut l'expliquer en considérant que les sources secondaires émettent leurs ondes avec un décalage de phase d'un quart de longueur d'onde par rapport à l'onde primaire (voir paragraphe 4.2.3).

On a vu qu'il était nécessaire de modifier l'énoncé original du principe d'Huygens-Fresnel, mais on ne doit pas perdre de vue les deux raisons pratiques de son utilisation. D'une part, on peut considérer la théorie de Huygens-Fresnel comme une approximation de la formulation de Kirchhoff, tant que cela n'est pas trop artificiel. D'autre part, beaucoup de ses prévisions sont en accord avec les observations expérimentales. N'oublions pas qu'il est tout à fait satisfaisant dans l'approximation de Fraunhofer.

10.3.2 La courbe de la vibration

Développons à présent une méthode graphique pour analyser qualitativement un certain nombre de problèmes de diffraction liés généralement à des configurations circulaires symétriques.

Imaginons que l'on divise la première zone de Fresnel (ou zone de Fresnel polaire) de la figure 10.37 en N sous-zones plus petites, et qui sont définies par les intersections avec des sphères, centrées en P , et de rayons :

$$r_0 + \lambda/2N, r_0 + \lambda/N, r_0 + 3\lambda/2N, \dots, r_0 + \lambda/2$$

Chaque sous-zone apporte une contribution au champ électrique en P . Comme la différence de phase sur la zone entière, entre O et son bord, est π radians (correspondant à $\lambda/2$), chaque

sous-zone est déphasée de π/N rad. La figure 10.39 représente l'addition vectorielle des phaseurs de chaque sous-zone où l'on a pris, pour des raisons pratiques, $N = 10$. La chaîne de phaseurs dévie très légèrement par rapport au cercle, car le facteur d'obliquité diminue chaque amplitude successive. Lorsque le nombre de sous-zones tend vers l'infini (i.e. $N \rightarrow \infty$), le polygone de vecteurs évolue en un segment de spirale continue appelée la **courbe de la vibration**. Pour chaque zone de Fresnel additionnelle, la courbe de la vibration pivote d'un demi-tour et de π en phase lorsqu'elle s'enroule vers l'intérieur. Comme le montre la figure 10.40, les points $O_s, Z_{s1}, Z_{s2}, Z_{s3}, \dots, O'_s$ de la spirale correspondent respectivement aux points $O, Z_1, Z_2, Z_3, \dots, O'$ du front d'onde de la figure 10.37. Chaque point Z_1, Z_2, \dots, Z_m se situe à la périphérie d'une zone, ce qui fait que les points $Z_{s1}, Z_{s2}, \dots, Z_{sm}$ sont séparés l'un de l'autre par un demi-tour. On verra dans l'équation (10.91) que le rayon de chaque zone est proportionnel à la racine carrée de son rang, m . Le rayon de la centième zone est donc seulement 10 fois plus grand que celui de la première zone. Initialement, donc, l'angle θ augmente rapidement. Il diminue ensuite graduellement à mesure que m augmente. En conséquence, $K(\theta)$ décroît rapidement uniquement pour les toutes premières zones, et donc, au fur et à mesure que les spirales s'enroulent lorsque m augmente, elles se resserrent de plus en plus et, à chaque révolution, elles dévient de moins en moins par rapport au cercle.

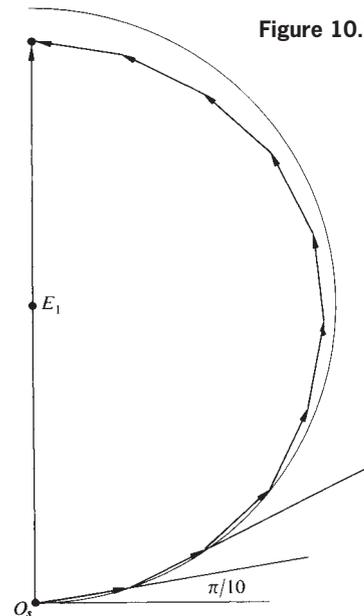


Figure 10.39 Addition de phaseurs.

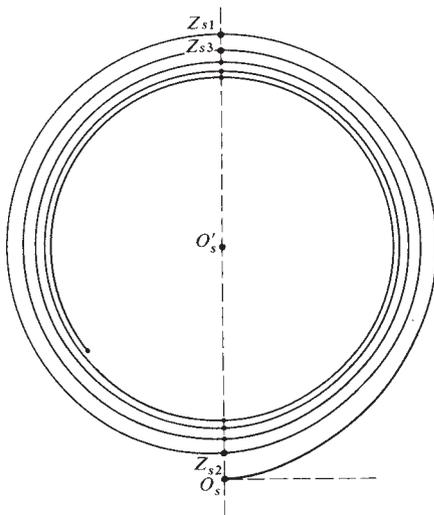


Figure 10.40 Superposition des images de points.

Rappelons-nous que la spirale est constituée par une infinité de phaseurs, tous décalés d'un petit angle de phase. On peut évaluer la phase relative en P entre les perturbations qui proviennent de deux points du front d'onde, disons O et A , comme le montre la figure 10.41. La différence de phase recherchée est l'angle β entre les tangentes à la courbe de la vibration aux points O_s et A_s . Si l'on considère que le point A est situé sur la région du sommet du front d'onde, la résultante

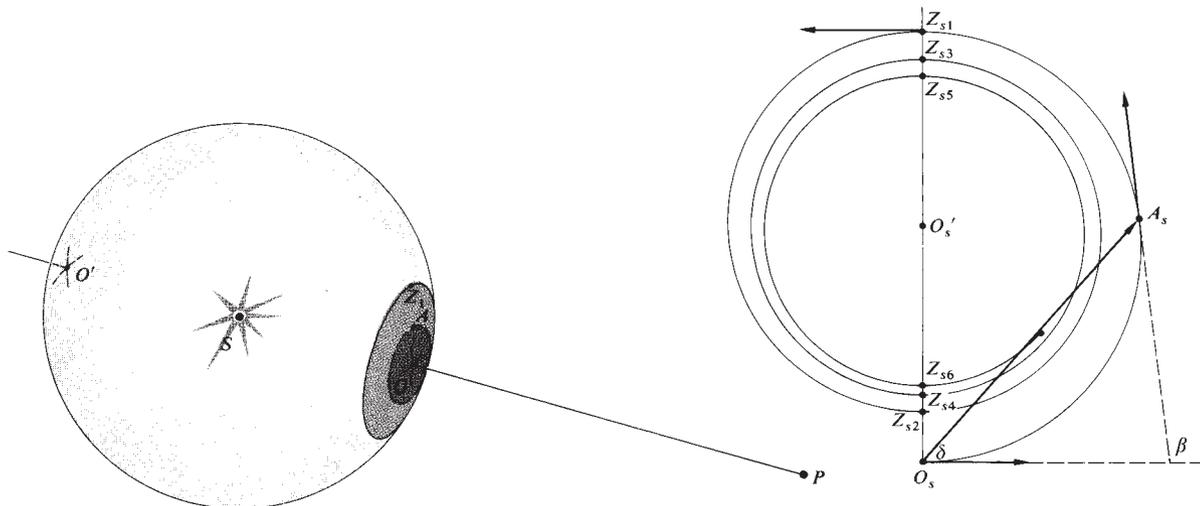


Figure 10.41 Front d'onde et courbe de vibration correspondante.

en P de toute la région est $\overrightarrow{O_s A_s}$ dont la phase est δ .

Le champ total en P issu d'une onde non entravée est la somme des contributions de toutes les zones comprises entre O et O' . La longueur du vecteur $\overrightarrow{O_s O'_s}$ est donc précisément cette amplitude. Notons que, comme on s'y attendait, l'amplitude $O_s O'_s$ est juste la moitié de celle qui provient de la première zone $O_s Z_{s1}$. Remarquons également que $\overrightarrow{O_s O'_s}$ a une phase de 90° par rapport à l'onde arrivant en P et issue de O . Une ondelette émise en O , en phase avec l'excitation primaire, atteint P toujours en phase avec l'onde primaire. Cela signifie que $\overrightarrow{O_s O'_s}$ a un déphasage de 90° avec l'onde primaire non perturbée. Comme on l'a déjà vu, c'est une des limitations de la formulation de Fresnel.

10.3.3 Ouvertures circulaires

Ondes sphériques

Si l'on veut appliquer la procédure de Fresnel à une source ponctuelle, on peut l'utiliser comme une méthode semi-quantitative pour étudier la diffraction par une ouverture circulaire. Considérons une onde sphérique monochromatique rencontrant un écran percé d'un petit trou (figure 10.42). On mesure tout d'abord l'éclairement en un point P sur l'axe de symétrie, puis on effectue une cartographie point par point de l'éclairement dans la région située au-delà de Σ .

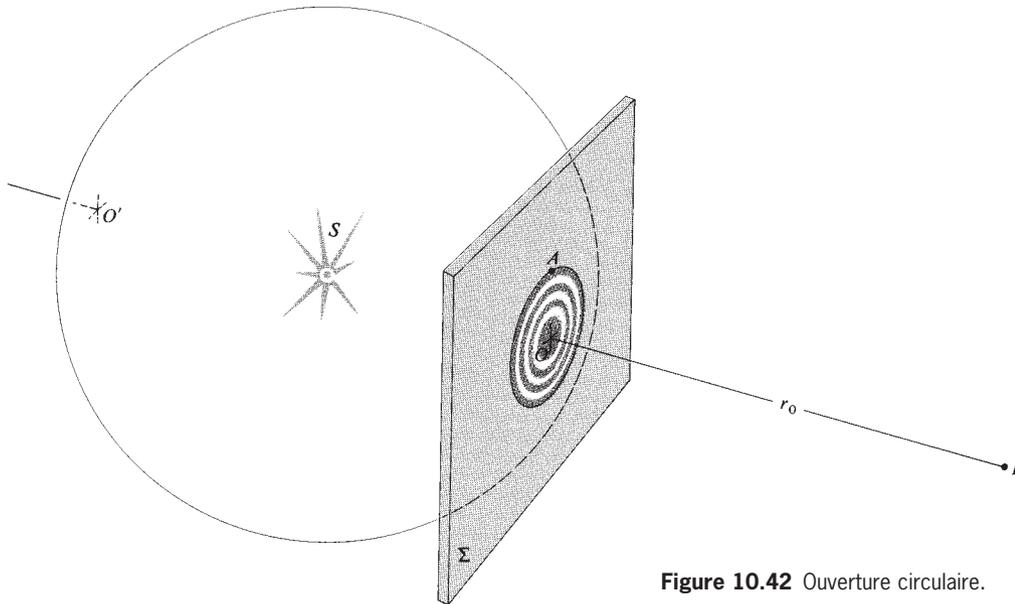


Figure 10.42 Ouverture circulaire.

Considérons que le détecteur utilisé pour faire la mesure en P « voit » un nombre entier m de zones qui remplissent l'ouverture. En fait, le détecteur mesure simplement l'éclairement en P , les zones n'ayant aucune réalité physique. Si m est pair, et puisque $K_m \neq 0$, on a donc :

$$E = (|E_1| - |E_2|) + (|E_3| - |E_4|) + \cdots + (|E_{m-1}| - |E_m|)$$

Comme chaque contribution adjacente est pratiquement égale,

$$E \approx 0$$

Et $I \approx 0$. Si, d'un autre côté, m est impair :

$$E = |E_1| - (|E_2| - |E_3|) - (|E_4| - |E_5|) - \cdots - (|E_{m-1}| - |E_m|)$$

et
$$E \approx |E_1|$$

ce qui est environ le double de l'amplitude de l'onde non obscurcie. Ce résultat est vraiment surprenant ; en insérant un écran sur le parcours d'une onde, donc en bloquant la majeure partie du front d'onde, on a multiplié l'éclairement en P par quatre. Par respect de la loi de conservation de l'énergie, il doit y avoir, ailleurs, des points où l'éclairement a diminué. Du fait de la complète symétrie du dispositif, on s'attend à obtenir une figure en anneau circulaire. Si m n'est pas un entier (i.e. une fraction de

zone apparaît dans l'ouverture), l'éclairement en P prend une valeur intermédiaire entre zéro et son maximum.

On comprend mieux le problème si l'on imagine une ouverture qui s'élargit progressivement à partir de zéro. L'amplitude en P peut être déterminée avec la spirale de Cornu, où A représente un point quelconque du bord de l'ouverture diffractante. La longueur du phaseur $O_s A_s$ est l'amplitude du champ optique que l'on recherche. Retournons à la figure 10.41. À mesure que le trou augmente, A_s se déplace sur la spirale dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, vers Z_{s1} et un maximum. Lorsque l'ouverture grossit et occupe progressivement la seconde zone, cela réduit $O_s A_s$ à $O_s Z_{s2}$, qui est pratiquement zéro, et P devient un point sombre. À mesure que la taille de l'ouverture augmente, $O_s A_s$ oscille en longueur en passant de pratiquement zéro à un nombre de maxima successifs, qui diminuent eux-mêmes graduellement. En fin de compte, lorsque le trou est relativement grand, l'onde n'est pratiquement plus obscurcie ; A_s s'approche de O'_s et les changements ultérieurs en $O_s A_s$ sont imperceptibles.

Afin de cartographier le reste de la figure de diffraction, déplaçons notre détecteur le long de lignes perpendiculaires à l'axe, comme le montre la figure 10.43. En P , on suppose que l'ouverture est occupée par deux zones complètes et que $E \approx 0$. En P_1 , la deuxième zone est partiellement obscurcie et la troisième commence à se montrer ; E n'est plus nul. En P_2 , une grande partie de la seconde zone est cachée, alors que la

troisième est encore plus exposée. Comme les contributions de la première et de la troisième zone sont en phase, le détecteur, placé n'importe où sur la zone circulaire passant par P_2 , enregistre un point lumineux. Dès qu'il se déplace radialement vers l'extérieur et que des portions des zones suivantes sont découvertes, le senseur détecte une série de maxima et minima relatifs. La photo de la page 510 présente la figure de diffraction obtenue sur un écran distant de 1 m, pour différents trous diffractants, de diamètres allant de 1 mm à 4 mm. En partant du haut à gauche et en allant vers la droite, on constate que les quatre premiers trous sont si petits que seule une fraction de la première zone est découverte. Le sixième trou découvre la première et la seconde zone, et son centre apparaît donc noir. Le neuvième trou découvre les trois premières zones, et son centre est donc à nouveau brillant. Notons que, en P_3 (figure 10.43), même légèrement au-delà de l'ombre géométrique, la première zone est partiellement découverte. Chacun des quelques derniers segments contributeurs n'est qu'une petite

fraction de sa propre zone, et est négligeable en tant que tel. Bien qu'elle soit petite, la somme de toutes les amplitudes des zones fractionnelles demeure finie. Cependant, lorsqu'on s'enfonce de plus en plus dans l'ombre géométrique, la totalité de la première zone est obscurcie, les derniers termes sont, encore une fois, négligeables, et cette fois, la série tend effectivement vers zéro et l'obscurité.

On peut avoir une meilleure idée de la taille véritable des éléments dont on parle, en calculant le nombre de zones pour une ouverture donnée. La surface de chaque zone (voir problème 10.43) est donnée par :

$$A = \frac{\rho}{(\rho + r_0)} \pi r_0 \lambda \quad (10.88)$$

Si l'ouverture a un rayon R , on obtient approximativement le nombre de zones qu'elle contient en écrivant simplement :

$$\frac{\pi R^2}{A} = \frac{(\rho + r_0)R^2}{\rho r_0 \lambda} \quad (10.89)$$

Par exemple, avec une source ponctuelle à 1 m devant l'ouverture ($\rho \approx 1$ m), et un plan d'observation à 1 m derrière ($r_0 = 1$ m), et $\lambda = 500$ nm, il y a quatre zones lorsque $R = 1$ mm et 400 zones lorsque $R = 1$ cm. Lorsque ρ et r_0 augmentent tous les deux jusqu'au point où seule une petite fraction de la zone est comprise dans l'ouverture, la diffraction de Fraunhofer apparaît, et cela constitue essentiellement une autre formulation de la condition de Fraunhofer énoncée au paragraphe 10.1.2 (voir également le problème 10.1).

Il découle de l'équation (10.89) que le nombre de zones contenues dans l'ouverture dépend de la distance r_0 de P à O . Lorsque P se déplace dans un sens ou dans l'autre le long de l'axe central, le nombre de zones incluses dans l'ouverture augmente ou diminue, et il oscille entre des entiers impairs ou pairs. Par conséquent, l'éclairement passe par une série de maxima et de minima.

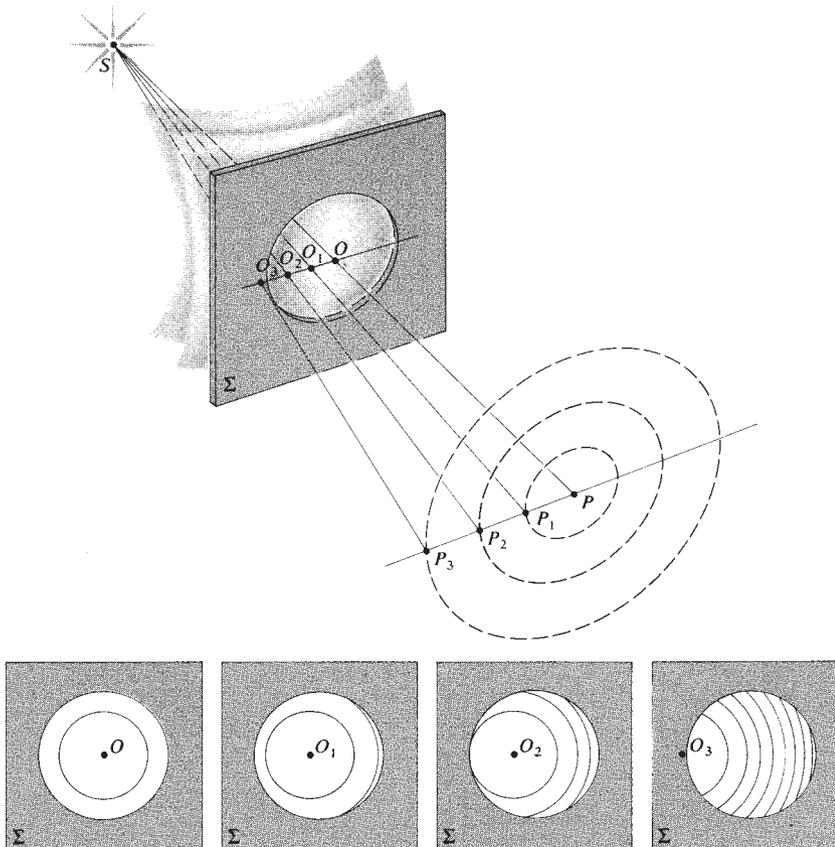
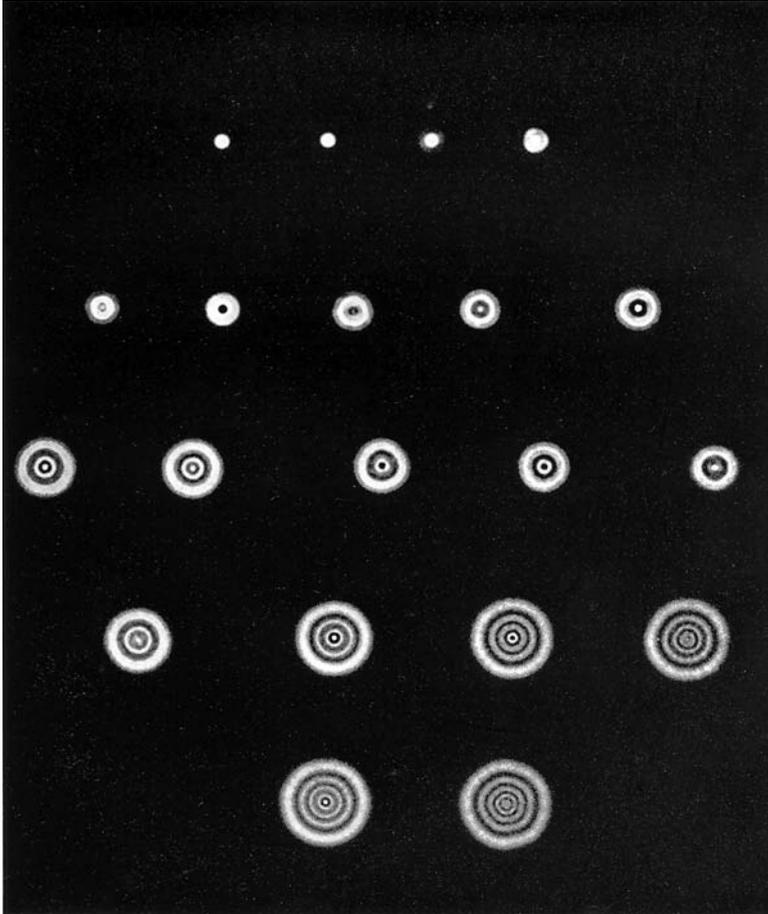


Figure 10.43 Représentation des zones d'une ouverture circulaire.



Figures de diffraction pour des ouvertures circulaires de tailles croissantes. (Francis Weston Sears, *Optics*, ©1949, Addison-Wesley Reading, MA.)

Explicitement, cela ne peut pas arriver dans la configuration de Fraunhofer, où, par définition, pas plus d'une zone ne peut apparaître dans l'ouverture*.

Ondes planes

Supposons maintenant que la source ponctuelle soit éloignée de l'écran diffractant, de telle manière que la lumière incidente puisse être considérée comme une onde plane ($\rho \rightarrow \infty$). De la figure 10.44, on peut tirer une expression pour le rayon de la $m^{\text{ème}}$ zone, R_m . Comme $r_m = r_0 + m\lambda/2$,

$$R_m^2 = (r_0 + m\lambda/2)^2 - r_0^2$$

Et donc :

$$R_m^2 = mr_0\lambda + m^2\lambda^2/4 \quad (10.90)$$

Généralement, le second terme de l'équation (10.90) est négligeable tant que m n'est pas extrêmement grand. Par conséquent,

$$R_m^2 = mr_0\lambda \quad (10.91)$$

Les rayons sont donc proportionnels à la racine carrée des entiers. En utilisant un laser collimaté He-Ne ($\lambda_0 = 632,8$ nm), le rayon de la première zone est 1 mm lorsqu'elle est vue à une distance de 1,58 m. Avec ces conditions particulières, l'équation (10.91) est applicable tant que $m \ll 10^7$, auquel cas $R_m = \sqrt{m}$ en millimètres. Il est nécessaire de modifier légèrement la figure 10.43, dans la mesure où les lignes $\overline{O_1P_1}$, $\overline{O_2P_2}$, et $\overline{O_3P_3}$ sont des perpendiculaires à Σ menées des points d'observation.

*D. S. Burch, « Fresnel Diffraction by a Circular Aperture », *Am. J. Phys.* **53**, 255 (1985).

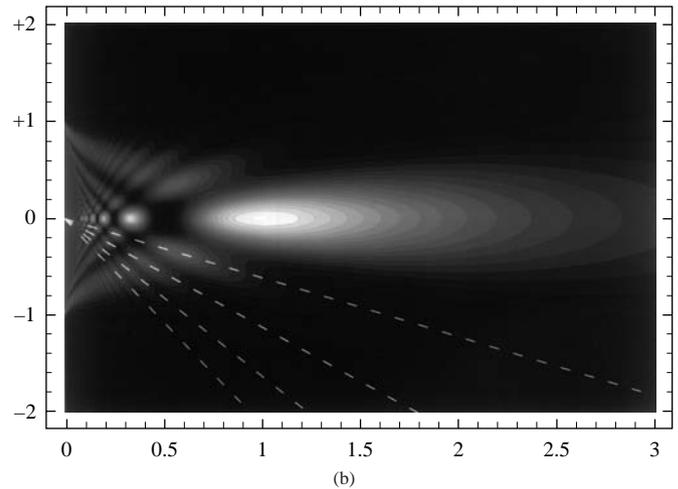
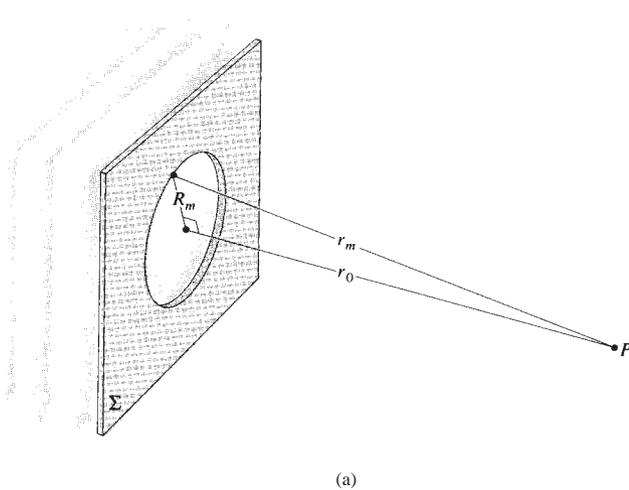


Figure 10.44 (a) Ondes planes incidentes sur une ouverture circulaire. (b) Vue en coupe de la distribution d'éclairement à 3 dimensions. L'axe horizontal est gradué en multiples de R^2/λ et l'axe vertical en R (rayon du trou). Ainsi, l'ouverture s'étend entre $+1$ et -1 . À une distance de $R^2/\lambda = r_0$, l'ouverture est exactement occupée par une zone de Fresnel et l'éclairement est maximum. Au-delà, $I(r)$ décroît de manière monotone jusqu'à ce qu'il atteigne le régime de champ lointain. Les quatre premiers zéros de la distribution d'éclairement de Fraunhofer se situent sur les lignes en pointillés. (Photo G. W. Forbes, The Institute of Optics, University of Rochester.)

10.3.4 Obstacles circulaires

En 1818, Fresnel participa à un concours de l'Académie des sciences. Son article, sur la théorie de la diffraction, gagna le premier prix et le titre de *Mémoire Couronné*, mais après avoir été à l'origine d'une histoire assez intéressante. Le jury de l'Académie était composé de savants de premier plan : Pierre Laplace, Jean B. Biot, Siméon D. Poisson, Dominique F. Arago, et Joseph L. Gay-Lussac. Poisson, qui était un critique ardent de la théorie ondulatoire de la lumière, déduisit une conclusion remarquable et apparemment indéfendable des travaux de Fresnel. Il démontra qu'au centre de l'ombre d'un petit disque circulaire devait se trouver un point brillant, résultat avec lequel il pensait prouver l'absurdité du raisonnement de Fresnel. Il faut bien reconnaître qu'en considérant cet argument ultrasimplifié, tout scientifique arriverait à la même conclusion. Rappelons qu'une onde non perturbée entraîne une perturbation [équation (10.85)] donnée par $E \approx |E_1|/2$. Si un obstacle recouvre exactement la première zone de Fresnel, de telle manière que sa contribution de $|E_1|$ est soustraite, alors : $E \approx -|E_1|/2$. Il est donc possible qu'en un certain point P de l'axe, l'éclairement ne soit pas modifié par l'insertion de cette obstruction. Cette surprenante prédiction, qui, d'après Poisson, devait être le coup fatal porté à la théorie ondulatoire, fut presque immédiatement vérifiée expérimentalement par

Arago ; ce point existait bien. Ironiquement, ce que l'on appelle aujourd'hui le « point de Poisson », avait été observé bien des années auparavant (1723) par Maraldi, qui n'avait pas publié ses travaux*.

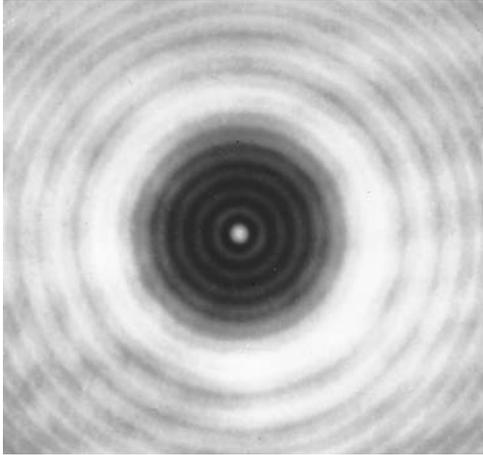
Examinons maintenant le problème d'un peu plus près. Effectivement, on voit bien, sur la photo ci-après, qu'il y a une structure complexe dans l'ombre d'un disque circulaire. Si un obstacle opaque, disque ou sphère, obscurcit les ℓ premières zones, alors :

$$E = |E_{\ell+1}| - |E_{\ell+2}| + \dots + |E_m|$$

(où, comme précédemment, les signes n'ont pas une signification absolue, mais indiquent simplement que des termes alternés se soustraient). Contrairement à l'analyse faite pour l'ouverture circulaire, E_m tend maintenant vers zéro, car $K_m \rightarrow 0$. La série doit être évaluée de la même manière que celle d'une onde non obstruée [équation (10.78) et (10.79)]. En répétant cette procédure, on obtient :

$$E \approx \frac{|E_{\ell+1}|}{2} \tag{10.92}$$

*Voir J. E. Harvey et J. L. Forgham, « The Spot of Arago: New Relevance for an Old Phenomenon », *Am. J. Phys.* **52**, 243 (1984).



Ombre d'une bille de roulement à billes de 0,3 cm de diamètre. La bille a été collée sur une lame de microscope ordinaire et éclairée par un faisceau laser He-Ne. On remarque des franges parasites (à peine visibles et non concentriques) dues à la lame de microscope et à la lentille placée dans le faisceau. (Photo E. H.)

En général, l'éclairement sur l'axe central est seulement légèrement inférieur à celui obtenu dans le cas où l'onde n est pas perturbée. *Il y a un point brillant partout le long de l'axe central, excepté immédiatement derrière l'ouverture circulaire.* Les ondelettes qui se propagent au-delà de la circonférence du disque se rencontrent en phase sur l'axe central. Notons que, lorsque P se rapproche du disque, θ augmente, $K_{\ell+1} \rightarrow 0$ et l'éclairement diminue régulièrement jusqu'à zéro. Si le disque est grand, la $(\ell + 1)^{\text{ème}}$ zone est très étroite. De fait, une quelconque irrégularité dans la surface de l'obstacle peut sérieusement obscurcir cette zone. Pour que le point de Poisson soit nettement observable, l'obstacle doit être lisse et circulaire.

Si A est un point de la périphérie du disque ou de la sphère, A_s est le point correspondant sur la courbe de vibration (figure 10.45). Si l'on augmente la taille du disque pour un P fixé, A_s décrit la spirale dans le sens inverse des aiguilles d'une montre vers O'_s et l'amplitude $A_s O'_s$ diminue graduellement. La même chose arrive lorsque P se rapproche d'un disque de taille constante.

En dehors de l'axe, les zones de la figure 10.43 couvertes par l'ouverture circulaire deviennent à présent exposées, et vice versa. Par conséquent, une série entière d'anneaux concentriques brillants et sombres entourent le point central.

Le disque opaque donne de S une image P et formerait ainsi une image grossière de n'importe quel point d'une source

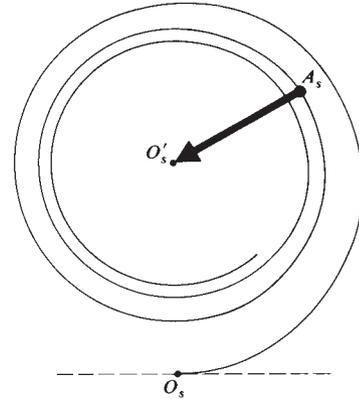


Figure 10.45 Courbe de vibration appliquée à une obstruction circulaire.

étendue. R.W. Pohl a montré qu'un petit disque pouvait ainsi être utilisé comme une lentille convergente rudimentaire.

On peut observer sans grande difficulté la figure de diffraction, mais il faut avoir une lunette ou des jumelles ; il suffit de coller une bille de roulement à bille (0,3 – 0,6 cm de diamètre) sur une lame de microscope servant de support, de placer le dispositif à quelques mètres d'une source ponctuelle et d'observer à 3 ou 4 m. De là, on se positionne afin que la bille obscurcisse complètement la source. Comme r_0 est très grand, vous aurez besoin d'une lunette pour agrandir l'image. Si vous pouvez maintenir fermement la lunette, vous devriez voir nettement le système d'anneaux.

10.3.5 Le réseau zoné de Fresnel

Au cours de nos précédentes considérations, nous avons vu que deux zones de Fresnel successives tendaient à s'annuler mutuellement. Cela suggère que, si l'on enlève toutes les zones paires ou toutes les zones impaires, on doit observer une augmentation très importante de l'éclairement en P . On appelle **réseau zoné***, un écran composé de ces deux familles de zones, qui agissent sur la lumière différemment l'une de l'autre, que ce soit en amplitude ou en phase.

Considérons un réseau zoné qui laisse passer les 20 premières zones impaires en obturant les zones paires,

$$E = E_1 + E_3 + E_5 + \dots + E_{39}$$

.....
*Il semble que le réseau zoné ait été inventé par Lord Rayleigh, comme en témoigne cette remarque de son carnet de notes, datée du 11 avril 1871 : « L'expérience de bloquer les zones de Huygens impaires, de manière à augmenter la lumière au centre, a très bien réussi ».

où chacun de ces termes est approximativement égal. Pour un front d'onde non obturé, la perturbation en P serait $E_1/2$. Avec un réseau zoné en place, on a $E \approx 20E_1$. L'éclairement a été multiplié par un facteur de 1 600. De manière évidente, on obtiendrait le même résultat en laissant passer les zones paires et en obturant les zones impaires.

Pour calculer le rayon des zones sur la figure 10.46, examinons la figure 10.47. La limite extérieure de la $m^{\text{ème}}$ zone est marquée par le point A_m . Par définition, une onde qui parcourt le chemin $S-A_m-P$ doit arriver avec un déphasage de $m\lambda/2$ par rapport à une onde qui a suivi le chemin $S-O-P$. On a donc :

$$(\rho_m + r_m) - (\rho_0 + r_0) = m\lambda/2 \quad (10.93)$$

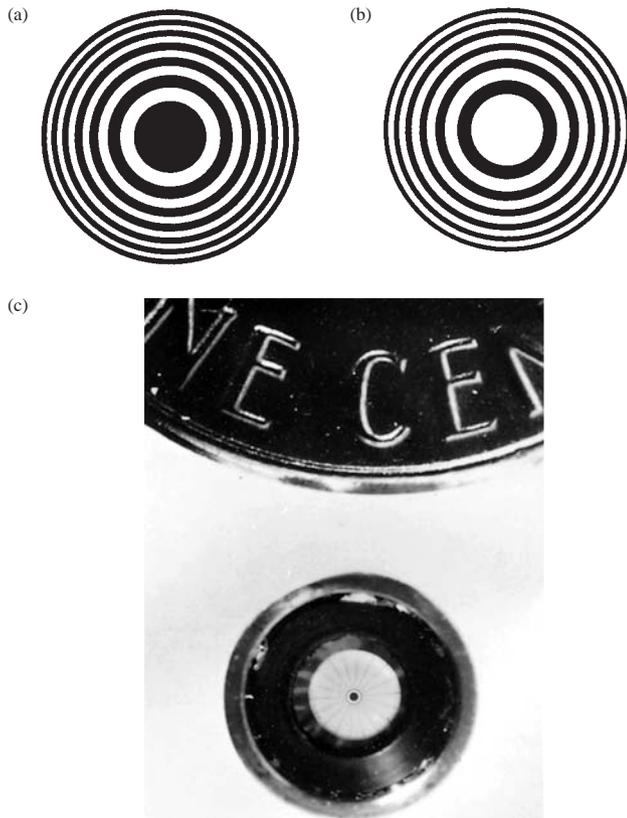


Figure 10.46 (a) et (b) Réseaux zonés. (c) Réseau zoné utilisé pour former l'image de particules alpha provenant d'une cible placée 1 cm en avant, sur un film photographique distant de 5 cm à l'arrière. Ce réseau fait 2,5 mm de diamètre et contient 100 zones, dont la plus fine a une largeur de 5,3 μm . (Photo the University of California, Lawrence Livermore National Laboratory et the Department of Energy.)

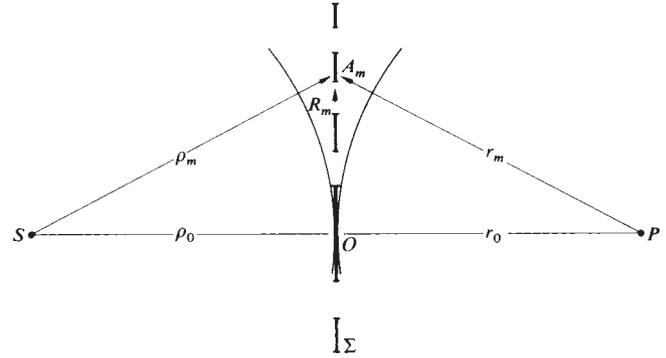


Figure 10.47 Géométrie d'un réseau zoné.

Plus précisément, $\rho_m = (R_m^2 + \rho_0^2)^{1/2}$ et $r_m = (R_m^2 + r_0^2)^{1/2}$. On peut alors développer ces expressions grâce aux séries binomiales. Comme R_m est relativement petit, on se contentera de ne garder que les deux premiers termes. Ainsi :

$$\rho_m = \rho_0 + \frac{R_m^2}{2\rho_0} \quad \text{et} \quad r_m = r_0 + \frac{R_m^2}{2r_0}$$

En substituant finalement ce résultat dans l'équation (10.93), on obtient :

$$\left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right) = \frac{m\lambda}{R_m^2} \quad (10.94)$$

Avec un éclairage en onde plane ($\rho_0 \rightarrow \infty$), l'équation (10.94) se réduit à :

$$R_m^2 = mr_0\lambda \quad [10.91]$$

qui est une approximation de l'expression exacte formulée par l'équation (10.90). L'équation (10.94) a une forme identique à l'équation d'une lentille mince. Cela n'est pas simplement une coïncidence, car P est vraiment l'image de S par diffraction. Ainsi, on définit la *distance focale primaire* telle que :

$$f_1 = \frac{R_m^2}{m\lambda} \quad (10.95)$$

(Notons que le réseau zoné présente une formidable aberration chromatique.) Les points S et P sont qualifiés de foyers conjugués. Avec un faisceau incident collimaté (figure 10.48), la distance image est la distance focale primaire ou de premier ordre, qui correspond donc à un maximum principal de la distribution d'éclairement. En plus de cette image réelle, il y a aussi une image virtuelle formée par de la lumière divergente, à une distance f_1 devant Σ . Pour celle-ci, chaque anneau sur le

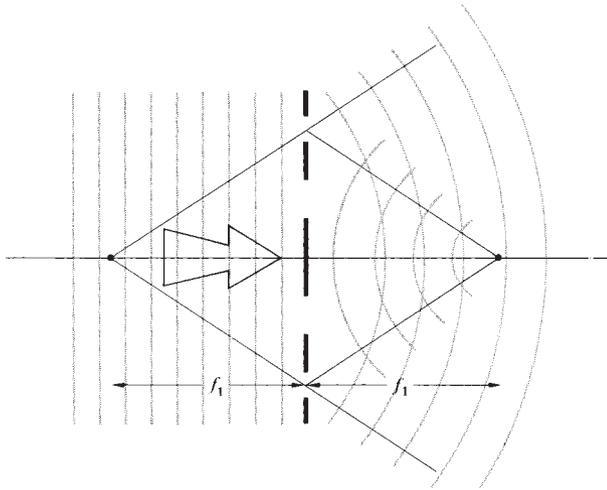


Figure 10.48 Foyers d'un réseau zoné.

réseau est occupé par exactement une zone de demi-période du front d'onde. Si l'on déplace le détecteur le long de l'axe $S-P$, vers Σ , il enregistre une série de tout petit maxima et minima d'éclairement, jusqu'à ce qu'il arrive au point $f_1/3$ de Σ . À ce *foyer du troisième ordre*, il y a un pic d'éclairement prononcé. D'autres foyers existent à $f_1/5, f_1/7$ et ainsi de suite, ce qui différencie le réseau zoné d'une lentille, et encore plus d'un simple disque opaque.

Suivant une suggestion de Rayleigh, R.W. Wood construisit un *réseau zoné à inversion de phase*. Au lieu de bloquer les zones paires ou impaires, il augmenta l'épaisseur des zones alternées, afin qu'elles aient un retard de phase de π . Comme toute la plaque est transparente, l'amplitude double et l'éclairement est multiplié par un facteur quatre. En fait, le composant n'est pas aussi performant que prévu, la phase n'est pas vraiment constante sur chaque zone. Idéalement, il faudrait ajuster le retard de telle sorte qu'il varie graduellement sur une zone, et qu'il revienne à π au début de la zone suivante*.

Pour réaliser un réseau zoné optique, on dessine généralement un modèle à grande échelle, que l'on photographie pour le réduire. Des plaques contenant des centaines de zones peuvent être faites en photographiant des anneaux de Newton, en

lumière collimatée monochromatique. Pour les micro-ondes, des anneaux en feuilles d'aluminium, fixées sur du carton peuvent très bien convenir.

On peut aussi fabriquer des réseaux zonés à partir de structures métalliques autoporteuses. Ces réseaux fonctionnent comme lentilles de l'ultraviolet aux rayons X mous, domaine où le verre ordinaire est opaque.

10.3.6 Intégrales de Fresnel et ouverture rectangulaire

Nous allons étudier à présent des configurations, en diffraction de Fresnel, qui n'ont plus la symétrie circulaire de celles précédemment étudiées. Considérons la figure 10.49, où dS est un élément de surface autour d'un point arbitraire A , de coordonnées (y, z) . La localisation de l'origine O est déterminée en traçant la perpendiculaire à Σ , à partir de la position de la source ponctuelle monochromatique. Les sources secondaires de dS apportent, en P , une contribution à la perturbation optique donnée par l'équation (10.74). En utilisant ce que l'on sait d'une onde en propagation libre (${}_A\rho\lambda = \epsilon_0$), on peut réécrire l'équation comme suit :

$$dE_p = \frac{K(\theta)\epsilon_0}{\rho r \lambda} \cos [k(\rho + r) - \omega t] dS \quad (10.96)$$

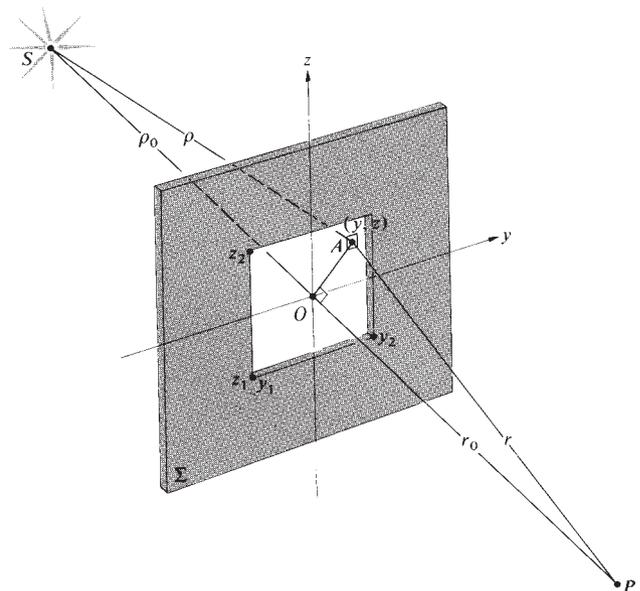


Figure 10.49 Diffraction de Fresnel par une ouverture rectangulaire.

*Voir Ditchburn, *Light*, 2^e éd., p. 232 ; M. Sussman, « Elementary Diffraction Theory of Zone Plates », *Am. J. Phys.* **28**, 394 (1960) ; Ora E. Myers, Jr., « Studies of Transmission Zone Plates », *Am. J. Phys.* **19**, 359 (1951) ; et J. Higbie, « Fresnel Zone Plate: Anomalous Foci », *Am. J. Phys.* **44**, 929 (1976).

Par rapport à l'équation (10.74), le signe de la phase a changé pour être en conformité avec l'analyse traditionnelle. *Dans le cas où les dimensions de l'ouverture sont petites* par rapport à ρ_0 et à r_0 , on peut poser que $K(\theta) = 1$ et laisser $1/\rho r$ égal à $1/\rho_0 r_0$ dans le coefficient d'amplitude. Pour les approximations plus délicates de la phase, on applique le théorème de Pythagore aux triangles *SOA* et *POA*. On obtient ainsi :

$$\rho = (\rho_0^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\text{et} \quad r = (r_0^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Avec un développement en séries binomiales, on obtient :

$$\rho + r \approx \rho_0 + r_0 + (y^2 + z^2) \frac{\rho_0 + r_0}{2\rho_0 r_0} \quad (10.97)$$

Observons que cette approximation est plus délicate à évaluer que celle faite dans l'analyse de Fraunhofer [équation (10.40)], où on avait négligé les termes d'ouverture de degré supérieur à 1. En représentation complexe, la perturbation en P est finalement :

$$\tilde{E}_p = \frac{\mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}}{\rho_0 r_0 \lambda} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} e^{ik(\rho+r)} dy dz \quad (10.98)$$

En suivant les formes usuelles de dérivation, on introduit deux variables u et v , sans dimension, définies par :

$$u \equiv y \left[\frac{2(\rho_0 + r_0)}{\lambda \rho_0 r_0} \right]^{1/2} \quad v \equiv z \left[\frac{2(\rho_0 + r_0)}{\lambda \rho_0 r_0} \right]^{1/2} \quad (10.99)$$

En remplaçant l'équation (10.97) dans l'équation (10.98) et en utilisant ces nouvelles variables, on obtient :

$$\tilde{E}_p = \frac{\mathcal{E}_0}{2(\rho_0 + r_0)} e^{i[k(\rho_0+r_0)-\omega t]} \int_{u_1}^{u_2} e^{i\pi u^2/2} du \int_{v_1}^{v_2} e^{i\pi v^2/2} dv \quad (10.100)$$

Le terme situé en facteur de l'intégrale représente la moitié de la perturbation qu'on obtiendrait en P s'il n'y avait pas d'obturation ; appelons ce terme $E_u/2$. En ce qui concerne l'intégrale, on peut l'évaluer en utilisant deux fonctions, $\mathcal{C}(w)$ et $\mathcal{S}(w)$, où w représente soit u soit v . Ces quantités, connues sous le nom d'**intégrales de Fresnel**, sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(w) &\equiv \int_0^w \cos(\pi w'^2/2) dw' \\ \mathcal{S}(w) &\equiv \int_0^w \sin(\pi w'^2/2) dw' \end{aligned} \quad (10.101)$$

Ces deux fonctions ont été étudiées intensivement ; leurs valeurs numériques ont été tabulées, et leur intérêt réside dans le fait que :

$$\int_0^w e^{i\pi w'^2/2} dw' = \mathcal{C}(w) + i\mathcal{S}(w)$$

qui a la forme des intégrales de l'équation (10.100). La perturbation au point P s'écrit donc :

$$\tilde{E}_p = \frac{\tilde{E}_u}{2} [\mathcal{C}(u) + i\mathcal{S}(u)] \frac{u_2}{u_1} [\mathcal{C}(v) + i\mathcal{S}(v)] \frac{v_2}{v_1} \quad (10.102)$$

que l'on peut évaluer en utilisant les valeurs tabulées de $\mathcal{C}(u_1)$, $\mathcal{C}(u_2)$, $\mathcal{S}(u_1)$, et ainsi de suite. On peut également calculer la perturbation en tout point du plan d'observation, pour une ouverture fixée. Cependant, le formalisme mathématique devient très lourd et il vaut mieux trouver un autre moyen. On peut, par exemple, fixer la ligne $S-O-P$ et imaginer que l'on déplace petit à petit l'ouverture dans le plan Σ . Cela a pour effet de translater l'origine O par rapport à l'ouverture fixe, de façon à balayer la figure autour du point P . À chaque position de O correspond un ensemble de localisation des limites relatives en y_1 , y_2 , z_1 , et z_2 . Celles-ci entraînent à leur tour de nouvelles valeurs pour u_1 , u_2 , v_1 , et v_2 , qui, une fois substituées dans l'équation (10.102), donnent une nouvelle valeur de \tilde{E}_p . L'erreur produite par une telle procédure est négligeable tant qu'on déplace l'ouverture sur de petites distances par rapport à ρ_0 . Cette approche est ainsi plus appropriée dans le cas d'ondes incidentes planes. Dans cette situation, si E_0 est l'amplitude de l'onde incidente en Σ , l'équation (10.96) devient simplement :

$$dE_p = \frac{E_0 K(\theta)}{r\lambda} \cos(kr - \omega t) dS$$

Avec, comme précédemment, $\mathcal{E}_A = E_0/\lambda$. Cette fois, avec :

$$u = y \left(\frac{2}{\lambda r_0} \right)^{1/2} \quad v = z \left(\frac{2}{\lambda r_0} \right)^{1/2} \quad (10.103)$$

On a divisé le numérateur et le dénominateur de l'équation (10.99) par ρ_0 , que l'on a ensuite fait tendre vers l'infini. \tilde{E}_p prend la même forme que dans l'équation (10.102), où \tilde{E}_u représente toujours la perturbation obtenue sans obturation. L'éclairement en P étant $E_p \tilde{E}_p^*/2$, on a :

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{I_0}{4} \{ [\mathcal{C}(u_2) - \mathcal{C}(u_1)]^2 + [\mathcal{S}(u_2) - \mathcal{S}(u_1)]^2 \} \\ &\quad \times \{ [\mathcal{C}(v_2) - \mathcal{C}(v_1)]^2 + [\mathcal{S}(v_2) - \mathcal{S}(v_1)]^2 \} \end{aligned} \quad (10.104)$$

où I_0 représente l'éclairement en P sans l'obturation.

Examinons le cas d'une ouverture carrée de 2 mm de côté, éclairée par une onde plane à 500 nm. Si P est à 4 m, directement en face du centre O de l'ouverture, on a alors : $u_2 = 1,0$, $u_1 = -1,0$, $v_2 = 1,0$, et $v_1 = -1,0$. Les intégrales de Fresnel sont, toutes deux, des fonctions impaires, c'est-à-dire :

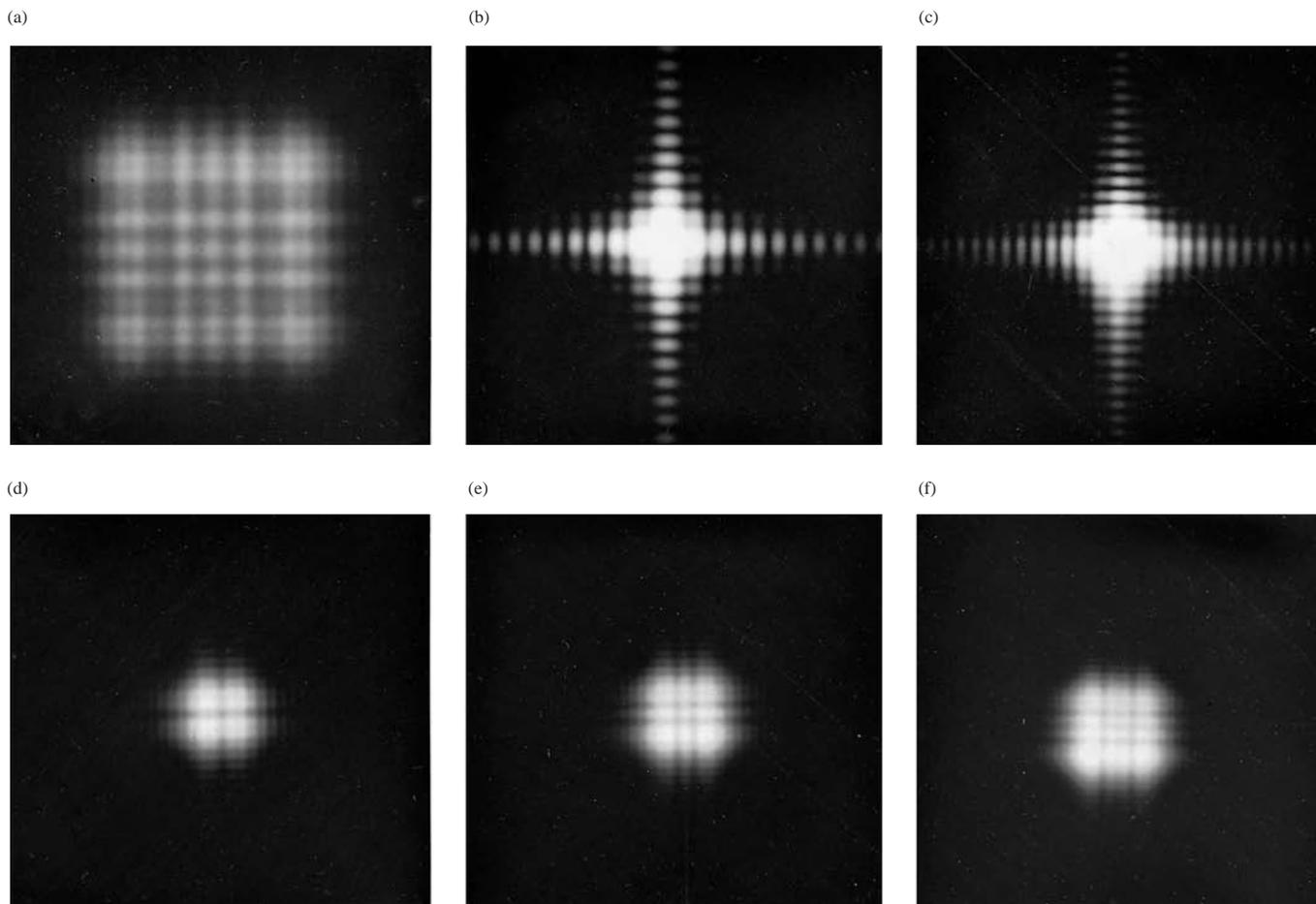
$$\mathcal{C}(w) = -\mathcal{C}(-w) \quad \text{and} \quad \mathcal{S}(w) = -\mathcal{S}(-w)$$

Par conséquent,

$$I_p = \frac{I_0}{4} \{ [2\mathcal{C}(l)]^2 + [2\mathcal{S}(l)]^2 \}^2$$

On peut donc facilement obtenir une valeur numérique. Afin de trouver la valeur de l'éclairement quelque part ailleurs dans le plan d'observation, par exemple à 0,1 mm à gauche du centre, on déplace l'ouverture par rapport à la ligne $O-P$, ce qui se traduit par : $u_2 = 1,1$, $u_1 = -0,9$, $v_2 = 1,0$, et $v_1 = -1,0$. La résultante I_p est identique à celle que l'on trouverait à 0,1 mm à droite de l'ouverture. En effet, comme l'ouverture est carrée, on obtiendrait également des valeurs identiques à 0,1 mm au-dessus ou en dessous du centre (voir photo).

On peut simuler le cas limite de la propagation libre en augmentant à l'infini les dimensions de l'ouverture. En utilisant le



(a) Figure typique de diffraction de Fresnel obtenue avec une ouverture carrée. (b)-(f) Son évolution pour des ouvertures de tailles croissantes sous les mêmes conditions : noter qu'à mesure que l'ouverture s'élargit, la figure évolue, d'une forme étalée de type distribution de Fraunhofer, à une structure plus localisée. (Photos E. H.)

fait que $\mathcal{C}(\infty) = \mathcal{S}(\infty) = \frac{1}{2}$ et $\mathcal{C}(-\infty) = \mathcal{S}(-\infty) = -\frac{1}{2}$, l'éclairement en P , face au centre de l'ouverture, est alors :

$$I_p = I_0$$

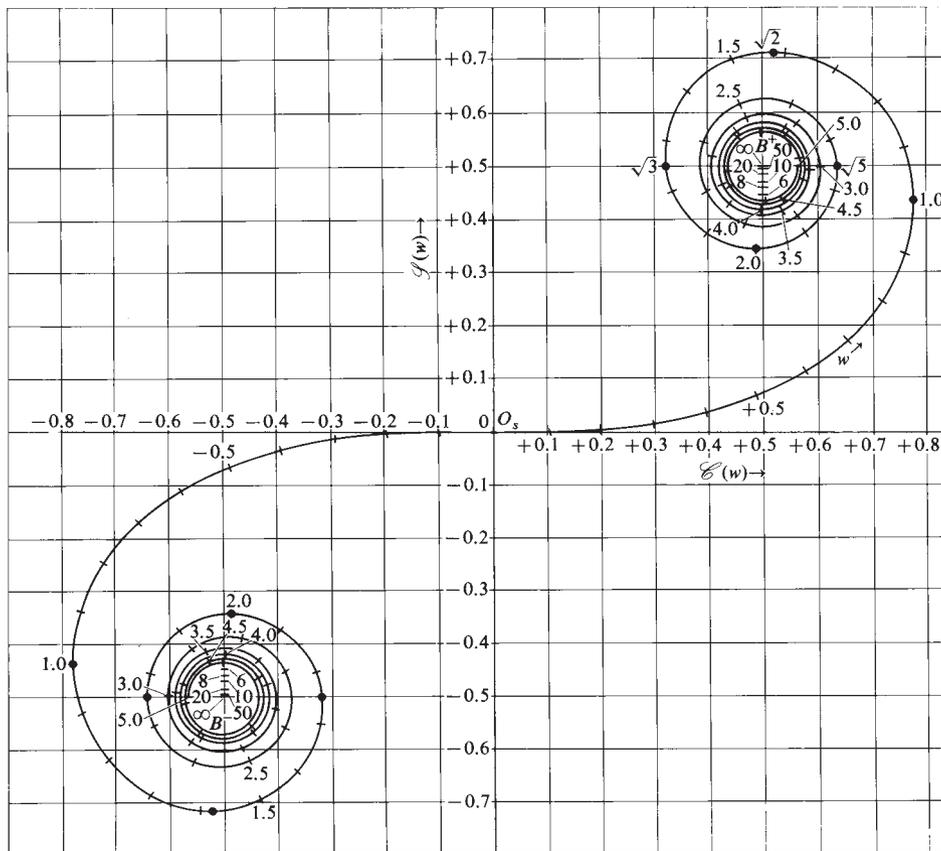
Cette expression est parfaitement correcte. Ce résultat est d'ailleurs assez remarquable car, lorsqu'on fait croître la longueur \overline{OA} , toutes les approximations effectuées dans le calcul ne sont plus applicables. On doit pourtant avoir en tête qu'une ouverture, assez petite pour satisfaire les approximations, peut être encore suffisamment grande pour ne pas provoquer de diffraction dans la région située en regard de son centre. Par exemple, avec $\rho_0 = r_0 = 1$ m, une ouverture sous-tendant un angle de 1° ou 2° en P peut correspondre à des valeurs d'environ 25 à 50 pour $|u|$ et $|v|$. Les quantités \mathcal{C} et \mathcal{S} sont, dans ce cas, très proches de leur valeur limite de $\frac{1}{2}$. Une augmentation supplémentaire des dimensions de l'ouverture, au-delà des limites à partir desquelles les approximations sont violées, ne peut qu'introduire une petite erreur. Cela signifie qu'il ne faut

pas trop se préoccuper de restreindre la taille réelle de l'ouverture (tant que $r_0 \gg \lambda$ et $\rho_0 \gg \lambda$). Les contributions qui proviennent de régions du front d'onde éloignées de O doivent être très petites, condition que l'on peut attribuer au facteur d'obliquité et à la décroissance en r de l'amplitude des ondes secondaires.

10.3.7 La spirale de Cornu

Parallèlement à la courbe de la vibration déjà connue, Marie Alfred Cornu (1841-1902), professeur à l'École polytechnique de Paris, imagina une description élégante géométrique des intégrales de Fresnel. La **spirale de Cornu** (figure 10.50) est un graphe de la fonction $B(w) \equiv \mathcal{C}(w) + i\mathcal{S}(w)$ lorsque w va de 0 à $\pm\infty$, dans le plan complexe. Cela signifie simplement que $\mathcal{C}(w)$ est reportée sur l'axe horizontal des réels alors que $\mathcal{S}(w)$ se réfère à l'axe vertical des imaginaires. Les valeurs

Figure 10.50 La spirale de Cornu.



numériques sont tirées de la table 10.2. Si $d\ell$ est un élément de longueur d'arc le long de la courbe, alors :

$$d\ell^2 = d\mathcal{C}^2 + d\mathcal{S}^2$$

Or, d'après les définitions (10.101),

$$d\ell^2 = (\cos^2 \pi w^2/2 + \sin^2 \pi w^2/2)dw^2$$

et $d\ell = dw$

Les valeurs de w correspondent à la longueur de l'arc et sont marquées le long de la spirale de la figure 10.50. Lorsque w tend vers $\pm\infty$, la courbe s'enroule autour de ses valeurs limites en $\tilde{B}^+ = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ et $\tilde{B}^- = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$. La pente de la spirale est alors :

$$\frac{d\mathcal{S}}{d\mathcal{C}} = \frac{\sin \pi w^2/2}{\cos \pi w^2/2} = \tan \frac{\pi w^2}{2} \quad (10.105)$$

Pour tout point, la valeur de l'angle entre la tangente à la spirale et l'axe \mathcal{C} est donc $\beta = \pi w^2/2$.

On peut utiliser la spirale de Cornu aussi bien comme un outil analytique quantitatif que comme une aide si l'on veut déterminer qualitativement l'aspect d'une figure de diffraction (ce qui est aussi le cas de la courbe de vibration). Comme exemple de son utilité quantitative, reconsidérons le problème de l'ouverture carrée de 2 mm de côté que l'on a rencontré précédemment ($\lambda = 500$ nm, $r_0 = 4$ m et un éclairage par ondes planes). L'objectif est de trouver l'éclairement en un point P situé en face du centre de l'ouverture, où, dans ce cas, $u_1 = -1,0$ et $u_2 = 1,0$. La variable u est mesurée le long de l'arc, ce qui veut dire que w est remplacé par u sur la spirale. Plaçons deux points sur la spirale, à des distances u_1 et u_2 de O_s (ils sont symétriques par rapport à O_s , car P est maintenant exactement en face du centre de l'ouverture). Nommons respectivement ces deux points $\tilde{B}_1(u)$ et $\tilde{B}_2(u)$, comme dans la figure 10.51. Le phaseur $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(u)$ tracé de $\tilde{B}_1(u)$ à $\tilde{B}_2(u)$ est simplement le nombre complexe $B_2(u) - \tilde{B}_1(u)$,

$$\tilde{\mathbf{B}}_{12}(u) = [\mathcal{C}(u) + i\mathcal{S}(u)]_{u_1}^{u_2}$$

C'est également le premier terme dans l'expression de \tilde{E}_p [équation (10.102)]. De la même manière, pour $v_1 = -1,0$ et $v_2 = 1,0$, $\tilde{B}_2(v) - \tilde{B}_1(v)$ est :

$$\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v) = [\mathcal{C}(v) + i\mathcal{S}(v)]_{v_1}^{v_2}$$

ce qui représente la dernière partie de \tilde{E}_p . Les modules de ces nombres complexes sont tout simplement les longueurs des

Tableau 10.2 Intégrales de Fresnel

w	$\mathcal{C}(w)$	$\mathcal{S}(w)$	w	$\mathcal{C}(w)$	$\mathcal{S}(w)$
0,00	0,000 0	0,000 0	4,50	0,526 1	0,434 2
0,10	0,100 0	0,000 5	4,60	0,567 3	0,516 2
0,20	0,199 9	0,004 2	4,70	0,491 4	0,567 2
0,30	0,299 4	0,014 1	4,80	0,433 8	0,496 8
0,40	0,397 5	0,033 4	4,90	0,500 2	0,435 0
0,50	0,492 3	0,064 7	5,00	0,563 7	0,499 2
0,60	0,581 1	0,110 5	5,05	0,545 0	0,544 2
0,70	0,659 7	0,172 1	5,10	0,499 8	0,562 4
0,80	0,723 0	0,249 3	5,15	0,455 3	0,542 7
0,90	0,764 8	0,339 8	5,20	0,438 9	0,496 9
1,00	0,779 9	0,438 3	5,25	0,461 0	0,453 6
1,10	0,763 8	0,536 5	5,30	0,507 8	0,440 5
1,20	0,715 4	0,623 4	5,35	0,549 0	0,466 2
1,30	0,638 6	0,686 3	5,40	0,557 3	0,514 0
1,40	0,543 1	0,713 5	5,45	0,526 9	0,551 9
1,50	0,445 3	0,697 5	5,50	0,478 4	0,553 7
1,60	0,365 5	0,638 9	5,55	0,445 6	0,518 1
1,70	0,323 8	0,549 2	5,60	0,451 7	0,470 0
1,80	0,333 6	0,450 8	5,65	0,492 6	0,444 1
1,90	0,394 4	0,373 4	5,70	0,538 5	0,459 5
2,00	0,488 2	0,343 4	5,75	0,555 1	0,504 9
2,10	0,581 5	0,374 3	5,80	0,529 8	0,546 1
2,20	0,636 3	0,455 7	5,85	0,481 9	0,551 3
2,30	0,626 6	0,553 1	5,90	0,448 6	0,516 3
2,40	0,555 0	0,619 7	5,95	0,456 6	0,468 8
2,50	0,457 4	0,619 2	6,00	0,499 5	0,447 0
2,60	0,389 0	0,550 0	6,05	0,542 4	0,468 9
2,70	0,392 5	0,452 9	6,10	0,549 5	0,516 5
2,80	0,467 5	0,391 5	6,15	0,514 6	0,549 6
2,90	0,562 4	0,410 1	6,20	0,467 6	0,539 8
3,00	0,605 8	0,496 3	6,25	0,449 3	0,495 4
3,10	0,561 6	0,581 8	6,30	0,476 0	0,455 5
3,20	0,466 4	0,593 3	6,35	0,524 0	0,456 0
3,30	0,405 8	0,519 2	6,40	0,549 6	0,496 5
3,40	0,438 5	0,429 6	6,45	0,529 2	0,539 8
3,50	0,532 6	0,415 2	6,50	0,481 6	0,545 4
3,60	0,588 0	0,492 3	6,55	0,452 0	0,507 8
3,70	0,542 0	0,575 0	6,60	0,469 0	0,463 1
3,80	0,448 1	0,565 6	6,65	0,516 1	0,454 9
3,90	0,422 3	0,475 2	6,70	0,546 7	0,491 5
4,00	0,498 4	0,420 4	6,75	0,530 2	0,536 2
4,10	0,573 8	0,475 8	6,80	0,483 1	0,543 6
4,20	0,541 8	0,563 3	6,85	0,453 9	0,506 0
4,30	0,449 4	0,554 0	6,90	0,473 2	0,462 4
4,40	0,438 3	0,462 2	6,95	0,520 7	0,459 1

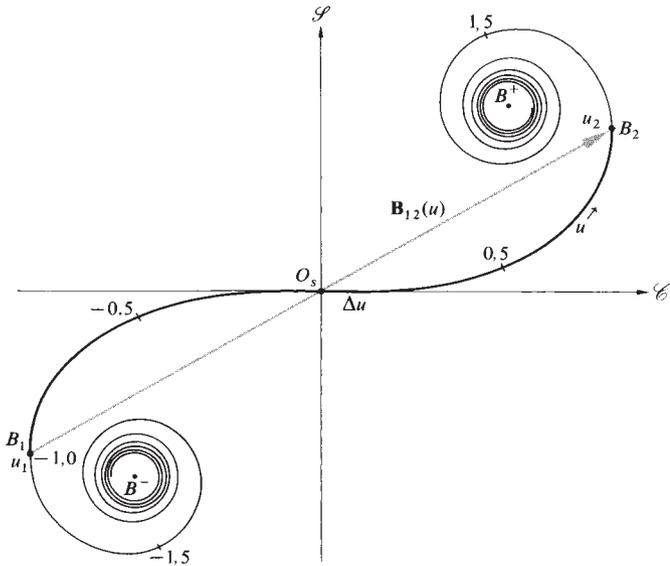


Figure 10.51 Spirale de Cornu.

phaseurs $\tilde{\mathbf{B}}_{12}$ appropriés et celles-ci peuvent être lues directement sur la courbe avec une règle, en prenant chaque axe comme échelle. L'expression de l'éclairement devient donc :

$$I_p = \frac{I_0}{4} |\tilde{\mathbf{B}}_{12}(u)|^2 |\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)|^2 \quad (10.106)$$

et le problème est résolu. Notons que les longueurs de l'arc le long de la spirale (i.e. $\Delta u = u_2 - u_1$ et $\Delta v = v_2 - v_1$) sont respectivement proportionnelles aux dimensions globales de l'ouverture dans les directions y et z . Les longueurs d'arc sont donc constantes, quelle que soit la position de P dans le plan d'observation. D'autre part, les phaseurs $\mathbf{B}_{12}(u)$ et $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)$, qui déterminent les longueurs d'arc, ne sont pas constants et dépendent de la localisation de P .

Supposons à présent que, tout en maintenant la position de P en face du centre de l'ouverture diffractante, on modifie la taille de celle-ci. À mesure que l'on ouvre graduellement l'ouverture carrée, Δv et Δu augmentent en conséquence. Les extrémités \tilde{B}_1 et \tilde{B}_2 de ces longueurs d'arc se déplacent sur la spirale, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, vers leurs valeurs limites respectives, \tilde{B}^- et \tilde{B}^+ . Les phaseurs $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(u)$ et $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)$, identiques pour raison de symétrie, passent par une série d'extrema. L'éclairement du point central de la figure de diffraction passe de même, par des hauts et des bas. La distribution d'éclairement globale varie ainsi continuellement d'une figure à une autre (voir photo p. 516). Quelle que

soit la taille de l'ouverture, on peut déduire la figure de diffraction décentrée en repositionnant P . Il est alors pratique de voir la longueur de l'arc comme un élément de corde, de longueur égale à Δv ou à Δu . Imaginons-la, épousant la forme de la spirale, avec O_s pour milieu initial. À mesure qu'on déplace P , par exemple vers la gauche, le long de l'axe y (figure 10.49), y_1 et donc u_1 deviennent de moins en moins négatifs, et y_2 et u_2 de plus en plus positifs. Le résultat est que la corde Δu coulisse le long de la spirale. À mesure que la distance entre les extrémités de la corde Δu varie, $|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(u)|$ se modifie et l'éclairement [équation (10.106)] varie en conséquence. Lorsque P arrive sur le côté gauche de l'ombre géométrique, $y_1 = u_1 = 0$. À mesure que le point d'observation se déplace dans cette ombre géométrique, u_1 s'accroît positivement et la corde Δu se situe alors entièrement dans la moitié haute de la spirale de Cornu. Si u_1 et u_2 continuent à augmenter, la corde s'enroule de plus en plus étroitement autour de la limite \tilde{B}^+ . Ses extrémités, \tilde{B}_1 et \tilde{B}_2 se rapprochent l'une de l'autre. $|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(u)|$ devient donc d'autant plus petit et I_p décroît dans la région de l'ombre géométrique (nous reviendrons plus en détail sur ce point dans le paragraphe suivant). On obtient la même chose lorsque le balayage se fait dans la direction des z . Δv est constant et $\mathbf{B}_{12}(v)$ varie.

Que se passe-t-il s'il n'y a plus de diaphragme et si l'onde n'est plus perturbée ?

Dans ce cas, on a : $u_1 = v_1 = -\infty$, ce qui signifie que $B_1(u) = \tilde{B}_1(v) = \tilde{B}^-$ et $B_2(u) = \tilde{B}_2(v) = \tilde{B}^+$. La ligne $\tilde{B}^- \tilde{B}^+$ fait un angle de 45° avec l'axe \mathcal{C} et a une longueur de $\sqrt{2}$. Par conséquent, les phaseurs $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(u)$ et $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)$ ont chacun une longueur de $\sqrt{2}$ et une phase de $\pi/4$.

On a donc : $\mathbf{B}_{12}(u) = \sqrt{2} \exp(i\pi/4)$ et $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v) = \sqrt{2} \exp(i\pi/4)$.

Il découle de l'équation (10.102) que :

$$\tilde{E}_p = \tilde{E}_u e^{i\pi/2} \quad (10.107)$$

Comme dans le paragraphe 10.3.1, on a l'amplitude d'une onde non obturée, malgré un écart de phase de $\pi/2^*$. Finalement, en utilisant l'équation (10.106), on obtient le fait que $I_p = I_0$.

Prenons un exemple concret de ce que représente la spirale de Cornu en considérant la figure 10.52, qui représente la propagation d'un front d'onde cylindrique issu d'une source

*La question de l'écart de phase sera résolu avec la théorie de Kirchhoff au paragraphe 10.4.

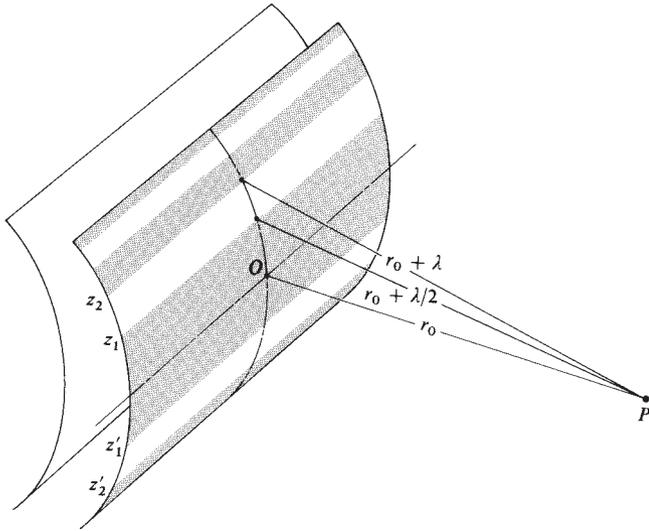


Figure 10.52 Zones de front d'onde cylindrique.

linéaire cohérente. Le raisonnement est exactement le même que celui utilisé pour obtenir la courbe de vibration (voir paragraphe 10.3.2). Il suffit de dire que l'on va diviser le front d'onde en *bandes de demi-période*, définies par ses intersections avec un ensemble de cylindres coaxiaux de rayons $r_0 + \lambda/2$, $r_0 + \lambda$, $r_0 + 3\lambda/2$ et ainsi de suite. *Les contributions de ces bandes sont proportionnelles à leur surface, qui diminue rapidement.* Cette situation est donc l'inverse de celle que l'on avait pour les zones circulaires, dont les rayons augmentaient, ce qui maintenait leurs surfaces pratiquement constantes. De façon similaire, on divisera chaque bande en N sous-zones, dont le déphasage relatif est de π/N . La somme vectorielle de toutes les contributions en amplitude provenant des zones situées au-dessus de la ligne centrale constitue un polygone en spirale. Si l'on prend en compte les contributions des bandes situées sous la ligne centrale et que l'on fait tendre N vers l'infini, ce polygone se transforme en une spirale de Cornu, ce qui n'est pas surprenant, car la source linéaire cohérente engendre un nombre infini de figures de diffraction de ses points sources qui se superposent les unes aux autres.

La figure 10.53 montre un certain nombre de vecteurs unitaires tangents à la spirale en différents points. Le vecteur tangent en O_s correspond à la contribution du front d'onde, passant par O sur l'axe central. On peut localiser sur la spirale les points associés aux limites de chaque bande, en considérant le fait qu'en ces positions, la phase relative, β , est un multiple pair ou impair de π . Ainsi, le point Z_{s1} de la spirale

(figure 10.53), qui est relié à z_1 sur le front d'onde (figure 10.52) est par définition déphasé de 180° avec O_s . Ainsi, Z_{s1} doit être positionné sur le sommet de la spirale, où $w = \sqrt{2}$, car on a ici $\beta = \pi w^2/2 = \pi$.

À mesure que nous approfondissons notre analyse, il va être utile de bien comprendre l'effet de l'obturation de ces bandes sur la figure de diffraction. De manière évidente, on peut réaliser un réseau zoné pouvant remplir cette fonction, et l'on utilise d'ailleurs couramment de tels composants.

10.3.8 Diffraction de Fresnel par une fente

On peut traiter le problème de la diffraction de Fresnel par une longue fente comme une extension du cas de l'ouverture rectangulaire. Il s'agit donc seulement d'allonger le rectangle en augmentant notablement y_1 et y_2 (figure 10.54). Si l'on considère que ces limites sont infinies, on obtient alors, pour un point d'observation qui se déplacerait le long de l'axe y , le fait que : $u_2 \approx \infty$, $u_1 \approx -\infty$ et $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(u) \approx \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Avec l'équation (10.106), on a alors, pour un éclairage par source ponctuelle par des ondes planes :

$$I_p = \frac{I_0}{2} |\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)|^2 \quad (10.108)$$

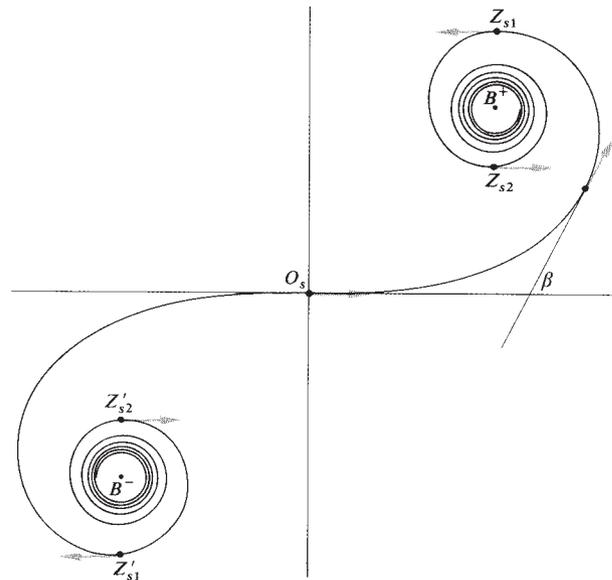


Figure 10.53 Spirale de Cornu en relation avec un front d'onde cylindrique.

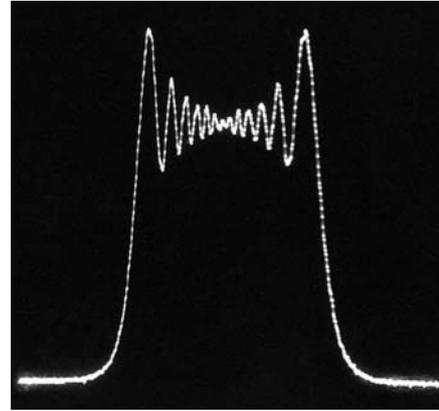
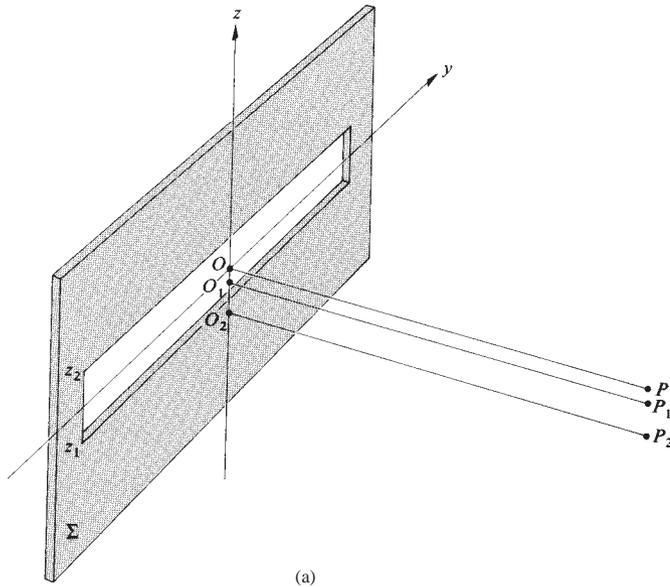


Figure 10.54 (a) Paramètres descriptifs d'un montage avec une fente simple. (b) Profil typique de la distribution d'éclairement obtenue, en champ proche, à proximité d'une fente large. L'ouverture est éclairée par un laser He-Ne et l'éclairement est mesuré grâce à une photodiode. Ici, l'horizontale est parallèle à l'axe des z du schéma de montage. (Photo W. Klein, I. Physikalisches Institut, Allemagne.)

La figure obtenue est donc indépendante de y . Les valeurs de z_1 et z_2 , qui définissent la largeur de la fente, déterminent la valeur du paramètre important $\Delta v = v_2 - v_1$, qui fixe à son tour la valeur de $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)$. Imaginons, comme précédemment, que l'on ait une corde de longueur Δv appliquée le long de la spirale. Pour un point P situé en face de O , l'ouverture est symétrique et la corde est centrée en O_s (figure 10.55). Il s'agit donc juste de mesurer la longueur de la corde $|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)|$ et de la substituer dans l'équation (10.108), ce qui permet de trouver I_p . Au point P_1 , z_1 et donc v_1 sont des nombres négatifs plus petits, alors que z_2 et v_2 ont augmenté positivement. L'arc Δv (la corde) se déplace sur la spirale (figure 10.55) et la longueur de la corde diminue. Lorsque le point d'observation pénètre dans l'ombre géométrique, la corde s'enroule autour de B^+ , et elle passe par une série d'extrema relatifs. Si Δv devient très petit, il en est de même pour notre morceau de corde. La corde $|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)|$ ne décroît sensiblement que lorsque le rayon de courbure de la spirale est lui-même petit. Cela arrive dans le voisinage de \tilde{B}^+ or \tilde{B}^- , c'est-à-dire loin dans la zone de l'ombre géométrique. Tant que l'ouverture reste relativement petite, il y a de la lumière bien au-delà des bords de l'ouverture. Notons également que, pour un petit Δv , il y a un large maximum central. En fait, si Δv est bien supérieur à 1, $r_0\lambda$ est bien plus grand que la largeur de l'ouverture et l'on retrouve les conditions de Fraunhofer. Cette transition entre l'équation (10.108) et l'équation (10.17) est plus compréhensible si l'on réalise que, pour de

grandes valeurs de w , on peut représenter les intégrales de Fresnel par des fonctions trigonométriques (voir problème 10.46).

Dès lors qu'on élargit la fente, Δv augmente, pour un r_0 fixé, jusqu'à ce qu'une configuration identique à celle de la figure 10.56 existe pour le point qui se trouve face au centre de

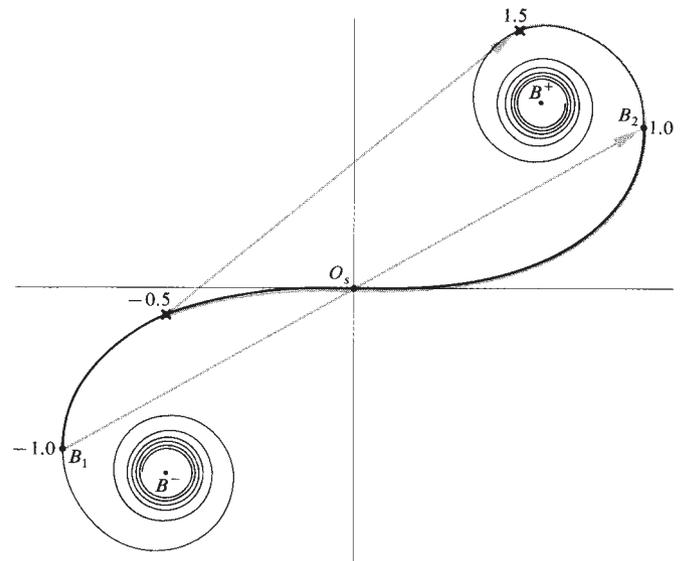


Figure 10.55 Spirale de Cornu pour la fente.

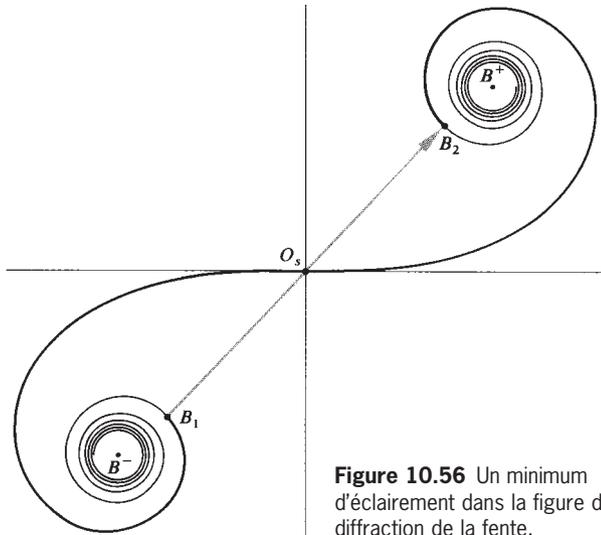


Figure 10.56 Un minimum d'éclairement dans la figure de diffraction de la fente.

la fente. Si l'on déplace le point d'observation verticalement (vers le haut ou vers le bas), Δv glisse le long de la spirale (vers le bas ou vers le haut). Ainsi, la corde s'allonge dans les deux cas et le centre de la figure de diffraction doit donc être un minimum relatif. Des franges apparaissent alors dans l'image géométrique de la fente, contrairement à la figure de Fraunhofer.

La figure 10.57 montre deux tracés de $|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(w)|^2$ en fonction de $(w_1 + w_2)/2$, qui est le point central de la longueur d'arc Δw (rappelons que le symbole w représente soit u , soit v). Une famille de telles courbes, tracées pour un domaine de valeurs de Δw allant de 1 à 10, devrait couvrir la zone d'intérêt. On calcule les courbes en choisissant d'abord une valeur particulière pour Δw , puis en lisant les valeurs appropriées de $|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(w)|$ sur la spirale de Cornu, lorsque l'on fait glisser Δw sur la spirale. Pour une fente longue,

$$I_p = \frac{I_0}{2} |\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)|^2 \quad [10.108]$$

Comme Δz est la largeur de la fente qui correspond à Δv , chaque courbe de la figure 10.57 est proportionnelle à la distribution d'éclairement pour une fente donnée. Par exemple, on peut interpréter la figure 10.57a comme la variation de $|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)|^2$ en fonction de $(v_1 + v_2)/2$ pour $\Delta v = 2,5$. Les abscisses se réfèrent à $(z_1 + z_2)/2$, c'est-à-dire, au déplacement d'un point d'observation à partir du centre de la fente. Dans la figure 10.57b, $\Delta w = 3,5$, ce qui signifie que la fente ayant un $\Delta v = 3,5$ manifeste clairement des franges sur son image géométrique, comme on peut s'y attendre (problème 10.45). On peut, bien sûr, tracer les courbes explicitement en termes des valeurs de Δz ou Δy . Cependant, cela les limiterait inutilement à un ensemble de paramètres liés à une configuration (ρ_0 , r_0 , et λ).

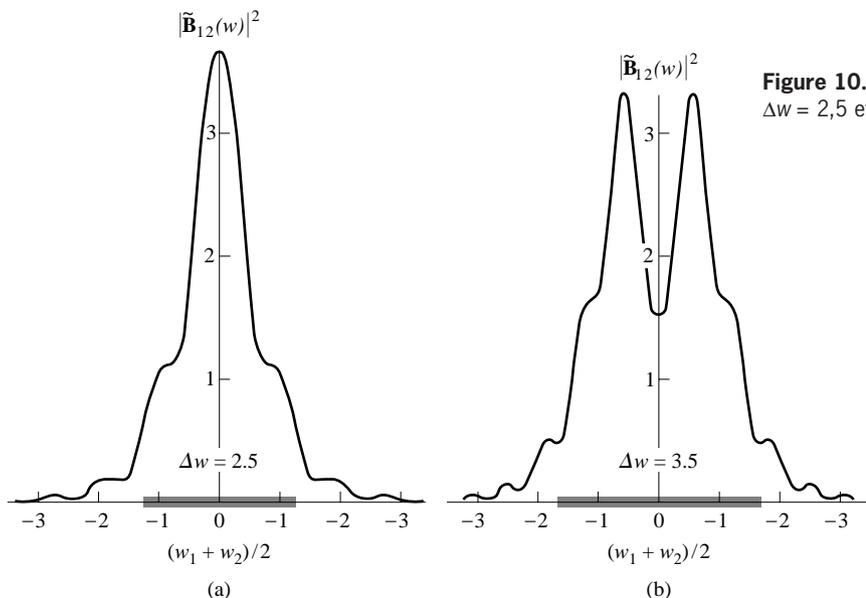


Figure 10.57 $|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(w)|^2$ en fonction de $(w_1 + w_2)/2$ pour (a) $\Delta w = 2,5$ et (b) $\Delta w = 3,5$.

Si l'on ouvre la fente encore plus, Δv s'approche puis dépasse 10. Un nombre croissant de franges apparaît sur l'image géométrique, et la figure ne s'étend plus de façon notable à l'intérieur de cette image.

On peut appliquer le même type de raisonnement et utiliser les courbes de la figure 10.57 à l'analyse d'ouvertures rectangulaires.

Il est possible d'observer de manière très simple la diffraction de Fresnel par une fente, en formant un long espace étroit entre les deux doigts d'une main, bras tendu. On fait ensuite la même fente, parallèle à la première avec l'autre main, à proximité de l'œil. On se positionne ensuite en face d'une source brillante, comme un ciel de plein jour ou une lampe forte, qui éclaire la fente la plus éloignée que l'on observe alors à travers la plus rapprochée. Après avoir mis la fente proche contre son œil, on verra la fente éloignée qui semble s'élargir, et les ensembles de franges devenir évidents.

10.3.9 L'écran opaque semi-infini

Formons un écran opaque plan semi-infini en enlevant la partie haute de Σ de la figure 10.54. Mathématiquement, cette situation se traduit simplement en faisant : $z_2 = y_1 = y_2 = \infty$. En gardant en tête les approximations précédentes, on limite la géométrie de telle manière que le point d'observation soit proche des bords de l'écran. Comme $v_2 = u_2 = \infty$ et $u_1 = -\infty$, les équation (10.104) ou (10.108) conduisent à :

$$I_p = \frac{I_0}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \mathcal{C}(v_1) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} - \mathcal{S}(v_1) \right]^2 \right\} \quad (10.109)$$

Lorsque le point P est directement en face du bord, $v_1 = 0$, $\mathcal{C}(0) = \mathcal{S}(0) = 0$, et $I_p = I_0/4$. On pouvait s'attendre à un tel résultat, puisque la moitié du front d'onde est obturé, l'amplitude de la perturbation est moitié moindre et l'éclairement réduit au quart de sa valeur précédente. Cela arrive au point (3) sur les figures 10.58 et 10.59. Lorsque l'on arrive, dans la région de l'ombre géométrique, au point (2) puis au point (1) et ainsi de suite, les cordes successives diminuent nettement, de manière monotone (problème 10.46). L'éclairement ne connaît pas d'oscillations dans cette région : il chute simplement et rapidement. Pour n'importe quel point au-dessus de (3), le bord de l'écran est au-dessous. En d'autres termes, $z_1 < 0$ et $v_1 < 0$. Pour une valeur voisine de $v_1 = -1,2$, la corde atteint un maximum et l'éclairement également. Ensuite, la valeur de I_p oscille autour de I_0 , puis elle diminue graduellement. Avec des

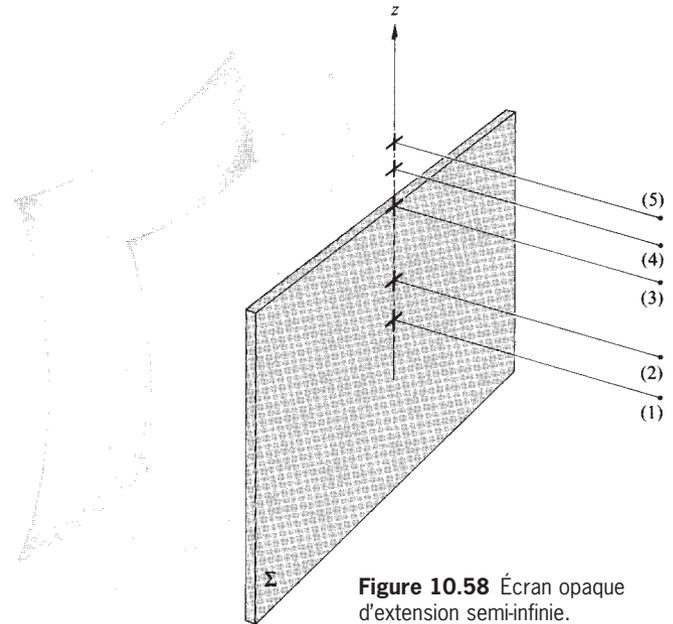


Figure 10.58 Écran opaque d'extension semi-infinie.

caméras ou des détecteurs très sensibles, on peut observer plusieurs centaines de ces franges*.

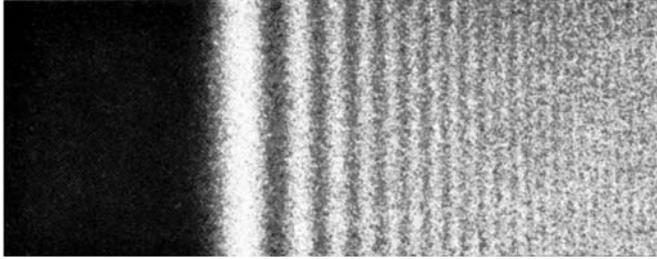
Il est évident que la figure de la photographie de la page 525 apparaîtrait comme un cas limite de la diffraction au voisinage des bords d'une fente large (Δv plus grand que 10). La distribution d'éclairement correspondant à l'optique géométrique est obtenue uniquement lorsque λ tend vers zéro. En effet, à mesure que λ diminue, les franges viennent plus près du bord et deviennent de plus en plus fines.

On peut observer expérimentalement la figure de diffraction d'un bord rectiligne en utilisant comme source n'importe quel type de fente et en la maintenant en face d'une forte lampe, bras tendu. On introduit ensuite un écran opaque (par exemple, une lame de microscope ou de rasoir noircie) très près de son œil. Lorsque le bord de l'écran passe en face de la fente source, parallèlement à elle, on doit observer une série de franges.

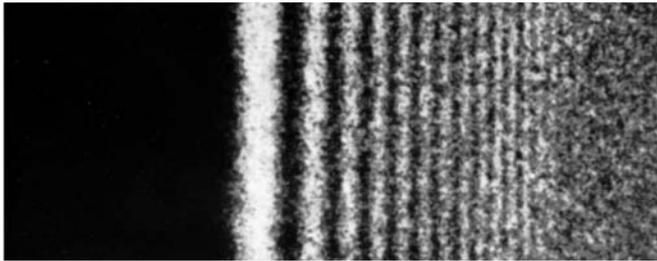
10.3.10 Diffraction par un obstacle étroit

Revenons à la description de la fente mince unique. Considérons alors la configuration inverse, c'est-à-dire le cas d'une

* J. D. Barnett et F. S. Harris, Jr., *J. Opt. Soc. Amer.* **52**, 637 (1962).



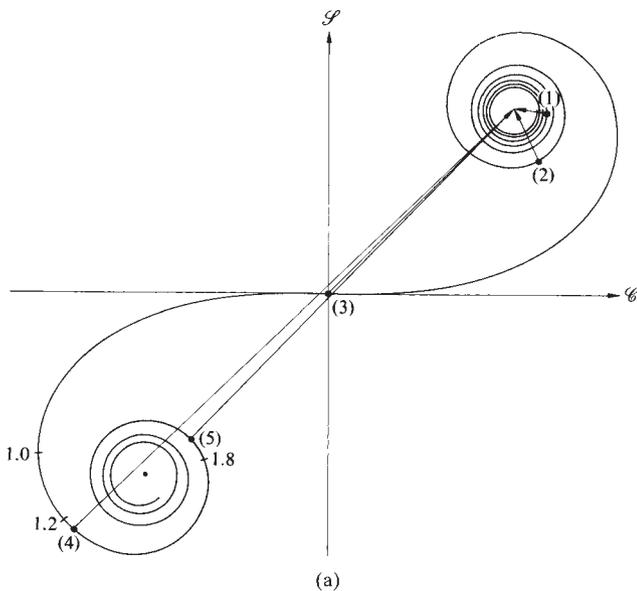
(a)



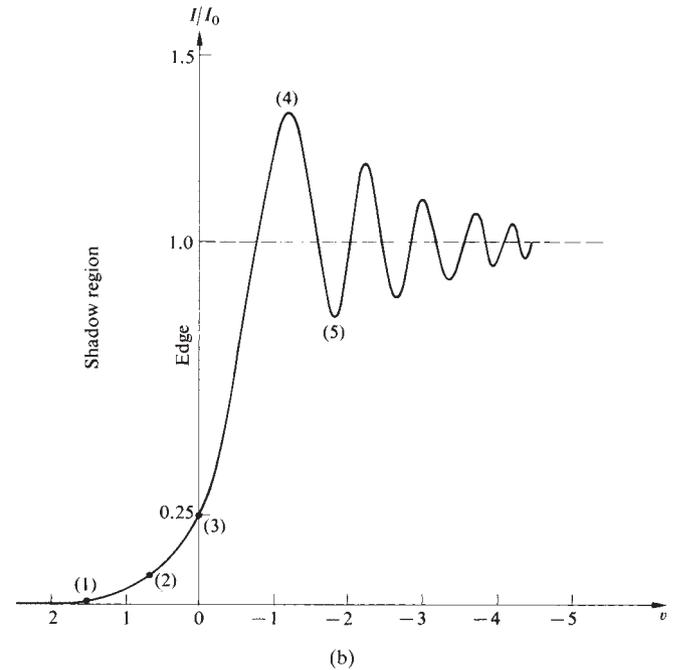
(b)

(a) Franges de diffraction de Fresnel obtenues dans le visible avec un demi-écran. (Francis Weston Sears, *Optics*, ©1949, Addison-Wesley Reading, MA.)
 (b) Franges de Fresnel obtenues avec un demi-écran diffractant (cristal de MgO) soumis à un faisceau d'électrons. Les électrons se comportent comme des photons. (Photo tirée de *Handbuch der Physik*, édité par S. Flügge, Springer-Verlag, Heidelberg.)

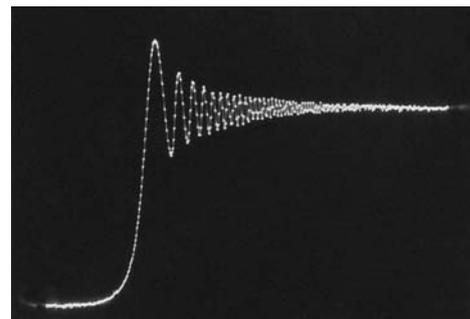
fente opaque sur fond transparent, ce qui correspond au cas d'un fil vertical opaque. En un point situé exactement en face du centre du fil, on peut considérer que la contribution provient de deux régions séparées, qui s'étendent respectivement de y_1 à $-\infty$ et de y_2 à $+\infty$. Sur la spirale de Cornu, celles-ci correspondent à deux longueurs d'arc, l'une allant de u_1 à B^- et de u_2 à B^+ . L'amplitude de la perturbation en un point P du plan d'observation est alors la longueur de la somme *vectorielle* des



(a)



(b)



(c)

Figure 10.59 (a) Spirale de Cornu pour un écran diffractant semi-infini. (b) Tracé de la distribution d'éclairage correspondante. (c) Même profil de distribution d'éclairage, mesuré avec une illumination laser He-Ne à l'aide d'une photodiode. (Photo W. Klein, I. Physikalisches Institut, Köln, Allemagne.)

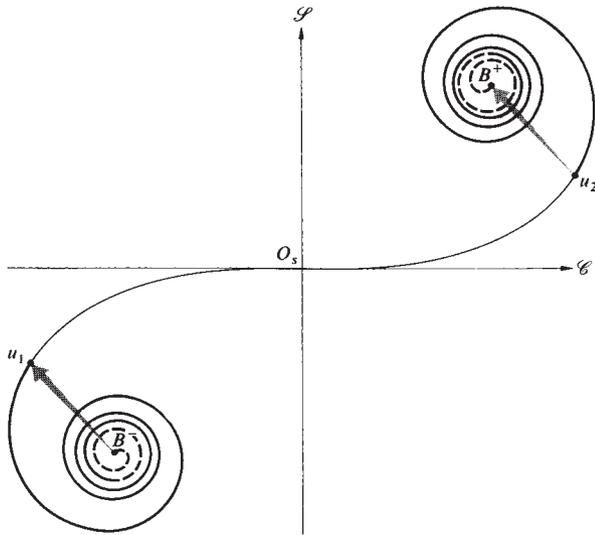


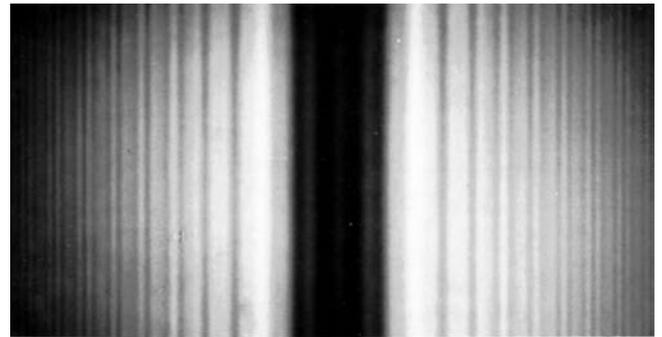
Figure 10.60 Spirale de Cornu appliquée à un obstacle mince.

deux phaseurs $\vec{B}^- u_1$ et $\vec{B}^+ u_2$, illustrés à la figure 10.60. Comme dans le cas du disque opaque, la symétrie est telle qu'il y a toujours une région éclairée le long de l'axe central. On peut s'en convaincre au moyen de la spirale, puisque $\vec{B}^- u_1 = \vec{B}^+ u_2$ lorsque P est sur l'axe central, et que leur somme ne peut jamais être nulle. La longueur d'arc Δu représente la région obscurcie de la spirale qui augmente lorsque le diamètre de l'obstacle augmente. Pour des fil épais, u_1 s'approche de B^- , u_2 s'approche de B^+ . De ce fait, la longueur des phaseurs diminue et l'éclairement chute sur l'axe de l'ombre. Ce résultat est évident lorsque l'on regarde les photos jointes, qui montrent les figures obtenues avec une mine de crayon très fine, et avec une tige de 3 mm de diamètre. Imaginons que l'on mesure l'éclairement au point P du plan d'observation (ou de la plaque photosensible) avec un tout petit détecteur. Lorsqu'on déplace P en dehors de l'axe central, par exemple, vers la droite, y_1 et u_1 deviennent de plus en plus négatifs alors que y_2 et u_2 , qui sont positifs, diminuent. La région opaque, Δu , coulisse vers le bas de la spirale. Lorsque le détecteur arrive au bord droit de l'ombre géométrique, $y_2 = 0$, $u_2 = 0$. En d'autres termes, u_2 se trouve à O_s . Notons que si le fil est fin, c'est-à-dire si Δu est petit, le détecteur enregistre une diminution régulière de l'éclairement, à mesure que u_2 s'approche de O_s . D'autre part, si le fil est épais, Δu est grand, de même que u_1 et u_2 . À mesure que Δu coulisse vers le bas de la spirale, les deux phaseurs subissent une série de

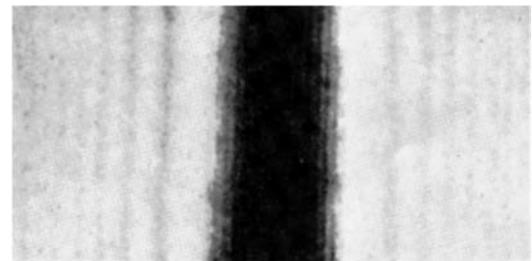
rotations complètes, modifiant ainsi leur déphasage relatif. Des extrema additionnels apparaissent ainsi au niveau de l'ombre géométrique, que l'on peut d'ailleurs observer sur la photo du milieu. En fait, la séparation entre les franges internes varie de manière inversement proportionnelle à largeur de la tige diffractante. Tout se passe comme si la figure provenait de l'interférence de deux ondes (expérience de Young) réfléchies par les deux bords de la tige.



(a)



(b)



(c)

(a) Ombre projetée par la mine d'un porte-mine. (b) Idem avec une barre de 3 mm de diamètre. (Photos E. H.) (c) Diffraction d'ondes de matière : diffraction de Fresnel obtenue avec un filament de quartz (2 μm de diamètre) soumis à un faisceau d'électrons. [Photo tirée de O. E. Klemperer, *Electron Physics*, Butterworths, Londres (1972), pgs 188–191.]

10.3.11 Principe de Babinet

On dit que deux écrans diffractants sont *complémentaires* lorsque les régions transparentes de l'un correspondent exactement aux régions opaques de l'autre et vice versa. Lorsque deux écrans de ce genre sont superposés, la combinaison est évidemment complètement opaque. Notons alors E_1 et E_2 les champs optiques scalaires qui sont respectivement en P lorsqu'un des deux écrans complémentaires Σ_1 ou Σ_2 est en place. On détermine la contribution totale provenant de chaque ouverture par intégration sur la surface de l'ouverture. En revanche, si les parties transparentes correspondant aux deux écrans sont présentes au même moment, il n'y a plus du tout de région opaque. Les limites de l'intégration vont jusqu'à l'infini et l'on est dans le cas d'une perturbation E_0 , sans aucune obturation. Ainsi :

$$E_1 + E_2 = E_0 \quad (10.110)$$

Cela représente l'énoncé du **principe de Babinet**. Regardons attentivement les figures 10.56 et 10.60 qui représentent les spirales de Cornu pour une fente transparente et un obstacle opaque mince. Si ces deux configurations sont complémentaires, la figure 10.61 illustre clairement le principe de Babinet. La somme du phaseur en relation avec l'obstacle mince ($\vec{B}^- \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \vec{B}^+$) et celui de la fente ($\vec{B}_2 \vec{B}_1$) conduit à la phase $\vec{B}^- \vec{B}^+$ de l'onde non obturée.

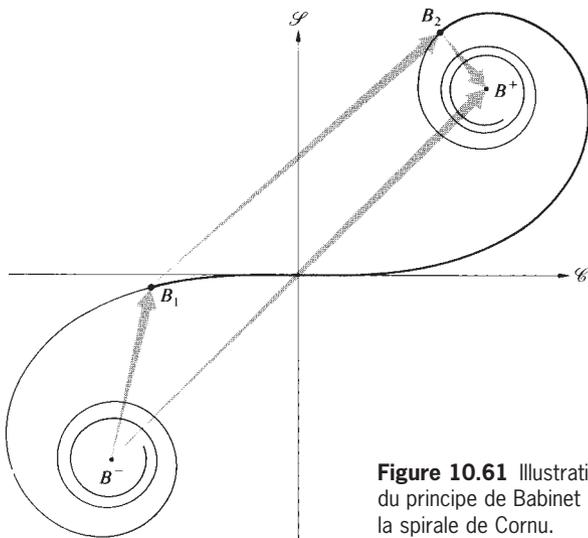


Figure 10.61 Illustration du principe de Babinet sur la spirale de Cornu.

Ce principe implique que lorsque $E_0 = 0$, $E_1 = -E_2$. En d'autres termes, les perturbations sont exactement égales en amplitude et opposées en phase. On observe donc exactement la même distribution d'éclairement, quel que soit l'écran en place, Σ_1 ou Σ_2 , ce qui est un résultat des plus intéressants. Il est évident, cependant, que ce principe ne peut pas être rigoureusement exact, car, pour une onde non obturée provenant d'un point source, il n'existe pas de points où l'amplitude est nulle (i.e. $E_0 \neq 0$ partout). En revanche, si l'on forme une image de la source en P_0 par des lentilles parfaites, comme dans la figure 10.6 (en l'absence de Σ_1 et de Σ_2), il y a une grande région où l'amplitude est nulle, au-delà du voisinage immédiat de P_0 (au-delà du disque d'Airy), dans laquelle $E_1 + E_2 = E_0 = 0$. C'est donc uniquement dans le cas de la diffraction de Fraunhofer que des écrans complémentaires engendrent des distributions d'éclairement équivalentes, c'est-à-dire, telles que $E_1 = -E_2$ (en excluant le point P_0). Cependant, l'équation (10.100) n'en est pas moins valide dans le cas de la diffraction de Fresnel, bien que les éclaircissements ne soient pas reliés simplement entre eux. La fente et l'obstacle mince de la figure 10.61 constituent un bon exemple de ce résultat. Pour une ouverture circulaire et un disque opaque, on peut examiner la figure 10.62. L'équation (10.110) est, encore une fois, clairement applicable, bien que les figures de diffraction ne soient certainement pas équivalentes.

C'est dans la condition de Fraunhofer que la véritable beauté du principe de Babinet est la plus évidente, comme le montre la figure 10.63, où les figures de diffraction de deux écrans complémentaires sont pratiquement identiques.

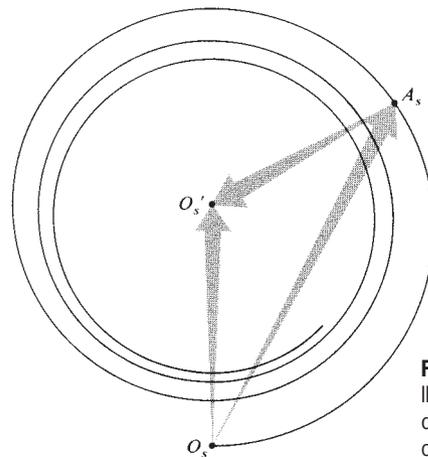


Figure 10.62 Illustration du principe de Babinet sur la courbe de vibration.

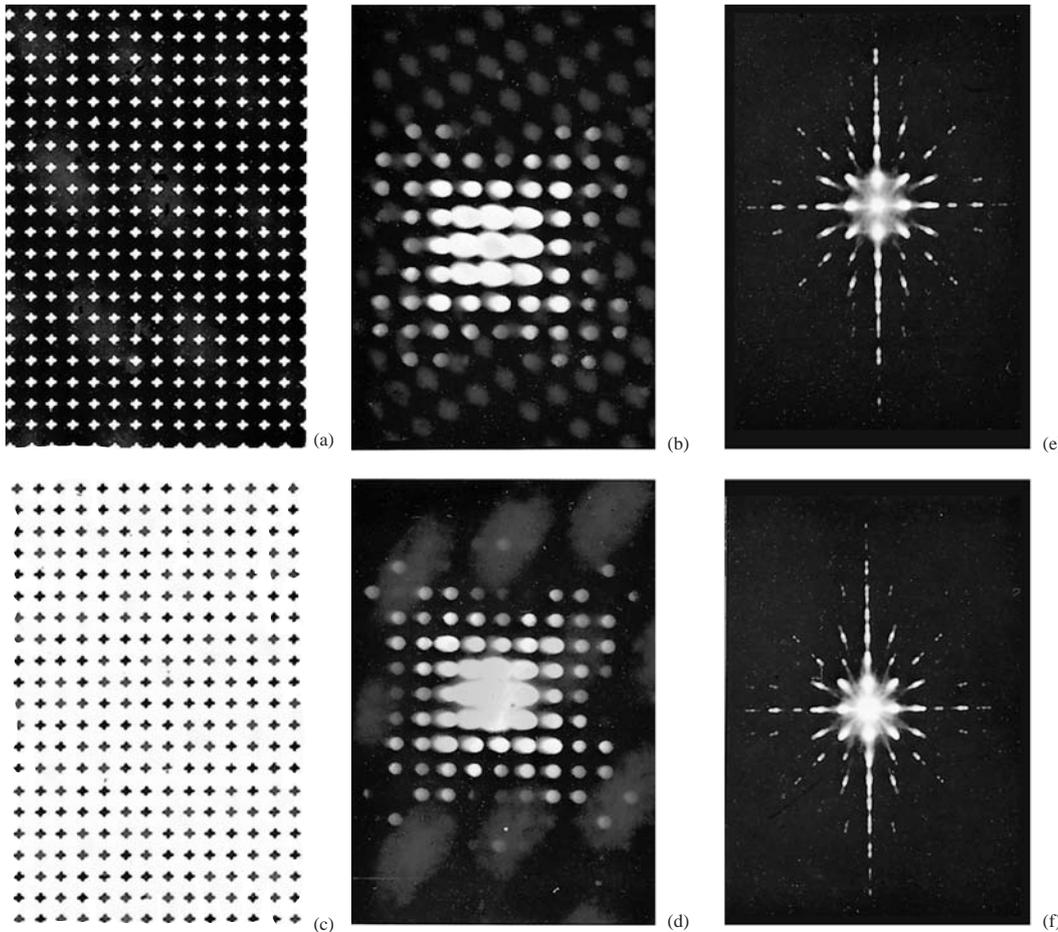


Figure 10.63 (a)-(d) Figures de diffraction obtenues en lumière blanche pour des matrices régulières d'ouvertures et d'obstacles complémentaires (en forme de signe +). (e) et (f) Figures de diffraction obtenues pour des matrices régulières respectives d'ouvertures et d'obstacles rectangulaires complémentaires. (Photos The Ealing Corporation et Richard B. Hoover.)

10.4 Théorie de la diffraction scalaire de Kirchhoff

Nous avons décrit un certain nombre de configurations de diffraction en restant dans le contexte relativement simple de la théorie de Huygens-Fresnel qui s'est révélée satisfaisante. L'une de ses bases qui reposait sur la constitution de surfaces par des sources ponctuelles fictives était une hypothèse plutôt qu'une conséquence de principes fondamentaux. Le traitement de Kirchhoff montre que ces résultats peuvent être retrouvés à partir de l'équation d'onde différentielle scalaire.

L'argumentation qui suit est très formelle et complexe ; certaines parties ont été renvoyées en annexe de l'ouvrage. On peut se permettre, ici, d'être très concis, et risquer de sacrifier la lisibilité en faveur de la rigueur.

Précédemment, lorsque l'on considérait une distribution de sources ponctuelles monochromatiques, on calculait la perturbation optique résultante en un point P (i.e. E_p), en considérant la superposition des ondes individuelles. Il existe une approche complètement différente qui repose sur la théorie des potentiels. Ici, on ne s'intéresse pas aux sources elles-mêmes, mais à la perturbation optique scalaire et à ses dérivées sur une surface arbitraire fermée autour de P . On suppose que l'analyse de Fourier peut séparer les composantes fréquentielles, de sorte qu'il n'est besoin de traiter qu'une seule fréquence à la fois. La perturbation optique monochromatique E est une solution de l'équation d'onde différentielle :

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (10.111)$$

Sans spécifier la nature précise de l'onde, on peut cependant l'écrire sous la forme :

$$\tilde{E} = \tilde{\mathcal{E}} e^{-ikct} \quad (10.112)$$

Ici, $\tilde{\mathcal{E}}$ représente la perturbation dans l'espace complexe. En remplaçant cette forme dans l'équation d'onde, on obtient :

$$\nabla^2 \tilde{\mathcal{E}} + k^2 \tilde{\mathcal{E}} = 0 \quad (10.113)$$

ce qui constitue l'équation de Helmholtz. Elle est résolue à l'aide du théorème de Green dans l'annexe 2. La perturbation optique en un point P , exprimée en termes de la perturbation et de son gradient sur une surface fermée S , proche de P , et l'entourant, est :

$$\tilde{\mathcal{E}}_P = \frac{1}{4\pi} \left[\iint_S \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \tilde{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} - \iint_S \tilde{\mathcal{E}} \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot d\vec{S} \right] \quad (10.114)$$

Connue sous le nom de *théorème de l'intégrale de Kirchhoff*, l'équation (10.114) repose sur la configuration géométrique de la figure 10.64.

Appliquons à présent ce théorème au cas particulier d'une onde sphérique non obturée émise par une source ponctuelle s , comme le montre la figure 10.65. La perturbation est alors de

la forme :

$$\tilde{E}(\rho, t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\rho} e^{i(k\rho - \omega t)} \quad (10.115)$$

Auquel cas :

$$\tilde{\mathcal{E}}(\rho) = \frac{\mathcal{E}_0}{\rho} e^{ik\rho} \quad (10.116)$$

En substituant cela dans l'équation (10.114), on obtient :

$$\tilde{\mathcal{E}}_P = \frac{1}{4\pi} \left[\iint_S \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{\rho} e^{ik\rho} \right) \cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\boldsymbol{\rho}}) dS - \iint_S \frac{\mathcal{E}_0}{\rho} e^{ik\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{r}}) dS \right]$$

où $d\vec{S} = \hat{\mathbf{n}} dS$, $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{r}}$, et $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ sont des vecteurs unités,

$$\nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right)$$

et :

$$\nabla \mathcal{E}(\rho) = \hat{\boldsymbol{\rho}} \partial \mathcal{E} / \partial \rho$$

On a alors :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{e^{ik\rho}}{\rho} \right) = e^{ik\rho} \left(\frac{ik}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \right)$$

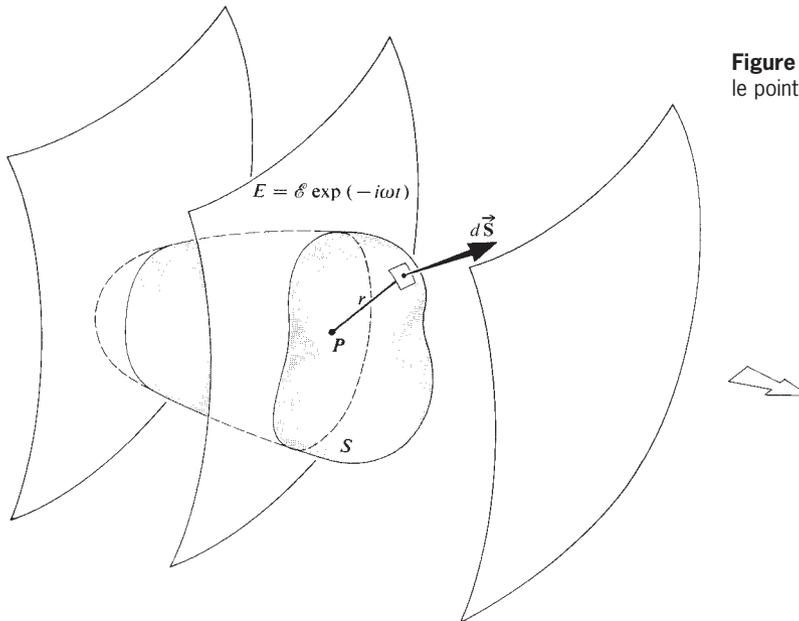


Figure 10.64 Représentation d'une surface quelconque S entourant le point P .

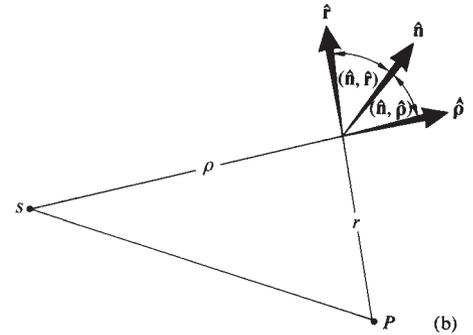
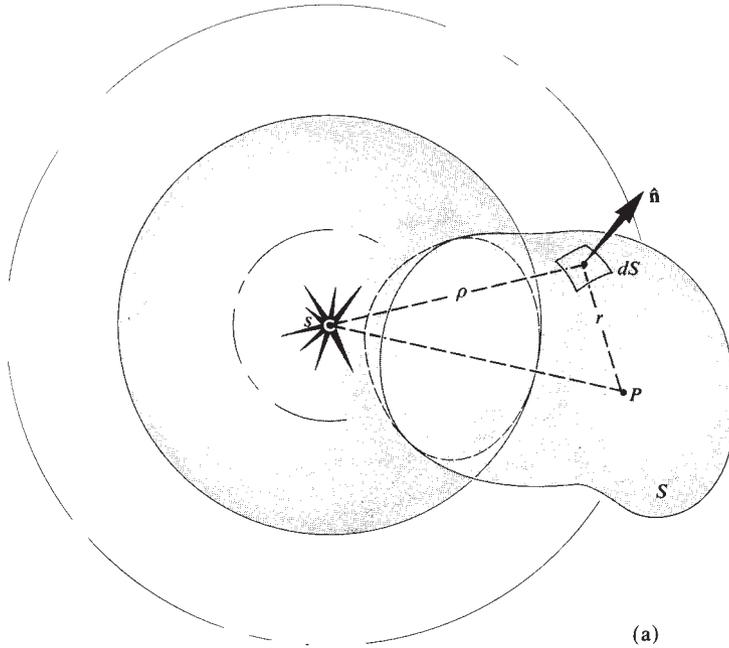


Figure 10.65 Une onde sphérique émise du point s.

et

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = e^{ikr} \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right)$$

Si $\rho \gg \lambda$ et $r \gg \lambda$, les termes $1/\rho^2$ et $1/r^2$ peuvent être négligés. Cette approximation est correcte en optique, mais certainement pas pour les micro-ondes. On écrit alors :

$$\tilde{\mathcal{E}}_P = -\frac{\mathcal{E}_0 i}{\lambda} \iint_S \frac{e^{ik(\rho+r)}}{\rho r} \left[\frac{\cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{r}}) - \cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{\rho}})}{2} \right] dS \quad (10.117)$$

Cela constitue la **formule de diffraction de Fresnel-Kirchhoff**.

Examinons attentivement l'équation (10.96), qui représente la perturbation en P provenant d'un élément de surface dS , dans la théorie de Huygens-Fresnel, et comparons-la à l'équation (10.117). Dans celle-ci, la dépendance angulaire est contenue dans le terme unique $\frac{1}{2}[\cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{r}}) - \cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{\rho}})]$, que l'on doit donc appeler **facteur d'obliquité** $K(\theta)$ qui, on le démontrera plus tard, est équivalent à celui défini dans l'équation (10.72). Notons de même, qu'on peut remplacer k partout par $-k$, du fait que l'on aurait pu choisir $(\omega t - k\rho)$ comme phase de l'équation (10.115). Avec l'équation

(10.112) en tête, on multiplie les deux parties de l'équation (10.117) par $\exp(-i\omega t)$. L'élément différentiel est alors :

$$dE_p = \frac{K(\theta)\mathcal{E}_0}{\rho r \lambda} \cos[k(\rho + r) - \omega t - \pi/2] dS \quad (10.118)$$

Cela constitue la contribution à E_p , en provenance d'un élément de surface dS , situé à une distance r de P . Le terme $\pi/2$ de la phase résulte du fait que $-i = \exp(-i\pi/2)$. La formulation de Kirchhoff conduit donc au même résultat final, à l'exception près qu'elle inclut le déphasage correct de $\pi/2$, qui manque dans le traitement de Huygens-Fresnel [équation (10.96)].

Il faut encore s'assurer qu'on peut définir la surface dS de façon à ce qu'elle corresponde à la partie non obturée du front d'onde, comme c'est le cas dans la théorie de Huygens-Fresnel. Dans le cas d'une onde sphérique, émise par une source ponctuelle s et se propageant librement, on construit la région doublement connectée de la figure 10.66. La surface S_2 entoure complètement la petite surface sphérique S_1 . Pour $\rho = 0$, la perturbation $E(\rho, t)$ possède une singularité et est donc, à juste titre, exclue du volume V compris entre S_1 et S_2 . L'intégrale doit maintenant inclure les deux surfaces S_1 et S_2 . Il se peut cependant que l'on ait fait croître S_2 vers l'extérieur jusqu'à l'infini, en augmentant son rayon indéfiniment. Dans

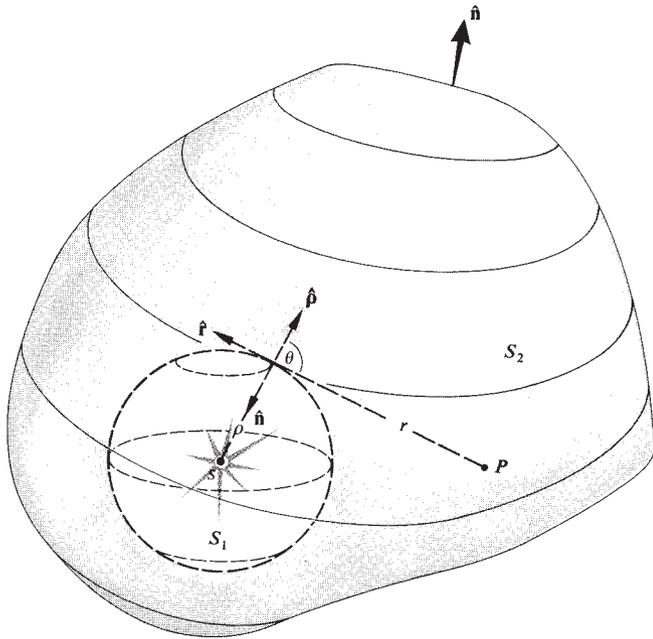


Figure 10.66 Région doublement connectée entourant le point s .

ce cas, sa contribution à l'intégrale de surface disparaît (ce qui est vrai quelle que soit la forme de la perturbation incidente, pourvu qu'elle décroisse en fonction de la distance, au moins aussi rapidement qu'une onde sphérique). La surface restante S_1 est alors une sphère centrée sur le point source. Comme sur S_1 \hat{n} et \hat{p} sont antiparallèles, il est évident, d'après la figure 10.65b, que les angles (\hat{n}, \hat{r}) et (\hat{n}, \hat{p}) sont respectivement θ et 180° . Le facteur d'obliquité devient alors :

$$K(\theta) = \frac{\cos \theta + 1}{2}$$

On retrouve ainsi l'équation (10.72). Comme la surface d'intégration S_1 est centrée en s , il est alors évident qu'elle correspond au front d'onde sphérique, à un instant donné. **Le principe de Huygens-Fresnel est donc une conséquence directe de l'équation d'onde différentielle scalaire.**

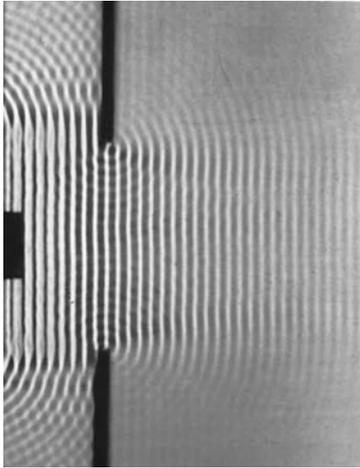
Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin sur la formulation de Kirchhoff, si ce n'est pour signaler brièvement comment on peut l'appliquer aux écrans diffractants. Généralement, on prend comme surface fermée d'intégration autour du point d'observation P , l'écran entier Σ lui-même, recouvert d'une demi-sphère infinie. Il y a ainsi trois régions distinctes. La demi-sphère infinie n'apporte aucune contribution à l'intégrale. De plus, on

suppose qu'il n'y a pas de perturbation immédiatement derrière l'écran opaque, de sorte que cette deuxième région n'apporte non plus aucune perturbation. La perturbation en P ne provient donc que de la contribution de l'ouverture. Il suffit donc d'intégrer l'équation (10.117) uniquement sur cette surface.

Les résultats obtenus en utilisant le principe de Huygens-Fresnel ont donc, à présent, une justification théorique rigoureuse, les seules limitations provenant du fait que $\rho \gg \lambda$ et que $r \gg \lambda$.

10.5 Ondes de diffraction par les bords

Dans le paragraphe 10.1.1, on a dit qu'on pouvait considérer une onde diffractée comme provenant d'une distribution fictive de sources secondaires disposées sur la portion non obturée d'un front d'onde, ce qui constitue le principe de Huygens-Fresnel. Il y a, cependant, une autre interprétation complètement différente, mais assez prometteuse. Supposons qu'une onde incidente force les électrons, situés à l'arrière d'un écran diffractant Σ , à osciller, et que ceux-ci se déséxcitent en émettant à leur tour un rayonnement. On anticipe alors un double effet. D'une part, tous les oscillateurs loin du bord de l'ouverture rayonnent en retour vers la source de manière à annuler l'onde incidente en tout point, excepté dans le cylindre qui est la projection de l'ouverture elle-même. Si le mécanisme s'arrêtait là, on observerait donc une parfaite image géométrique de la source sur le plan d'observation. Il y a, cependant, une autre source de contribution, qui est constituée par les oscillateurs situés dans le voisinage immédiat des bords de l'ouverture. Une portion de l'énergie émise par ces sources secondaires se propage en avant, et c'est la superposition de cette onde diffusée (appelée *onde de diffraction par les bords*) et de la partie non obturée de l'onde incidente (appelée *onde géométrique*) qui donne la figure de diffraction. La validité de ce raisonnement devient assez évidente lorsque l'on examine le montage suivant. On perce une petite ouverture ($\approx 0,5$ cm de diamètre) de forme arbitraire dans une feuille de papier et on la maintient à la longueur d'un bras, à quelques mètres devant une ampoule ordinaire allumée. Même si l'œil est dans l'ombre de la feuille, on constate que les bords de l'ouverture sont très lumineux. Les photos ci-jointes de cuves à ondes illustrent aussi très bien ce processus. Notons comment chaque bord de la fente semble servir de centre pour une perturbation circulaire qui se propage ensuite au-delà de l'ouverture. Il n'y a pas d'électrons oscillateurs ici, ce qui implique que ces



Ondes passant à travers une fente dans une cuve à vagues. (Photo PSSC Physics, D. C. Heath, Boston, 1960.)

idées ont une certaine universalité et peuvent être applicables également aux ondes élastiques.

L'interprétation de la diffraction comme émanant de l'interférence entre une onde diffractée par les bords et l'onde géométrique est peut-être plus physiquement acceptable que la modélisation des émetteurs secondaires fictifs du principe de Huygens-Fresnel. Ce concept n'est cependant pas nouveau. Il fut en effet proposé par Thomas Young avant même que Fresnel ne produise son célèbre mémoire sur la diffraction. Mais les brillants succès de Fresnel finirent malheureusement par convaincre Young de rejeter ses idées, comme en témoigne, par exemple, sa lettre à Fresnel de 1818. Renforcée par les travaux de Kirchhoff, la conception de la diffraction qu'avait Fresnel devint un concept généralement reconnu et tenace (jusqu'au chapitre 10.4 !). La résurrection de la théorie de Young arriva en 1888, où le mathématicien et physicien italien Gian Antonio Maggi (1856-1937) prouva que l'analyse de Kirchhoff, au moins pour un point source, provenait de deux

contributions, dont l'une était une onde géométrique, et dont l'autre était une intégrale, qui, à l'époque, n'avait malheureusement pas d'interprétation physique.

Dans sa thèse de doctorat (1893), le physicien Eugen Maey montra qu'une onde de bord était effectivement compatible avec une formulation de Kirchhoff modifiée pour un demi-plan semi-infini. La solution rigoureuse de ce problème fut apportée par le physicien allemand Arnold Sommerfeld (voir paragraphe 10.1), qui montra que le bord d'un écran émettait une onde cylindrique non seulement vers la région éclairée mais aussi vers la région de l'ombre géométrique. Pour la région éclairée, l'onde de bord se combine avec l'onde géométrique, en complet accord avec la théorie de Young. En 1917, Adalbert (Wojciech) Rubinowicz prouva que, pour une onde sphérique ou plane, la formule de Kirchhoff pouvait être décomposée en deux ondes. Il révélait ainsi l'exactitude de l'approche de Young. Rubinowicz établit plus tard que l'onde de bord était, en première approximation, produite par la réflexion de l'onde primaire sur les bords de l'ouverture. En 1923, Friedrich Kottler montra l'équivalence des solutions proposées par Maggi et Rubinowicz. À l'heure actuelle, on parle d'ailleurs de la théorie de Young-Maggi-Rubinowicz. Plus récemment (1962), la théorie de la diffraction par les bords fut étendue à toute onde incidente par les physiciens Kenro Miyamoto et Emil Wolf*.

Une approche moderne, très utile, a également été proposée par le physicien américain Joseph B. Keller qui a développé une théorie de la diffraction géométrique très proche de celle des ondes de bords de Young, dans laquelle il suppose l'existence de rayons diffractés, comme en optique géométrique. Les règles qui les régissent, analogues aux lois de la réflexion et de la réfraction, sont alors employées pour déterminer des champs résultants.

.....

*Une bibliographie assez complète est disponible dans l'article de A. Rubinowicz in *Progress in Optics*, Vol. 4, p. 199.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Les solutions complètes des exercices (excepté ceux ayant un astérisque) figurent à la fin de l'ouvrage.

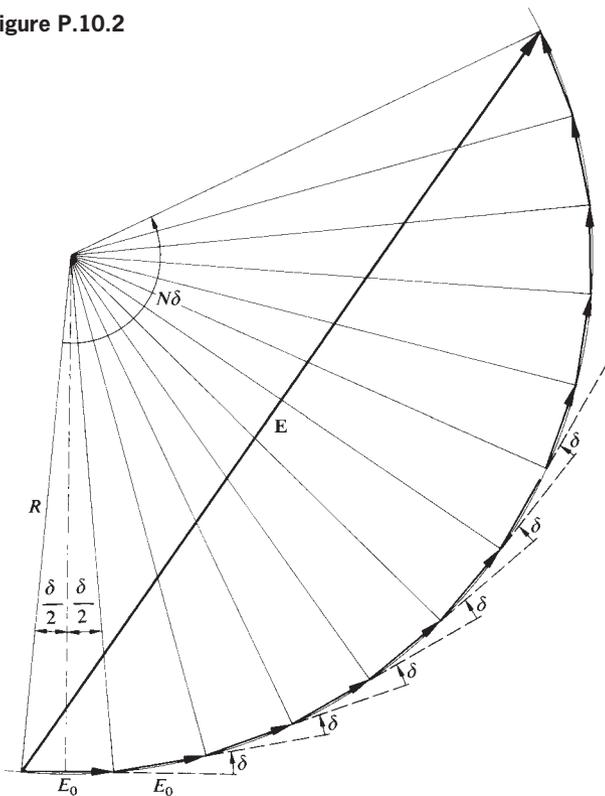
10.1 Soit une source ponctuelle S placée à une distance R du centre d'une ouverture circulaire de rayon a , pratiquée dans un écran opaque. Si la distance à la périphérie est $(R + \ell)$, montrer que la diffraction de Fraunhofer apparaît sur un écran d'observation placé à grande distance, lorsque :

$$\lambda R \gg a^2/2$$

Quelle est la plus petite valeur satisfaisante de R si le trou diffractant a un rayon de 1 mm, $\ell \leq \lambda/10$, et que $\lambda = 500$ nm ?

10.2 En utilisant la figure P.10.2, déterminer l'expression donnant l'éclairement pour N oscillateurs cohérents [équation (10.5)].

Figure P.10.2



10.3* Au paragraphe 10.1.3, on a parlé d'introduire un décalage de phase intrinsèque ε entre les oscillateurs d'une fente linéaire. À partir de ce résultat, montrer que l'équation (10.18) devient :

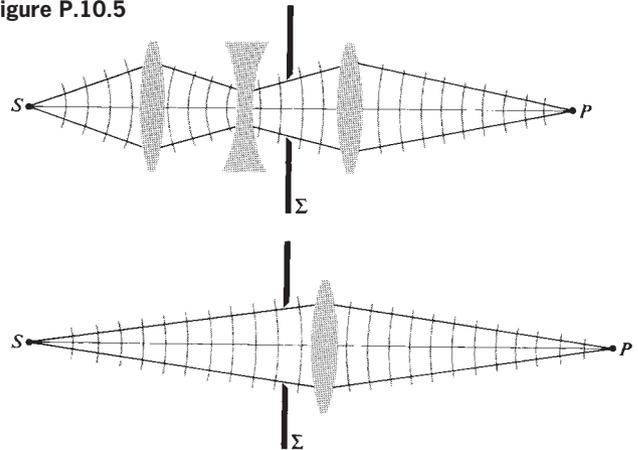
$$\beta = (kb/2)(\sin \theta - \sin \theta_i)$$

lorsque l'onde plane incidente fait un angle θ_i avec le plan de la fente.

10.4 En considérant le système à antennes multiples de la page 467, calculer la séparation angulaire entre les lobes successifs, ou maxima principaux, et la largeur du maximum central.

10.5 En considérant le dispositif de la figure 10.13, on veut déterminer ce qui se passe dans l'espace image des lentilles. En d'autres termes, positionner la pupille de sortie et la relier au processus de diffraction. Montrer que les configurations de la figure P.10.5 sont équivalentes à celles de la figure 10.3 et résultent donc de la diffraction de Fraunhofer. Représenter au moins l'un de ces arrangements.

Figure P.10.5



10.6 L'angle entre le centre et le premier minimum de la figure de diffraction de Fraunhofer d'une fente unique est appelé la *demi-largeur angulaire*. Écrire son expression. Déterminer la *demi-largeur linéaire* correspondante (a) lorsque aucune lentille de focalisation n'est en place et que la distance entre la fente et l'écran de visualisation est L ; (b) lorsqu'une lentille de distance focale f_2 est mise en place très près de l'ouverture. Noter que la demi-largeur angulaire est également la distance entre deux minima successifs.

10.7* Une fente unique de 0,1 mm de largeur est pratiquée dans un écran opaque (dans l'air) puis éclairée par des ondes planes émises par un laser ionique au krypton ($\lambda_0 = 461,9$ nm). Si l'écran d'observation

est à 1 m, déterminer si, oui ou non, la figure de diffraction résultante sera de type « champ lointain ». Calculer ensuite la largeur angulaire du maximum central.

10.8* Un écran opaque dans lequel on a pratiqué une longue fente est éclairé, dans l'air, par le rayonnement infrarouge d'un laser He-Ne à 1 52,2 nm. On observe que le centre de la 10^e bande sombre de la figure de Fraunhofer se trouve à 6,2° par rapport à l'axe central. Déterminer la largeur de la fente. À quel angle le 10^e minimum apparaîtrait-il si le dispositif est entièrement immergé dans de l'eau ($n_w = 1,33$) et non dans l'air ($n_a = 1,00029$) ?

10.9 Un faisceau micro-onde collimaté rencontre un écran de métal percé d'une longue fente horizontale de 20 cm de largeur. Un détecteur se déplaçant parallèlement à l'écran en champ lointain localise le premier minimum d'éclairement à un angle de 36,87° au-dessus de l'axe central. Déterminer la longueur d'onde du rayonnement.

10.10 Montrer dans la figure de diffraction de Fraunhofer d'une fente double, si $a = mb$, que le nombre des franges brillantes situées à l'intérieur du maximum de diffraction central est égal à $2m$.

10.11* Un écran opaque contenant deux longues fentes de 0,1 mm de large séparées de 0,2 mm est éclairé par un faisceau de lumière de longueur d'onde 500 nm. Si le plan d'observation est à 2,5 m, la figure correspond-elle à la diffraction de Fresnel ou à celle de Fraunhofer ? Combien de franges de Young voit-on dans la bande centrale brillante ?

10.12 Quel est l'éclairement relatif du maximum secondaire dans une figure de Fraunhofer à trois fentes ? Dessiner un graphique de la distribution d'éclairement lorsque $a = 2b$ pour deux, et trois fentes.

10.13* En partant de l'expression de l'éclairement pour une fente finie, réduire la fente à un minuscule élément de surface et montrer qu'elle rayonne de manière égale dans toutes les directions.

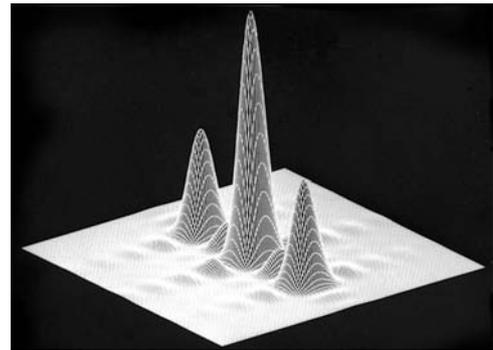
10.14* Montrer que les figures de diffraction de Fraunhofer ont un centre de symétrie [i.e. $I(Y, Z) = I(-Y, -Z)$] indépendamment de la configuration de l'ouverture, tant qu'il n'y a pas de variations de phase dans le champ sur la région de l'ouverture. Commencer avec l'équation (10.41). On verra ultérieurement (chapitre 11) que cette restriction est équivalente à postuler que la fonction d'éclairement est réelle.

10.15 Avec les résultats du problème 10.14 en mémoire, discuter des symétries qui seraient évidentes dans la figure de diffraction de Fraunhofer d'une ouverture présentant elle-même un axe de symétrie. Considérer pour cela des ondes planes incidentes quasi monochromatiques.

10.16 À partir de considérations de symétrie, dessiner une représentation sommaire des figures de diffraction de Fraunhofer pour une ouverture en forme de triangle équilatéral et une ouverture en forme de signe plus.

10.17 La figure P.10.17 est la distribution d'éclairement en champ lointain pour une configuration d'ouvertures rectangulaires allongées. Décrire la configuration à base de trous qui donnerait une telle figure. Donner un raisonnement détaillé.

Figure P.10.17 (Photo R. G. Wilson, Illinois Wesleyan University.)



10.18 Les figures P.10.18a et b sont les distributions de champ électrique et de l'éclairement, en champ lointain, pour une configuration d'ouvertures rectangulaires allongées. Décrire la configuration à base de trous qui donnerait une telle figure. Donner un raisonnement détaillé.

10.19 La figure P.10.19 est une distribution d'éclairement de Fraunhofer générée par ordinateur. Décrire l'ouverture qui est à l'origine d'une telle figure. Donner un raisonnement détaillé.

10.20 La figure P.10.20 est la distribution de champ électrique en champ lointain pour une ouverture particulière pratiquée dans un écran opaque. Décrire le type d'ouverture qui donnerait une telle figure. Donner un raisonnement détaillé.

10.21 À la lumière des cinq exercices précédents, identifier la figure P.10.21 : expliquer ce qu'elle représente et quelle ouverture a pu la former.

10.22* Vérifier que le pic d'éclairement I_1 du premier « anneau » de la figure d'Airy pour une diffraction en champ lointain avec une ouverture circulaire est tel que $I_1/I(0) = 0,0175$. On pourra utiliser le fait que :

$$J_1(u) = \frac{u}{2} \left[1 - \frac{1}{1!2!} \left(\frac{1}{2}u\right)^2 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{1}{2}u\right)^4 - \frac{1}{3!4!} \left(\frac{1}{2}u\right)^6 + \dots \right]$$

10.23 Aucun objectif ne peut focaliser la lumière en un point image parfait car il existe toujours un effet de diffraction. Donner une estimation de la taille du plus petit point lumineux que l'on peut obtenir au foyer d'un objectif. Déterminer une relation entre la taille du point image et la distance focale et le diamètre de l'objectif. Considérer que le nombre d'ouverture de l'objectif soit de l'ordre de 0,8 ou de 0,9, ce qui correspond à un objectif très ouvert.

Figure P.10.18 (Photo R. G. Wilson, Illinois Wesleyan University.)

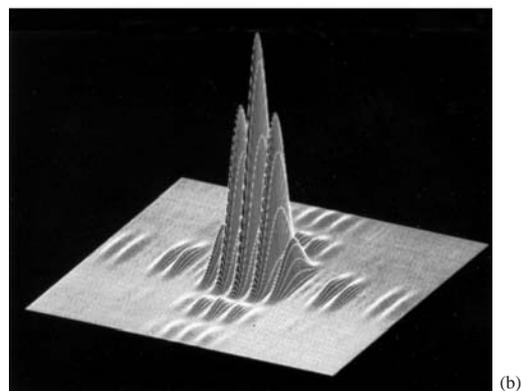
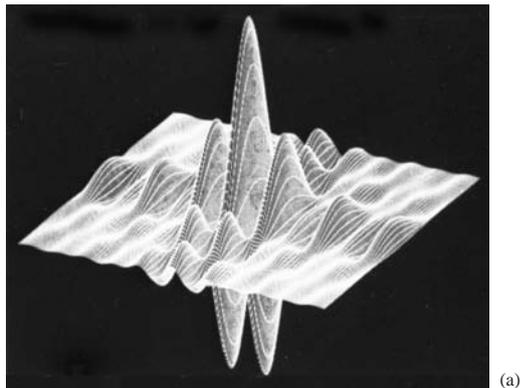
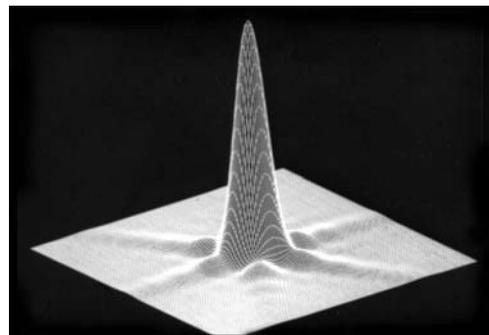


Figure P.10.19 (Photo R. G. Wilson, Illinois Wesleyan University.)



10.24 La figure P.10.24 montre différentes configurations d'ouverture. Représenter sommairement la figure de Fraunhofer obtenue pour chacune d'entre elles. Noter que les régions circulaires devraient produire des systèmes d'anneaux similaires à ceux de la figure d'Airy, centrés sur l'origine.

Figure P.10.20 (Photo R. G. Wilson, Illinois Wesleyan University.)

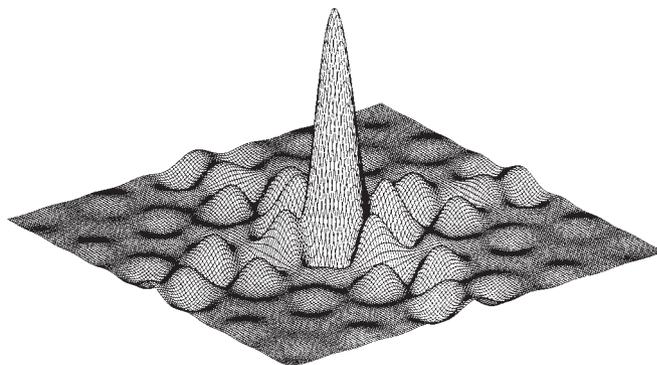


Figure P.10.21 (Photo R. G. Wilson, Illinois Wesleyan University.)

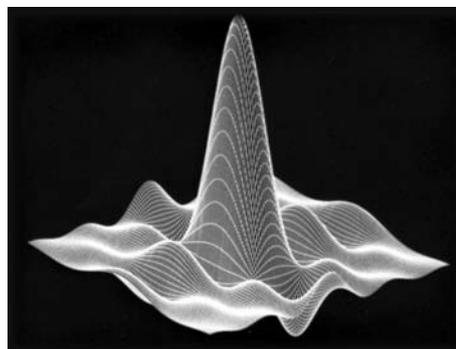


Figure P.10.24



10.25* Soit un laser émettant un faisceau limité par la diffraction ($\lambda_0 = 632,84 \text{ nm}$) de 2 mm de diamètre. Quelle serait la taille du point lumineux qu'il produirait depuis la Terre sur la surface de la Lune ? On prendra la distance Terre-Lune égale à $380 \times 10^3 \text{ km}$ et l'on négligera tout effet causé par l'atmosphère terrestre.

10.26* Si l'on essaie de regarder à travers un trou de 0,75 mm de diamètre, on constate une nette diminution de l'acuité visuelle. Calculer la limite angulaire de résolution en considérant qu'elle est uniquement déterminée par la diffraction. Prendre $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$. Comparer ces résultats avec la valeur de $1,7 \times 10^{-4} \text{ rad}$ qui correspond à une pupille de 4 mm.

10.27 Le peintre néo-impressionniste Georges Seurat était un membre de l'école du pointillisme. Ses tableaux sont constitués d'un

très grand nombre de petits points très rapprochés ($\approx 0,3$ mm) de couleurs différentes. L'illusion du mélange des couleurs est uniquement produite dans l'œil de l'observateur. À quelle distance d'une toile doit-on se tenir pour avoir cette fusion des couleurs ?

10.28* Le télescope du Mont-Palomar possède un miroir-objectif de 508 cm de diamètre. Déterminer sa limite angulaire de résolution à une longueur d'onde de 550 nm en radians, degrés et secondes d'arc. La distance Terre-Lune est de $3,8 \times 10^8$ m. Prendre $\lambda_0 = 550$ nm. À quelle distance l'un de l'autre doivent se trouver deux objets lunaires afin qu'on puisse les distinguer à l'œil ? Considérer une pupille de 4 mm de diamètre.

10.29* Un réseau de diffraction en transmission dont les traits sont séparés de $3,0 \times 10^{-6}$ m est éclairé par un étroit faisceau de lumière rouge ($\lambda_0 = 694,3$ nm) provenant d'un laser à rubis. Des points de lumière diffractée sont observables, de chaque côté du faisceau non défléchi, sur un écran situé à 2 m. Quelle est la distance entre l'axe central du faisceau et les deux points les plus proches ?

10.30* Un réseau de diffraction comportant des fentes espacées de $0,60 \times 10^{-3}$ cm est éclairé par un faisceau de lumière blanche de longueur d'onde 500 nm. À quel angle apparaît le maximum de troisième ordre ?

10.31* Un réseau de diffraction produit un spectre du second ordre de lumière jaune ($\lambda_0 = 550$ nm) à 25° . Déterminer le pas entre les traits de ce réseau.

10.32 Un faisceau de lumière blanche éclaire sous incidence normale un réseau de diffraction en transmission comportant 1 000 traits par centimètre. Déterminer l'angle pour lequel la composante rouge ($\lambda_0 = 650$ nm) émerge dans le spectre de premier ordre.

10.33* La lumière émise par une lampe à sodium de laboratoire possède deux fortes composantes dans le jaune, à 589,592 3 nm et 588,995 3 nm. De quelle distance seront espacées ces deux raies dans le spectre du premier ordre sur un écran situé à 1 m d'un réseau de diffraction possédant 10 000 traits par centimètre ?

10.34* Un faisceau de lumière solaire éclaire un réseau en transmission comportant 5 000 traits par centimètre. Le spectre du troisième ordre chevauche-t-il celui du deuxième ordre ? Prendre la longueur d'onde de la composante rouge à 780 nm et celle du violet à 390 nm.

10.35 Un faisceau de lumière de fréquence $4,0 \times 10^{14}$ Hz rencontre un réseau comportant 10 000 traits par centimètre. Quel est l'ordre le plus élevé que l'on peut observer avec ce composant ? Expliquer.

10.36* Un spectromètre à réseau placé dans le vide sur Terre dévie un faisceau de lumière de longueur d'onde 500 nm à un angle de 20°

dans le spectre du premier ordre. Par comparaison, cette déviation est de 18° lorsque le même dispositif est placé sur la planète Mongo. Quel est l'indice de réfraction de l'atmosphère de cette planète ?

10.37 Démontrer que l'équation :

$$a(\sin \theta_m - \sin \theta_i) = m\lambda \quad [10.61]$$

est indépendante de l'indice de réfraction lorsqu'elle s'applique à un réseau en transmission.

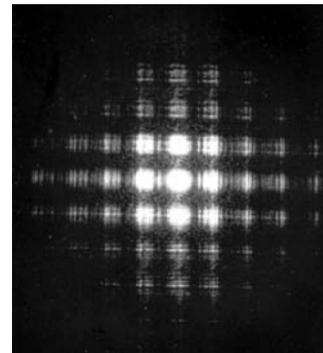
10.38 Un réseau en transmission de haute résolution de 260 mm de large et comportant 300 traits par millimètre possède un pouvoir de résolution de 10^6 pour $\lambda = 500$ nm à environ 75° en autocollimation. Déterminer sa gamme spectrale libre. Comparer ces valeurs de \mathcal{R} et $((\Delta\lambda)_{\text{fsr}}$ avec celles d'un étalon Fabry-Pérot possédant un gap d'air de 1 cm et une finesse de 25 ?

10.39 Quel est le nombre total de traits qu'un réseau doit avoir afin d'être en limite de séparation pour le doublet de sodium ($\lambda_1 = 5 895,9$ Å, $\lambda_2 = 5 890,0$ Å) dans le troisième ordre ?

10.40* Un écran opaque contient 30 ouvertures circulaires disposées aléatoirement. La source de lumière éclaire toutes les ouvertures de manière cohérente par une onde plane. Chaque onde diffractée est en revanche, complètement incohérente par rapport à toutes les autres. Décrire la figure de diffraction obtenue en champ lointain.

10.41 Un observateur regarde une source ponctuelle de lumière ($\lambda_0 = 600$ nm) située à 20 m, à travers un bout d'étoffe. Il voit un ensemble de points lumineux disposés en carré autour du point source (figure P.10.41), chacun étant séparé de 12 cm par rapport à son voisin le plus proche. Déterminer la distance entre les mailles du tissu.

Figure P.10.41 (Photo E. H.)



10.42* Effectuer les différentes opérations mathématiques nécessaires pour arriver à l'équation (10.76).

10.43 En considérant la figure 10.38, intégrer l'expression $dS = 2\pi\rho^2 \sin \varphi d\varphi$ sur la $l^{\text{ième}}$ zone pour obtenir la surface de cette zone,

$$A_l = \frac{\lambda \pi \rho}{\rho + r_0} \left[r_0 + \frac{(2l-1)\lambda}{4} \right]$$

Montrer que la distance moyenne aux $l^{\text{ième}}$ zones est :

$$r_l = r_0 + \frac{(2l-1)\lambda}{4}$$

et que le rapport A_l/r_l est donc constant.

10.44* Établir l'équation (10.84).

10.45 Utiliser la spirale de Cornu afin de réaliser un tracé sommaire de $|\mathbf{B}_{12}(w)|^2$ en fonction de $(w_1 + w_2)/2$ pour $\Delta w = 5,5$. Comparer les résultats avec ceux de la figure 10.57.

10.46 Les intégrales de Fresnel ont les formes asymptotiques (correspondant aux grandes valeurs de w) données par :

$$\mathcal{C}(w) \approx \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\pi w} \right) \sin \left(\frac{\pi w^2}{2} \right)$$

$$\mathcal{S}(w) \approx \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\pi w} \right) \cos \left(\frac{\pi w^2}{2} \right)$$

En utilisant ce résultat, montrer que l'éclairement de l'ombre d'un écran opaque semi-infini décroît de façon inversement proportionnelle au carré de la distance au bord, à mesure que z_1 et donc v_1 augmentent.

10.47 Que s'attendrait-on à observer dans le plan d'observation si le demi-plan Σ de la figure 10.58 était semi-transparent ?

10.48 Des ondes planes provenant d'un faisceau laser He-Ne collimaté ($\lambda_0 = 632,8$ nm) éclairent une tige d'acier de 2,5 mm de diamètre. Donner une représentation graphique sommaire de la figure de diffraction obtenue sur un écran placé à 3,16 m de la tige.

10.49 Donner une représentation graphique sommaire de la répartition de l'éclairement pour la figure de diffraction de Fresnel de la fente double. À quoi ressemblerait la spirale de Cornu au point P_0 ?

10.50* Donner une représentation graphique sommaire des figures de diffraction de Fresnel obtenues pour chacune des ouvertures de la figure P.10.50.

Figure P.10.50



10.51* On suppose que la fente de la figure 10.54 est rendue très large. À quoi ressemblerait la figure de diffraction de Fresnel ?

10.52* De la lumière collimatée provenant d'un laser ion-krypton émettant à 568,19 nm éclaire une ouverture circulaire sous une incidence normale. Vue axialement à une distance de 1 m, l'ouverture couvre la première zone de Fresnel. Déterminer son diamètre.

10.53* Des ondes planes arrivent perpendiculairement sur un écran percé d'un petit trou circulaire. Lorsqu'il est vu depuis un point axial P , le trou couvre la moitié de la première zone. Quel est l'éclairement en P par rapport à celui qu'on aurait s'il n'y avait pas d'écran ?

10.54* Un faisceau collimaté provenant d'un laser à rubis (694,3 nm) fournissant un éclairement de 10 W/m éclaire un écran opaque percé d'une ouverture carrée de 5 mm de côté. Calculer l'éclairement pour un point de l'axe central à 250 cm au-delà de cette ouverture.

10.55* Une longue fente étroite de 0,1 mm de large est éclairée par un faisceau de lumière de 500 nm de longueur d'onde provenant d'une source ponctuelle située à une distance de 0,9 m. Déterminer l'éclairement pour un point situé à 2 m en face de l'ouverture, lorsque la fente est alignée et perpendiculaire à la ligne joignant la source au point d'observation. Donner le résultat en fonction de l'éclairement qu'on obtiendrait sans écran diffractant.



Optique de Fourier

11.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons développer la discussion sur les méthodes de Fourier, introduites au chapitre 7. Notre intention est d'en fournir ici une introduction élémentaire mais complète sans entrer dans une analyse trop approfondie. Nous allons voir, qu'en plus de sa puissance mathématique, l'analyse de Fourier permet un traitement élégant des processus optiques en termes de fréquences spatiales*. Il est toujours intéressant d'avoir à disposition une nouvelle « boîte à outils » analytique, mais il est sans doute encore plus avantageux de développer un nouveau mode de pensée pouvant s'appliquer à un grand nombre de problèmes physiques. C'est exactement ce que permet l'analyse de Fourier†.

Notre première motivation est de montrer comment les systèmes optiques transforment la lumière pour former des images, ainsi que de caractériser l'amplitude et la phase des ondes atteignant le plan image. Nous allons voir que les méthodes de Fourier sont particulièrement bien adaptées à cette tâche. C'est pourquoi on va étendre l'étude des transformées qu'on a entamée, en commençant par les plus utiles à l'analyse. Citons parmi celles-ci la fonction delta qui sera utilisée pour représenter une source ponctuelle. Nous traiterons ensuite, dans le paragraphe

.....
*Voir la section 13.2 pour une discussion non mathématique plus approfondie.

.....
†Pour des références sur ce chapitre, voir R. C. Jennison, *Fourier Transforms and Convolutions for the Experimentalist* ; N. F. Barber, *Experimental Correlograms and Fourier Transforms* ; A. Papoulis, *Systems and Transforms with Applications in Optics* ; J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* ; J. Gaskill, *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics* ; R. G. Wilson, *Fourier Series and Optical Transform Techniques in Contemporary Optics* ; et les excellentes séries de brochures *Images and Information*, par B. W. Jones et al.

11.3.1, de la réponse d'un système optique à un objet constitué d'une multitude de points sources. La relation entre l'analyse de Fourier et la diffraction de Fraunhofer sera abordée tout le long de la discussion, mais elle fera l'objet d'une attention toute particulière dans la section 11.3.3. Enfin, nous reviendrons au problème d'évaluation des images, mais avec une perspective différente. L'objet ne sera plus représenté par un ensemble de points sources mais comme un diffuseur d'ondes planes.

11.2 Transformées de Fourier

11.2.1 Transformées à une-dimension

On a vu, au paragraphe 7.4, qu'une fonction à une-dimension de n'importe quelle variable spatiale $f(x)$ pouvait s'écrire comme une combinaison linéaire d'une infinité de contributions harmoniques :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} A(k) \cos kx \, dk + \int_0^{\infty} B(k) \sin kx \, dk \right] \quad [7.56]$$

Les facteurs de pondération qui définissent l'importance des contributions des diverses fréquences spatiales angulaires, c'est-à-dire $A(k)$ et $B(k)$, sont les *transformées de Fourier en cosinus et sinus* de $f(x)$ données par

$$A(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \cos kx' \, dx'$$

et

$$B(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \sin kx' \, dx' \quad [7.57]$$

respectivement. Ici la quantité x' est une variable d'intégration ; ni $A(k)$ ni $B(k)$ ne sont des fonctions explicites de x' , de

sorte que le choix du symbole pour la variable d'intégration n'a aucune importance. Les transformées en cosinus et sinus peuvent être réécrites à l'aide d'une fonction exponentielle complexe comme suit : en remplaçant [l'équation 7.57] dans [l'équation 7.56], on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos kx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \cos kx' dx' dk \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin kx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \sin kx' dx' dk$$

Comme $\cos k(x' - x) = \cos kx \cos kx' + \sin kx \sin kx'$, la relation précédente s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \cos k(x' - x) dx' \right] dk \quad (11.1)$$

L'expression entre crochets est une fonction paire de k , donc en modifiant les limites dans l'intégrale extérieure, on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \cos k(x' - x) dx' \right] dk \quad (11.2)$$

Dans la mesure où l'on cherche une représentation sous forme exponentielle, on remarque que le théorème d'Euler permet d'écrire :

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \sin k(x' - x) dx' \right] dk = 0$$

car l'expression entre crochets est une fonction impaire de k . En ajoutant les deux dernières expressions on obtient la *forme complexe** de l'intégrale de Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{ikx'} dx' \right] e^{-ikx} dk \quad (11.3)$$

Ainsi on peut écrire :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{-ikx} dk \quad (11.4)$$

en posant :

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx \quad (11.5)$$

*Dans un souci de garder des notations standard – sans que cela implique une perte de clarté – on omettra par la suite le symbole tilde qui désigne les quantités complexes.

et après avoir remplacé $x' = x$ dans l'équation (11.5). La fonction $F(k)$ est la **transformée de Fourier** de $f(x)$, ce qui s'écrit symboliquement :

$$F(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} \quad (11.6)$$

En fait, on peut rencontrer dans la littérature différentes manières de définir la transformée de Fourier. Elles diffèrent peu entre elles et sont équivalentes à la définition proposée dans l'équation (11.6). Par exemple, les signes dans les exponentielles peuvent être interchangés ou le facteur de $1/2\pi$ peut être symétriquement partagé entre $f(x)$ et $F(k)$; chacun ayant alors un coefficient $1/\sqrt{2\pi}$. On note que $A(k)$ est la partie réelle de $F(k)$ alors que $B(k)$ en est sa partie imaginaire, c'est-à-dire :

$$F(k) = A(k) + iB(k) \quad (11.7a)$$

On a vu, dans la section 2.4, qu'une expression complexe pouvait être aussi décrite en termes d'une amplitude à valeurs réelles, $|F(k)|$, le *spectre en amplitude*, et une phase à valeurs réelles, $\phi(k)$, le *spectre de la phase* :

$$F(k) = |F(k)| e^{i\phi(k)} \quad (11.7b)$$

cette forme peut être très utile [l'équation (11.96)].

Tout comme $F(k)$ est la transformée de $f(x)$, $f(x)$ est elle-même la **transformée de Fourier inverse** de $F(k)$, ce qui s'écrit :

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(x)\}\} \quad (11.8)$$

$f(x)$ et $F(k)$ sont souvent désignées comme étant une *paire de transformées de Fourier*. Il est possible de définir une paire de transformée-inverse sous une forme encore plus symétrique si l'on utilise la fréquence spatiale $\kappa = 1/\lambda = k/2\pi$. Cependant, quelle que soit la manière de l'exprimer, la transformée ne sera pas exactement la même que sa transformée inverse à cause du signe moins dans l'exponentielle. En conséquence (problème 11.10), avec la présente formulation,

$$\mathcal{F}\{F(k)\} = 2\pi f(-x) \quad \text{tandis que} \quad \mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = f(x)$$

Ce point est le plus souvent sans conséquence, surtout pour les fonctions paires puisque $f(x) = f(-x)$. Ainsi des relations de parité peuvent exister entre des fonctions et leur transformée.

Évidemment, si f est une fonction du temps et non de l'espace, il convient simplement de remplacer x par t et k , la fréquence spatiale angulaire, par ω , la pulsation, pour avoir la

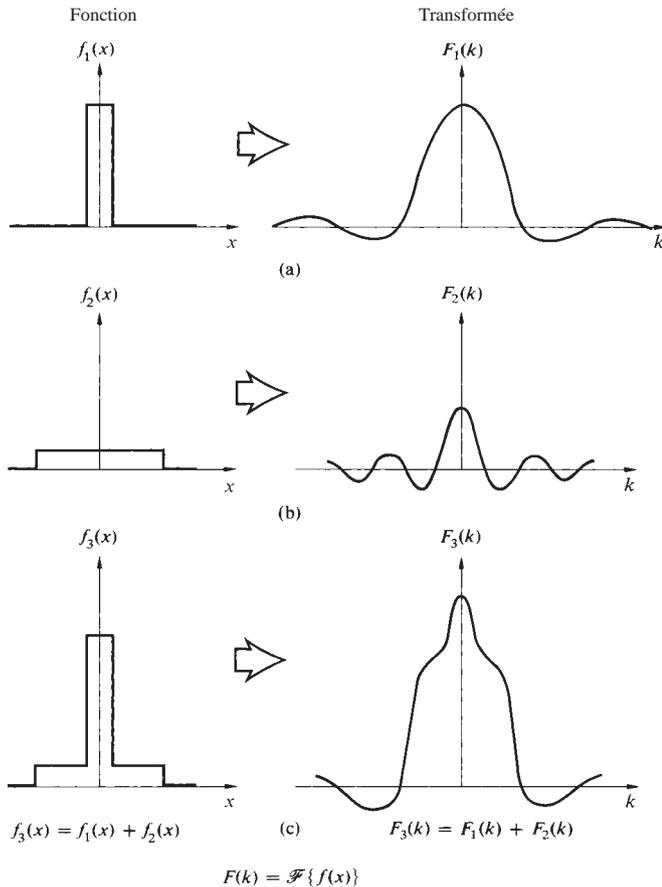


Figure 11.1 Somme de deux fonctions et sa transformée de Fourier.

paire de transformées adéquate dans le domaine temporel, c'est-à-dire,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (11.9)$$

et

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (11.10)$$

Soulignons que, si l'on écrit $f(x)$ comme une somme de fonctions, sa transformée [équation (11.5)] sera la somme des transformées des différentes fonctions individuelles. C'est une astuce souvent utilisée pour calculer la transformée de fonctions compliquées pouvant s'écrire comme la somme de fonctions dont les transformées sont connues. La figure 11.1 en est un exemple explicite.

Transformée de la fonction gaussienne

Prenons la fonction de probabilité gaussienne,

$$f(x) = C e^{-ax^2} \quad (11.11)$$

où $C = \sqrt{a/\pi}$ et a est une constante. Elle est caractérisée par une courbe en cloche (figure 11.2a). Elle est fréquemment rencontrée en optique sous diverses considérations, comme la représentation de photons en paquets d'ondes, la distribution de l'éclairement du mode TEM₀₀ d'un faisceau laser et le traitement statistique de l'émission thermique dans la théorie de la cohérence. Sa transformée de Fourier, $\mathcal{F}\{f(x)\}$, est obtenue par le calcul de :

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} (C e^{-ax^2}) e^{ikx} dx$$

En mettant le terme dans l'exponentielle sous forme canonique, $-ax^2 + ikx$, devient $-(x\sqrt{a} - ik/2\sqrt{a})^2 - k^2/4a$, et en posant $x\sqrt{a} - ik/2\sqrt{a} = \beta$ on obtient :

$$F(k) = \frac{C}{\sqrt{a}} e^{-k^2/4a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2} d\beta$$

Le résultat du calcul de l'intégrale, donné dans toutes les tables, vaut $\sqrt{\pi}$; finalement :

$$F(k) = e^{-k^2/4a} \quad (11.12)$$

qui est aussi une fonction gaussienne (figure 11.2b). L'écart type est défini comme la valeur (de x ou k) pour laquelle la fonction diminue d'un facteur $e^{-1/2} = 0,607$ par rapport à son maximum. L'écart type des deux fonctions est $\sigma_x = 1/\sqrt{2a}$ et $\sigma_k = \sqrt{2a}$, et $\sigma_x \sigma_k = 1$. Lorsque a augmente, $f(x)$ se rétrécit et $F(k)$ s'élargit. En d'autres termes, plus la longueur d'une impulsion est courte, plus la largeur de bande en fréquence spatiale est large.

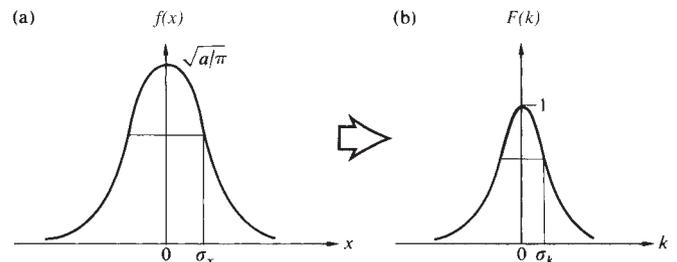


Figure 11.2 Une fonction gaussienne et sa transformée de Fourier.

11.2.2 Transformées à deux-dimensions

On a jusqu'ici limité la discussion à des fonctions à une dimension, mais en général l'optique fait intervenir des signaux à deux dimensions, comme par exemple la répartition du champ dans une ouverture ou celle de l'éclairement dans le plan d'une image. La paire de transformée de Fourier se généralise facilement à deux dimensions comme suit :

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k_x, k_y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (11.13)$$

$$\text{et} \quad F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (11.14)$$

Les quantités k_x et k_y sont les fréquences spatiales angulaires selon les deux axes. Supposons que l'on regarde l'image d'un carrelage composé alternativement de carreaux noirs et blancs, et dont les arêtes sont alignées parallèlement aux axes x et y . Si le carrelage s'étend à l'infini, la distribution mathématique de la lumière réfléchie peut être décrite par une série de Fourier à deux dimensions. Pour chaque carré de longueur ℓ , la période spatiale selon chaque axe vaut 2ℓ , et les fréquences spatiales angulaires fondamentales associées valent π/ℓ . Ces dernières, ainsi que leurs harmoniques, sont nécessaires pour construire une fonction décrivant l'expérience. Si le motif a une extension finie, la fonction n'est plus véritablement périodique et l'intégrale de Fourier remplace la série. En effet, l'équation (11.13) assure que $f(x, y)$ peut être construite à partir de combinaisons de fonctions élémentaires ayant la forme $\exp[-i(k_x x + k_y y)]$, chacune étant pondérée par un facteur complexe $F(k_x, k_y)$ approprié en amplitude et en phase. La transformée dit simplement quelle phase et quelle amplitude il faut attribuer à chaque composante. À trois dimensions, les fonctions élémentaires ont la forme $\exp[-i(k_x x + k_y y + k_z z)]$ ou $\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r})$, qui correspondent à des surfaces planes. De plus, si f était une fonction d'onde, c'est-à-dire une sorte d'onde tridimensionnelle $f(\vec{r}, t)$, ces contributions élémentaires seraient des ondes planes de la forme $\exp[-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)]$. En d'autres termes, une perturbation peut être vue comme une combinaison linéaire d'ondes planes avec différents vecteurs d'onde, se propageant dans différentes directions. De la même manière, les fonctions élémentaires à deux dimensions sont orientées suivant différentes directions. Pour k_x et k_y fixés, la phase des fonctions élémentaires est constante suivant les lignes de niveau :

$$k_x x + k_y y = \text{constante} = A$$

$$\text{ou} \quad y = -\frac{k_x}{k_y} x + \frac{A}{k_y} \quad (11.15)$$

Cette situation est analogue au cas où un ensemble de surfaces planes seraient normales au plan- xy et dont l'intersection avec ce plan se ferait suivant les lignes de niveau définies par l'équation (11.15) pour différentes valeurs de A . Les composantes d'un vecteur, \vec{k}_α , perpendiculaire aux lignes de niveau seraient k_x et k_y . La figure 11.3 montre plusieurs de ces lignes de niveau (pour k_x et k_y fixés), où $A = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \dots$. Celles-ci sont caractérisées par des droites de pente $-k_x/k_y$ ou $-\lambda_y/\lambda_x$ et d'ordonnée à l'origine $A/k_y = A\lambda_y/2\pi$. L'orientation des lignes de phase constante par rapport à l'axe des abscisses est donnée par :

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{k_y}{k_x} = \tan^{-1} \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \quad (11.16)$$

Le pas, ou période spatiale λ_α , mesurée sur \vec{k}_α , s'obtient grâce aux relations dans les triangles semblables du schéma ci-dessous, par $\lambda_\alpha/\lambda_y = \lambda_x/\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}$ et :

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_x^{-2} + \lambda_y^{-2}}} \quad (11.17)$$

La fréquence spatiale angulaire k_α , ou $2\pi/\lambda_\alpha$, vaut :

$$k_\alpha = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (11.18)$$

comme on s'y attendait. Cela signifie que, pour construire une fonction à deux dimensions, il faudra généralement inclure les harmoniques autres que ceux de fréquence spatiale angulaire

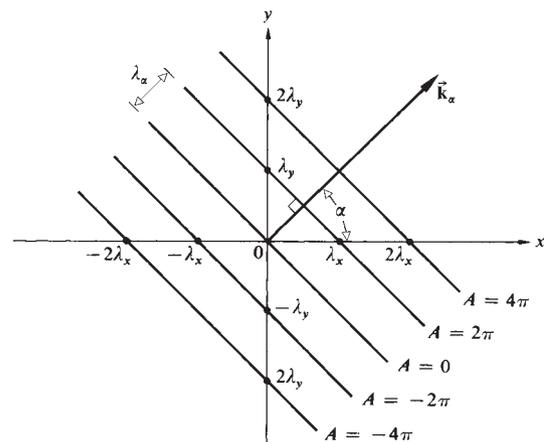


Figure 11.3 Géométrie de l'équation (11.15).

k_x et k_y ; ces derniers étant orientés dans des directions différentes des axes x et y .

Revenons un instant à la figure 10.7 qui montre une onde diffractée par une ouverture. Une des manières d'envisager le front d'onde émergent est de le considérer comme la superposition d'ondes planes se propageant dans une multitude de directions. Ce sont les composantes de la transformée de Fourier qui émergent dans des directions spécifiques dont chacune est définie par une fréquence spatiale. Le terme de fréquence spatiale nulle correspond à l'onde se propageant suivant l'axe, les termes de fréquences spatiales croissantes correspondent à des angles d'émergence croissants. Ces composantes de Fourier façonnent le champ électrique diffracté en sortie de l'ouverture.

La transformée de la fonction cylindre

Soit la fonction cylindre :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \\ 0 & \sqrt{x^2 + y^2} > a \end{cases} \quad (11.19)$$

La figure 11.4a est un exemple important de l'application des méthodes de Fourier à deux dimensions. Les calculs ne sont pas aisés mais sont amplement justifiés par leur importance dans la théorie de la diffraction par des ouvertures circulaires et des lentilles. Des considérations de symétrie circulaire nous invitent à travailler en coordonnées polaires. On pose donc :

$$\begin{aligned} k_x &= k_\alpha \cos \alpha \\ k_y &= k_\alpha \sin \alpha \\ x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (11.20)$$

auquel cas $dx dy = r dr d\theta$. La transformée, $\mathcal{F}\{f(x)\}$, s'écrit alors :

$$F(k_\alpha, \alpha) = \int_{r=0}^a \left[\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{ik_\alpha r \cos(\theta - \alpha)} d\theta \right] r dr \quad (11.21)$$

Attendu que $f(x, y)$ est circulairement symétrique, sa transformée doit l'être aussi. Cela implique que $F(k_\alpha, \alpha)$ est indépendant de α , et que nous pouvons donc fixer α égal à zéro, d'où :

$$F(k_\alpha) = \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} e^{ik_\alpha r \cos \theta} d\theta \right] r dr \quad (11.22)$$

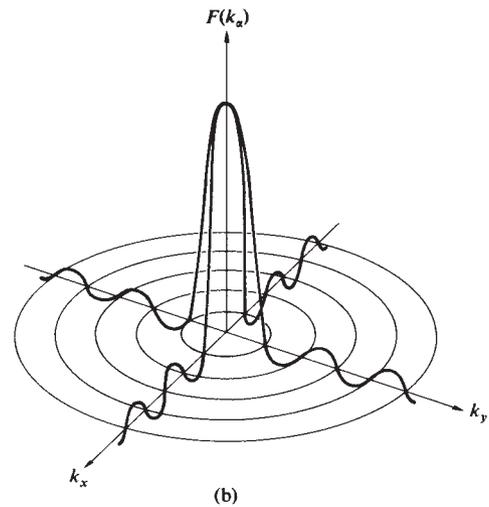
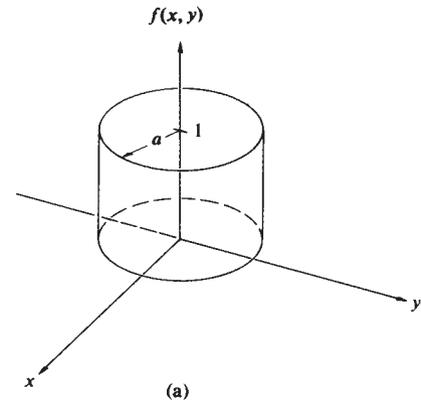


Figure 11.4 La fonction cylindre et sa transformée.

Conformément à l'équation (10.47),

$$F(k_\alpha) = 2\pi \int_0^a J_0(k_\alpha r) r dr \quad (11.23)$$

$J_0(k_\alpha r)$ étant la fonction de Bessel d'ordre zéro. Posons $k_\alpha r = w$, avec $dr = k_\alpha^{-1} dw$, et l'intégrale devient :

$$\frac{1}{k_\alpha^2} \int_{w=0}^{k_\alpha a} J_0(w) w dw \quad (11.24)$$

De par l'équation (10.50), la transformée prend la forme d'une fonction de Bessel du premier ordre (figure 10.22),

$$F(k_\alpha) = \frac{2\pi}{k_\alpha^2} k_\alpha a J_1(k_\alpha a)$$

ou

$$F(k_\alpha) = 2\pi a^2 \left[\frac{J_1(k_\alpha a)}{k_\alpha a} \right] \quad (11.25)$$

La similitude entre cette expression (figure 11.4b) et celle du champ électrique dans la figure de diffraction de Fraunhofer d'une ouverture circulaire [équation (10.51)] n'est évidemment pas accidentelle.

Lentille et transformée de Fourier

La figure 11.5 montre un diaphragme situé dans le plan focal objet d'une lentille convergente éclairée par un faisceau collimaté. Ce diaphragme diffracte des ondes planes collectées par la lentille qui fait converger les faisceaux de rayons parallèles dans son plan focal image. Si l'on place un écran dans ce plan, Σ_r , appelé plan de la transformée, on verra la figure de diffraction en champ lointain du diaphragme (voir la configuration de la figure 10.7e.). En d'autres termes, la lentille transforme la distribution du champ dans le diaphragme en la **fonction d'ouverture**, en sa figure de diffraction en champ lointain. Bien que cette assertion soit suffisamment exacte pour beaucoup d'applications, elle ne l'est pas rigoureusement. En effet, la lentille ne forme pas l'image exactement dans un plan.

Il est remarquable de noter que la figure de diffraction de Fraunhofer du champ correspond exactement à la transformée de Fourier de la fonction d'ouverture, résultat que l'on retrouvera dans le paragraphe 11.3.3. Ici l'objet se trouve dans le plan focal objet, et les différentes ondes diffractées maintiennent

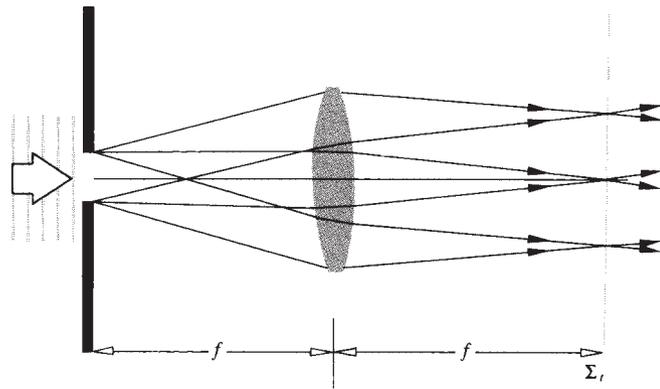


Figure 11.5 La lumière diffractée par une ouverture située dans le plan focal objet d'une lentille converge pour former la figure de diffraction en champ lointain dans le plan focal image de la lentille.

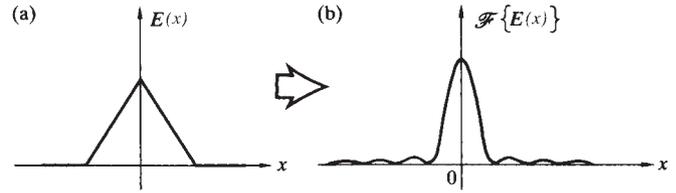


Figure 11.6 La transformée de la fonction triangle est la fonction sinc².

leur relation de phase, à chemin optique constant jusqu'au plan focal image. Dans d'autres configurations (objet en dehors du plan focal objet), la phase variera. Cela ne prête pas à conséquence dès lors que l'on s'intéresse à l'éclairage, ce qui est généralement le cas, car l'information sur la phase s'annule, ce qui rend inobservables ses variations.

Donc, si le diaphragme a une ouverture circulaire, le champ diffracté (la transformée de Fourier de l'ouverture) sera distribué dans l'espace selon une fonction de Bessel comme dans la figure 11.4b. De la même manière, si la transmission du diaphragme varie seulement suivant un axe, de façon à ce que son profil soit triangulaire (figure 11.6a), alors la figure de diffraction du champ correspondra à la figure 11.6b. La transformée de Fourier de la fonction triangle est la fonction sinc-carré.

11.2.3 La fonction delta de Dirac

De nombreux phénomènes physiques ont lieu sur des instants très courts et avec une grande intensité. La question se pose alors de connaître la réponse d'un système donné à de tels stimuli. Par exemple, quelle est la réponse d'un appareil mécanique, comme une boule de billard, s'il est violemment heurté par un marteau ? Ou comment réagit un circuit si le signal à l'entrée est une impulsion électrique ? De façon similaire, les stimuli peuvent être de courtes impulsions dans le domaine spatial aussi bien que dans le domaine temporel. On représente mathématiquement ces stimuli par la **fonction delta de Dirac** $\delta(x)$. C'est une fonction qui vaut zéro partout sauf à l'origine où elle s'étend jusqu'à l'infini de sorte qu'elle couvre une *unité d'aire*, c'est-à-dire :

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \quad (11.26)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (11.27)$$

Ce n'est pas vraiment une fonction mathématique au sens traditionnel du terme. De par sa nature singulière, elle a été au centre de nombreuses controverses longtemps après que Dirac l'ait introduite en 1930. Sa très grande utilité n'a pas échappé au sens pratique des physiciens, ce qui lui a conféré le statut d'outil incontournable malgré un manque de rigueur apparent pour justifier son existence. Il a fallu attendre près de 20 ans et les travaux de Laurent Schwartz pour la faire rentrer dans un cadre théorique mathématique précis.

L'opération la plus élémentaire sur $\delta(x)$ est l'évaluation de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x) dx$$

$f(x)$ pouvant être n'importe quelle fonction continue. Prenons l'intervalle sur x allant de $-\gamma$ à $+\gamma$, avec γ petit, centré autour de l'origine, $f(x) \approx f(0) \approx$ constante, puisque la fonction est continue en $x = 0$. De $x = -\infty$ à $x = -\gamma$ et de $x = +\gamma$ à $x = +\infty$, l'intégrale vaut zéro, simplement parce que la fonction- δ y est nulle. L'intégrale vaut donc :

$$f(0) \int_{-\gamma}^{+\gamma} \delta(x) dx$$

Comme $\delta(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$, on peut prendre γ infiniment petit, c'est-à-dire, $\gamma \rightarrow 0$, et avoir encore :

$$\int_{-\gamma}^{+\gamma} \delta(x) dx = 1$$

d'après l'équation (11.27). On en déduit le résultat exact :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x) dx = f(0) \quad (11.28)$$

La fonction delta a pour effet d'extraire la valeur de $f(x)$ en $x = 0$ parmi toutes ses valeurs possibles, ce qui lui confère une propriété d'échantillonnage. De manière analogue mais avec un décalage x_0 , on a :

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ 1 & x = x_0 \end{cases} \quad (11.29)$$

Le pic se trouve en $x = x_0$ au lieu de $x = 0$, comme le montre la figure 11.7. En posant $x - x_0 = x'$, et $f(x' + x_0) = g(x')$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x')g(x') dx' = g(0)$$

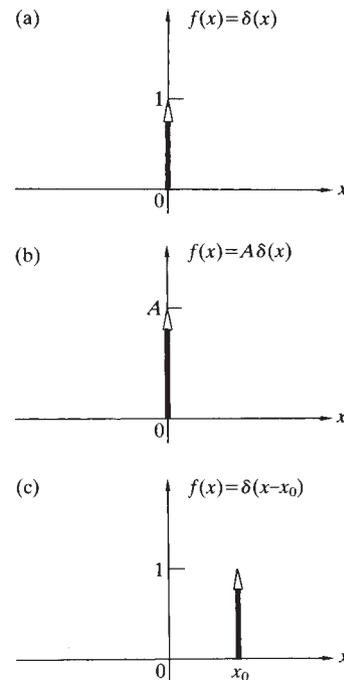


Figure 11.7 La longueur de la flèche représentant la fonction delta est l'aire sous la fonction.

comme $g(0) = f(x_0)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)f(x) dx = f(x_0) \quad (11.30)$$

Plutôt que de nous se soucier de la définition précise de la fonction $\delta(x)$ pour toute valeur de x , intéressons-nous à l'effet de $\delta(x)$ sur d'autres fonctions. L'équation (11.28) traduit l'opération qui, à une fonction $f(x)$, associe la valeur $f(0)$. Une telle opération est appelée une *fonctionnelle*.

Il est possible de construire une séquence d'impulsions, chacune ayant une épaisseur décroissante et une hauteur croissante, de sorte qu'elles aient toutes une aire identique, une unité d'aire par exemple. Une suite d'impulsions rectangulaires de hauteur a/L et de largeur L/a avec $a = 1, 2, 3$, répond à ces critères ; comme la séquence de gaussiennes [équation (11.11)],

$$\delta_a(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-ax^2} \quad (11.31)$$

de la figure 11.8, ou la série de fonctions sinc

$$\delta_a(x) = \frac{a}{\pi} \text{sinc}(ax) \quad (11.32)$$

De telles fonctions ont plus ou moins la propriété d'échantillonnage, c'est-à-dire qu'elles vérifient :

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x) f(x) dx = f(0) \quad (11.33)$$

Elles sont appelées *suites de delta*. Il est souvent commode, mais pas rigoureusement correct, de définir $\delta(x)$ comme la limite de ces suites lorsque $a \rightarrow \infty$. Ces concepts s'étendent à deux dimensions comme suit :

$$\delta(x, y) = \begin{cases} x = y = 0 \\ 0 \text{ autrement} \end{cases} \quad (11.34)$$

et

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, y) dx dy = 1 \quad (11.35)$$

et l'équation (11.28) devient :

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) dx dy = f(x_0, y_0) \quad (11.36)$$

Une autre représentation de la fonction- δ est donnée à partir de l'intégrale de Fourier [équation (11.3)], qui peut être reformulée de la façon suivante :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-x')} dk \right] f(x') dx'$$

d'où :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x') f(x') dx' \quad (11.37)$$

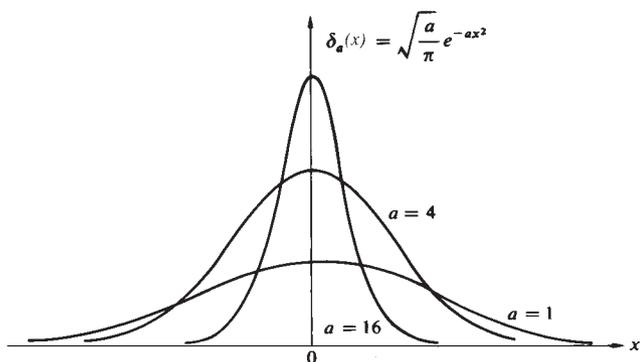


Figure 11.8 Un ensemble de gaussiennes.

puisque :

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-x')} dk \quad (11.38)$$

L'équation (11.37) est identique à l'équation (11.30) car, par définition à partir de l'équation (11.29), $\delta(x - x') = \delta(x' - x)$. L'intégrale de l'équation (11.38) vaut zéro partout, sauf en $x = x'$. Évidemment, avec $x' = 0$, $\delta(x) = \delta(-x)$ et :

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk \quad (11.39)$$

Ce résultat signifie qu'en reprenant l'équation (11.4), la fonction delta peut être vue comme la transformée de Fourier inverse de l'unité, c'est-à-dire que $\delta(x) = \mathcal{F}^{-1}\{1\}$ et $\mathcal{F}\{\delta(x)\} = 1$. Si l'on considère une impulsion rectangulaire de plus en plus fine et haute, on voit que sa transformée s'élargit jusqu'à devenir infinie en extension, c'est-à-dire une constante au fur et à mesure que la largeur de l'impulsion tend vers 0.

Déplacements et déphasages

Si le pic de Dirac est décalé de sa position d'origine $x = 0$ à $x = x_0$, sa transformée subit un déphasage tout en conservant la même amplitude (égale à 1). Pour s'en rendre compte, il faut calculer :

$$\mathcal{F}\{\delta(x - x_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) e^{ikx} dx$$

Grâce à l'équation (11.30), l'expression devient :

$$\mathcal{F}\{\delta(x - x_0)\} = e^{ikx_0} \quad (11.40)$$

Il en ressort que seule la phase est affectée, l'amplitude restant égale à celle qu'elle avait en $x_0 = 0$. On peut repenser ce processus de manière plus intuitive dans le domaine temporel en imaginant une impulsion infiniment étroite à $t = 0$. En $t = 0$, sont donc générées une infinité de composantes avec des fréquences différentes mais toutes en phase à l'instant initial. Supposons maintenant que l'impulsion soit générée à $t = t_0$. Toutes ses harmoniques sont donc en phase. Par extrapolation sur le passé, la phase des harmoniques à $t = 0$ doit être différente selon leur fréquence. En effet, puisque la sommation des composantes s'annule partout sauf en t_0 , il est raisonnable de penser que le changement de phase dépend de la fréquence. Dans le domaine spatial, ce changement de phase (fonction de la fréquence spatiale angulaire k) est évident d'après l'équation (11.40).

Pour conclure, **la transformée de Fourier d'une fonction qui est décalée dans l'espace (ou dans le temps) est la transformée de la fonction d'origine multipliée par un terme exponentiel linéaire en phase** (problème 11.14). Cette propriété sera particulièrement utile lorsqu'on considérera l'image de plusieurs points sources identiques. Les figures 11.9 et 7.29 illustrent cette propriété. Déplacer une onde rectangulaire de $\pi/4$ revient à déplacer le fondamental de $\frac{1}{8}$ de longueur d'onde (par exemple 1,0 mm). De la même manière, chaque harmonique doit subir un déphasage qui lui est spécifique, résultant en un déplacement de même longueur (i.e. 1,0 mm). Dans notre cas, chaque harmonique est déphasée de $m\pi/4$.

Sinus et cosinus

On a déjà vu (figure 11.1) que toute fonction pouvait s'exprimer comme une somme de fonctions individuelles ; sa transformée est alors la somme des transformées des fonctions individuelles. Soit la fonction définie comme un ensemble de pics de Dirac équidistants :

$$f(x) = \sum_j \delta(x - x_j) \quad (11.41)$$

Cette fonction est appelée *comb(x)* (ou fonction *peigne*) lorsque le nombre de pics de Dirac est infini. Conformément à l'équation (11.40) :

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \sum_j e^{ikx_j} \quad (11.42)$$

En particulier, pour deux fonctions- δ , une en $x_0 = d/2$ et l'autre en $x_0 = -d/2$,

$$f(x) = \delta[x - (+d/2)] + \delta[x - (-d/2)]$$

et :

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = e^{ikd/2} + e^{-ikd/2}$$

ou plus simplement :

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = 2 \cos(kd/2) \quad (11.43)$$

comme le montre la figure 11.10. La transformée de la somme de deux fonctions- δ symétriques est une fonction cosinus et vice versa. La fonction f est paire et réelle, tout comme sa transformée $F(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}$. Changeons la phase d'une des fonctions- δ comme dans la figure 11.11, de sorte que la fonction f soit impaire,

$$f(x) = \delta[x - (+d/2)] - \delta[x - (-d/2)]$$

et :

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = e^{ikd/2} - e^{-ikd/2} = 2i \sin(kd/2) \quad (11.44)$$

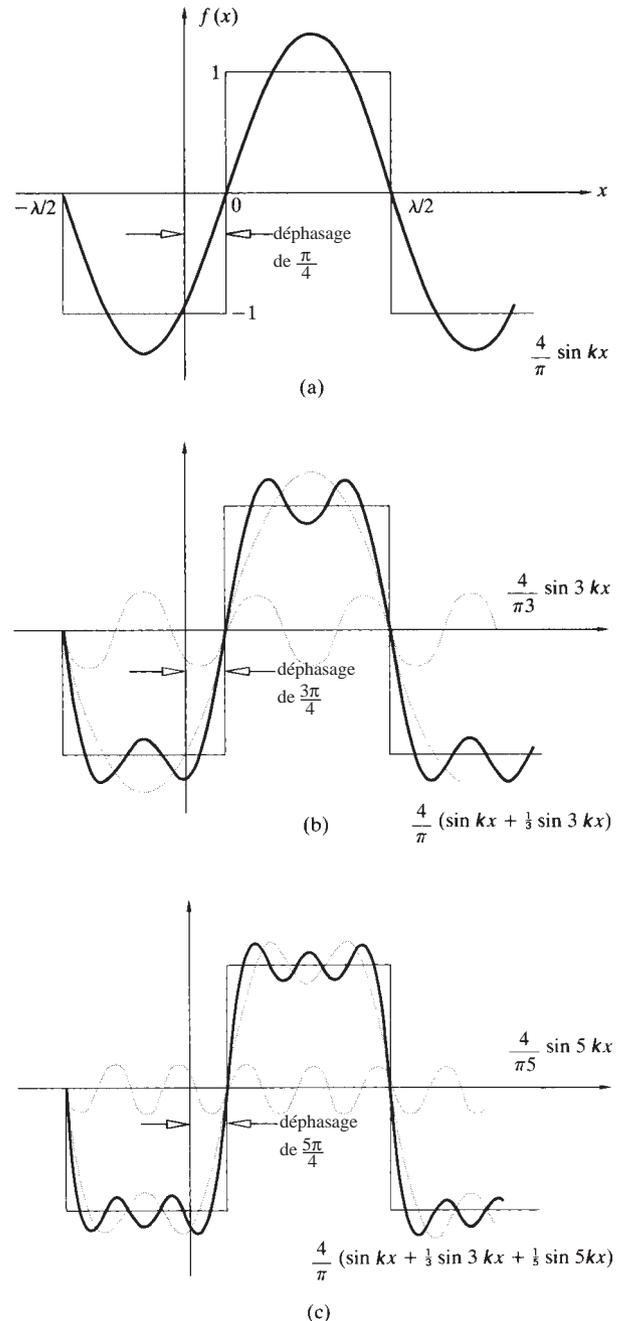


Figure 11.9 Illustration de la correspondance entre le déplacement d'une onde rectangulaire et le changement de phase subi par chacune de ses composantes.

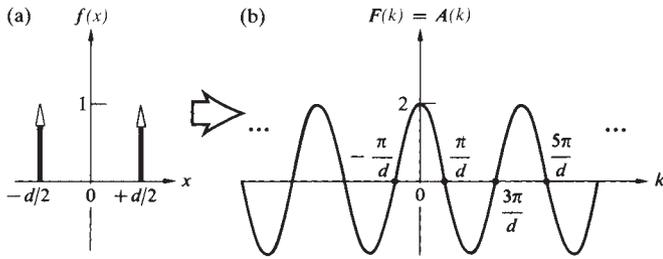


Figure 11.10 Deux fonctions delta et leur transformée en fonction-cosinus.

La partie réelle de la transformée en sinus [équation (11.7)] est alors :

$$B(k) = 2 \sin(kd/2) \quad (11.45)$$

qui est aussi une fonction impaire.

Ce dernier résultat soulève un point intéressant. On se souvient qu'il est possible de considérer une transformée complexe, soit comme la somme de sa partie réelle et de sa partie imaginaire [équation (11.7a)], soit comme le produit d'une amplitude par un terme contenant la phase [équation (11.7b)]. Or cosinus et sinus sont deux fonctions particulières ; la première est associée à une contribution purement réelle alors que la seconde est associée à une contribution purement imaginaire. La plupart des fonctions, même les fonctions harmoniques, sont un mélange d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. Par exemple, dans le cas d'un cosinus qui a été légèrement translaté, la nouvelle fonction obtenue, qui n'est ni paire ni impaire, possède une partie réelle et une partie imaginaire. De plus, elle peut aussi être décrite par le spectre en amplitude d'une cosinusoïde déphasée de façon appropriée (figure 11.12). Notons que lorsque la fonction cosinus est décalée de $\frac{1}{4}\lambda$ et transformée en fonction sinus, la différence de phase relative entre les deux composantes delta vaut π rad.

La figure 11.13 montre quelques fonctions et leur transformée. Les fonctions et les transformées associées de (a) et (b) se combinent pour créer la fonction de (d) et sa transformée. De manière générale, chacun des deux pics de Dirac du spectre d'une fonction harmonique est situé à une fréquence égale à celle du fondamental de la fonction f . Toute fonction périodique pouvant être décrite par une série de Fourier, on peut représenter par un spectre constitué d'un ensemble de paires de fonctions delta correctement pondérées, dont les fréquences sont celles de l'harmonique correspondant. *Le spectre de fréquences d'une fonction périodique est discret.* Il est

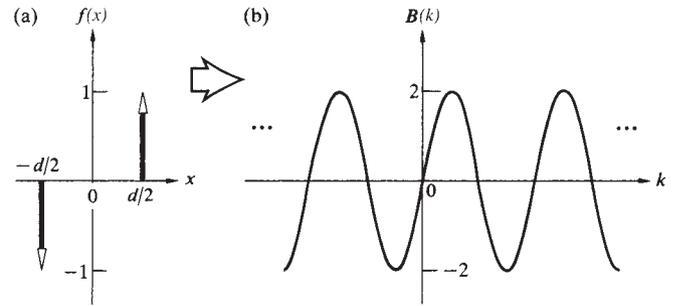


Figure 11.11 Deux fonctions delta et leur transformée en fonction-sinus.

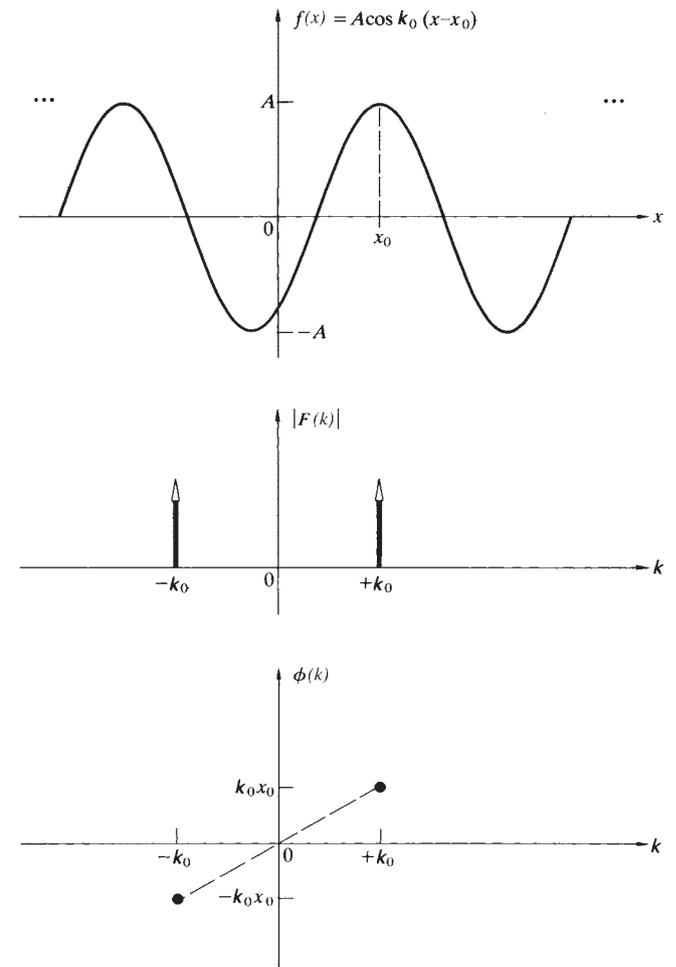


Figure 11.12 Spectre d'une fonction cosinus translatée.

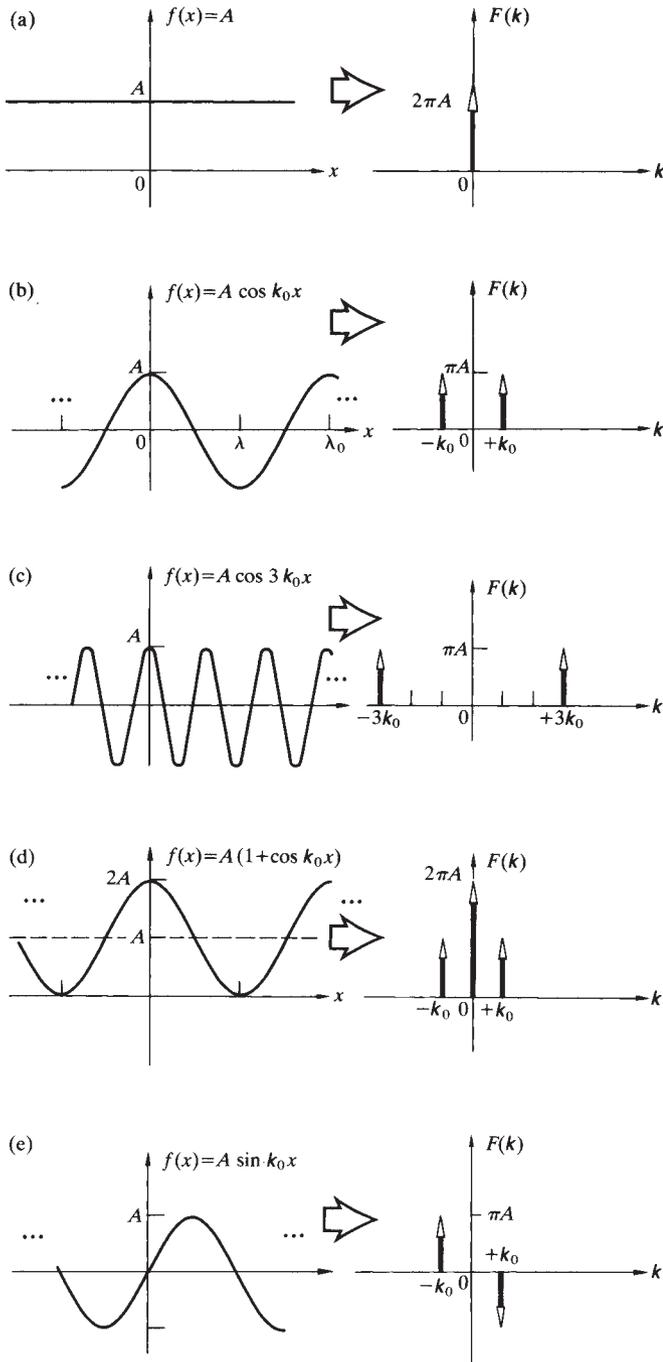


Figure 11.13 Quelques fonctions et leur transformée.

remarquable de noter que la transformée de la fonction périodique $comb(x)$ est aussi une fonction peigne, comme le montre la figure 11.14.

11.3 Applications optiques

11.3.1 Systèmes linéaires

Les techniques de Fourier fournissent un cadre de travail élégant pour décrire la formation des images. Elles sont donc largement employées, même si bien sûr quelques précisions sont nécessaires pour régler les problèmes mathématiques qu'elles imposent.

Précisons tout d'abord un concept essentiel à notre analyse, celui de **système linéaire** que l'on définit à l'aide de relations entrée-sortie. Prenons un signal $f(y, z)$ en entrée d'un système optique et soit $g(Y, Z)$ le signal de sortie. Ce système est linéaire si :

1. la sortie vaut $ag(Y, Z)$ lorsque l'entrée $f(y, z)$ est multipliée par une constante a ;
2. la sortie $ag_1(Y, Z) + bg_2(Y, Z)$ est pondérée comme l'entrée $af_1(y, z) + bf_2(y, z)$, où $f_1(y, z)$ et $f_2(y, z)$ produisent $g_1(Y, Z)$ et $g_2(Y, Z)$ respectivement.

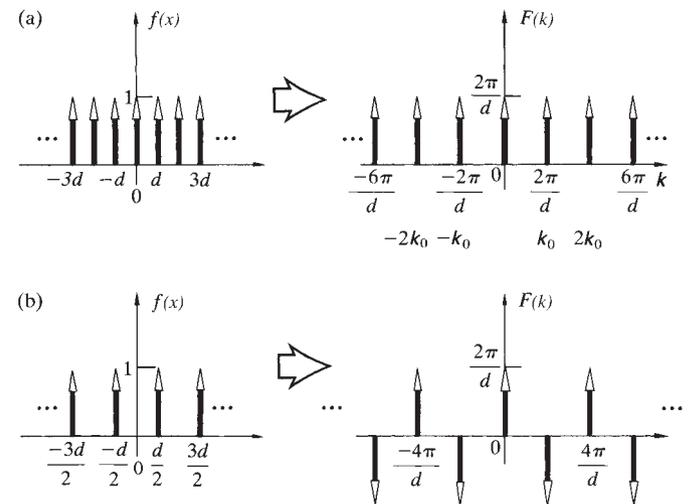


Figure 11.14 (a) La fonction peigne et sa transformée. (b) Une fonction peigne déphasée et sa transformée.

De plus, un système est *invariant dans l'espace* s'il est *stationnaire*, c'est-à-dire si le signal de sortie change de position sans changer de forme lorsque l'entrée se déplace.

L'idée sous-jacente est qu'on peut considérer la sortie d'un système optique comme la superposition linéaire de toutes les sorties produites par chacun des points individuels de l'objet. Représentons symboliquement l'opération du système linéaire par $\mathcal{L}\{\}$, alors entrée et sortie sont reliées par :

$$g(Y, Z) = \mathcal{L}\{f(y, z)\} \quad (11.46)$$

Grâce à la propriété de la fonction delta [équation (11.36)], cette relation devient :

$$g(Y, Z) = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y', z') \delta(y' - y) \delta(z' - z) dy' dz'\right\}$$

L'intégrale exprime $f(y, z)$ comme une combinaison linéaire de fonctions delta, chacune ayant un poids $f(y', z')$. Grâce aux propriétés de linéarité évoquées plus haut, on peut appliquer indifféremment l'opérateur du système aux fonctions individuelles ; d'où

$$g(Y, Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y', z') \mathcal{L}\{\delta(y' - y) \delta(z' - z)\} dy' dz' \quad (11.47)$$

Le terme $\mathcal{L}\{\delta(y' - y) \delta(z' - z)\}$ est la réponse du système [équation (11.46)] à une fonction delta située au point de coordonnées (y', z') dans l'espace objet : c'est la **réponse impulsionnelle** du système. La sortie se déduit directement de l'entrée par l'équation (11.47) si la réponse impulsionnelle du système est connue. Si les sources élémentaires sont cohérentes alors les signaux entrée/sortie sont des champs électriques. Dans le cas contraire, ce sont des éclaircements.

Considérons la source incohérente de la figure 11.15. On peut imaginer que chaque point du plan objet, Σ_0 , émet de la lumière qui sera traitée par le système optique pour former une tache dans le plan focal ou dans le plan image, Σ_i . De plus, supposons que le grandissement *entre les plans objet/image* vaille 1. L'image apparaît alors grandeur nature et droite, ce qui va simplifier l'analyse. Si le grandissement (M_T) est supérieur à 1, les détails dans l'image seront plus grands que dans l'objet mais en contrepartie les fréquences spatiales seront plus faibles que celles de l'objet. Par exemple, l'image d'un réseau sinusoïdal en amplitude est un réseau de pas supérieur, donc de fréquence spatiale plus

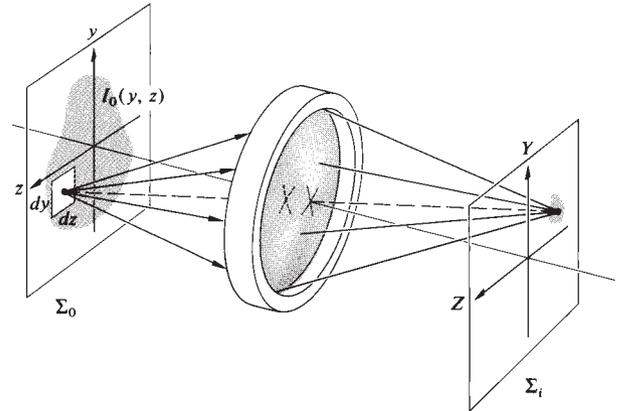


Figure 11.15 Formation d'une image par une lentille.

faible. Par ailleurs, l'éclairement de l'image est réduit d'un facteur M_T^2 , conséquemment à l'augmentation de son aire d'un même facteur.

Soit $I_0(y, z)$, la distribution de luminance dans le plan objet. Un élément $dy dz$ situé en (y, z) émet alors un flux proportionnel à $I_0(y, z) dy dz$. Au lieu d'être focalisée en un point dans le plan image, la lumière s'étale sur une tache d'aire finie, principalement à cause de la diffraction et de la présence d'aberrations. Ce flux est décrit mathématiquement par la fonction $\mathcal{S}(y, z; Y, Z)$, de sorte que l'éclairement provenant de $dy dz$ dans le plan image est :

$$dI_i(Y, Z) = \mathcal{S}(y, z; Y, Z) I_0(y, z) dy dz \quad (11.48)$$

$\mathcal{S}(y, z; Y, Z)$ est appelée **réponse impulsionnelle spatiale (RIS)**. En d'autres termes, lorsque l'intensité $I_0(y, z)$ d'un élément de la source $dy dz$ vaut 1 W/m^2 , $\mathcal{S}(y, z; Y, Z) dy dz$ est le profil résultant de la distribution d'éclairement dans le plan image. Comme la source est incohérente, les contributions de chaque élément à cet éclairement sont additives, d'où :

$$I_i(Y, Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_0(y, z) \mathcal{S}(y, z; Y, Z) dy dz \quad (11.49)$$

Pour un système optique « parfait », c'est-à-dire limité par la diffraction, $\mathcal{S}(y, z; Y, Z)$ correspond à la figure de diffraction d'un point source en (y, z) . Évidemment, si le signal à l'entrée est une impulsion- δ centrée en (y_0, z_0) , alors $I_0(y, z) =$

$A\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$. Par commodité, on prendra 1 pour valeur de A . Donc

$$I_i(Y, Z) = A \iint_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \mathcal{S}(y, z; Y, Z) dy dz$$

et,

$$I_i(Y, Z) = A\mathcal{S}(y_0, z_0; Y, Z)$$

Pour un système optique correctement corrigé, et à une constante près, \mathcal{S} est la fonction d'éclairement d'Airy [équation (10.56)] centrée sur le point image dans l'approximation paraxiale (figure 11.16).

Si le système est invariant dans l'espace, le déplacement d'un point source dans le plan objet ne résulte qu'en un déplacement de l'image. Il est équivalent de dire que la RIS est la même pour tout point (y, z) . En pratique, il se peut qu'elle varie mais alors on divise le plan image en de petites régions dans lesquelles \mathcal{S} ne varie pas significativement. Si l'objet et l'image sont assez petits, le système peut être considéré comme invariant dans l'espace. On décrit alors l'image comme un ensemble de réponses impulsionnelles situées chacune en un point de l'image de Gauss, pondérée par un facteur $I_0(y, z)$, mais ayant toute la même forme, indépendante de (y, z) .

Si la source est cohérente, on doit considérer la réponse en amplitude du système à une impulsion- δ . L'image est alors décrite par la réponse impulsionnelle en amplitude du système. Pour une ouverture circulaire limitée par la diffraction, la réponse impulsionnelle en amplitude ressemble à la figure 10.23b. Finalement, le problème revient à décrire les interférences dans le plan image qui sont dues à l'interaction des champs cohérents. À l'opposé, le processus résultant de points objets incohérents est le simple recouvrement additif des éclairissements dans le plan image, comme dans l'exemple à une dimension de la figure 11.17. Chaque point source est une impulsion- δ convenablement pondérée, imagée en une tache par la réponse impulsionnelle. Le recouvrement de chaque contribution participe à l'éclairement de l'image.

Quel genre de dépendance aura $\mathcal{S}(y, z; Y, Z)$ sur les variables d'espace dans les plans objet/image ? La RIS ne peut dépendre que de (y, z) tant que la position de son centre est concernée. La valeur de $\mathcal{S}(y, z; Y, Z)$ dans Σ_i dépend simplement de cette position par rapport à l'image gaussienne du point image ($Y = y, Z = z$) sur laquelle \mathcal{S} est centrée (figure 11.18). En d'autres termes,

$$\mathcal{S}(y, z; Y, Z) = \mathcal{S}(Y - y, Z - z) \quad (11.50)$$

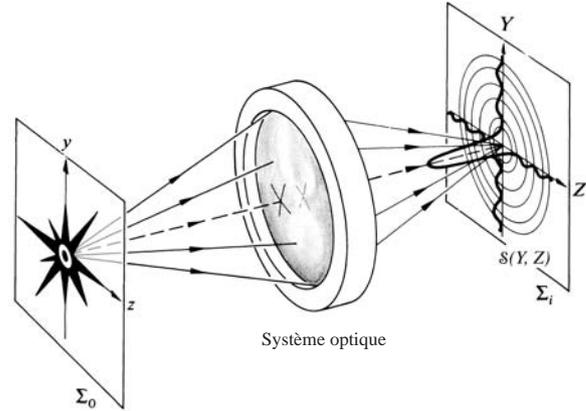


Figure 11.16 Réponse impulsionnelle spatiale : éclairement produit par un système optique avec un point source.

Quand le point objet est sur l'axe ($y = 0, z = 0$), l'image gaussienne l'est aussi, et la réponse impulsionnelle est $\mathcal{S}(Y, Z)$, comme dans la figure 11.16. Sous condition d'invariance et d'éclairage incohérent,

$$I_i(Y, Z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} I_0(y, z) \mathcal{S}(Y - y, Z - z) dy dz \quad (11.51)$$

11.3.2 Produit de convolution

La figure 11.17 représente un objet à une dimension par la distribution en fonctions- δ des points qui le constituent. On obtient son image en distribuant la réponse impulsionnelle du système optique, correctement pondérée sur chacun des points image dans Σ_i , et en sommant toutes les contributions en chaque point de Y . Cette redistribution d'une fonction pondérée par une autre en chaque point de cette dernière est appelé **convolution**. On dit qu'une fonction $I_0(y)$ est convoluée à une autre fonction, $\mathcal{S}(y, Y)$, et vice versa.

L'équation (11.51) traduit la convolution à deux dimensions. À une dimension, la convolution de deux fonctions $f(x)$ et $h(x)$ se formule comme suit :

$$g(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(X - x) dx \quad (11.52)$$

Dans la figure 11.17, une des deux fonctions est un agrégat d'impulsions- δ , ce qui rend plus accessible la compréhension

de l'opération de convolution. Ainsi, on peut aborder n'importe quelle fonction comme un paquet très dense d'impulsions δ . Regardons maintenant de plus près comment l'intégrale de l'équation (11.52) réalise mathématiquement une convolution. Les principales caractéristiques de ce procédé sont illustrées par la figure 11.19. Le signal $g(X_1)$ obtenu en un point X_1 de l'espace de sortie résulte de la superposition linéaire de toutes les contributions individuelles présentes en X_1 . En d'autres termes, chaque élément dx de la source émet un signal avec une intensité $f(x) dx$, qui est ensuite étalé par le

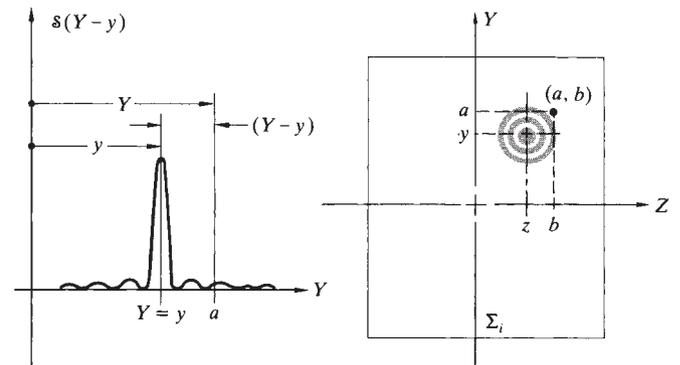


Figure 11.18 La réponse impulsionnelle spatiale.

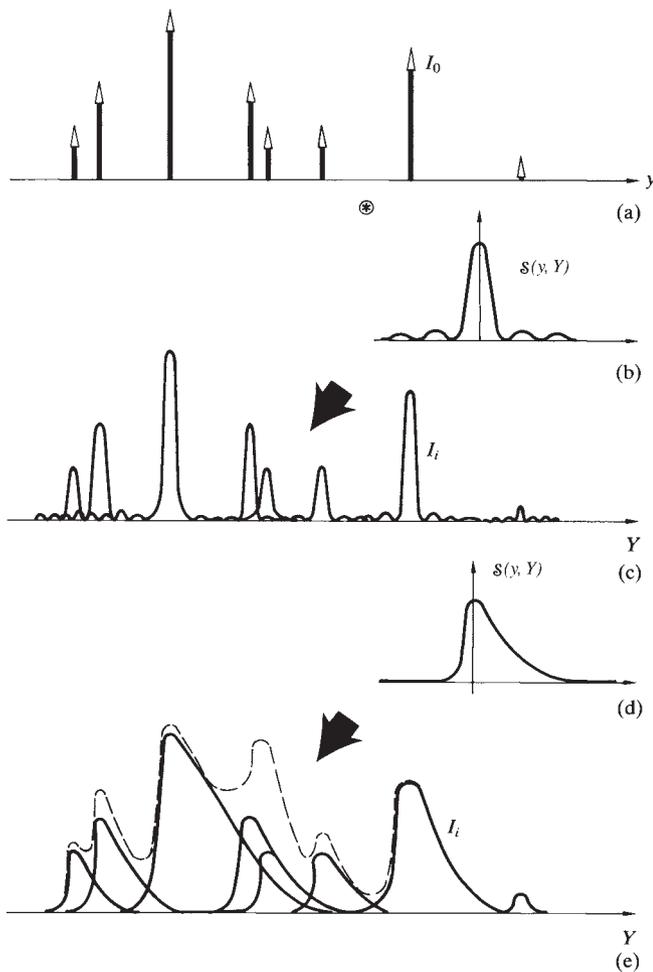


Figure 11.17 Ici (a) est convoluée à (b) ce qui donne (c) puis à (d) ce qui donne (e). La résultante est la somme des différentes contributions comme le montre la courbe en trait pointillé dans (e).

système dans une région centrée autour de l'image gaussienne ($X = x$). La contribution en X_1 vaut alors $dg(X_1) = f(x)h(X_1 - x) dx$. L'intégrale somme l'ensemble des contributions de chaque élément de la source. On peut remarquer que la contribution des éléments les plus éloignés est moindre car la RIS diminue généralement fortement sur ses bords. On peut imaginer que $f(x)$ est une distribution d'éclairage unidimensionnelle comme un ensemble de bandes verticales (figure 11.20). Si la **réponse impulsionnelle unidimensionnelle** $h(X - x)$ est celle de la figure 11.20d, l'image résultante sera une version floue du signal d'entrée (figure 11.20e).

Regardons maintenant la convolution d'un point de vue plus mathématique, mais comme cette opération est assez subtile, on va suivre deux pistes pour l'appréhender et l'on montrera qu'elles sont équivalentes.

Supposons que $h(x)$ soit la fonction asymétrique de la figure 11.21a. Soit $h(-x)$ (figure 11.21b), et $h(X - x)$ (figure 11.21c) les fonctions nécessaires au calcul de la convolution. La convolution de $f(x)$ [dessinée en (d)] avec $h(x)$ est $g(X)$, conformément à l'équation (11.52). Ce qu'on écrit fréquemment comme $f(x) \otimes h(x)$. L'intégrale signifie que $g(X)$ est l'aire sous la courbe produit $f(x)h(X - x)$ pour tout x . Bien sûr, le produit est non nul sur le segment de longueur d où $h(X - x)$ est non nul, c'est-à-dire où les deux courbes se recouvrent (figure 11.21e). Pour X_1 donné dans l'espace de sortie, l'aire sous la courbe d'équation $f(x)h(X_1 - x)$ vaut $g(X_1)$. C'est une interprétation directe de l'intégration que l'on peut physiquement réassocier à des contributions de points de recouvrement, comme dans la figure 11.19. On a déjà dit que chaque élément de la source était imagé en une tache étalée ayant les caractéristiques de la réponse impulsionnelle. Revenons à l'approche

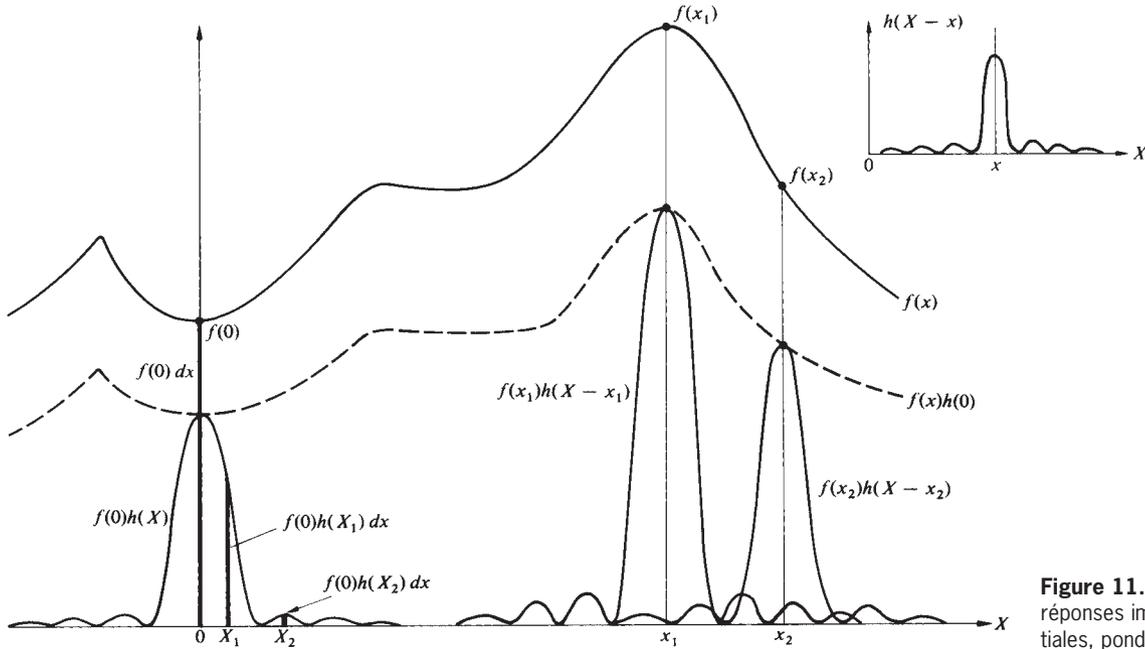


Figure 11.19 Recouvrement de réponses impulsionnelles spatiales, pondérées.

directe et réfléchissons à la manière de programmer le calcul de l'aire de la figure 11.21e en X , soit $g(X_1)$. Un élément différentiel centré en n'importe quel point de la région de recouvrement x_1 (figure 11.22a), contribue à hauteur de $f(x_1)h(X_1 - x_1) dx$. Ce même élément différentiel aura une contribution identique à celle du recouvrement par la réponse impulsionnelle. Pour le voir, examinons (b) et (c) de la figure 11.22, qui sont maintenant dessinés dans l'espace de sortie. Ce dernier montre la réponse impulsionnelle « centrée » en $X = x_1$. Un élément de source dx situé dans le plan objet en x_1 génère un signal proportionnel à $f(x_1)h(X - x_1)$, comme dans (d) où $f(x_1)$ est simplement un nombre. La partie du signal en X_1 vaut $f(x_1)h(X_1 - x_1) dx$, contribution identique à celle de (a) en x_1 . De la même manière, chaque élément différentiel pour $x = x'$ dans la figure 11.22a a une contrepartie comme dans (d) mais « centrée » sur un nouveau point ($X = x'$). Les points au-delà de $x = x_2$ n'apportent pas de contribution car ils ne sont plus dans la région de recouvrement de (a).

Convolver deux fonctions simples, comme deux impulsions rectangulaires par exemple, peut être très aisé. Les figures 11.23 et 11.24 illustrent les deux points évoqués plus haut. Dans la figure 11.23, chaque impulsion constituant $f(x)$ s'élargit sous la forme d'une impulsion rectangulaire puis elle

est sommée. Dans la figure 11.24, la surface de recouvrement, h étant variable, est tracée en fonction de X . Dans les deux cas, le résultat est une impulsion triangulaire. Incidemment, et en prenant garde aux limites, $(f \otimes h) = (h \otimes f)$ par le changement de variable $x' = X - x$ dans l'équation (11.52) (voir l'exercice 11.15).

La figure 11.25 illustre la convolution de deux fonctions $I_0(y, z)$ et $\mathcal{S}(y, z)$ à deux dimensions, conformément à l'équation (11.51). Ici, le volume sous le produit des deux fonctions $I_0(y, z) \mathcal{S}(Y - y, Z - z)$, c'est-à-dire celui de la région de recouvrement vaut $I_i(Y, Z)$ en (Y, Z) ; voir l'exercice 11.16.

Le Théorème de convolution

Soit deux fonctions $f(x)$ et $h(x)$ et leur transformée de Fourier respective $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(k)$ et $\mathcal{F}\{h(x)\} = H(k)$. Le **théorème de convolution** postule que si $g = f \otimes h$,

$$\mathcal{F}\{g\} = \mathcal{F}\{f \otimes h\} = \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{h\} \quad (11.53)$$

ou

$$G(k) = F(k)H(k) \quad (11.54)$$

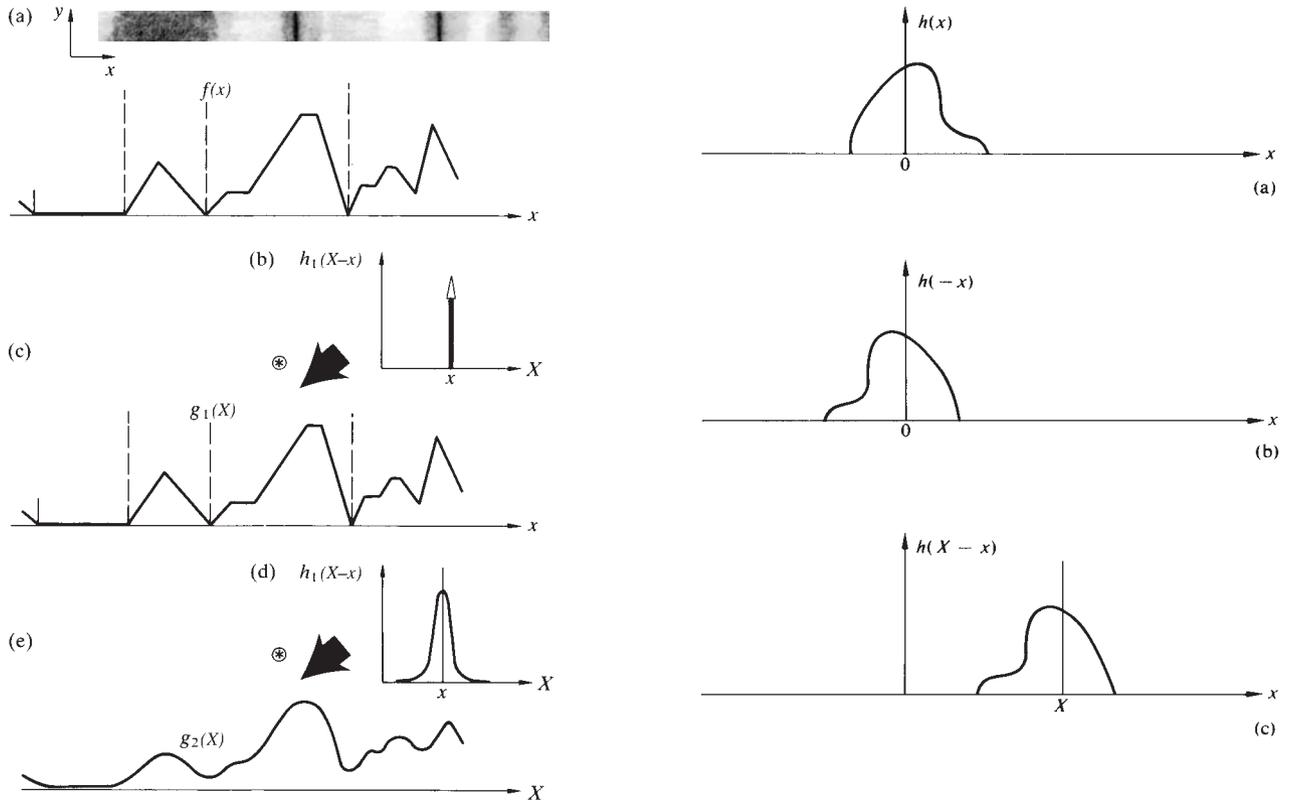


Figure 11.20 La distribution de l'éclairement est représentée par la fonction $f(x)$ (a). Elle est convoluée à une fonction- δ (b) ce qui ne fait que dupliquer $f(x)$. En revanche, convoluer $f(x)$ avec la réponse impulsionnelle h_2 dans (d) produit la fonction « lissée » $g_2(x)$ dans (e).

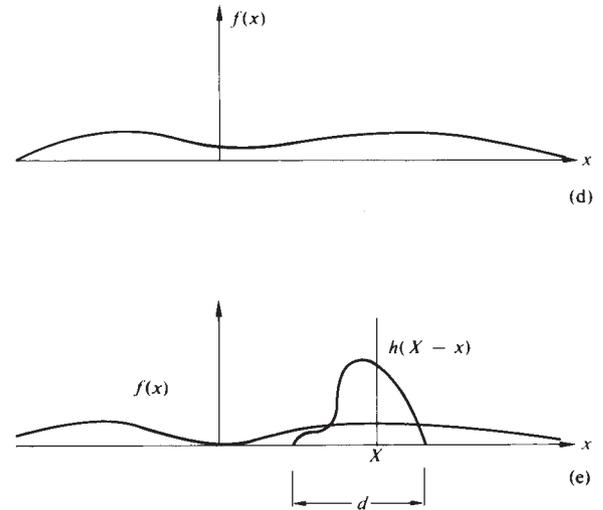


Figure 11.21 Géométrie de la convolution dans l'espace objet.

avec $\mathcal{F}\{g\} = G(k)$. La démonstration est immédiate :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f \otimes h\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(X)e^{ikX} dX \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikX} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(X-x) dx \right] dX \end{aligned}$$

Donc :

$$G(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(X-x)e^{ikX} dX \right] f(x) dx$$

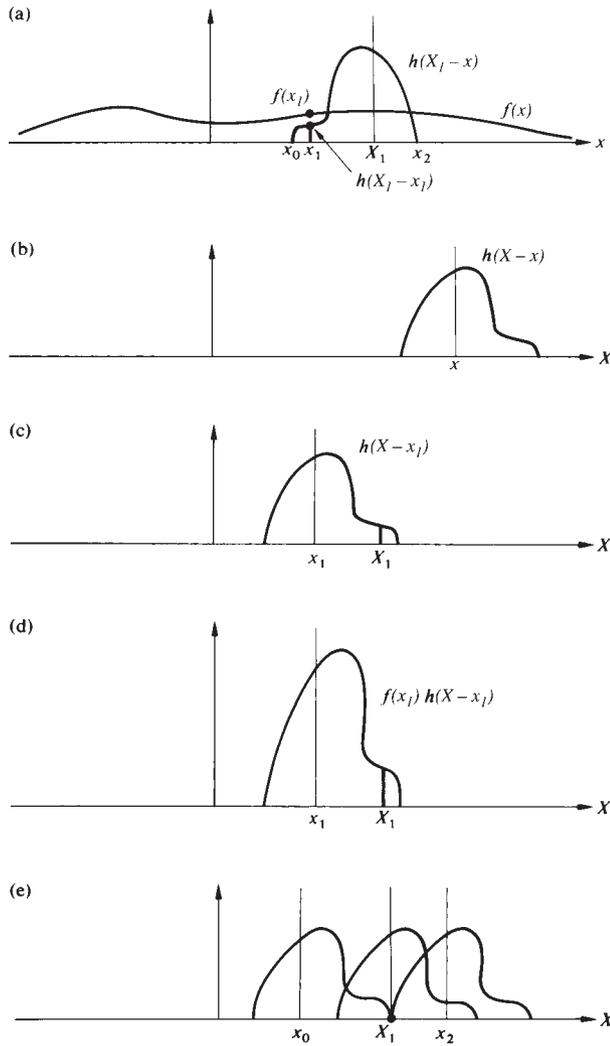


Figure 11.22 Géométrie de la convolution dans l'espace image.

Posons $w = X - x$ dans l'intégrale entre crochets, alors $dX = dw$ et

$$G(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ikx} dx \int_{-\infty}^{+\infty} h(w)e^{ikw} dw$$

D'où :

$$G(k) = F(k)H(k)$$

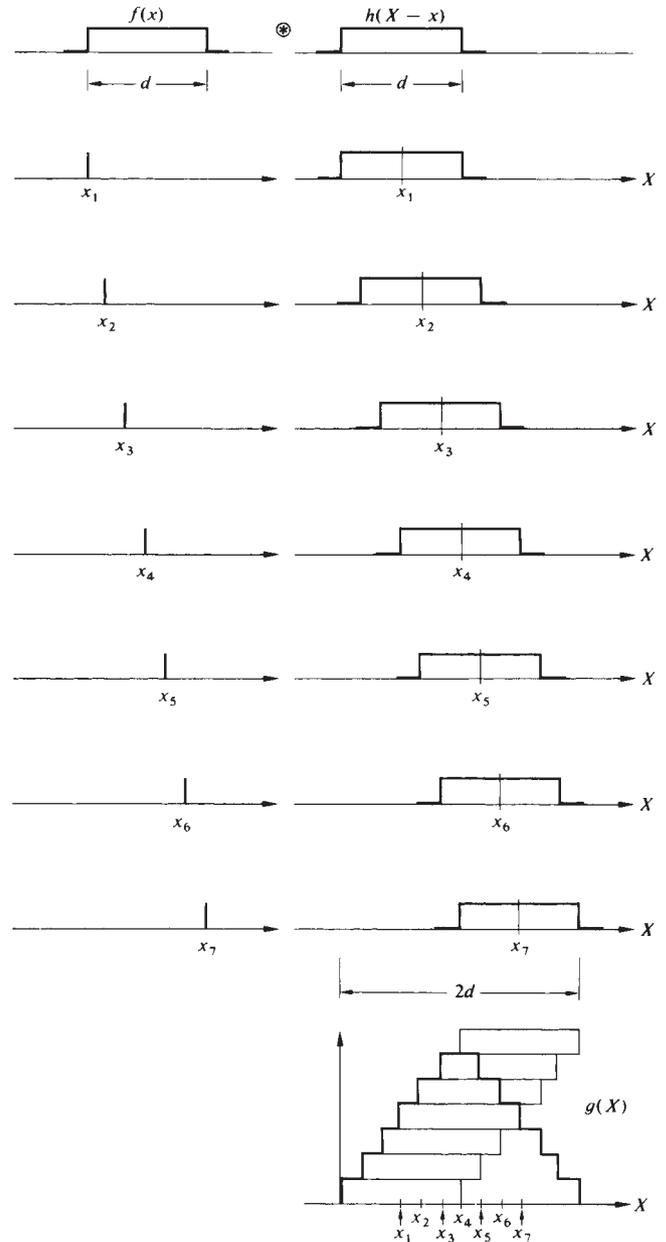


Figure 11.23 Convolution de deux impulsions carrées. Le fait d'avoir représenté $f(x)$ par un nombre fini de fonctions delta (viz., 7) rend compte des escaliers de $g(X)$.

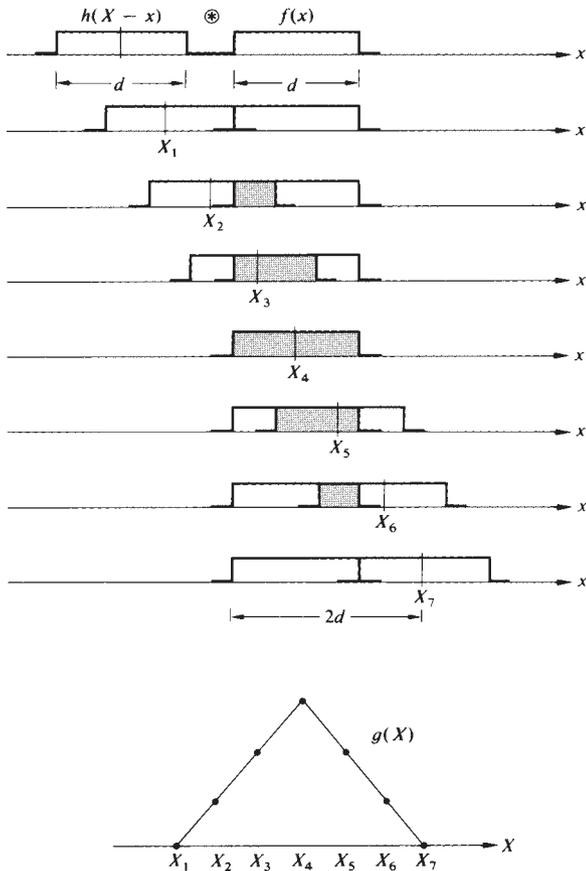


Figure 11.24 Convolution de deux impulsions carrées.

ce qui clôt la démonstration. Comme exemple d'application, se référer à la figure 11.26. Puisque la convolution de deux impulsions rectangulaires identiques, $(f \circledast h)$, est une impulsion triangulaire (g), le produit de leur transformée (figure 7.17) doit être celle de g , ou encore,

$$\mathcal{F}\{g\} = [d \operatorname{sinc}(kd/2)]^2 \quad (11.55)$$

À titre d'exemple supplémentaire, convoluons une impulsion rectangulaire avec les deux fonctions δ de la figure 11.11. La transformée de la double impulsion résultante (figure 11.27) est le produit des transformées individuelles.

La contrepartie de l'équation (11.53) dans l'espace k est le *théorème de convolution en fréquence* :

$$\mathcal{F}\{f \cdot h\} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{f\} \circledast \mathcal{F}\{h\} \quad (11.56)$$

qui énonce que la transformée du produit est la convolution des transformées.

La figure 11.28 illustre parfaitement ce résultat. En effet, $f(x)$ est une fonction cosinus infinie multipliée par une impulsion rectangulaire, $h(x)$, ce qui a pour effet de tronquer $f(x)$ en un train d'onde, $g(x)$. La transformée de $f(x)$ est une paire de fonctions delta, celle de $h(x)$ est une fonction sinc, et la convolution des deux est la transformée de $g(x)$. Comparez ce résultat à celui de l'équation (7.60).

Transformée d'un paquet d'onde gaussien

Le calcul de la transformée de Fourier d'une impulsion de lumière donnée par le paquet d'onde de la figure 11.29 constitue un exemple supplémentaire de l'utilité du théorème de convolution. D'un point de vue général, on remarque que puisque la forme d'une onde harmonique à une dimension est

$$\tilde{E}(x, t) = E_0 e^{-i(k_0 x - \omega t)}$$

il suffit de moduler cette onde en amplitude pour fabriquer un paquet d'onde. En supposant que le profil de l'onde est indépendant du temps, on a :

$$\tilde{E}(x, 0) = f(x) e^{-ik_0 x}$$

Le calcul de $\mathcal{F}\{f(x) e^{-ik_0 x}\}$ passe par celui de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ik_0 x} e^{ikx} dx \quad (11.57)$$

Posons $k' = k - k_0$, d'où :

$$F(k') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ik'x} dx = F(k - k_0) \quad (11.58)$$

En d'autres termes, si $F(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}$, alors $F(k - k_0) = \mathcal{F}\{f(x) e^{-ik_0 x}\}$. Dans le cas particulier d'une enveloppe gaussienne [équation (11.11)], $f(x) = \sqrt{a/\pi} e^{-ax^2}$, c'est-à-dire,

$$\tilde{E}(x, 0) = \sqrt{a/\pi} e^{-ax^2} e^{-ik_0 x} \quad (11.59)$$

Les résultats précédents, en particulier l'équation (11.12), permettent d'établir que :

$$\mathcal{F}\{\tilde{E}(x, 0)\} = e^{-(k-k_0)^2/4a} \quad (11.60)$$

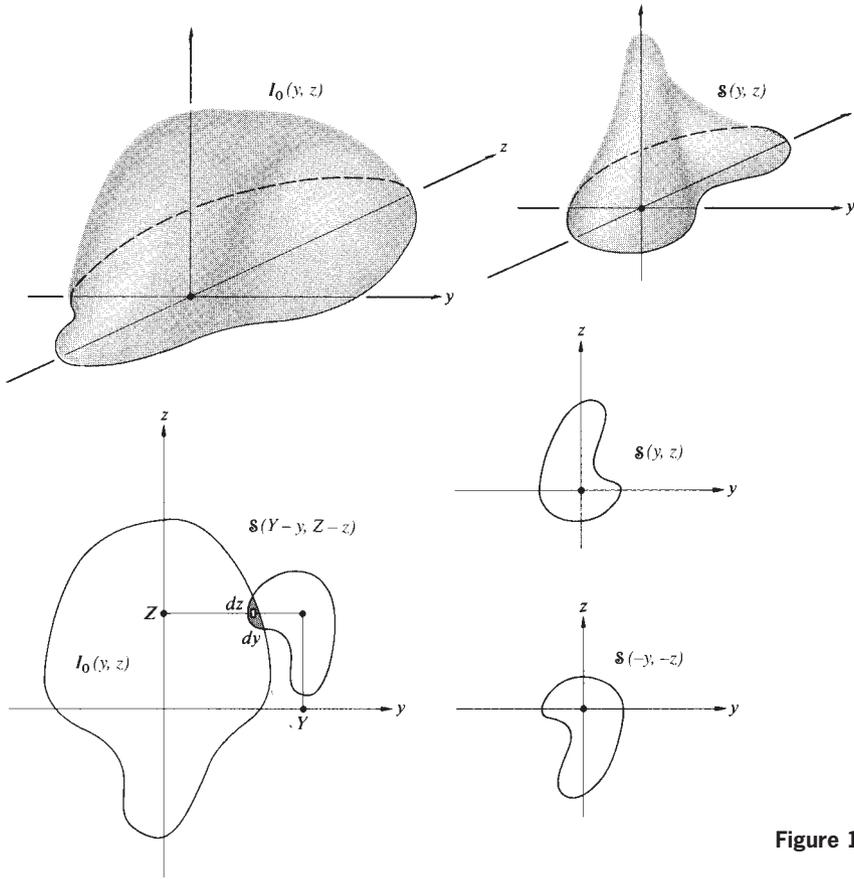


Figure 11.25 Convolution à deux dimensions.

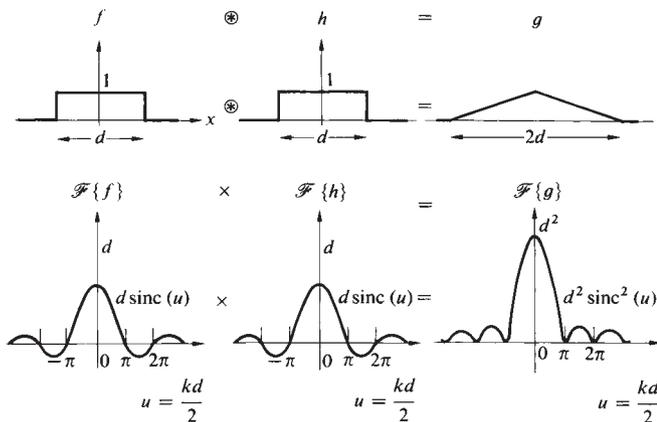


Figure 11.26 Une illustration du théorème de convolution.

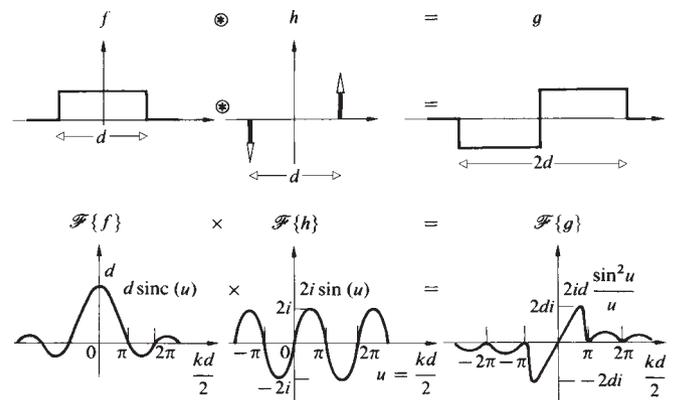


Figure 11.27 Une illustration du théorème de convolution.

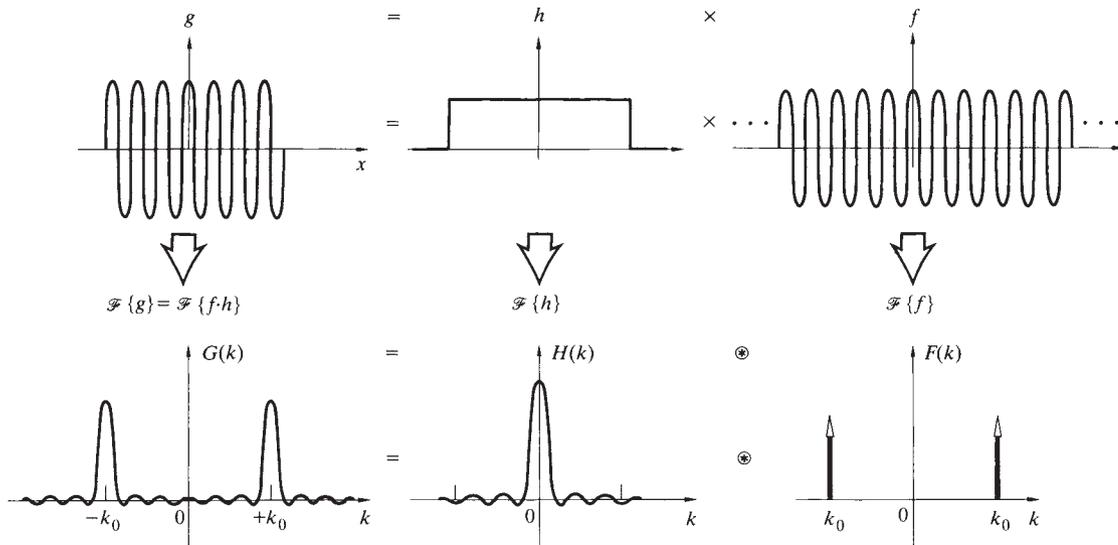


Figure 11.28
Un exemple du théorème de convolution en fréquence.

On peut aussi trouver ce résultat par l'intermédiaire de l'équation (11.56). $\tilde{E}(x, 0)$ serait alors vu comme le produit des fonctions $f(x) = \sqrt{a/\pi} \exp(-ax^2)$ et $h(x) = \exp(-ik_0x)$. On peut calculer $\mathcal{F}\{h\}$ en prenant $f(x) = 1$ dans l'équation (11.57) ce qui conduit à calculer la transformée de 1 en remplaçant k par $k - k_0$. Comme $\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(k)$ (exercice 11.4) alors $\mathcal{F}\{e^{-ik_0x}\} = 2\pi\delta(k - k_0)$. Finalement $\mathcal{F}\{\tilde{E}(x, 0)\}$ vaut $1/2\pi$ fois la convolution de $2\pi\delta(k - k_0)$ avec la gaussienne $e^{-k^2/4a}$ centrée en zéro. Le résultat* est aussi une gaussienne centrée en k_0 , soit, $e^{-(k-k_0)^2/4a}$.

11.3.3 Méthodes de Fourier et théorie de la diffraction

Diffraction de Fraunhofer

La théorie de la transformée de Fourier fournit un cadre conceptuel particulièrement élégant des mécanismes de la diffraction de Fraunhofer. Retournons à l'équation (10.41),

$$E(Y, Z) = \frac{\mathcal{E}_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \iint_{\text{Ouverture}} e^{ik(Yy + Zz)/R} dy dz \quad (11.61)$$

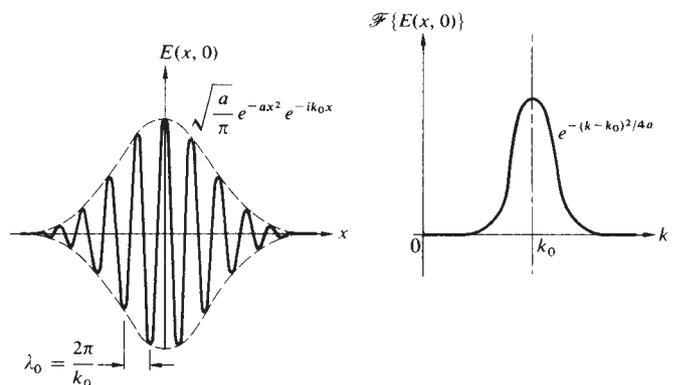


Figure 11.29 Un paquet d'onde gaussien et sa transformée.

*En fait, on aurait dû utiliser la partie réelle de $\exp(-ik_0x)$ dans les calculs car la transformée d'une exponentielle complexe est différente de celle de $\cos k_0x$, même si on prend la partie réelle du résultat. Cette difficulté est fréquente dès lors que l'on forme le produit d'exponentielles complexes. La réponse donnée par l'équation (11.60) devrait contenir le terme supplémentaire $\exp[-(k + k_0)^2/4a]$ et une constante multiplicative de $\frac{1}{2}$. Le second terme est moins significatif que le premier. Utiliser une exponentielle complexe pour représenter une fonction sinus ou cosinus est *rigoureusement incorrect*, bien que ce soit une habitude courante parce que pratique. C'est donc un raccourci de calcul à employer avec la plus grande précaution !

Cette formule se réfère au schéma de la figure 10.18 qui décrit une onde plane monochromatique diffractée par une ouverture quelconque dans le plan- yz . R est la distance qui sépare le centre de l'ouverture du point où le champ $E(Y, Z)$ est calculé. À l'intérieur de cette ouverture, la source a une force par unité de surface qu'on dénote \mathcal{E}_A et qui représente des champs électriques variables en fonction du temps. Le terme $\exp i(\omega t - kR)$ traduit la phase de la perturbation au point (Y, Z) à celle au centre de l'ouverture. Le terme $1/R$ correspond à la décroissance de l'amplitude en fonction de la distance à l'ouverture. Le terme de phase est de peu d'intérêt car on s'intéresse à la répartition relative de la distribution du champ. Tout ce qui précède l'intégrale, à l'exception de \mathcal{E}_A , peut se réduire à une constante unique.

\mathcal{E}_A a jusqu'ici été considéré comme constant sur toute la surface de l'ouverture, ce qu'on va remettre en cause. En effet, si l'ouverture est entachée d'une impureté, le champ émis par chaque élément d'aire $dy dz$ est altéré en amplitude et en phase. Il y a absorption non uniforme, et la longueur du chemin optique dans l'ouverture devient dépendante de la position, ce qui ne manque pas d'affecter la distribution du champ diffracté. Les variations de \mathcal{E}_A , et la constante multiplicative sont réunies dans un unique terme complexe :

$$\mathcal{A}(y, z) = \mathcal{A}_0(y, z)e^{i\phi(y, z)} \quad (11.62)$$

qu'on appelle **fonction d'ouverture**. L'amplitude du champ incident dans l'ouverture est décrit par $\mathcal{A}_0(y, z)$ et la variation de phase par $\exp [i\phi(y, z)]$. En conséquence, $\mathcal{A}(y, z) dy dz$ est proportionnel au champ diffracté par l'élément d'aire $dy dz$. On peut alors reformuler l'équation (11.61) en des termes plus généraux par :

$$E(Y, Z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}(y, z) e^{ik(Yy+Zz)/R} dy dz \quad (11.63)$$

Les bornes de l'intégrale peuvent être déployées sur $\pm\infty$ car la fonction d'ouverture est nulle en dehors de l'ouverture.

Il est utile de considérer $dE(Y, Z)$ en un point quelconque P comme une onde plane se propageant dans la direction \mathbf{k} comme dans la figure 11.30, et d'amplitude $\mathcal{A}(y, z) dy dz$. Pour appuyer la similarité entre l'équation (11.63) et l'équation (11.14), définissons les *fréquences spatiales* k_Y et k_Z comme suit :

$$k_Y \equiv kY/R = k \sin \phi = k \cos \beta \quad (11.64)$$

$$\text{et} \quad k_Z \equiv kZ/R = k \sin \theta = k \cos \gamma \quad (11.65)$$

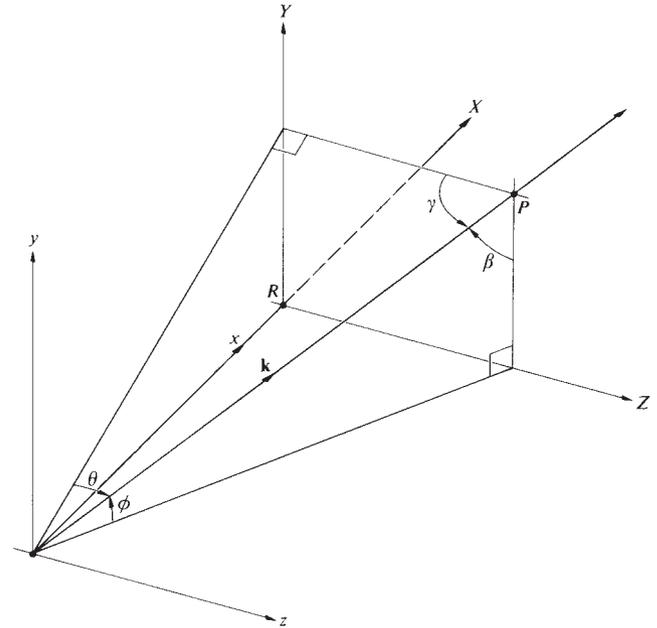


Figure 11.30 Un peu de géométrie.

À chaque point dans le plan image correspond une fréquence spatiale. D'où l'expression du champ diffracté :

$$E(k_Y, k_Z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}(y, z) e^{i(k_Y y + k_Z z)} dy dz \quad (11.66)$$

et la conclusion majeure : **la distribution du champ dans une figure de diffraction de Fraunhofer est la transformée de Fourier de la distribution du champ dans l'ouverture (i.e. la fonction d'ouverture)**. Résultat qui s'écrit :

$$E(k_Y, k_Z) = \mathcal{F}\{\mathcal{A}(y, z)\} \quad (11.67)$$

La distribution du champ dans le plan image correspond au spectre de fréquences spatiales de la fonction d'ouverture. La transformée inverse permet d'écrire :

$$\mathcal{A}(y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} E(k_Y, k_Z) e^{-i(k_Y y + k_Z z)} dk_Y dk_Z \quad (11.68)$$

c'est-à-dire,

$$\mathcal{A}(y, z) = \mathcal{F}^{-1}\{E(k_Y, k_Z)\} \quad (11.69)$$

Comme on l'a vu maintes fois, plus un signal est localisé, plus sa transformée est étendue, y compris à deux dimensions. Plus l'ouverture diffractante est petite, plus la dispersion angulaire du champ diffracté est grande, ou encore, plus la bande-passante est grande en fréquences spatiales.

Il est utile de relever un problème mineur. Essayez d'observer une figure de diffraction de Fraunhofer sur un écran lointain sans lentille, on en verra qu'une approximation ; le vrai motif de Fraunhofer se forme en lumière parallèle à l'infini. En général, cela n'entraîne pas d'erreurs graves car on observe un éclaircissement proche de la distribution théorique qu'il présente à l'infini. À une distance assez grande, la distribution en phase du champ électrique diffracté ne diffère que très peu de celle de la transformée de Fourier de la fonction d'ouverture. Comme d'autre part on ne sait même pas mesurer le champ électrique, ce problème n'en est pas un, et on le négligera en conséquence.

Cas d'une fente unique

Appliquons ce qui précède à une fente dirigée dans la direction- y comme celle de la figure 10.11, éclairée par une onde plane. En supposant qu'il n'y a pas de variations de phase ou d'amplitude dans l'ouverture, $\mathcal{A}(y, z)$ a la forme d'une impulsion rectangulaire (figure 7.23) :

$$\mathcal{A}(y, z) = \begin{cases} \mathcal{A}_0 & \text{lorsque } |z| \leq b/2 \\ 0 & \text{lorsque } |z| > b/2 \end{cases}$$

où \mathcal{A}_0 est une constante. À une dimension, on a :

$$E(k_z) = \mathcal{F}\{\mathcal{A}(z)\} = \mathcal{A}_0 \int_{z=-b/2}^{+b/2} e^{ik_z z} dz$$

$$E(k_z) = \mathcal{A}_0 b \operatorname{sinc} k_z b/2$$

Cette expression est identique à celle de la section 10.2.1 en posant $k_z = k \sin \theta$. La figure de diffraction en champ lointain d'une ouverture rectangulaire (section 10.2.4) est l'extension à deux dimensions de celle d'une fente. En prenant $\mathcal{A}(y, z)$ égal à \mathcal{A}_0 dans l'ouverture (figure 10.19),

$$\begin{aligned} E(k_y, k_z) &= \mathcal{F}\{\mathcal{A}(y, z)\} \\ &= \int_{y=-b/2}^{+b/2} \int_{z=-a/2}^{+a/2} \mathcal{A}_0 e^{i(k_y y + k_z z)} dy dz \end{aligned}$$

donc,

$$E(k_y, k_z) = \mathcal{A}_0 b a \operatorname{sinc} \frac{bk_y}{2R} \operatorname{sinc} \frac{ak_z}{2R}$$

comme dans l'équation (10.42), où ba est l'aire de l'ouverture.

Expériences des trous de Young : la fente double

Lorsqu'on a étudié l'expérience des trous d'Young dans la section 9.3, on a considéré que les fentes avaient une largeur infinitésimale. La fonction d'ouverture était donc représentée par deux pics de Dirac, et l'amplitude du champ correspondant par sa transformée de Fourier, c'est-à-dire une fonction cosinus. Cette amplitude, élevée au carré, représente la distribution familière d'éclaircissement de la figure 9.9. Mais ce cas de figure n'est pas réaliste, toute ouverture ayant une forme finie. La figure 11.31 montre le cas où les deux trous sont cette fois des fentes. La fonction d'ouverture, $g(x)$, s'obtient par convolution de deux fonctions $\delta, h(x)$, qui fixent la position des deux fentes avec une impulsion rectangulaire, $f(x)$. D'après le théorème de convolution, le produit des deux transformées est une fonction cosinus modulée en amplitude représentant le champ diffracté dans le plan image. La distribution d'intensité de la double fente s'obtient en élevant au carré la fonction précédente qu'on avait déjà rencontrée dans la figure 10.14. Les courbes représentatives des transformées à une dimension sont tracées en fonction de k , mais il est équivalent de les tracer en fonction des variables d'espace grâce à l'équation (11.64) (le même raisonnement appliqué à des ouvertures circulaires conduit à l'ensemble des franges de la figure 12.2).

Trois fentes

D'après la figure 11.13d, il est clair que la transformée de trois fonctions δ est une fonction cosinus décalée d'une quantité proportionnelle au terme de fréquence zéro, c'est-à-dire de la fonction δ à l'origine. Celle-ci a une amplitude double par rapport aux deux autres et on remarque que la fonction cosinus est totalement positive. Maintenant, imaginons trois fentes fines parallèles et uniformément éclairées. La fonction d'ouverture est alors celle de la figure 11.32a, où la fonction δ centrale est deux fois plus petite que celle de la figure 11.13d. Sa transformée est donc décalée d'un quart vers le bas comme le montre la figure 11.32b. Comme il s'agit de l'amplitude du champ électrique, on déduit la distribution d'intensité de trois fentes en l'élevant au carré (figure 11.32c).

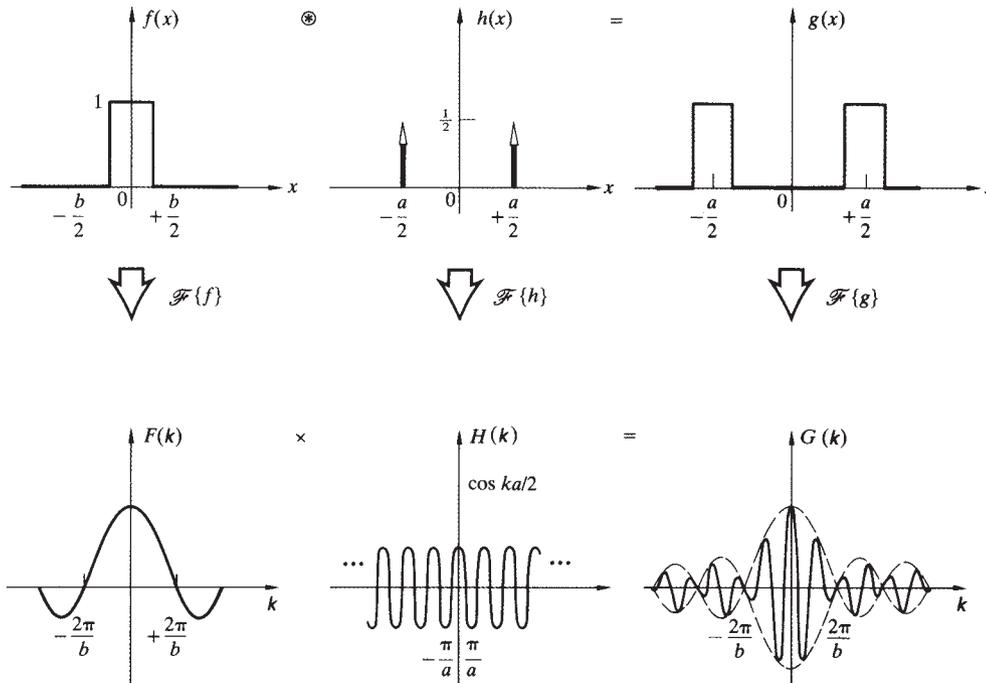


Figure 11.31 Une illustration du théorème de convolution.

Apodisation

Le terme **apodisation** vient du Grec « a », *enlever*, et « podos », qui signifie *ped*. Il exprime la suppression des maxima secondaires (lobes secondaires) ou des pieds de la figure de diffraction. Pour une pupille circulaire (section 10.2.5), la figure de diffraction est constituée d'anneaux concentriques à une tache circulaire centrale. Le premier anneau a un éclairement maximal égal à 1,75 % de celui du pic central ;

c'est peu mais cela peut être gênant. Environ 16 % de la lumière dans le plan image est en effet distribuée dans les anneaux. La présence des lobes latéraux peuvent diminuer le pouvoir de résolution d'un système optique à un point tel que l'apodisation est nécessaire, comme c'est souvent le cas en astronomie et en spectroscopie. Par exemple, l'étoile Sirius, la plus brillante dans le ciel (elle se trouve dans la constellation du Grand Chien – *Canis Major*), fait partie d'un système binaire. Elle est accompagnée d'une naine blanche, les deux décrivant

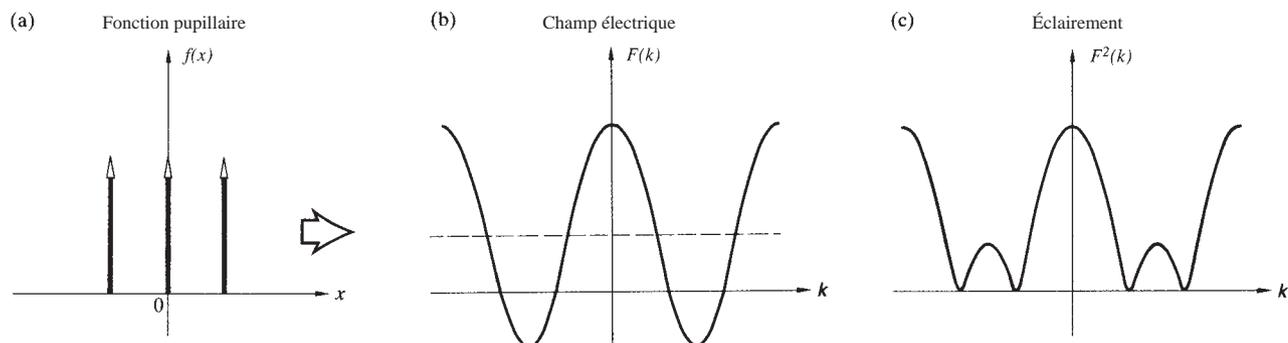


Figure 11.32 La transformée de Fourier de trois fonctions- δ identiques représentant trois fentes.

une orbite autour de leur centre de masse commun. À cause de leur très substantielle différence en luminance (rapport de 10^4 à 1), l'image de la naine blanche à travers un télescope est généralement absente à cause des lobes secondaires de la figure de diffraction de Sirius.

L'apodisation peut être réalisée de différentes manières, par exemple en modifiant la forme de l'ouverture ou les caractéristiques de sa transmission.* L'équation (11.66) nous a déjà montré que la distribution du champ diffracté est la transformée de $\mathcal{A}(y, z)$. Les lobes secondaires peuvent donc être modifiés en remaniant $\mathcal{A}_0(y, z)$ ou $\phi(y, z)$. L'approche la plus simple est celle où seule $\mathcal{A}_0(y, z)$ est modifiée. L'opération se réalise concrètement en recouvrant l'ouverture d'une fine lame de verre traitée (ou en traitant directement la lentille de l'objectif). Supposons que le traitement s'opacifie radialement (dans le plan- yz) vers les extrémités d'une pupille circulaire. Le champ transmis va décroître jusqu'à être négligeable en bordure de l'ouverture. En particulier, imaginons que la loi en amplitude soit gaussienne, $\mathcal{A}_0(y, z)$ est alors une fonction gaussienne, tout comme sa transformée $E(Y, Z)$, et les anneaux vont tendre à disparaître. Même si le pic central va s'élargir, les lobes latéraux sont supprimés (figure 11.33).

Un moyen plus commode de comprendre le processus consiste à souligner que les hautes fréquences spatiales servent à améliorer les détails de la fonction à réaliser. Nous avons vu qu'à une dimension (figure 7.29) les hautes fréquences permettent de remplir les coins d'une impulsion rectangulaire. De la même manière, comme $\mathcal{A}(y, z) = \mathcal{F}^{-1}\{E(k_y, k_z)\}$, les bords effilés d'une ouverture rendent nécessaire une contribution appréciable des hautes fréquences spatiales dans le champ diffracté. Ces dernières sont drastiquement réduites en faisant décroître $\mathcal{A}_0(y, z)$ graduellement, et les lobes secondaires sont simultanément supprimés.

L'apodisation n'est qu'un des aspects du *filtrage spatial* dont on parlera au chapitre 13.

Théorème d'échantillonnage

Pour généraliser certains des résultats précédents à deux dimensions, imaginons un écran comportant N trous identiques comme dans la figure 11.34. Soit O_1, O_2, \dots, O_N les points situés en $(y_1, z_1), (y_2, z_2), \dots, (y_N, z_N)$, respectivement.

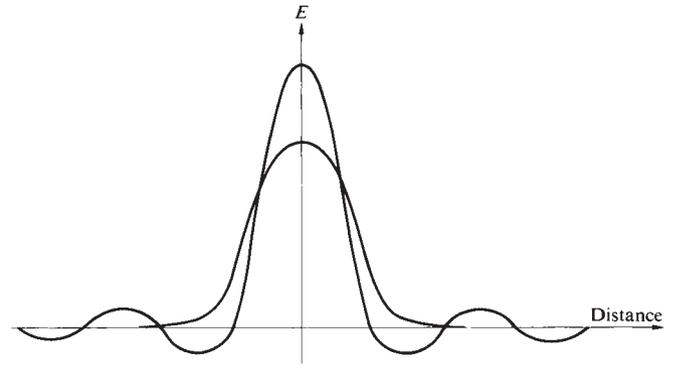


Figure 11.33 Comparaison entre la figure d'Airy et une gaussienne.

Chaque point appartient à une ouverture dans une même position relative et représente l'origine d'un système de coordonnées local (y', z') . Un point de coordonnées (y', z') dans le repère local de la $j^{\text{ième}}$ ouverture a pour coordonnées $(y_j + y', z_j + z')$ dans le repère (y, z) . En lumière cohérente et monochromatique, le champ de diffraction de Fraunhofer $E(Y, Z)$ en n'importe quel point P dans le plan image sera la superposition en P des champs individuels provenant des N ouvertures ; c'est-à-dire que :

$$E(Y, Z) = \sum_{j=1}^N \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_j(y', z') e^{ik[Y(y_j+y') + Z(z_j+z')]/R} dy' dz' \quad (11.70)$$

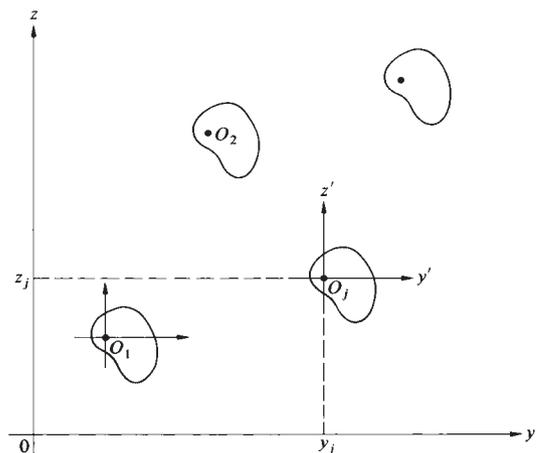


Figure 11.34 Configuration multi-pupilles.

*Pour un traitement rigoureux de ce sujet, voir P. Jacquinot and B. Roizen-Dossier, « Apodization », in Vol. III of *Progress in Optics*.

$$\text{ou } E(Y,Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_I(y', z') e^{ik(Yy' + Zz')/R} dy' dz' \times \sum_{j=1}^N e^{i(k_y y_j + k_z z_j)/R} \quad (11.71)$$

où $\mathcal{A}_I(y', z')$ est la fonction d'ouverture pour chaque trou. Grâce aux équations (11.64) et (11.65), on a :

$$E(k_Y, k_Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_I(y', z') e^{i(k_Y y' + k_Z z')} dy' dz' \times \sum_{j=1}^N e^{i(k_Y y_j)} e^{i(k_Z z_j)} \quad (11.72)$$

On remarque que l'intégrale est la transformée de Fourier de la fonction d'ouverture, et que la somme est la transformée d'un peigne de Dirac [équation (11.42)].

$$A_\delta = \sum_j \delta(y - y_j) \delta(z - z_j) \quad (11.73)$$

Vu que $E(k_Y, k_Z)$ est lui-même la transformée $\mathcal{F}\{\mathcal{A}(y, z)\}$ de la fonction d'ouverture totale, on a :

$$\mathcal{F}\{\mathcal{A}(y, z)\} = \mathcal{F}\{\mathcal{A}_I(y', z')\} \cdot \mathcal{F}\{A_\delta\} \quad (11.74)$$

Cette équation est une relation explicite du **théorème d'échantillonnage** qui stipule que *la distribution du champ de diffraction de Fraunhofer d'un ensemble d'ouvertures identiques et pareillement orientées est la transformée de Fourier de la fonction d'ouverture individuelle (i.e. la distribution du champ diffracté) multiplié par la figure résultante d'un ensemble de points sources dans la même configuration (i.e. la transformée de A_δ)*.

Il est possible de retrouver ce résultat en partant d'une convolution. La fonction d'ouverture totale s'obtient par la convolution de la fonction d'ouverture individuelle avec une grille de pics de Dirac distribués sur les points de coordonnées (y_1, z_1) , (y_2, z_2) , etc. D'où :

$$\mathcal{A}(y, z) = \mathcal{A}_I(y', z') \circledast A_\delta \quad (11.75)$$

duquel on déduit le théorème d'échantillonnage grâce au théorème de convolution [équation (11.53)].

Prenons un exemple simple, celui des trous de Young qu'on a vu dans le cas de fentes doubles. La fonction d'ouverture individuelle de chaque fente est :

$$\mathcal{A}_I(z') = \begin{cases} \mathcal{A}_{I0} & \text{lorsque } |z'| \leq b/2 \\ 0 & \text{lorsque } |z'| > b/2 \end{cases}$$

avec :

$$\mathcal{F}\{\mathcal{A}_I(z')\} = \mathcal{A}_{I0} b \text{ sinc } k_Z b/2$$

Les fentes étant espacées de a , on a :

$$A_\delta = \delta(z - a/2) + \delta(z + a/2)$$

et en utilisant l'équation (11.43) :

$$\mathcal{F}\{A_\delta\} = 2 \cos k_Z a/2$$

D'où :

$$E(k_Z) = 2 \mathcal{A}_{I0} b \text{ sinc } \left(\frac{k_Z b}{2} \right) \cos \left(\frac{k_Z a}{2} \right)$$

ce qui est concordant avec les résultats précédents (figure 11.31). La distribution d'éclairement est celle de franges d'interférence en cosinus-carré modulées par une enveloppe de diffraction en sinc-carré.

11.3.4 Spectres et corrélation

Formule de Parseval

Supposons que $f(x)$ soit une impulsion finie, et soit $F(k)$ sa transformée de Fourier [équation (11.5)]. D'après la section 7.8, la fonction $F(k)$ est l'amplitude du spectre de fréquences spatiales de $f(x)$. $F(k) dk$ traduit la contribution des fréquences comprises entre k et $k + dk$ à l'amplitude de l'impulsion. Il apparaît alors que $|F(k)|$ est la densité spectrale en amplitude et que son carré, $|F(k)|^2$, est proportionnel à l'énergie par unité de fréquence spatiale. De la même manière, dans le domaine temporel, si $f(t)$ est le champ électrique rayonné alors $|f(t)|^2$ est proportionnel au flux, et l'énergie émise est proportionnelle à $\int_0^\infty |f(t)|^2 dt$. Avec $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ il apparaît que $|F(\omega)|^2$ doit être une mesure du flux émis par unité de fréquence temporelle. Précisons cela en calculant $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$ en termes de transformées de Fourier. Comme $|f(t)|^2 = f(t)f^*(t) = f(t) \cdot [\mathcal{F}^{\pm 1}\{F(\omega)\}]^*$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega) e^{+i\omega t} d\omega \right] dt$$

En intervertissant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right] d\omega$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (11.76)$$

où $|F(\omega)|^2 = F^*(\omega)F(\omega)$. C'est la *formule de Parseval*. L'énergie totale est, comme prévu, proportionnelle à l'aire sous la courbe $|F(\omega)|^2$. $|F(\omega)|^2$ est parfois appelé **spectre en puissance** ou *densité spectrale de flux*. Son *alter ego* dans le domaine spatial est :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(k)|^2 dk \quad (11.77)$$

Le profil lorentzien

Pour saisir les applications pratiques de ces idées, considérons au point $x = 0$ l'onde harmonique amortie $f(t)$ décrite par la figure 11.35. Ici :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{de } t = -\infty \text{ à } t = 0 \\ f_0 e^{-t/2\tau} \cos \omega_0 t & \text{de } t = 0 \text{ à } t = +\infty \end{cases}$$

Une dépendance exponentielle négative se dégage généralement quand la variation d'une grandeur dépend de sa valeur instantanée. Dans ce cas, on peut supposer que la puissance rayonnée par un atome varie comme $(e^{-t/\tau})^{1/2}$. On appelle τ la constante de temps et $\tau^{-1} = \gamma$ la constante d'amortissement. La transformée de $f(t)$ est :

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} (f_0 e^{-t/2\tau} \cos \omega_0 t) e^{i\omega t} dt \quad (11.78)$$

Le calcul de cette intégrale est donné en exercice. Après calculs, on a :

$$F(\omega) = \frac{f_0}{2} \left[\frac{1}{2\tau - i(\omega + \omega_0)} \right]^{-1} + \frac{f_0}{2} \left[\frac{1}{2\tau - i(\omega - \omega_0)} \right]^{-1}$$

Quand $f(t)$ représente le champ rayonné par un atome, τ incarne la *durée de vie* de l'état excité (environ entre 1,0 ns et 10 ns). Le spectre en puissance $F(\omega)F^*(\omega)$ est composé de deux pics centrés en $\pm \omega_0$ et séparés de $2\omega_0$. Pour les fréquences optiques telles que $\omega_0 \gg \gamma$, ceux-ci seront étroits et

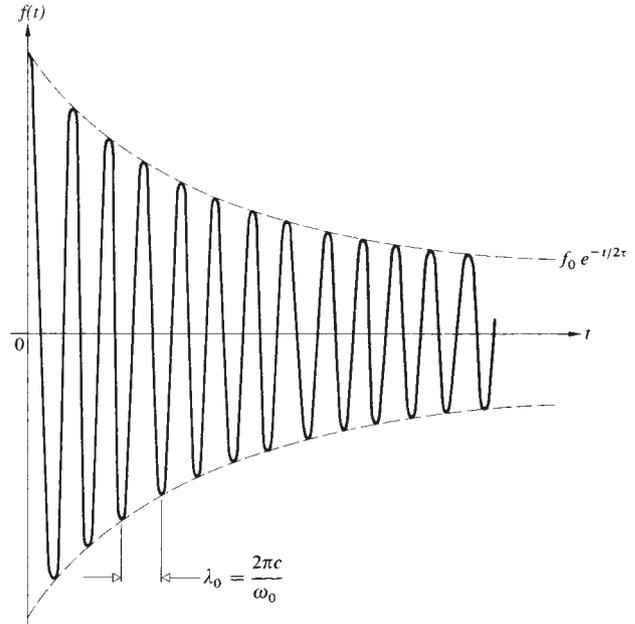


Figure 11.35 Onde harmonique amortie.

largement espacés avec pratiquement aucun recouvrement. La forme des pics dépendra de la transformée de l'enveloppe de modulation de la figure 11.35 qui est une exponentielle négative. La position des pics est fixée par la fréquence de l'onde cosinusoidale. Pour définir le spectre observable à partir de $F(\omega)F^*(\omega)$, il suffit de garder le terme de fréquence positive,

$$|F(\omega)|^2 = \frac{f_0^2}{\gamma^2} \frac{\gamma^2/4}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} \quad (11.79)$$

Cette fonction admet un maximum f_0^2/γ^2 en $\omega = \omega_0$, comme le montre la figure 11.36. À mi-hauteur $(\omega - \omega_0) = \pm \gamma/2$, $|F(\omega)|^2 = f_0^2/2\gamma^2$, qui est la moitié du maximum. La largeur du spectre à mi-hauteur vaut alors γ .

La courbe engendrée par l'équation (11.79) est connue sous le nom de **profil lorentzien** ou courbe de résonance. La bande-passante qui résulte de la durée finie de l'état excité s'appelle **largeur naturelle**.

Si l'atome radiatif entre en collision avec un objet, il peut perdre de l'énergie et voir sa durée d'émission se réduire. Suite à ce phénomène la bande-passante s'accroît, ce qui s'appelle *élargissement Lorentz*. Là encore, le spectre aura un profil lorentzien. En outre, à cause du mouvement thermique des atomes dans un gaz, le spectre d'émission subit un

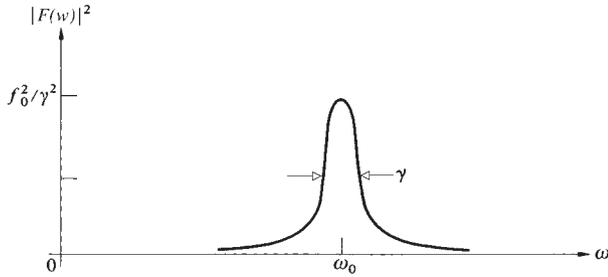


Figure 11.36 La résonance du profil lorentzien.

élargissement à cause de l'effet Doppler. L'élargissement Doppler produit un spectre gaussien (section 7.10). Une gaussienne s'atténue plus lentement au voisinage de ω_0 mais plus vite que ne le ferait le profil lorentzien lorsqu'on s'en éloigne. Ces effets peuvent être combinés mathématiquement pour former un spectre unique par convolution des fonctions gaussienne et lorentzienne. Dans une décharge dans un milieu gazeux à basse pression, le profil gaussien est le plus large et prédomine généralement.

Autocorrélation et intercorrélations

Le but est d'évaluer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau)f^*(t) dt$ en s'inspirant des calculs faits pour établir la formule de Parseval. En utilisant la même approche, si $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau)f^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau) \times \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega)e^{+i\omega t} d\omega \right] dt \quad (11.80)$$

En changeant l'ordre d'intégration, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau)e^{i\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega) \mathcal{F}\{f(t + \tau)\} d\omega \end{aligned}$$

Il est judicieux de remarquer que :

$$f(t + \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-i\omega(t+\tau)} d\omega$$

grâce à un changement de variables dans l'équation (11.9). Donc,

$$f(t + \tau) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)e^{-i\omega\tau}\}$$

et comme, $\mathcal{F}\{f(t + \tau)\} = F(\omega)e^{-i\omega\tau}$, l'équation (11.80) devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau)f^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega)F(\omega)e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (11.81)$$

Les deux intégrales dépendent du paramètre τ . L'intégrale de gauche est appelée **autocorrélation** de $f(t)$, notée :

$$c_{ff}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau)f^*(t) dt \quad (11.82)$$

et qui s'exprime symboliquement par $f(t) \odot f^*(t)$. En prenant la transformée de l'équation (11.81), on a :

$$\mathcal{F}\{c_{ff}(\tau)\} = |F(\omega)|^2 \quad (11.83)$$

C'est une des formes du **théorème de Wiener-Kintchine**. Il permet de déterminer le spectre d'un signal grâce à son autocorrélation. La définition de $c_{ff}(\tau)$ n'est valide que lorsque le signal possède une énergie finie, sinon le théorème devra être légèrement modifié. L'intégrale peut aussi être réécrite comme :

$$c_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f^*(t - \tau) dt \quad (11.84)$$

en opérant un simple changement de variables ($t + \tau$ en t). On définit de la même manière l'**intercorrélations** de deux fonctions $f(t)$ et $h(t)$ comme suit :

$$c_{fh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)h(t + \tau) dt \quad (11.85)$$

L'analyse de la corrélation de deux signaux permet de déterminer leur degré de similitude. Dans le cas de l'autocorrélation, la fonction d'origine est déplacée dans le temps d'une quantité τ ; le produit de la fonction résultante avec celle d'origine est établi et l'aire sous le produit des deux fonctions (correspondant à leur recouvrement) calculée grâce à l'intégrale. La fonction d'autocorrélation, $c_{ff}(\tau)$, résume par le biais d'une intégrale le processus précédent pour toutes les valeurs de τ . Une des raisons qui rend cette fonction utile est l'extraction d'un signal perturbé par un bruit de fond aléatoire.

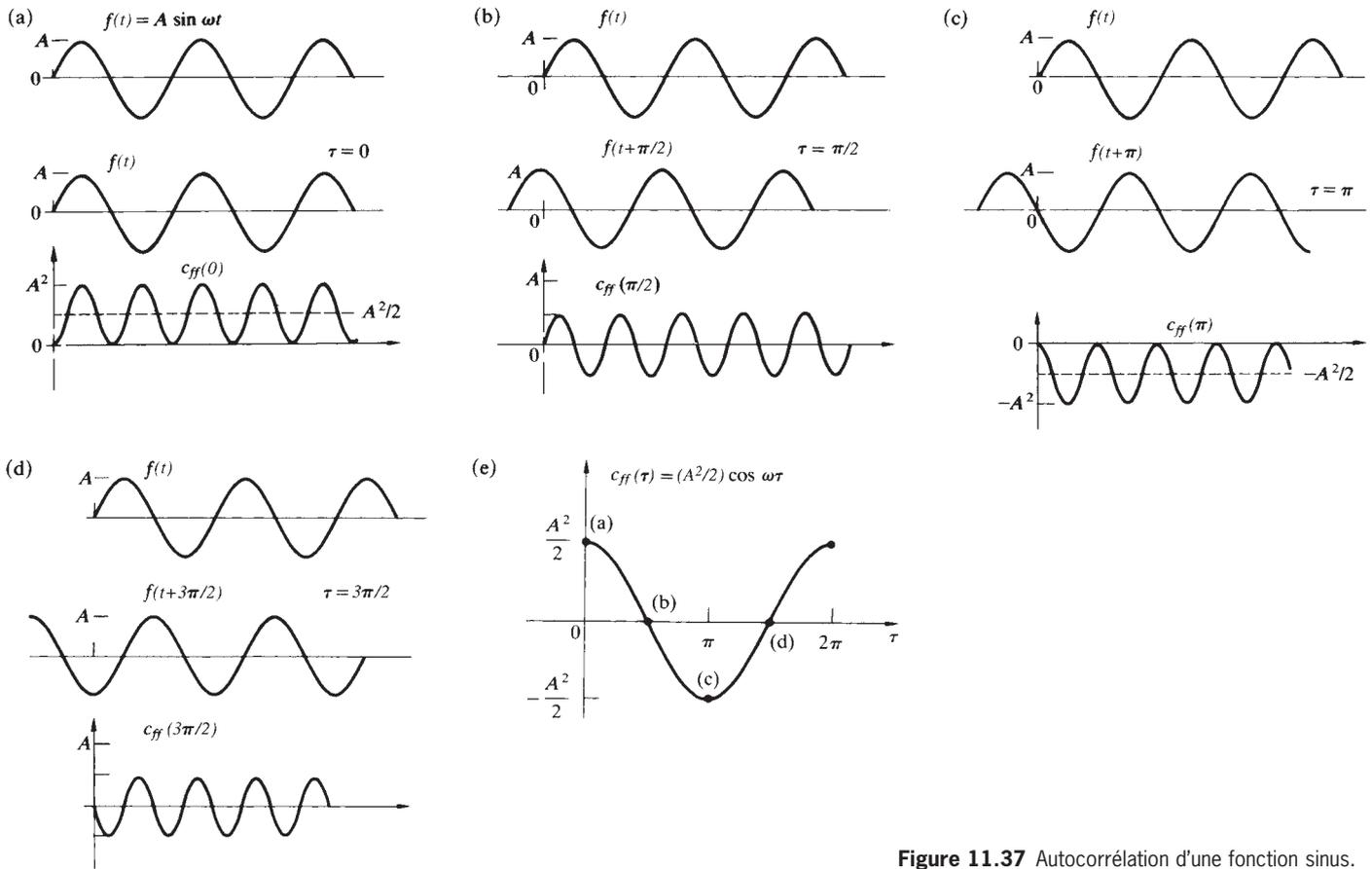


Figure 11.37 Autocorrélation d'une fonction sinus.

Pour comprendre le fonctionnement de l'autocorrélation étape par étape, considérons l'autocorrélation d'une fonction simple comme $A \sin(\omega t + \varepsilon)$, représentée sur la figure 11.37. À chaque fois la fonction est déplacée d'une quantité τ , puis on établit le produit $f(t) \cdot f(t + \tau)$; on calcule ensuite l'aire sous le produit des deux fonctions et la fonction résultante pour toutes les valeurs de τ est tracée en (e). On remarque que le processus d'autocorrélation est indépendant de ε . Le résultat final est : $c_{ff}(\tau) = \frac{1}{2}A^2 \cos \omega\tau$; on peut donc constater que $c_{ff}(\tau)$ et $f(t)$ ont même période. En conséquence, s'il existait un processus permettant de fabriquer l'autocorrélation de $f(t)$, on pourrait trouver à posteriori son amplitude A et sa fréquence angulaire ω .

En supposant que les fonctions sont réelles, on peut réécrire $c_{fh}(\tau)$ comme :

$$c_{fh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h(t + \tau) dt \quad (11.86)$$

qui est évidemment similaire à l'expression de la convolution entre $f(t)$ et $h(t)$. L'équation (11.86) s'exprime symboliquement par $c_{fh}(\tau) = f(t) \odot h(t)$. Si l'une ou l'autre des fonctions, $f(t)$ ou $h(t)$, est paire, alors $f(t) \otimes h(t) = f(t) \odot h(t)$. Dans le processus de convolution, on prend le symétrique (d'une des deux fonctions) par rapport à l'axe des ordonnées et l'on somme sur la surface de recouvrement (figure 11.21). En revanche, dans le processus de corrélation, on somme sur la surface de recouvrement mais sans prendre le symétrique; or si la fonction est paire, $f(t) = f(-t)$, donc elle est confondue avec son symétrique et les deux intégrandes sont identiques. N'importe laquelle des deux fonctions peut être paire car $f(t) \otimes h(t) = h(t) \otimes f(t)$. L'autocorrélation d'une impulsion rectangulaire est égale à la convolution de l'impulsion avec elle-même, que l'on sait être un signal triangulaire (figure 11.24). On retrouverait ce résultat avec l'équation (11.83) et la figure 11.26. La transformée d'une impulsion

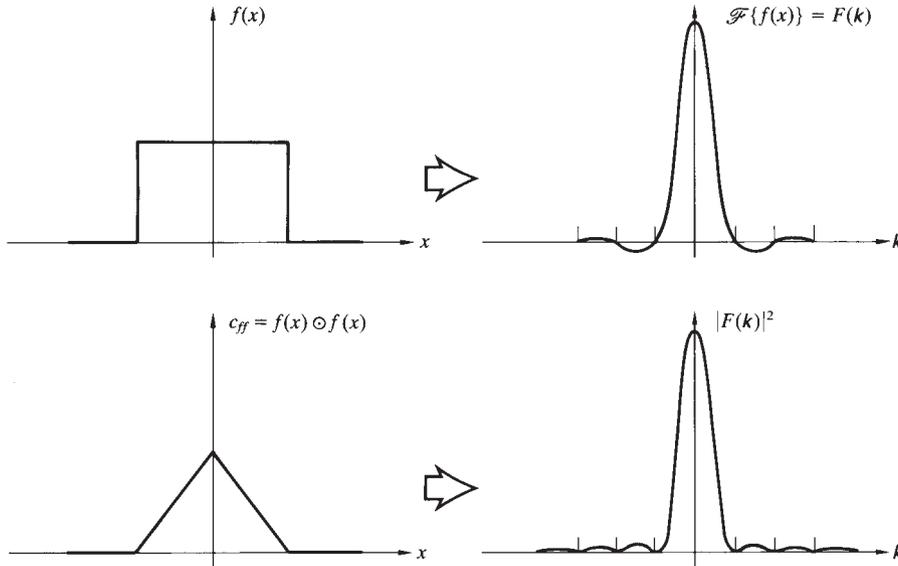


Figure 11.38 Le carré de la transformée de Fourier d'une impulsion rectangulaire $f(x)$ (i.e. $|F(k)|^2$) est égale à la transformée de Fourier de l'autocorrélation de $f(x)$.

rectangulaire est une fonction sinc, le spectre en puissance varie donc en $\text{sinc}^2 u$. La transformée inverse de $|F(\omega)|^2$, c'est-à-dire, $\mathcal{F}^{-1}\{\text{sinc}^2 u\}$, est $c_{ff}(\tau)$, qui, comme nous l'avons vu, est une impulsion triangulaire (figure 11.38).

Il est tout à fait possible qu'un signal ait une énergie infinie [équation (11.76)] sur un intervalle d'intégration allant de $-\infty$ à $+\infty$ et que sa *puissance moyenne* soit finie :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 dt$$

On définit en conséquence une corrélation divisée par l'intervalle d'intégration :

$$C_{ff}(\tau) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t)h(t + \tau) dt \quad (11.87)$$

Par exemple, si $f(t) = A$ (i.e. une constante), son autocorrélation est :

$$C_{ff}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} (A)(A) dt = A^2$$

et le spectre en puissance, qui est la transformée de l'autocorrélation, vaut :

$$\mathcal{F}\{C_{ff}(\tau)\} = A^2 2\pi \delta(\omega)$$

c'est-à-dire une impulsion à l'origine ($\omega = 0$) correspondant à la composante continue. Notons qu'on peut assimiler $C_{ff}(\tau)$ à la moyenne dans le temps du produit de deux fonctions, dont l'une est décalée d'un intervalle de temps τ . Dans le prochain chapitre, des expressions de la forme $\langle f^*(t)h(t + \tau) \rangle$ apparaissent dans des fonctions de cohérence liées aux champs électriques. Elles sont aussi utiles dans les problèmes d'analyse de bruit, par exemple le bruit de granularité de films.

On peut évidemment reconstruire une fonction à partir de sa transformée, mais si la transformée a été élevée au carré, comme dans l'équation (11.83), on perd de l'information sur le signe des contributions des fréquences, c'est-à-dire sur leur phase relative. De la même manière, l'autocorrélation d'une fonction ne comporte pas d'information sur la phase et n'est pas unique. Pour mieux comprendre cela, imaginons un certain nombre d'harmoniques d'amplitude et de fréquence différentes. Si leur phase relative est altérée, la fonction résultante et donc sa transformée changent, cependant la quantité d'énergie disponible à une fréquence donnée doit rester constante. Ainsi, quelle que soit la fonction résultante, son autocorrélation reste inaltérée. On laisse en exercice le soin au lecteur de montrer analytiquement que si $f(t) = A \sin(\omega t + \varepsilon)$, alors $C_{ff}(\tau) = (A^2/2) \cos \omega\tau$, confirmant la perte d'information sur la phase.

La figure 11.39 montre une procédure pour corréler optiquement deux fonctions à deux dimensions. Chacun des

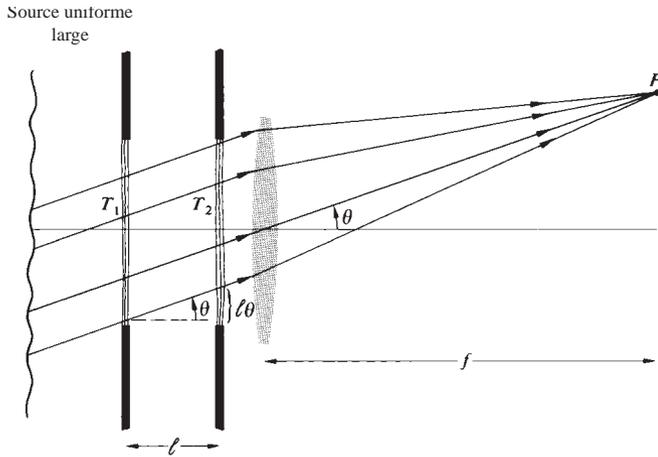


Figure 11.39 Corrélation optique de deux fonctions.

signaux est la transmission d'un diaphragme (T_1 et T_2). Pour représenter des signaux relativement simples, on peut utiliser des écrans opaques avec des ouvertures appropriées (par exemple, pour des impulsions rectangulaires).^{*} L'éclairement en n'importe quel point P de l'image provient de la focalisation dans le plan focal de la lentille d'un faisceau de rayons parallèles ayant traversé les deux ouvertures. Les coordonnées de P , $(\theta f, \varphi f)$, sont fixées par l'orientation du faisceau, c'est-à-dire par les angles θ et φ . Si les deux diapositives sont identiques et de transmission $g(x, y)$, un rayon traversant la première en un point (x, y) passera par la deuxième en un point $(x + X, y + Y)$ où la transmission vaut $g(x + X, y + Y)$. On trouve facilement que $X = \ell\theta$ et $Y = \ell\varphi$, ℓ étant la distance entre les deux diapositives. L'éclairement en P est alors proportionnel à l'autocorrélation de $g(x, y)$, c'est-à-dire,

$$c_{ff}(X, Y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)g(x + X, y + Z) dx dy \quad (11.88)$$

La répartition de l'éclairement est appelée un *corrélogramme*. Si les diapositives sont différentes, l'image dépendra évidemment de l'intercorrélation des deux fonctions. Et si une des diapositives subit une rotation de 180° par rapport à l'autre, c'est la convolution des deux fonctions que l'on obtient (figure 11.25).

^{*}Voir L. S. G. Kovaszny et A. Arman, *Rev. Sci. Instr.* **28**, 793 (1958), et D. McLachlan, Jr., *J. Opt. Soc. Am.* **52**, 454 (1962).

Avant d'aller plus loin, assurons-nous que les opérations réalisées par les fonctions de corrélation sont bien comprises. Pour cela, prenons le cas d'un signal bruité (par exemple, un éclairage variable en un point, une tension ou un champ électrique variables dans le temps) comme celui de la figure 11.40a. L'autocorrélation de $f(t)$ compare la fonction avec sa valeur à un autre instant, $f(t + \tau)$. Par exemple, avec $\tau = 0$, l'intégrale suit le signal dans le temps, sommant et moyennant le produit de $f(t)$ par $f(t + \tau)$ soit simplement $f^2(t)$ dans ce cas. Puisque $f^2(t)$ est toujours positif, $C_{ff}(0)$ sera un grand nombre. D'un autre côté, quand le bruit est comparé à lui-même décalé de $+\tau_1$, $C_{ff}(\tau_1)$ a une valeur réduite. Il y aura des points dans le temps où $f(t)f(t + \tau_1)$ est positif et d'autres où il sera négatif, de sorte que la valeur de l'intégrale diminue (figure 11.40b). En d'autres termes, en déplaçant le signal par rapport à lui-même, on a réduit le degré de similitude entre

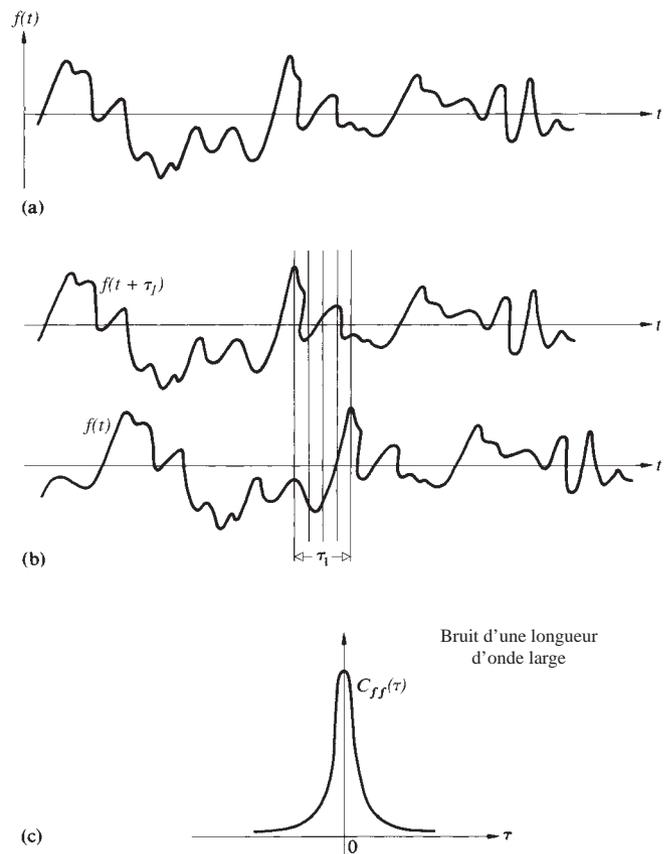


Figure 11.40 Un signal $f(t)$ et son autocorrélation.

eux deux (maximal en $\tau = 0$). À mesure que τ croît, le peu de corrélation qui existait disparaît comme le montre la figure 11.40c. On peut supposer, du fait que l'autocorrélation et le spectre en puissance forment une paire de transformées de Fourier [équation (11.83)], que plus la bande-passante en fréquence du bruit est large, plus l'autocorrélation est étroite. Ainsi, pour un bruit de large bande-passante, le moindre déplacement réduira fortement une quelconque similitude entre $f(t)$ et $f(t + \tau)$. De plus, si un signal est constitué d'une distribution aléatoire d'impulsions rectangulaires, on pressent intuitivement que la similarité évoquée précédemment va persister sur une durée qui est de l'ordre de grandeur de celle des impulsions. Plus les impulsions sont larges (en temps), plus la corrélation décroît lentement en fonction de τ . Cela revient à dire qu'une réduction de bande-passante du signal élargit $C_{ff}(\tau)$. Tout cela est cohérent avec le fait que l'autocorrélation élimine toute information portant sur la phase, qui dans ce cas correspondrait à la position dans le temps des impulsions rectangulaires : $C_{ff}(\tau)$ ne dépend pas de cette position.

Dans un même registre, l'intercorrélation mesure le degré de similitude entre deux signaux différents, $f(t)$ et $h(t)$, en fonction de τ . Contrairement à l'autocorrélation, il n'y a aucun commentaire spécifique à formuler pour $\tau = 0$. Encore une fois, moyenner le produit $f(t)h(t + \tau)$ pour toutes les valeurs de τ donne $C_{fh}(\tau)$ via l'équation (11.87). Pour les fonctions de la figure 11.41, $C_{fh}(\tau)$ aura un pic positif pour $\tau = \tau_1$.

Depuis les années 1960, de gros efforts de développement ont été fournis sur les processeurs optiques de reconnaissance et d'analyse d'images. Les exemples d'application vont des empreintes digitales à la reconnaissance de caractères dans un document en passant par la reconnaissance aérienne et le suivi de terrain pour guidage de missile. La figure 11.42 montre un exemple de reconnaissance optique d'une image grâce à la

technique de corrélation. Le signal d'entrée $f(x, y)$ de la photographie (a) est la vue aérienne d'une région dans laquelle on recherche des structures particulières qui ne sont pas présentes dans le signal de référence $h(x, y)$ [photographie (b)]. La corrélation optique de ces deux signaux est exposée dans la photographie (c). On déduit de la position du pic l'emplacement géographique des structures recherchées.

11.3.5 Fonctions de transfert

Introduction

Jusqu'à récemment, le moyen traditionnel d'évaluer la qualité d'un élément ou d'un système optique était de chercher sa limite de résolution. Plus la résolution était importante, meilleure était la qualité. Suivant cette approche, on teste un système optique grâce à une mire de résolution constituée, par exemple, d'une série de barres rectangulaires parallèles alternativement noires et blanches. On a déjà vu que l'image d'un point objet est une tache qui est définie par la réponse impulsionnelle spatiale $\mathcal{S}(Y, Z)$, comme dans la figure 11.18. En lumière incohérente, ces taches élémentaires se recouvrent pour former l'image finale. La correspondance à une dimension est la réponse à une *fonction ligne* $\mathcal{S}(Z)$ (*line-spread function*), c'est-à-dire la distribution d'éclairement relatif dans l'image d'une fente rectangulaire d'épaisseur infinitésimale (figure 11.43). Puisqu'un système parfait est limité par les effets de la diffraction, l'image d'une mire (figure 11.44) est légèrement floue (figure 11.20). Ainsi, lorsque l'épaisseur des barres de la mire diminue, une limite va être atteinte de sorte que la structure de lignes fines (voisine d'une *mire de Ronchi*) ne sera plus discernable : c'est la limite de résolution du système. On peut penser cette limite en termes de fréquence

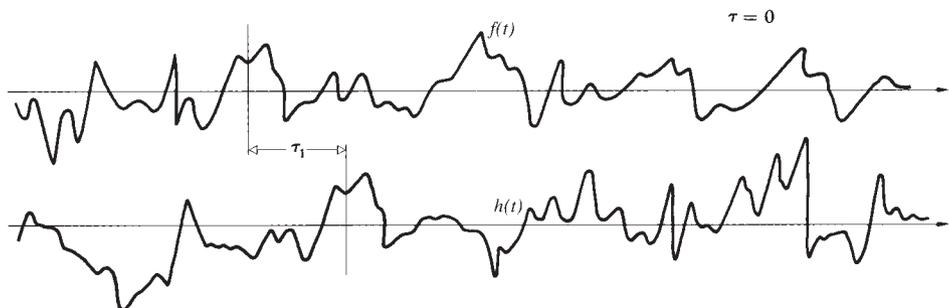


Figure 11.41 L'intercorrélacion de $f(t)$ et $h(t)$.

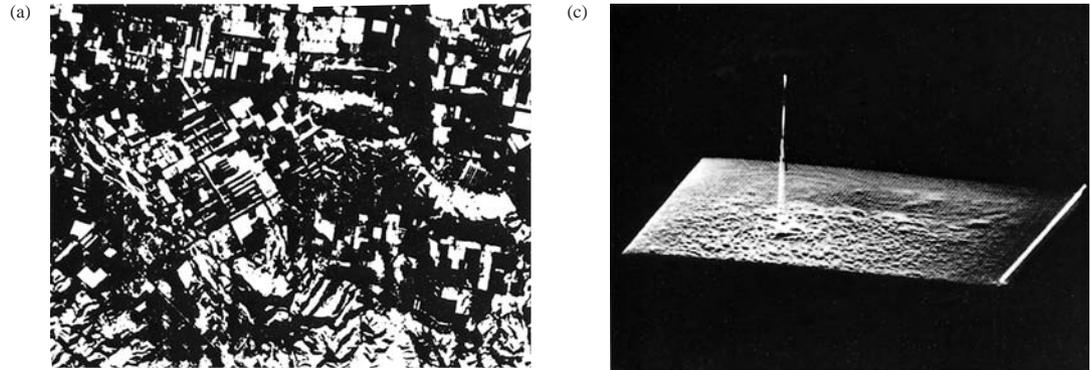


Figure 11.42 Un exemple de reconnaissance de forme optique. (a) Signal d'entrée, (b) donnée de référence, (c) figure de corrélation. (Numéro de novembre 1980 de *Electro-Optical Systems Design*. David Casasent.)

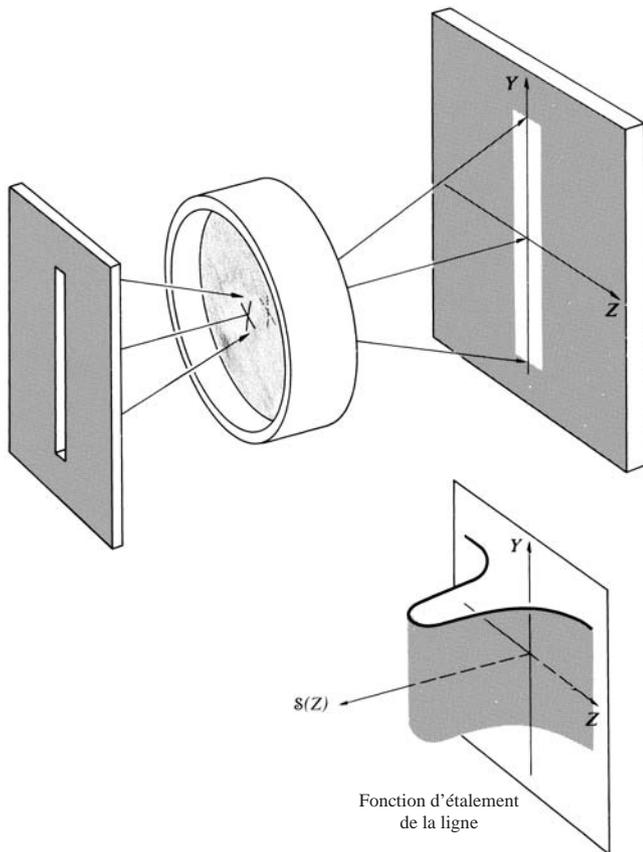


Figure 11.43 La fonction d'étalement de la ligne.

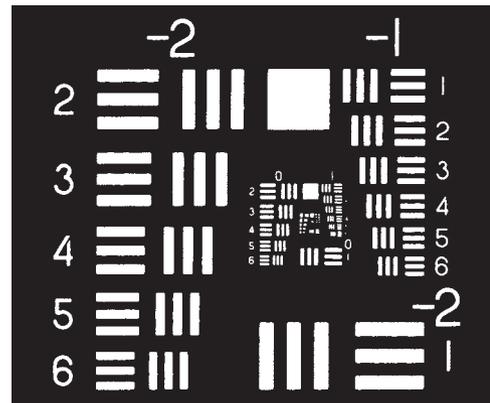


Figure 11.44 Une mire de résolution.

spatiale de coupure, souvent spécifiée en *paires de lignes par mm*, où chaque paire de barres noires et blanches constitue un cycle de l'objet. Cette approche souffre des mêmes insuffisances que si l'on voulait évaluer les performances d'un équipement audio haute fidélité à partir de sa seule fréquence de coupure supérieure. Les limitations de cette méthode sont devenues manifestes avec l'introduction de détecteurs équipant les caméras de télévision comme le plumbicon, l'image orthicon, et le vidicon. Ces tubes ont une trame de balayage relativement grossière qui fixe la limite de résolution du système TV à une fréquence spatiale relativement faible. Par conséquent, pour ces systèmes, il est raisonnable de concevoir

des optiques qui offrent un fort contraste dans ce domaine de fréquences restreint. Il serait inutile, voire même nuisible, de choisir une optique de très haute résolution. Il est plus judicieux de disposer d'un facteur de mérite applicable au domaine des fréquences de fonctionnement.

On a déjà représenté un objet comme une collection de sources ponctuelles, chacune étant imagée par le système optique suivant la réponse impulsionnelle spatiale, l'image étant ensuite obtenue par convolution. Maintenant on va aborder le problème de l'analyse des images sous une perspective connexe. Considérons l'objet comme une source de lumière constituée d'ondes planes. Celles-ci se propagent dans des directions spécifiques correspondant, via les équations (11.64) et (11.65), à des valeurs particulières de fréquences spatiales. Comment le système modifie-t-il l'amplitude et la phase de chaque onde plane entre les plans objet et image ?

Le **contraste** ou **modulation** est un paramètre très précieux pour juger de la performance d'un système optique :

$$\text{Modulation} \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (11.89)$$

Prenons par exemple le cas d'une distribution de luminance cosinusoidale en entrée (figure 11.45). On retrouve un cosinus

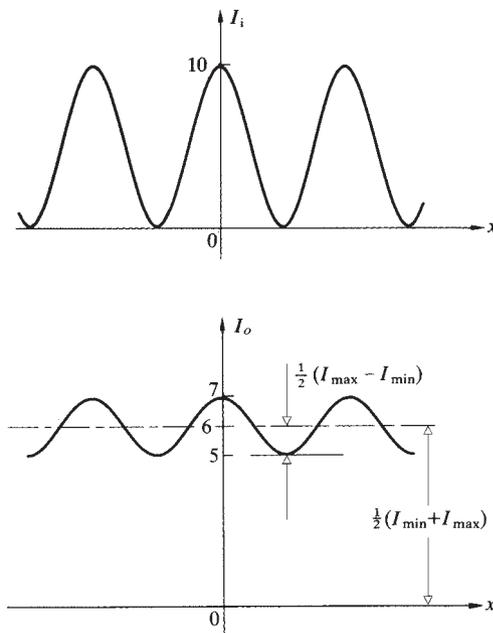


Figure 11.45 Luminance à l'entrée et éclairement en sortie d'un système optique.

en sortie mais qui est quelque peu altéré. La modulation, qui est le rapport entre la variation de la fonction et sa valeur moyenne, indique la capacité du système à faire ressortir ces variations par rapport au fond continu. Celle de l'entrée est maximale et vaut 1,0, mais celle de la sortie ne vaut que 0,17. Cela constitue la réponse de notre système hypothétique à une entrée qui ne comporterait qu'une seule fréquence spatiale. Ici, la modulation de l'entrée vaut 1,0, rendant la comparaison avec la sortie aisée. En général elle ne vaudra pas 1,0. C'est pourquoi on définit une **fonction de transfert de modulation**, ou FTM, comme le *rapport entre la modulation image et la modulation objet en fonction de la fréquence spatiale*.

La figure 11.46 montre les FTM de deux lentilles qui commencent toutes les deux à 1,0 pour la fréquence spatiale nulle (dc), et prennent une valeur nulle quelque part sur l'axe des abscisses, à une *fréquence de coupure* pour laquelle elles ne peuvent plus résoudre le signal. Pour des lentilles limitées par la diffraction, la fréquence de coupure ne dépend que de la taille de l'ouverture. Supposons qu'une de ces lentilles soit couplée au détecteur dont la fréquence de coupure est indiquée dans la figure 11.46. Même si la lentille-1 a une meilleure limite de résolution (sa fréquence de coupure est plus grande), la lentille-2 est plus adaptée au détecteur (tous les autres paramètres étant égaux).

Il faut signaler qu'une mire de résolution est constituée d'impulsions rectangulaires. Le contraste dans l'image résulte donc d'une superposition des composantes de Fourier du signal de sortie, aux contrastes différents. En fait, le point clé dans ce qui suit est que les *éléments optiques, fonctionnant comme des opérateurs linéaires, transforment une entrée sinusoidale en*

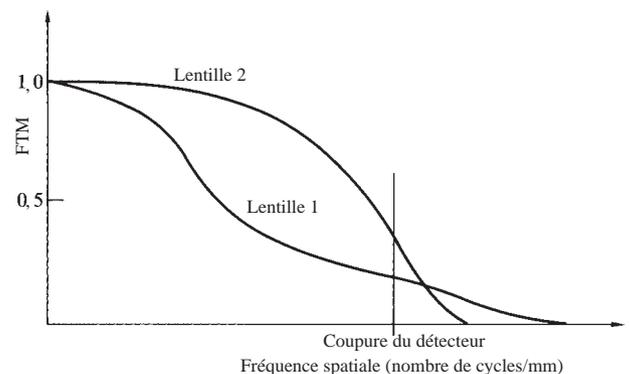


Figure 11.46 Fonctions de transfert de modulation de deux lentilles en fonction de la fréquence spatiale.

une sortie sinusoïdale. Malgré cela, les distributions d'intensité en entrée et en sortie ne sont jamais identiques. Par exemple, le grandissement d'un système affecte les fréquences spatiales de la sortie (ici, le grandissement sera pris égal à un). La diffraction et les aberrations réduisent l'amplitude des sinusoïdes (contraste). Finalement, les aberrations asymétriques (par exemple, la coma) et un décentrement des éléments optiques produisent un décalage de la position de la sinusoïde de sortie,

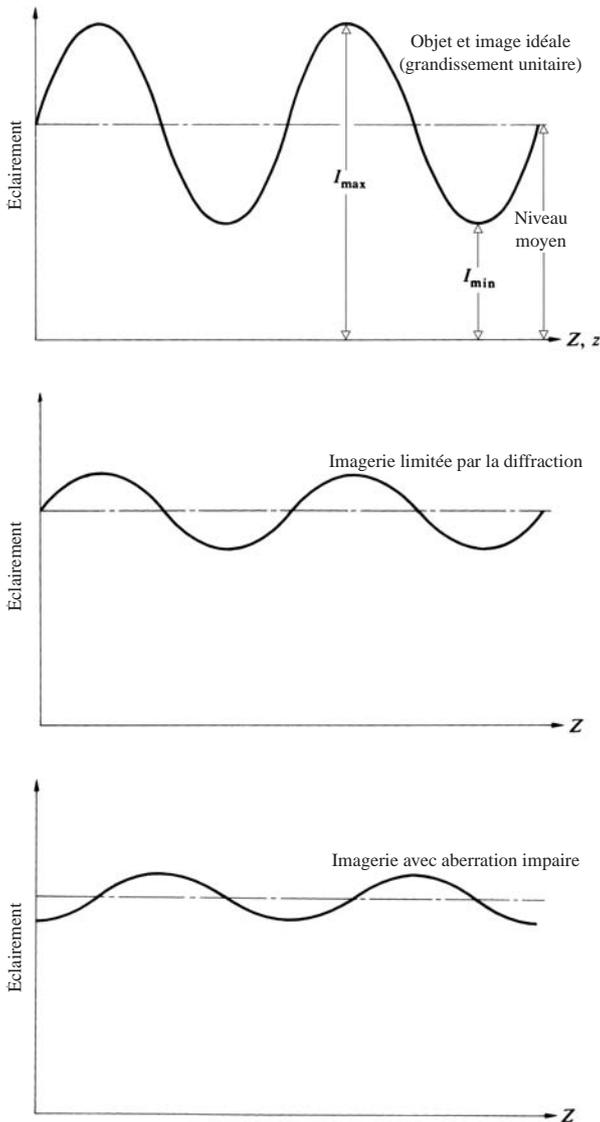


Figure 11.47 Objet sinusoïdale et image correspondante.

correspondant à l'introduction d'un décalage de phase. Ce dernier point, qui avait été abordé dans la figure 11.12, peut maintenant s'apprécier à l'aide de la figure 11.47.

Si la RIS est symétrique, la loi d'éclairement dans l'image est une sinusoïde non déphasée, alors qu'une RIS asymétrique déphasera sensiblement la sortie comme le montre la figure 11.48. De toute façon, *quelle que soit la forme de la RIS, l'image d'un objet périodique reste périodique*. En conséquence, si l'on caractérise un objet par ses composantes de Fourier, la transformation des composantes harmoniques par le système optique est la caractéristique fondamentale du processus. La fonction qui explicite cette relation est la **fonction de transfert optique**, ou FTO, fonction complexe de la

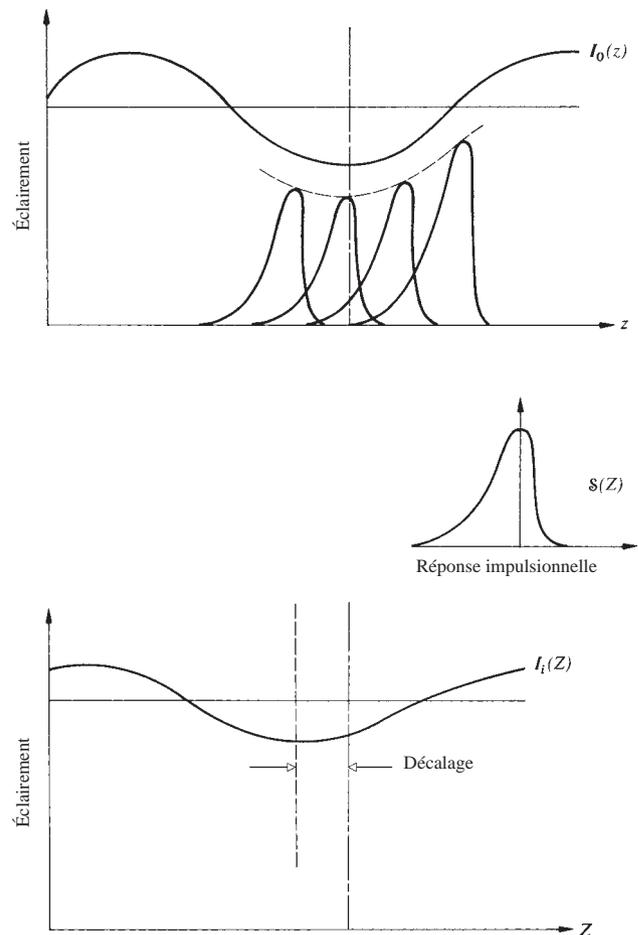


Figure 11.48 Objet sinusoïdal et image avec une réponse impulsionnelle asymétrique.

fréquence spatiale ; son module est la *fonction de transfert de modulation* (FTM) et sa phase est la **fonction de transfert de phase** (FTP). La FTM mesure la réduction de contraste entre l'objet et l'image dans tout le spectre. La FTP représente le déphasage relatif. Dans un système optique centré, celui-ci ne se produit qu'en dehors de l'axe ; de surcroît la FTP est souvent d'un intérêt moindre que la FTM. Cependant, la fonction de transfert optique doit toujours être étudiée attentivement car il existe des situations où la FTP joue un rôle crucial. La FTM est devenue un moyen universel d'évaluation de performances pour toutes sortes d'éléments et de systèmes, depuis les lentilles, les bandes magnétiques, et pellicules jusqu'aux télescopes, l'atmosphère, et l'œil pour n'en citer que quelques-uns. De plus, l'avantage de la FTM est que la FTM globale d'un ensemble de composants indépendants (optique, détecteur, écran...) est le produit des FTM individuelles des différents composants. Ainsi, si l'on photographie un objet ayant une modulation de 0,3 à 30 cycles par mm avec un appareil (réglé de manière appropriée) dont la lentille a une FTM de 0,5 à 30 cycles/mm et une pellicule*, comme la Tri-X, avec une FTM de 0,4 à 30 cycles/mm, la modulation de l'image sera $0,3 \times 0,5 \times 0,4 = 0,06$. Il faut bien noter cependant que ce résultat ne s'applique pas à un système optique constitué de composants optiques successifs car les aberrations sont susceptibles de se compenser d'un composant à l'autre.

Discussion plus formelle

On a vu dans l'équation (11.51) que l'image (dans les conditions d'incohérence et d'invariance dans l'espace) pouvait s'exprimer comme la convolution de la luminance de l'objet avec la RIS, ou, en d'autres termes,

$$I_i(Y, Z) = I_0(y, z) \otimes \delta(y, z) \quad (11.90)$$

La relation correspondante dans l'espace des fréquences spatiales s'obtient à l'aide de la transformée de Fourier,

$$\mathcal{F}\{I_i(Y, Z)\} = \mathcal{F}\{I_0(y, z)\} \cdot \mathcal{F}\{\delta(y, z)\} \quad (11.91)$$

et du théorème de convolution [équation (11.53)]. Il postule que *le spectre de fréquences de la distribution d'éclairement dans l'image est égale au produit du spectre en fréquences*

*En fait, l'idée de considérer un film comme un système linéaire sans bruit est un peu suspecte. Lire J. B. De Velis et G. B. Parrent, Jr., « Transfer Function for Cascaded Optical Systems », *J. Opt. Soc. Am.* **57**, 1486 (1967).

spatiales de la luminance de l'objet et de la transformée de la RIS (figure 11.49). C'est donc la multiplication par $\mathcal{F}\{\delta(y, z)\}$ qui altère le spectre en fréquences spatiales de l'objet. En d'autres termes, c'est $\mathcal{F}\{\delta(y, z)\}$ qui transforme le spectre de l'objet en celui de l'image, ce qui est traduit par la FTO. C'est pourquoi on définit la **FTO non normalisée** :

$$\mathcal{T}(k_Y, k_Z) \equiv \mathcal{F}\{\delta(y, z)\} \quad (11.92)$$

Le module et la phase de $\mathcal{T}(k_Y, k_Z)$ modifient respectivement l'amplitude et la phase des différentes composantes du spectre de l'objet pour former $\mathcal{F}\{I_i(Y, Z)\}$. Gardons à l'esprit que le seul terme, à droite du signe égal dans l'équation 11.90, est $\delta(y, z)$, il n'est donc pas surprenant que la RIS soit la contrepartie spatiale de la FTO.

On peut maintenant vérifier la proposition formulée précédemment selon laquelle un signal harmonique est transformé en un signal harmonique quelque peu altéré en sortie. À cette fin, supposons que :

$$I_0(z) = 1 + a \cos(k_{ZZ} + \epsilon) \quad (11.93)$$

où, pour simplifier, on considère une distribution uni-dimensionnelle. Le terme 1 est introduit pour nous assurer que la luminance ne prendra pas de valeurs négatives. Comme $f \otimes h = h \otimes f$, il est plus commode d'écrire :

$$I_i(Z) = \delta(Z) \otimes I_0(z)$$

et donc :

$$I_i(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{1 + a \cos[k_{ZZ}(Z - z) + \epsilon]\} \delta(z) dz$$

En développant le cosinus, on obtient :

$$\begin{aligned} I_i(Z) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z) dz + a \cos(k_{ZZ} + \epsilon) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos k_{ZZ} \delta(z) \\ & + a \sin(k_{ZZ} + \epsilon) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin k_{ZZ} \delta(z) dz \end{aligned}$$

D'après l'équation (7.57), les deuxième et la troisième intégrales sont respectivement les transformées de Fourier en cosinus et sinus de $\delta(z)$, c'est-à-dire $\mathcal{F}_c\{\delta(z)\}$ et $\mathcal{F}_s\{\delta(z)\}$. Donc :

$$\begin{aligned} I_i(z) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z) dz + \mathcal{F}_c\{\delta(z)\} a \cos(k_{ZZ} + \epsilon) \\ & + \mathcal{F}_s\{\delta(z)\} a \sin(k_{ZZ} + \epsilon) \end{aligned} \quad (11.94)$$

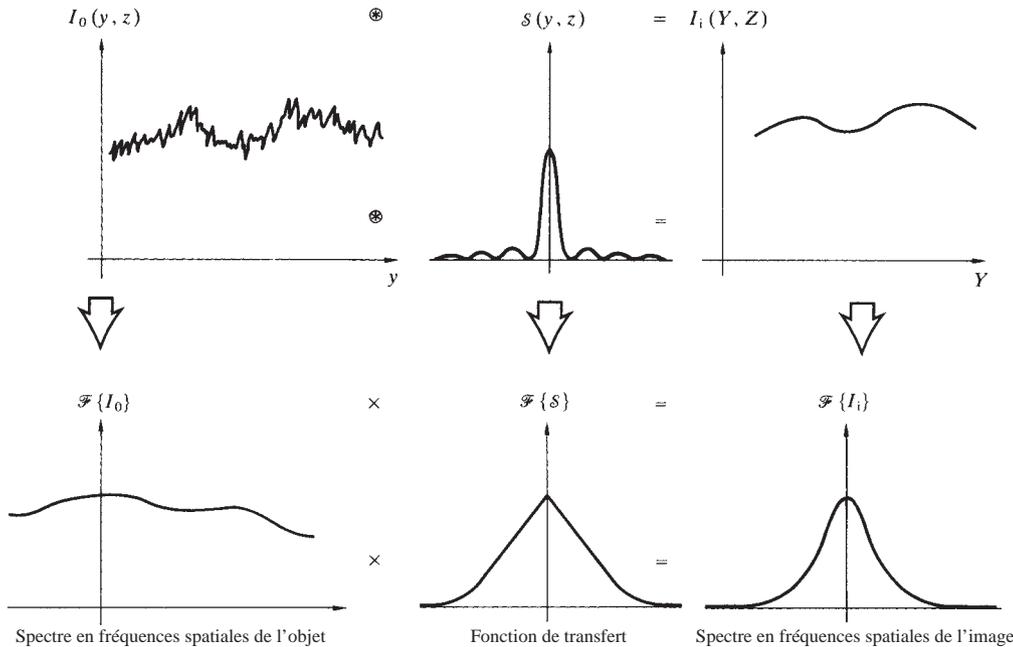


Figure 11.49 Relations entre le spectre de l'objet et de l'image par la FTO, et entre l'intensité de l'objet et de l'image par la fonction d'étalement du point – sous illumination incohérente.

On rappelle que la transformée complexe est définie par :

$$\mathcal{F}\{f(z)\} = \mathcal{F}_c\{f(z)\} + i\mathcal{F}_s\{f(z)\} \quad (11.95)$$

ou :

$$F(k_Z) = A(k_Z) + iB(k_Z) \quad [11.7]$$

De plus,

$$\mathcal{F}\{f(z)\} = |F(k_Z)|e^{i\varphi(k_Z)} = |F(k_Z)|[\cos \varphi + i \sin \varphi]$$

où

$$|F(k_Z)| = [A^2(k_Z) + B^2(k_Z)]^{1/2} \quad (11.96)$$

et :

$$\varphi(k) = \tan^{-1} \frac{B(k_Z)}{A(k_Z)} \quad (11.97)$$

De la même manière, on a pour la FTO :

$$\mathcal{F}\{s(z)\} \equiv \mathcal{T}(k_Z) = \mathcal{M}(k_Z)e^{i\Phi(k_Z)} \quad (11.98)$$

où $\mathcal{M}(k_Z)$ et $\Phi(k_Z)$ sont respectivement la FTM et la FTP. On laisse en exercice le soin de démontrer que l'équation (11.94) peut s'écrire :

$$I_i(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z) dz + a\mathcal{M}(k_Z) \cos [k_Z Z + \varepsilon - \Phi(k_Z)] \quad (11.99)$$

On remarque que cette fonction a la même forme que le signal d'entrée [équation (11.93)], $I_0(z)$. Si la fonction d'étalement de ligne est symétrique (paire), $\mathcal{F}_s\{s(z)\} = 0$, $\mathcal{M}(k_Z) = \mathcal{F}_c\{s(z)\}$, et $\Phi(k_Z) = 0$; il n'y a pas de décalage de phase comme on l'a souligné dans la section précédente. Pour une fonction d'étalement asymétrique (impaire), $\mathcal{F}_s\{s(z)\}$ est non nulle comme la FTP.

On définit la *fonction de transfert normalisée* en divisant $\mathcal{T}(k_Z)$ par sa valeur à la fréquence spatiale nulle, c'est-à-dire $\mathcal{T}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(z) dz$. La RIS normalisée devient :

$$\delta_n(z) = \frac{\delta(z)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z) dz} \quad (11.100)$$

et la **FTO normalisée** est :

$$T(k_Z) \equiv \frac{\mathcal{F}\{\delta(z)\}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z) dz} = \mathcal{F}\{\delta_n(z)\} \quad (11.101)$$

ou, à deux dimensions :

$$T(k_Y, k_Z) = \mathcal{M}(k_Y, k_Z)e^{i\Phi(k_Y, k_Z)} \quad (11.102)$$

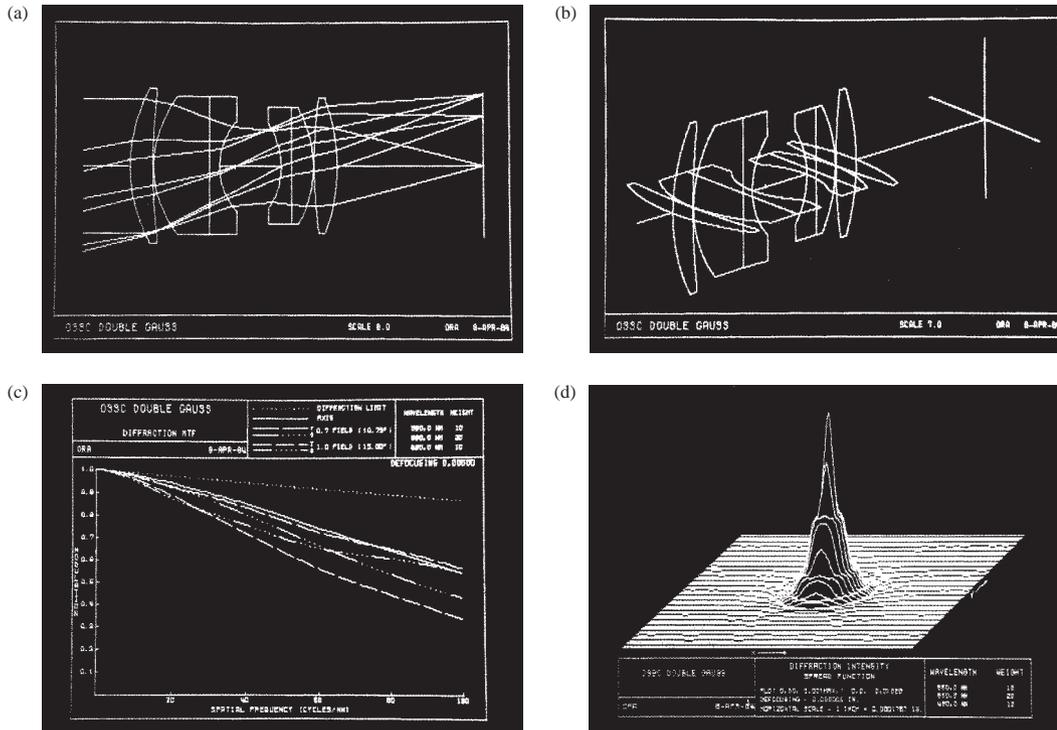


Figure 11.50 Un exemple du type d'information apporté par un logiciel de calcul optique pour ordinateurs. (Optical Research Associates.)

où $M(k_y, k_z) \equiv \mathcal{M}(k_y, k_z)/\mathcal{T}(0, 0)$. Donc $I_i(Z)$ dans l'équation (11.99) devrait être proportionnelle à :

$$1 + aM(k_z) \cos [k_z Z + \varepsilon - \Phi(k_z)]$$

La modulation image [équation (11.89)] devient $aM(k_z)$, la modulation objet [équation (11.93)] est a , et le ratio est comme on s'y attend la FTM normalisée = $M(k_z)$.

Cette discussion introductive est destinée plus à jeter une base solide qu'à fournir un traitement complet. Bien d'autres aspects peuvent être explorés, comme la relation entre l'auto-corrélation de la fonction pupillaire et la FTO, et à partir de là, les moyens de calculer et de mesurer les fonctions de transfert (figure 11.50) ; mais le lecteur est invité à se diriger vers la littérature existante*.

*Voir les articles suivants « The Evolution of the Transfer Function », de F. Abbott, début Mars 1970 dans *Optical Spectra* ; « Physical Optics Notebook », de G. B. Parrent, Jr., et B. J. Thompson, début Décembre 1964, dans *S.P.I.E. Journal*, Vol. 3 ; et « Image Structure and Transfer », de K. Sayanagi, 1967, rendu disponible par l'Institut d'Optique, Université de Rochester. Le lecteur pourra consulter avec profit de nombreux ouvrages sur le sujet, par exemple, *Modern Optics*, de E. Brown ; *Modern Optical Engineering*, de W. Smith ; et *Applied Optics*, de L. Levi. Dans tous ces livres, soyez attentif à la convention de signe pour les transformées.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Les solutions complètes des exercices (excepté ceux ayant un astérisque) figurent à la fin de l'ouvrage.

11.1 Déterminer la transformée de Fourier de la fonction :

$$E(x) = \begin{cases} E_0 \sin k_p x & |x| < L \\ 0 & |x| > L \end{cases}$$

Tracer $\mathcal{F}\{E(x)\}$. Discuter sa relation avec la figure 11.11.

11.2* Déterminer la transformée de Fourier de la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 k_p x & |x| < L \\ 0 & |x| > L \end{cases}$$

Tracer $\mathcal{F}\{f(x)\}$.

11.3 Déterminer la transformée de Fourier de la fonction :

$$f(t) = \begin{cases} \cos^2 \omega_p t & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

Tracer $F(\omega)$ et sa forme limite quand $T \rightarrow \pm\infty$.

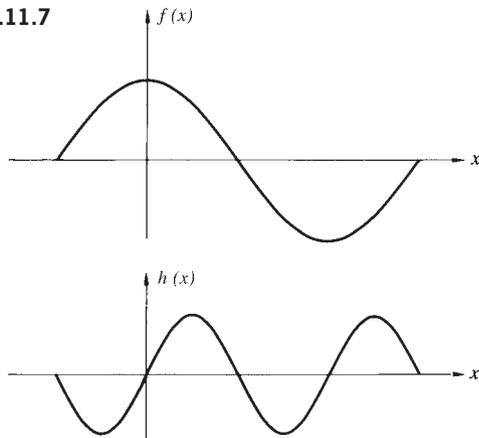
11.4* Montrer que $\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(k)$.

11.5* Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = A \cos k_0 x$.

11.6 Déterminer $\mathcal{F}\{af(x) + bh(x)\}$, a et b étant des constantes, avec $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(k)$ et $\mathcal{F}\{h(x)\} = H(k)$.

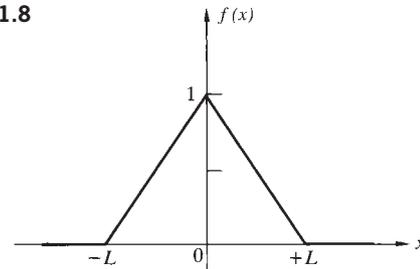
11.7* La figure P.11.7 montre deux fonctions périodiques, $f(x)$ et $h(x)$, dont la somme est la fonction $g(x)$. Tracer $g(x)$, ainsi que les parties réelle et imaginaire de son spectre en fréquences. Tracer l'amplitude du spectre pour chacune des trois fonctions.

Figure P.11.7



11.8 Calculer la transformée de Fourier de l'impulsion triangulaire de la figure P.11.8. Faire un tracé du résultat obtenu en précisant toutes les valeurs pertinentes sur la courbe.

Figure P.11.8



11.9* Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $f(x/a)$, avec a une constante et sachant que $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(k)$. Montrer que la transformée de $f(-x)$ est $F(-k)$.

11.10* Montrer que la transformée de Fourier de $\mathcal{F}\{f(x)\}$ vaut $2\pi f(-x)$, et que cela n'est pas sa transformée inverse, qui elle vaut $f(x)$. Cet exercice a été proposé par D. Chapman lorsqu'il était étudiant à l'Université d'Ottawa.

11.11* Soit la fonction rectangle définie par :

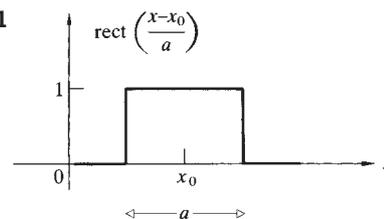
$$\text{rect} \left| \frac{x - x_0}{a} \right| = \begin{cases} 0, & |(x - x_0)/a| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |(x - x_0)/a| = \frac{1}{2} \\ 1, & |(x - x_0)/a| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

égale à 1/2 aux discontinuités (figure P.11.11). Déterminer la transformée de Fourier de la fonction :

$$f(x) = \text{rect} \left| \frac{x - x_0}{a} \right|$$

Remarque que c'est une impulsion rectangulaire comme celle de la figure 11.1b, décalée d'une distance x_0 de l'origine.

Figure P.11.11



11.12* En utilisant les résultats des deux exercices précédents, montrer que $\mathcal{F}\{(1/2\pi) \operatorname{sinc}(\frac{1}{2}x)\} = \operatorname{rect}(k)$, sachant que $\mathcal{F}\{\operatorname{rect}(x)\} = \operatorname{sinc}(\frac{1}{2}k)$ (d'après l'équation (7.58) avec $L = a$, où $a = 1$).

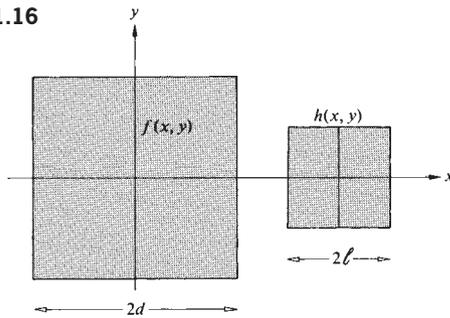
11.13* Montrer que $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(x)\}\} = f(x)$ en utilisant l'équation (11.38).

11.14* Montrer que $\mathcal{F}\{f(x)\}$ et $\mathcal{F}\{f(x - x_0)\}$ ne diffèrent que par un terme de phase.

11.15 Prouver que $f \otimes h = h \otimes f$ par un calcul direct puis avec le théorème de convolution.

11.16* Soit deux fonctions, $f(x, y)$ et $h(x, y)$, qui valent 1 dans une région carrée du plan- xy et zéro partout ailleurs (figure P.11.16). Si $g(X, Y)$ est leur convolution, tracer $g(X, 0)$.

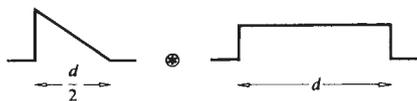
Figure P.11.16



11.17 En faisant référence au problème précédent, justifier le fait que la convolution vaille zéro pour $|X| \geq d +$ quand h est la réponse impulsionnelle spatiale.

11.18* Utiliser la méthode illustrée dans la figure 11.23 pour convoluer les deux fonctions de la figure P.11.18.

Figure P.11.18



11.19 En partant de $f(x) \otimes h(x) = g(X)$, montrer que $f(x - x_0) \otimes h(x) = g(X - x_0)$, x_0 étant une constante.

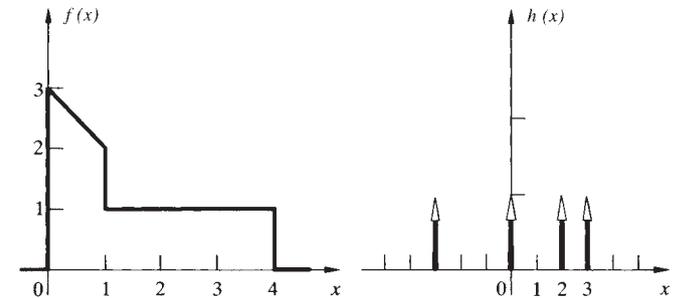
11.20* Prouver analytiquement que la convolution de n'importe quelle fonction $f(x)$ avec la fonction delta, $\delta(x)$, génère la fonction d'origine $f(X)$. On se rappellera à bon escient que $\delta(x)$ est paire.

11.21 Prouver que $\delta(x - x_0) \otimes f(x) = f(X - x_0)$ et discuter le résultat. Illustrer votre propos en traçant deux fonctions appropriées et leur convolution.

11.22* Montrer que $\mathcal{F}\{f(x) \cos k_0 x\} = [F(k - k_0) + F(k + k_0)]/2$ et que $\mathcal{F}\{f(x) \sin k_0 x\} = [F(k - k_0) - F(k + k_0)]/2i$.

11.23* La figure P.11.23 montre deux fonctions. Les convoluer graphiquement et représenter le résultat dans un repère.

Figure P.11.23



11.24 Déterminer la transformée de Fourier de la fonction :

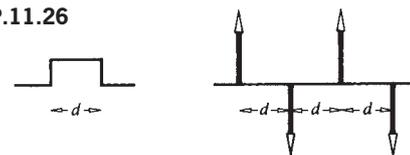
$$f(x) = \operatorname{rect}\left\{\frac{x-a}{a}\right\} + \operatorname{rect}\left\{\frac{x+a}{a}\right\}$$

(exercice 11.11).

11.25 Convoluer la fonction $f(x) = \delta(x + 3) + \delta(x - 2) + \delta(x - 5)$ avec n'importe quelle fonction $h(x)$ arbitraire.

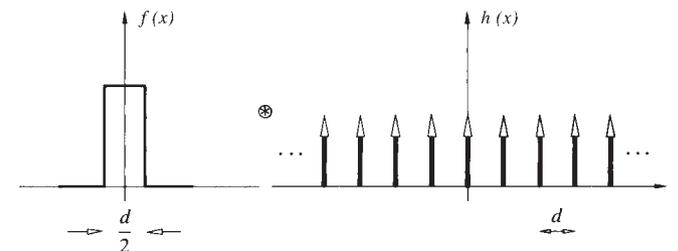
11.26* Faire un dessin de la fonction résultant de la convolution des deux fonctions décrites dans la figure P.11.26.

Figure P.11.26



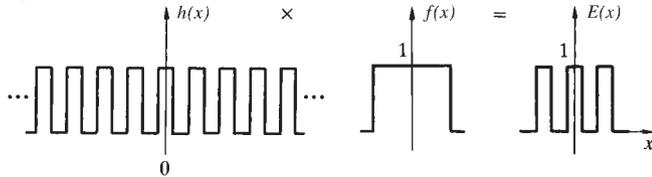
11.27* La figure P.11.27 montre une fonction *rect* et une fonction *comb* périodique. Les convoluer afin d'obtenir $g(x)$. Faire un dessin de la transformée de chacune des fonctions par rapport à la fréquence spatiale $k/2\pi = 1/\lambda$. Vérifier les résultats à l'aide du théorème de convolution.

Figure P.11.27



11.28 La figure P.11.28 montre, à une dimension, le champ électrique à travers une ouverture constituée de plusieurs plaquettes opaques formant un réseau. On peut le considérer comme le produit d'une onde rectangulaire périodique $h(x)$ et d'une fonction rectangulaire $f(x)$ valant un. Faire un dessin du champ électrique résultant dans la région de Fraunhofer.

Figure P.11.28



11.29 Montrer (pour des ondes planes en incidence normale) que si l'ouverture a un centre de symétrie (i.e. si la fonction d'ouverture est paire), alors le champ diffracté dans le cas de Fraunhofer a aussi un centre de symétrie.

11.30 Supposons qu'une ouverture produit une figure de diffraction de Fraunhofer $E(Y, Z)$. Montrer que si les dimensions de l'ouverture sont modifiées de sorte que sa fonction d'ouverture devienne $\mathcal{A}(y, z)$, alors le nouveau champ diffracté est

$$E'(Y, Z) = \frac{1}{\alpha\beta} E\left(\frac{Y}{\alpha}, \frac{Z}{\beta}\right)$$

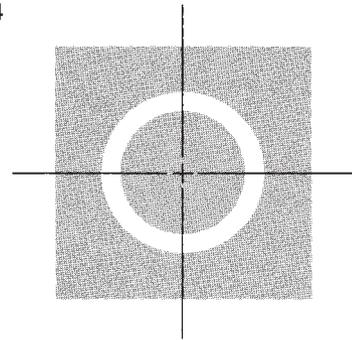
11.31 Montrer que quand $f(t) = A \sin(\omega t + \varepsilon)$, $C_{ff}(\tau) = (A^2/2) \cos \omega\tau$, ce qui confirme la perte d'information sur la phase par l'autocorrélation.

11.32 Soit une fente suivant la direction-y d'épaisseur b dont la fonction d'ouverture est constante et égale à \mathcal{A}_0 . Trouver le champ diffracté lorsqu'on apodise la fente avec un masque d'amplitude cosinusoidale. Cela revient à faire décroître la fonction d'ouverture cosinusoidalement de \mathcal{A}_0 au centre à 0 en $\pm b/2$.

11.33* Montrer par un calcul intégral que $f(x) \odot g(x) = f(x) \otimes g(-x)$.

11.34* La figure P.11.34 montre un anneau transparent sur un masque opaque. Tracer approximativement sa fonction d'autocorrélation en fonction de l , la séparation centre-à-centre.

Figure P.11.34



11.35* Considérer la fonction de la figure 11.35 comme une porteuse cosinusoidale modulée par une enveloppe exponentielle. Utiliser le théorème de convolution pour calculer sa transformée de Fourier.



Bases de la Théorie de la Cohérence

Dans le traitement de la superposition des ondes, on s'est limité, pour des raisons mathématiques, à des perturbations qui étaient soit complètement cohérentes, soit complètement incohérentes, car les extrêmes sont souvent plus faciles à étudier. En fait, ces conditions limites représentent plus une idéalisation conceptuelle qu'une réalité physique. Entre ces deux extrêmes existe un domaine d'un intérêt particulier dans la physique contemporaine – celui de la *cohérence partielle*. En fait, les demandes pour en approfondir l'étude théorique ne sont pas nouvelles ; elles datent du milieu des années 1860, lorsque Emile Verdet démontra qu'une source primaire incohérente, comme le Soleil, pouvait produire des franges observables lorsqu'elle éclairait les trous ($\approx 0,05$ mm) de l'expérience de Young (paragraphe 9.3). L'intérêt théorique fut ravivé par P. H. van Cittert dans les années 1930, puis par Fritz Zernike un peu plus tard. L'essor de nouvelles technologies pour les sources de lumière, comme le laser, redonna un second souffle au sujet sur un plan expérimental.

La théorie de la cohérence fait actuellement l'objet d'une intense recherche. Bien que ces subtilités exigent des connaissances qui sont au-delà du niveau de ce livre, nous allons néanmoins introduire quelques-unes des idées de base.

12.1 Introduction

Dans le paragraphe 7.10, on a utilisé l'image hautement avantageuse de la lumière quasi monochromatique comme une succession de trains d'onde de phase aléatoire et de durée finie (figure 7.38). Une telle perturbation est presque sinusoïdale, sa fréquence variant très lentement (en comparaison avec le taux d'oscillation, 10^{15} Hz) autour d'une valeur moyenne. L'amplitude fluctue aussi mais relativement peu. Un train d'onde existe en moyenne pendant un temps Δt_c , qui est le *temps de*

cohérence donné par l'inverse de la largeur de bande en fréquence $\Delta\nu$.

Il est souvent avantageux, même si c'est artificiel, de diviser les effets de cohérence en deux catégories, **temporelle** et **spatiale** (p. 406). *La première est reliée à la largeur de bande finie de la source, la seconde à son extension spatiale qui est finie.*

La lumière monochromatique correspond au cas irréaliste où $\Delta\nu = 0$ et Δt_c est infini. Malgré tout, sur un intervalle de temps inférieur à Δt_c une onde a un comportement monochromatique. En pratique, le temps de cohérence est la *durée pendant laquelle on peut prédire que la phase d'une onde restera raisonnablement stable en un point donné de l'espace*. C'est ce qu'on entend par **cohérence temporelle** ; c'est-à-dire que si Δt_c est grand, l'onde aura un haut degré de cohérence et vice versa.

On peut apprécier cette caractéristique d'un point de vue légèrement différent. Imaginons deux points situés sur le même rayon issu d'une source ponctuelle quasi monochromatique (figure 9.4). Si la longueur de cohérence, $c\Delta t_c$, est plus grande que la distance (r_{12}) entre P'_1 et P'_2 , alors un train d'onde peut occuper l'espace de séparation. La perturbation en P'_1 serait alors largement corrélée à celle en P'_2 . En revanche, si la distance longitudinale était plus grande que la longueur de cohérence, alors plusieurs trains d'onde avec une phase décorrélée rempliraient le gap r_{12} . Dans ce cas, les perturbations en ces deux points seraient indépendantes dans le temps. On parle aussi de *cohérence longitudinale* pour exprimer le degré de corrélation. Qu'on en parle en termes de temps de cohérence (Δt_c) ou de longueur de cohérence ($c\Delta t_c$), l'effet reste dû à la largeur de bande finie de la source.

L'idée de **cohérence spatiale** est le plus souvent employée pour décrire des effets dus à l'étendue spatiale finie des sources usuelles. Prenons une source large et monochromatique. Deux points séparés d'une distance bien supérieure à λ vont avoir des comportements indépendants, c'est-à-dire que la phase des perturbations qu'ils émettent n'est pas corrélée.

On dit que ces sources étendues sont incohérentes, terme qui est trompeur, comme on va le voir dans un instant. En effet, on ne s'intéresse pas tant au comportement de la source elle-même qu'à ce qui se passe non loin de celle-ci. La bonne question est quelle relation y a-t-il entre la nature de la source, sa configuration géométrique et la corrélation de la phase qui en résulte entre deux points, espacés latéralement, qui sont éclairés par cette source ?

Il est naturel de revenir sur l'expérience des trous de Young dans laquelle une source primaire monochromatique S illumine deux trous d'un écran opaque. Ces derniers servent à leur tour de sources secondaires, S_1 et S_2 , qui vont créer un système de franges sur un écran d'observation Σ_o placé à grande distance (figure 9.8). On a déjà vu que si S est un point source idéal, alors les ondelettes émises depuis S_1 et S_2 sur Σ_a maintiendront une relation de phase constante ; elles seront très bien corrélées, donc cohérentes. Il en résulte un système de franges stable qui, on l'a vu, est centré sur la ligne joignant la source primaire et le milieu du segment $[S_1S_2]$, et le champ est spatialement cohérent. Si maintenant on éclaire les sources secondaires S_1 et S_2 par deux sources primaires ponctuelles monochromatiques au lieu d'une, il en résultera deux systèmes de franges (un par source primaire) qui se chevaucheront. Si la source primaire est étendue, chacun de ses points va être à l'origine d'un système de franges décalé par rapport à celui des autres points ; l'ensemble va se brouiller, de sorte qu'on n'observe aucune frange.

Retournons aux considérations générales de la section 9.3, et en particulier à l'équation (9.7) pour y voir plus clair. Prenons deux ondes scalaires $E_1(t)$ et $E_2(t)$ qui se recouvrent en P , comme dans la figure 9.2. En lumière monochromatique, la figure d'interférence résultante en P dépendra de leur phase relative si les deux ondes ont même fréquence. Si les ondes sont en phase, $E_1(t)E_2(t)$ sera positif quel que soit t . Donc $I_{12} = 2\langle E_1(t)E_2(t) \rangle_T$ sera non nul, et l'intensité nette excédera $I_1 + I_2$. De la même manière, si les deux ondes sont en opposition de phase, alors le produit $E_1(t)E_2(t)$ sera toujours négatif impliquant un terme d'interférence négatif, I_{12} , et I sera inférieur à $I_1 + I_2$. Cependant le produit des deux champs n'est pas toujours totalement positif ou négatif, et par conséquent il sera non nul en moyenne.

Prenons maintenant le cas plus réaliste de deux ondes lumineuses quasimonochromatiques, comme les perturbations de la figure 7.38, de longueur de cohérence finie. On constate dans la figure 12.1 que le produit $E_1(t)E_2(t)$ est fonction du temps. Le terme d'interférence $\langle E_1(t)E_2(t) \rangle_T$,

moyenné sur un intervalle de temps grand par rapport à la durée d'un cycle de l'onde, sera presque nul donc $I \approx I_1 + I_2$. En d'autres termes, dans la mesure où les ondes ne sont pas corrélées (dans leurs montées et descentes), leur différence de phase n'est plus stable ; les ondes ne seront pas complètement cohérentes et elles ne produiront pas la figure d'interférence idéale du chapitre 9. Il faut rappeler ici l'équation (11.87) qui donne l'intercorrélation de deux fonctions pour $\tau = 0$. En fait, si l'on déplace P dans l'espace (par exemple, le long du plan d'observation dans l'expérience de Young), on introduit un décalage temporel τ entre les deux ondes et le terme d'interférence devient $\langle E_1(t)E_2(t + \tau) \rangle_T$ qui n'est rien d'autre que l'intercorrélation entre les deux champs qui interfèrent. La cohérence est une corrélation, ce qu'on explicitera formellement dans la section 12.3.

L'expérience de Young permet de comprendre les effets de la cohérence temporelle avec une source de largeur de bande

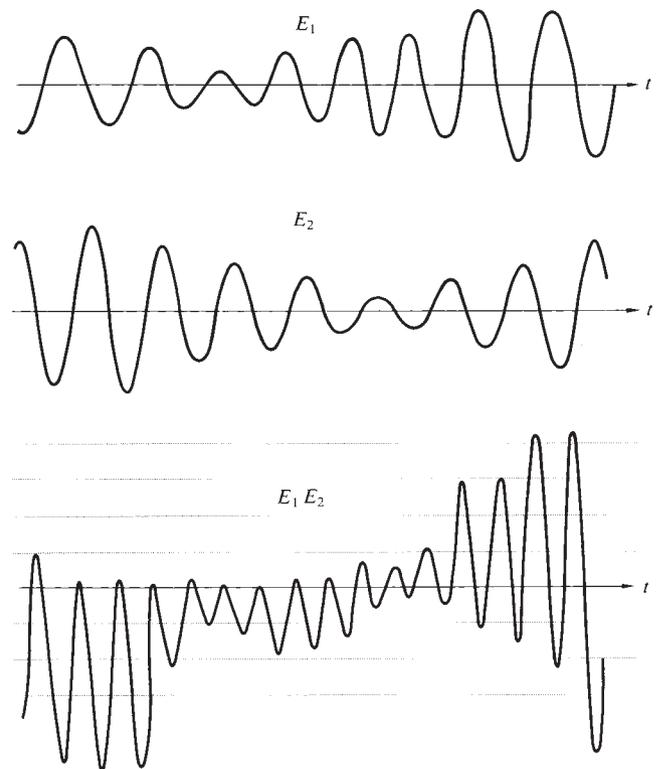


Figure 12.1 Deux champs- E et leur produit en fonction du temps. Plus les champs sont décorrélés, plus la moyenne du produit tend vers zéro.

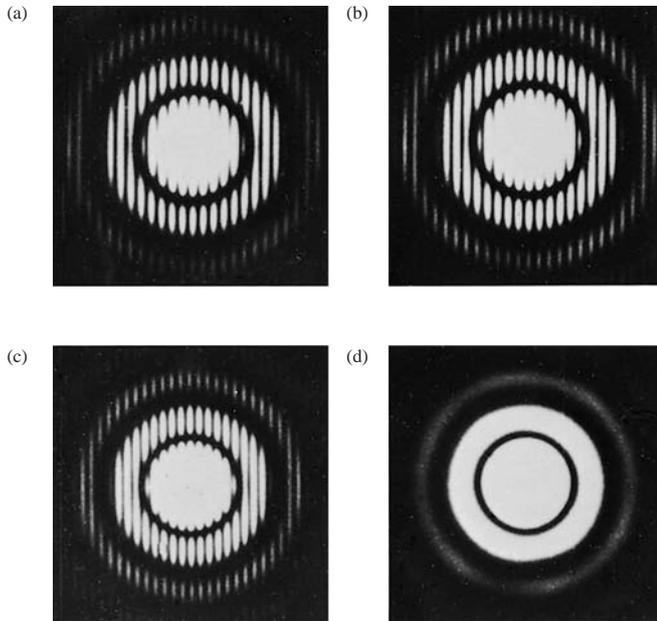


Figure 12.2 Interférence avec une paire d'ouvertures circulaires. (a) Laser He-Ne illuminant les trous. (b) Même chose qu'en (a) avec une lame de verre de 0,5 mm d'épaisseur recouvrant un des trous. (c) Franges sous illumination par une lampe à arc de Hg sans lame de verre. (d) Cette fois les franges disparaissent quand on insère la lame avec la lampe à Hg. [D'après B. J. Thompson, *J. Soc. Photo. Inst. Engr.* **4**, 7 (1965).]

finie. La figure 12.2a montre le système de franges qui est obtenu avec deux ouvertures circulaires éclairées par un laser He-Ne. Une lame de verre d'épaisseur 0,5 mm se trouvait devant le trou S_1 lorsque la photo de la figure 12.2b a été prise. On ne constate aucun changement de forme du système de franges (autre qu'un changement de position) car la longueur de cohérence du laser excède largement la différence de chemin optique introduite par la lame. En revanche, en répétant la même expérience avec la lampe à vapeur de mercure collimatée (c) et (d) de la figure 12.2, les franges disparaissent. Ici la longueur de cohérence est suffisamment courte et le chemin optique introduit par la lame assez long pour que des trains d'onde émis par les deux ouvertures ne soient pas corrélés en arrivant dans le plan d'observation. En d'autres termes, le train d'onde émis par S_1 est tellement retardé par la lame qu'il rencontrera un autre train d'onde que celui qui a été émis en même temps par S_2 .

Les phénomènes de cohérence spatiale et temporelle sont reliés à la corrélation entre signaux optiques. Cela signifie qu'ils dépendent des effets produits par les fluctuations relatives

des champs en deux points de l'espace-temps. Incidemment, le terme *cohérence temporelle* semble impliquer que l'effet est temporel. En fait, il est relié à la dimension finie d'un train d'onde dans l'espace ou dans le temps, et c'est la raison pour laquelle on la désigne parfois sous le nom de *cohérence longitudinale*. Quoiqu'il en soit, elle dépend avant tout de la stabilité de la phase dans le temps, de sorte que le terme de *cohérence temporelle* est plus adapté. La cohérence spatiale, ou *cohérence latérale spatiale*, est plus facile à apprécier car elle est intimement reliée au concept de front d'onde. Si deux points, décalés transversalement, sont sur le même front d'onde à un instant donné, les champs en ces points sont spatialement cohérents (paragraphe 12.3.1).

12.2 Visibilité

La qualité des franges produites par un système interférométrique peut être mesurée par la **visibilité** \mathcal{V} , définie par Michelson comme

$$\mathcal{V}(\vec{r}) \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (12.1)$$

Elle est identique à la *modulation* de l'équation (11.89). Ici, I_{\max} et I_{\min} sont les éclaircissements maximum et minimum du système de franges. Dans l'expérience des trous de Young, on fait varier la distance entre les ouvertures ou la taille de la source primaire quasi monochromatique incohérente pour mesurer les variations *ad hoc* de \mathcal{V} , et les relier à la notion de cohérence. On peut aussi chercher une expression analytique de la distribution de l'éclaircissement grâce à la figure 12.3.* Pour localiser plus efficacement la figure d'interférence, on utilise une lentille L qui produit, dans le plan Σ_o , un meilleur recouvrement des pincesaux de lumière diffractés par les trous. Un point source S' sur l'axe produit la figure définie par

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{Ya\pi}{s\lambda} \right) \quad (12.2)$$

d'après le paragraphe 9.3. De même, un point source qui serait situé au-dessus ou en dessous de S' et sur une droite normale à $\overline{S_1S_2}$ produirait la même figure d'interférence, à cela près qu'elle serait décalée dans une direction parallèle aux franges.

*Présentation inspirée du Chapitre 11 de *Wave Phenomena* par Towne. Voir Klein, *Optics*, section 6.3, ou l'exercice 12.6 pour d'autres versions.

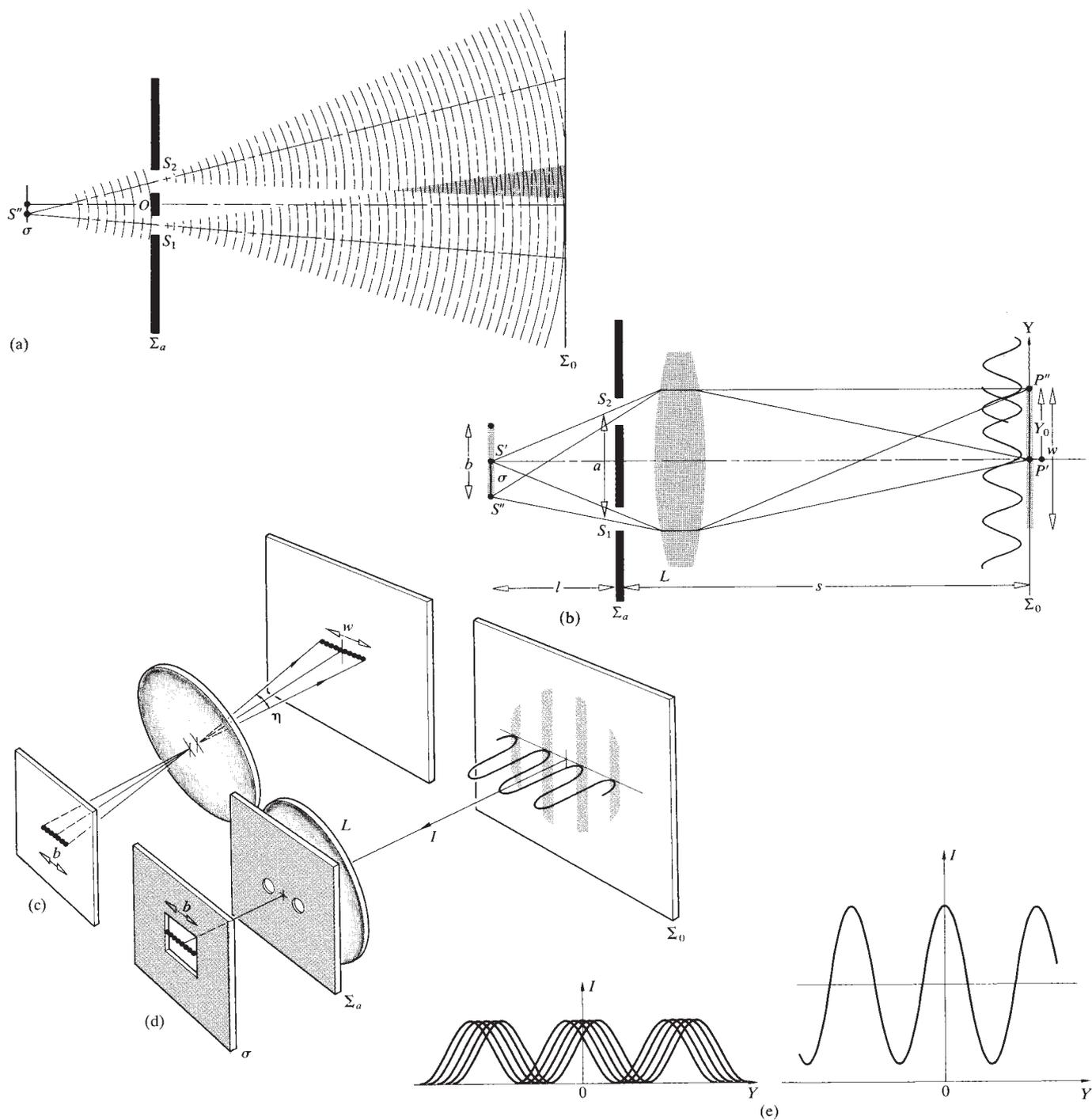


Figure 12.3 Expérience de Young avec une fente source étendue. (e) Une représentation simple montrant comment des franges décalées, de même fréquence spatiale, se recouvrent et se combinent pour former une perturbation de même fréquence spatiale mais de visibilité réduite (figure 7.9).

Si l'on remplace la source ponctuelle S' par un segment lumineux (une fente normale au plan de la feuille), on ne fera qu'accroître la quantité de lumière. En revanche, une seconde source ponctuelle hors axe, disons en S'' , produira un système de franges centré en P'' , son image dans le plan Σ_o en l'absence des trous. Une ondelette « sphérique » quittant S'' est focalisée en P'' , donc les rayons se propagent de S'' à P'' à chemin optique égal, et l'interférence doit être constructive ; en d'autres termes, le maximum central est en P'' . La différence de chemin $\overline{S_1P''} - \overline{S_2P''}$ contribue au déplacement $\overline{P'P''}$. Par conséquent, S'' produit un système de franges identique à celui de S' mais décalé d'une quantité $\overline{P'P''}$. Comme ces sources sont incohérentes, les éclairagements sont additifs en Σ_o (figure 12.3e).

On peut déterminer la figure qui résulte d'une source rectangulaire de largeur b en cherchant l'éclairément dû à une source linéique incohérente parallèle à $\overline{S_1S_2}$. Remarquez que dans la figure 12.3b la variable Y_0 représente la position de n'importe quel point image en l'absence des trous. En présence de Σ_a , chaque élément différentiel de la source produit un système de franges qui est centré sur son image, à une distance Y_0 de l'origine Σ_o . De plus, sa contribution à l'éclairément, dI , est proportionnelle à la longueur de son image dY_0 sur Σ_o . Donc, en utilisant l'équation (9.31), la contribution de dY_0 à l'éclairément total devient

$$dI = A dY_0 \cos^2 \left[\frac{a\pi}{s\lambda} (Y - Y_0) \right] \quad (12.3)$$

où A est une constante. Intégrer sur l'étendue w de l'image de la source revient en fait à intégrer sur celle de la source, et nous permet d'avoir le système de franges dans son ensemble :

$$I(Y) = A \int_{-w/2}^{+w/2} \cos^2 \left[\frac{a\pi}{s\lambda} (Y - Y_0) \right] dY_0 \quad (12.4)$$

Après quelques manipulations trigonométriques élémentaires, l'équation (12.4) se réécrit comme suit

$$I(Y) = \frac{Aw}{2} + \frac{A}{2} \frac{s\lambda}{a\pi} \sin \left(\frac{a\pi}{s\lambda} w \right) \cos \left(2 \frac{a\pi}{s\lambda} Y \right) \quad (12.5)$$

L'éclairément oscille autour d'une valeur moyenne $\bar{I} = Aw/2$, qui est proportionnelle à w , lui-même proportionnel à la taille de la source. Par conséquent,

$$\frac{I(Y)}{\bar{I}} = 1 + \left(\frac{\sin a\pi w/s\lambda}{a\pi w/s\lambda} \right) \cos \left(2 \frac{a\pi}{s\lambda} Y \right) \quad (12.6)$$

$$\text{ou} \quad \frac{I(Y)}{\bar{I}} = 1 + \text{sinc} \left(\frac{a\pi w}{s\lambda} \right) \cos \left(2 \frac{a\pi}{s\lambda} Y \right) \quad (12.7)$$

On en déduit les valeurs extrêmes de l'éclairément relatif

$$\frac{I_{\max}}{\bar{I}} = 1 + \left| \text{sinc} \left(\frac{a\pi w}{s\lambda} \right) \right| \quad (12.8)$$

$$\text{et} \quad \frac{I_{\min}}{\bar{I}} = 1 - \left| \text{sinc} \left(\frac{a\pi w}{s\lambda} \right) \right| \quad (12.9)$$

Quand w est petit par rapport à la taille d'une frange ($s\lambda/a$), la fonction sinc (p. 53) tend vers 1 et $I_{\max}/\bar{I} = 2$, tandis que $I_{\min}/\bar{I} = 0$ (figure 12.4). Quand w augmente, I_{\min} devient significativement non nul, et les franges perdent leur contraste jusqu'à disparaître entièrement pour $w = s\lambda/a$. Entre les valeurs π et 2π de son argument (i.e. $w = s\lambda/a$ et $w = 2s\lambda/a$), la fonction sinc est négative. Au-delà de $w = s\lambda/a$, les franges réapparaissent avec une différence de phase opposée ; en d'autres termes, alors qu'il y avait un maximum pour $Y = 0$, il y a maintenant un minimum.

La lumière diffractée par les ouvertures n'est pas localisée (section 10.2), de sorte que le système de franges ne s'étend pas indéfiniment quand Y croît. La figure 12.4a ressemble plus à la figure 12.5.

Comme l'étendue de la source (b) et la séparation entre les fentes (a) sont très petites par rapport aux distances (l) et (s) entre les écrans, on va s'autoriser quelques simplifications. D'après la figure 12.3c, $b \approx l\eta$ et $w \approx s\eta$; donc $w/s \approx b/l$. Par conséquent, $(a\pi w/s\lambda) \approx (a\pi\eta/\lambda) \approx (a\pi b/l\lambda)$. La visibilité des franges donnée par l'équation (12.1) devient :

$$\mathcal{V} = \left| \text{sinc} \left(\frac{a\pi w}{s\lambda} \right) \right| = \left| \text{sinc} \left(\frac{a\pi b}{l\lambda} \right) \right| \quad (12.10)$$

dont la courbe représentative est tracée sur la figure 12.6. On remarque que \mathcal{V} est à la fois fonction de la largeur de la source et de la distance a entre les trous. On notera que la visibilité des figures 12.4a et 12.5 est égale à un car $I_{\min} = 0$. On comprend alors que la visibilité d'un système de franges est intimement liée à la source primaire qui éclaire l'écran contenant les ouvertures. Si cette source est un point, $b = 0$ et la visibilité est optimale et égale à 1. Plus $(a\pi b/l\lambda)$ est petit, meilleure est la visibilité et plus nettes seront les franges. Gardons en mémoire le fait qu'on a déjà rencontré la fonction sinc lors de l'évaluation de la figure de diffraction par une ouverture rectangulaire.

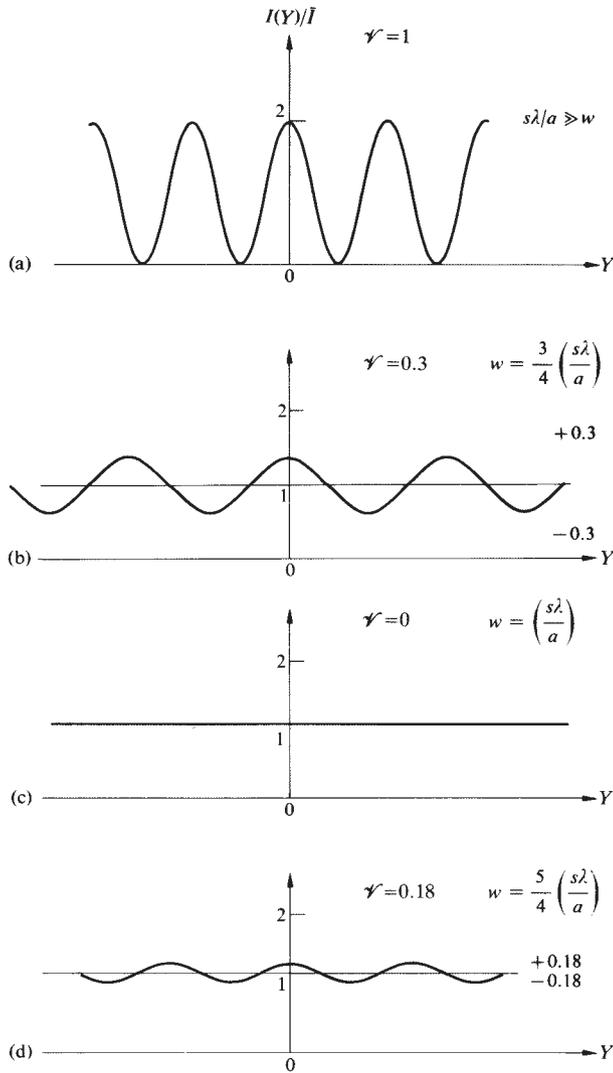


Figure 12.4 Franges en fonction de la taille de la fente source. Ici w est la largeur de l'image de la fente, et $s\lambda/a$ est la largeur crête-à-crête d'extinction des franges.

Quand la source primaire est circulaire, la visibilité est plus complexe à calculer. On démontre qu'elle est proportionnelle à la fonction de Bessel d'ordre un (figure 12.7). Cela aussi doit nous rappeler la diffraction, cette fois par une ouverture circulaire [équation (10.56)]. Ces similarités entre l'expression de \mathcal{V} et les figures de diffraction dues à la géométrie de la source ne sont certainement pas fortuites. Elles sont une manifestation du théorème de van Cittert-Zernike.

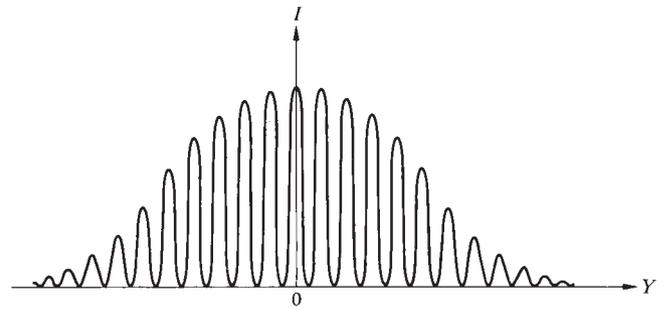


Figure 12.5 Effet de la diffraction sur les franges d'interférence.

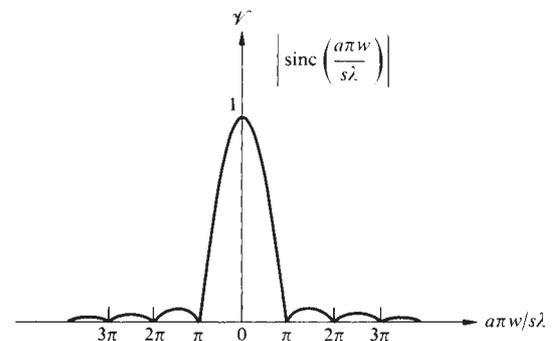


Figure 12.6 Visibilité donnée par l'équation (12.10).

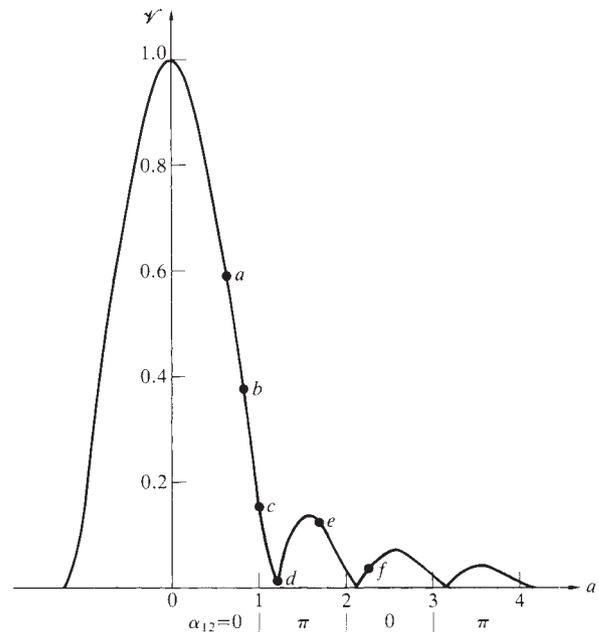


Figure 12.7 Visibilité pour une source circulaire.

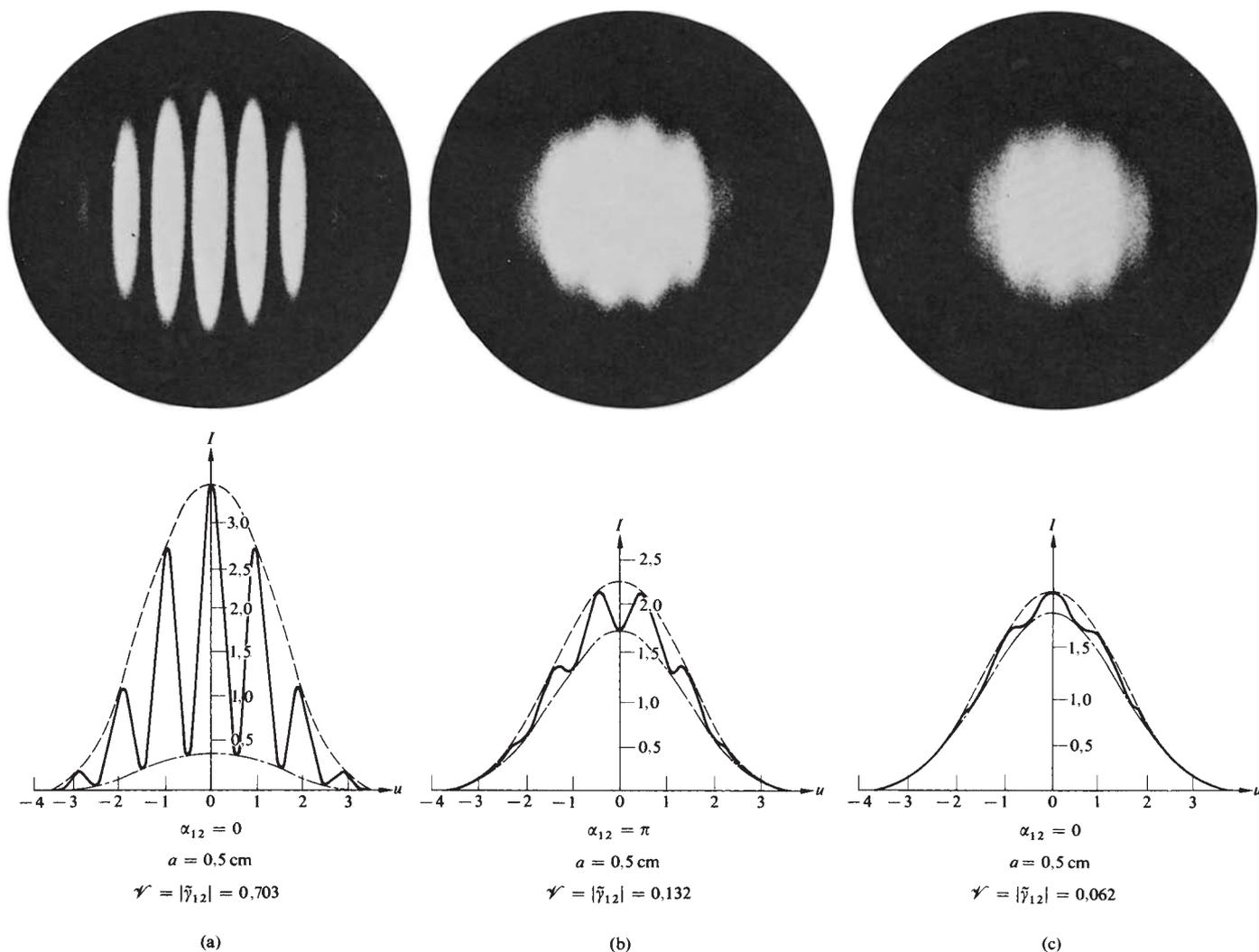


Figure 12.8 Figure d'interférence à deux ondes. Ici la séparation entre les ouvertures est constante, ce qui produit un nombre constant de franges par unité de longueur sur chaque photo. La visibilité varie en fonction de la taille de la source primaire incohérente. [D'après B. J. Thompson, *J. Soc. Photo. Inst. Engr.* 4, 7 (1965).]

La figure 12.9 montre plusieurs systèmes de franges avec différentes valeurs de a , pour une source circulaire de taille constante. La visibilité commence par décroître, figures (a) à (d), puis elle croît pour (e) et elle re-décroît pour (f). Les valeurs de \mathcal{V} sont tracées sur la figure 12.7. On remarque un décalage des pics, c'est-à-dire un changement de phase au centre de la figure d'interférence pour les points du deuxième lobe de la figure 12.7 (la fonction de Bessel y est négative). En

d'autres termes, (a), (b), et (c) ont un maximum au centre, tandis que (d) et (e) ont un minimum, et (f) un maximum. De la même manière, les tailles de source, telles que $\text{sinc}(a\pi w/s\lambda)$ dans l'équation (12.7) est positif ou négatif, produisent respectivement un maximum ou un minimum pour $I(0)/\bar{I}$. Gardons à l'esprit qu'il est possible de définir une visibilité complexe dont l'amplitude est \mathcal{V} , et la phase est le changement de phase ; on reviendra à cette idée plus tard.

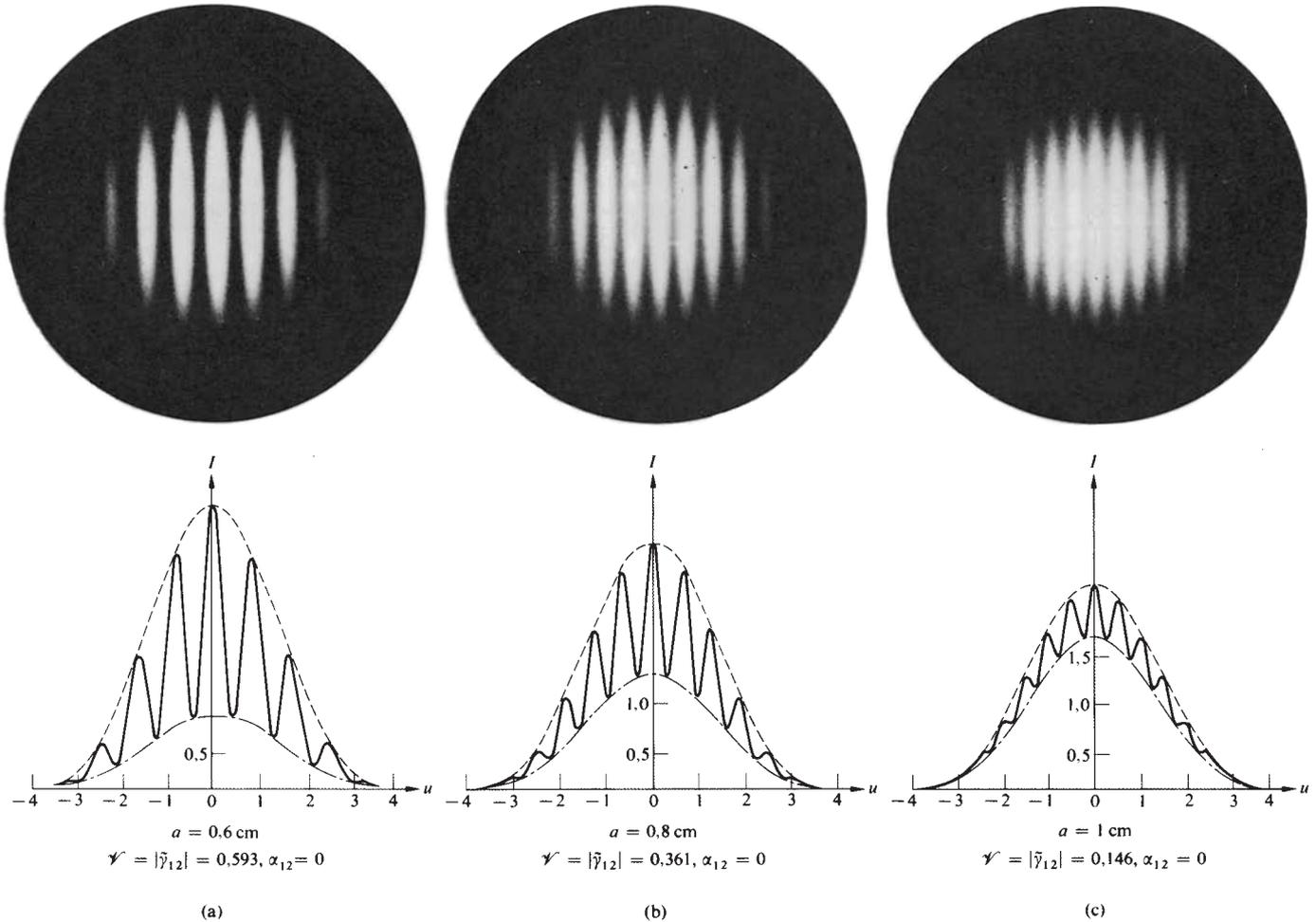


Figure 12.9 Interférences à deux ondes en lumière partiellement cohérente. Les photographies montrent les variations de la visibilité en fonction de a , la séparation entre les ouvertures. Théoriquement $I_{\max} \propto 1 + |2J_1(u)/u|$ et $I_{\min} \propto 1 - |2J_1(u)/u|$. Plusieurs symboles seront présentés plus tard. [D'après B. J. Thompson et E. Wolf, *J. Opt. Soc. Am.* **47**, 895 (1957).]

Dans la figure 12.8, la séparation a est cette fois maintenue constante, tandis que le diamètre de la source incohérente croît. Comme la taille des franges est inversement proportionnelle à a , l'interférence est identique dans les trois cas présentés.

Il faut aussi mentionner que l'effet d'une largeur de bande finie se manifeste sur la figure d'interférence par une décroissance graduelle de \mathcal{V} avec Y , comme dans la figure 12.10 (problème 12.3).

12.3 Fonction de cohérence mutuelle et degré de cohérence

On va maintenant préciser de manière plus formelle les concepts qu'on vient d'aborder. Considérons une source étendue, à bande spectrale étroite, qui émet un rayonnement dont la représentation complexe est $\tilde{E}(\mathbf{r}, t)$. On néglige les effets de la polarisation pour se limiter à un calcul scalaire.

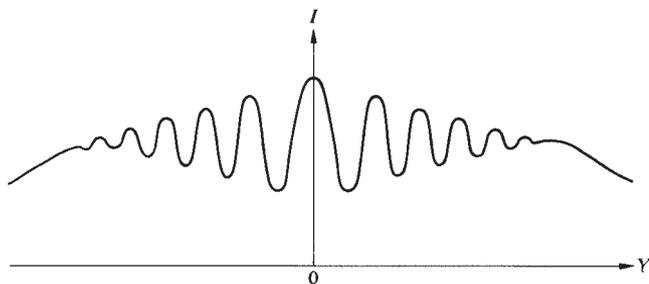
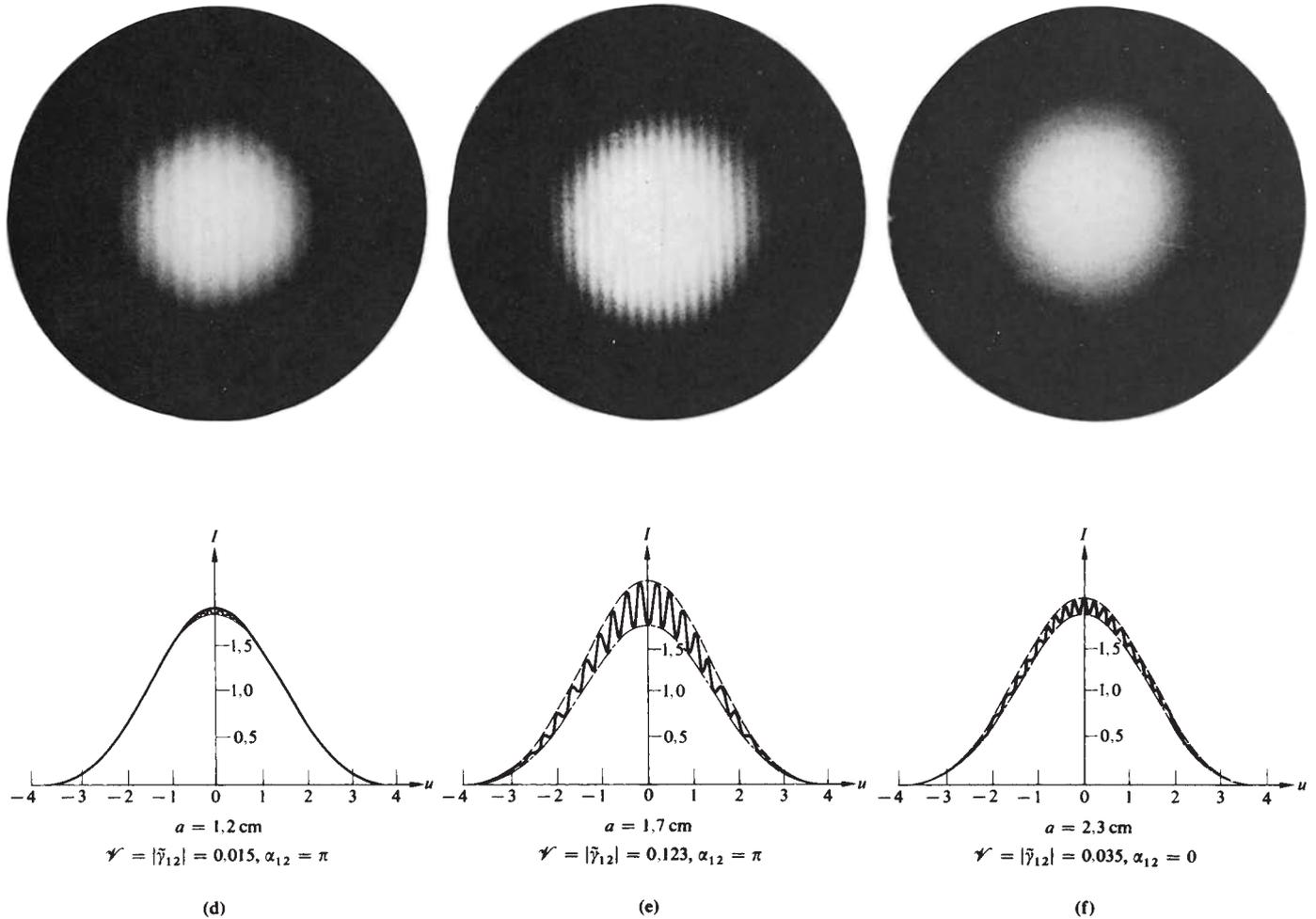


Figure 12.10 Une bande passante finie entraîne une décroissance de \mathcal{V} lorsque Y augmente.

Les perturbations en deux points S_1 et S_2 sont $\tilde{E}(S_1, t)$ et $\tilde{E}(S_2, t)$ ou, plus succinctement, $\tilde{E}_1(t)$ et $\tilde{E}_2(t)$. On se place dans les conditions de l'expérience de Young en faisant de S_1 et S_2 les centres de deux ouvertures circulaires sur un écran opaque (figure 12.11). Les deux ouvertures servent de sources secondaires qui émettent des ondelettes en direction d'un point P de Σ_o . Le champ résultant en P est :

$$\tilde{E}_P(t) = \tilde{K}_1 \tilde{E}_1(t - t_1) + \tilde{K}_2 \tilde{E}_2(t - t_2) \quad (12.11)$$

où $t_1 = r_1/c$ et $t_2 = r_2/c$. Le champ en un point de l'espace-temps (P, t) est ainsi déterminé par les champs qui étaient

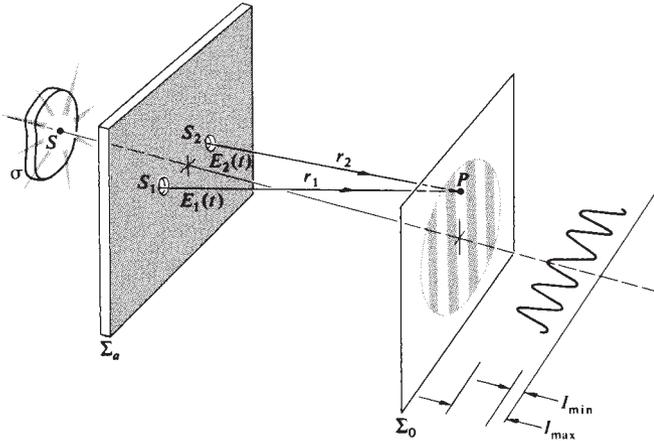


Figure 12.11 Expérience de Young.

présents en S_1 et S_2 , aux instants t_1 et t_2 où les deux ouvertures ont émis les ondes qui interfèrent maintenant en P . Les quantités \tilde{K}_1 et \tilde{K}_2 s'appellent des *propagateurs* ; ils dépendent de la taille des ouvertures et de leur position relative par rapport à P . Ils recouvrent mathématiquement toutes les altérations que subit le champ à la traversée d'une des ouvertures. Par exemple, les ondelettes secondaires émises par les trous de notre expérience sont déphasées de $\pi/2$ rad par rapport à l'onde primaire incidente sur l'écran d'ouverture Σ_a (paragraphe 10.3.1). Le changement de phase subi à la traversée de Σ_a est justement confié aux \tilde{K} . De plus, ces propagateurs prennent en compte la dégradation du champ due à des causes telles que l'absorption, la diffraction, etc. Dans le cas particulier du déphasage de $\pi/2$, \tilde{K}_1 et \tilde{K}_2 sont purement imaginaires.

L'éclairement résultant en P sur un intervalle de temps fini relativement long par rapport au temps de cohérence est :

$$I = \langle \tilde{E}_P(t) \tilde{E}_P^*(t) \rangle_T \quad (12.12)$$

Dans l'équation (12.12) plusieurs constantes multiplicatives sont omises. En utilisant l'équation (12.11),

$$\begin{aligned} I = & \tilde{K}_1 \tilde{K}_1^* \langle \tilde{E}_1(t - t_1) \tilde{E}_1^*(t - t_1) \rangle_T \\ & + \tilde{K}_2 \tilde{K}_2^* \langle \tilde{E}_2(t - t_2) \tilde{E}_2^*(t - t_2) \rangle_T \\ & + \tilde{K}_1 \tilde{K}_2^* \langle \tilde{E}_1(t - t_1) \tilde{E}_2^*(t - t_2) \rangle_T \\ & + \tilde{K}_1^* \tilde{K}_2 \langle \tilde{E}_1^*(t - t_1) \tilde{E}_2(t - t_2) \rangle_T \end{aligned} \quad (12.13)$$

Supposons que le champ d'onde soit *stationnaire*, ce qui est presque toujours le cas en optique classique ; en d'autres

termes, sa nature statistique n'est pas altérée dans le temps, de sorte que sa moyenne est indépendante de l'origine des temps. Donc, même si les variables de champ subissent des fluctuations, l'origine peut être modifiée sans affecter les moyennes de l'équation (12.13). L'instant de mesure de I n'a donc aucune importance. Par conséquent, les deux premiers termes se réécrivent :

$$I_{S_1} = \langle \tilde{E}_1(t) \tilde{E}_1^*(t) \rangle_T \quad \text{et} \quad I_{S_2} = \langle \tilde{E}_2(t) \tilde{E}_2^*(t) \rangle_T$$

où l'origine a été décalée de t_1 et t_2 , respectivement. Ici les indices indiquent les éclaircissements en S_1 et S_2 . De plus, en posant $\tau = t_2 - t_1$, on peut décaler l'origine des temps de t_2 dans les deux derniers termes de l'équation (12.13), qui s'écrivent alors :

$$\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^* \langle \tilde{E}_1(t + \tau) \tilde{E}_2^*(t) \rangle_T + \tilde{K}_1^* \tilde{K}_2 \langle \tilde{E}_1^*(t + \tau) \tilde{E}_2(t) \rangle_T$$

cela est la somme de deux termes conjugués et vaut donc deux fois sa partie réelle, c'est-à-dire :

$$2 \operatorname{Re} \left[\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^* \langle \tilde{E}_1(t + \tau) \tilde{E}_2^*(t) \rangle_T \right]$$

Les facteurs- \tilde{K} sont purement imaginaires donc $\tilde{K}_1 \tilde{K}_2^* = \tilde{K}_1^* \tilde{K}_2 = |\tilde{K}_1| |\tilde{K}_2|$. La moyenne dans le temps de ce terme n'est rien d'autre qu'une fonction d'intercorrélation [section 11.3.4] qu'on appelle :

$$\tilde{\Gamma}_{12}(\tau) \equiv \langle \tilde{E}_1(t + \tau) \tilde{E}_2^*(t) \rangle_T \quad (12.14)$$

C'est la **fonction de cohérence mutuelle** des champs en S_1 et en S_2 . L'équation (12.13) prend alors la forme :

$$I = |\tilde{K}_1|^2 I_{S_1} + |\tilde{K}_2|^2 I_{S_2} + 2 |\tilde{K}_1| |\tilde{K}_2| \operatorname{Re} \tilde{\Gamma}_{12}(\tau) \quad (12.15)$$

Les termes $|\tilde{K}_1|^2 I_{S_1}$ et $|\tilde{K}_2|^2 I_{S_2}$, mis à part les constantes multiplicatives, sont les éclaircissements en P qu'on obtiendrait en présence d'une seule des deux ouvertures (l'autre étant masquée), en d'autres termes $\tilde{K}_2 = 0$ ou $\tilde{K}_1 = 0$, respectivement. On les appelle I_1 et I_2 ; l'équation (12.15) se réécrit :

$$I = I_1 + I_2 + 2 |\tilde{K}_1| |\tilde{K}_2| \operatorname{Re} \tilde{\Gamma}_{12}(\tau) \quad (12.16)$$

Quand S_1 et S_2 sont confondus, la fonction de cohérence mutuelle devient :

$$\tilde{\Gamma}_{11}(\tau) = \langle \tilde{E}_1(t + \tau) \tilde{E}_1^*(t) \rangle_T$$

ou

$$\tilde{\Gamma}_{22}(\tau) = \langle \tilde{E}_2(t + \tau) \tilde{E}_2^*(t) \rangle_T$$

On peut concevoir que deux trains d'onde différents soient émis de ce point dans lequel coexistent deux sources avec, entre elles, une différence de phase proportionnelle à τ . Ici, τ vaut zéro (car la différence de chemin optique tend vers zéro), et les fonctions se réduisent aux éclairissements correspondants $I_{S_1} = \langle \tilde{E}_1(t) \tilde{E}_1^*(t) \rangle_T$ et $I_{S_2} = \langle \tilde{E}_2(t) \tilde{E}_2^*(t) \rangle_T$ sur Σ_a . Donc :

$$\Gamma_{11}(0) = I_{S_1} \quad \text{et} \quad \Gamma_{22}(0) = I_{S_2}$$

Elles sont appelées *fonctions d'autocohérence*. Donc :

$$I_1 = |\tilde{K}_1|^2 \Gamma_{11}(0) \quad \text{et} \quad I_2 = |\tilde{K}_2|^2 \Gamma_{22}(0)$$

Grâce à l'équation (12.16) on remarque que :

$$|\tilde{K}_1| |\tilde{K}_2| = \sqrt{I_1} \sqrt{I_2} / \sqrt{\Gamma_{11}(0)} \sqrt{\Gamma_{22}(0)}$$

On définit alors la forme normalisée de la fonction de cohérence mutuelle comme :

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau) \equiv \frac{\tilde{\Gamma}_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\langle \tilde{E}_1(t + \tau) \tilde{E}_2^*(t) \rangle_T}{\sqrt{\langle |\tilde{E}_1|^2 \rangle \langle |\tilde{E}_2|^2 \rangle}} \quad (12.17)$$

On parle de **degré de cohérence complexe** pour des raisons qu'on va éclaircir dans quelques instants. On peut réécrire l'équation (12.16) comme :

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} \tilde{\gamma}_{12}(\tau) \quad (12.18)$$

qui est la *relation générale des interférences en lumière partiellement cohérente*.

En lumière quasimonochromatique, la différence de phase concomitante à une différence de chemin optique donnée est

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = 2\pi \bar{\nu} \tau \quad (12.19)$$

où $\bar{\lambda}$ et $\bar{\nu}$ sont la longueur d'onde et la fréquence moyennes. On peut exprimer $\tilde{\gamma}_{12}(\tau)$ comme une quantité complexe :

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| e^{i\Phi_{12}(\tau)} \quad (12.20)$$

En posant $\Phi_{12}(\tau) = \alpha_{12}(\tau) - \varphi$ alors :

$$\operatorname{Re} \tilde{\gamma}_{12}(\tau) = |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| \cos [\alpha_{12}(\tau) - \varphi]$$

On réécrit alors l'équation (12.18) comme suit :

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| \cos [\alpha_{12}(\tau) - \varphi] \quad (12.21)$$

On peut montrer, grâce à l'équation (12.17) et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que $0 \leq |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| \leq 1$. En fait, en comparant les équations (12.21) et (9.14), la dernière ayant été obtenue dans le cas de la cohérence complète, il résulte que si $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| = 1$ alors I est identique à l'éclairissement qui serait obtenu avec deux ondes *cohérentes* déphasées de $\alpha_{12}(\tau)$ en S_1 et en S_2 . Si au contraire $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| = 0$, $I = I_1 + I_2$, et il n'y a pas d'interférence. On dit alors que les deux champs sont *incohérents*. Quand $0 < |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| < 1$ on parle de *cohérence partielle* ; on dit que $\gamma_{12}(\tau)$ est une mesure du **degré de cohérence**. Pour résumer :

$$|\tilde{\gamma}_{12}| = 1 \quad \text{cohérence totale}$$

$$|\tilde{\gamma}_{12}| = 0 \quad \text{incohérence totale}$$

$$0 < |\tilde{\gamma}_{12}| < 1 \quad \text{cohérence partielle}$$

On va préciser la nature statistique du processus global. Clairement, $\tilde{\Gamma}_{12}(\tau)$ et donc $\tilde{\gamma}_{12}(\tau)$ sont les variables clés dans plusieurs expressions donnant la distribution d'éclairissement ; elles sont l'essence même de ce qu'on a désigné par interférence. Il faut souligner que $\tilde{E}_1(t + \tau)$ et $\tilde{E}_2(t)$ sont deux perturbations différentes en deux points distincts dans l'espace et dans le temps. Il est prévisible que l'amplitude et la phase de ces perturbations vont fluctuer dans le temps. Si ces fluctuations en S_1 et S_2 sont complètement indépendantes, alors $\tilde{\Gamma}_{12}(\tau) = \langle \tilde{E}_1(t + \tau) \tilde{E}_2^*(t) \rangle_T$ tend vers zéro, car \tilde{E}_1 et \tilde{E}_2 sont positifs et négatifs avec la même probabilité, et par conséquent la moyenne de leur produit est nulle. Dans ce cas, il n'y a pas de corrélation, et $\tilde{\Gamma}_{12}(\tau) = \tilde{\gamma}_{12}(\tau) = 0$. Si le champ en S_1 au temps $t + \tau$ était parfaitement corrélé avec le champ en S_2 au temps t , la phase de l'un par rapport à l'autre resterait inchangée malgré les fluctuations individuelles. La moyenne temporelle de leur produit ne serait certainement pas nulle, même si les deux étaient légèrement corrélés.

$|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|$ et $\alpha_{12}(\tau)$ varient beaucoup plus lentement avec τ que $\cos 2\pi \bar{\nu} \tau$ et $\sin 2\pi \bar{\nu} \tau$. En d'autres termes, lorsque P traverse le système de franges, les variations spatiales de I , d'un point à un autre, dépendent surtout des changements de φ lorsque $(r_2 - r_1)$ varie.

Le maximum et le minimum de I se produisent lorsque le cosinus dans l'équation (12.21) vaut respectivement $+1$ et -1 . La visibilité en P (exercice 12.7) est alors :

$$\mathcal{V} = \frac{2\sqrt{I_1} \sqrt{I_2}}{I_1 + I_2} |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| \quad (12.22)$$

Le cas le plus courant est celui où $I_1 = I_2$, pour lequel :

$$\mathcal{V} = |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| \quad (12.23)$$

Pour résumer, *le module du degré de cohérence complexe est identique à la visibilité des franges.*

Il est primordial de comprendre que les équations (12.17) et (12.18) suggèrent une méthode pour mesurer directement les parties réelles de $\tilde{\Gamma}_{12}(\tau)$ et $\tilde{\gamma}_{12}(\tau)$. Si l'on rend égaux les éclaircissements des perturbations, l'équation (12.23) permet de déterminer expérimentalement $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|$ grâce à la figure d'interférence qui en résulte. De plus, la mesure du décalage hors axe de la position de la frange centrale (depuis $\varphi = 0$) est directement $\alpha_{12}(\tau)$. Finalement, la mesure de la visibilité et de la position des franges permet de remonter à l'amplitude et à la phase du degré de cohérence complexe.

On peut démontrer* que $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|$ vaut 1 quel que soit τ et pour n'importe quels points de l'espace, si et seulement si le rayonnement est strictement monochromatique ; situation qui ne peut pas être réalisée en pratique. De plus, un champ radiatif pour lequel $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| = 0$ quel que soit τ et pour n'importe quel couple de points ne peut pas non plus exister dans l'espace libre.

12.3.1 Cohérence temporelle et spatiale

On va s'attacher ici à relier les notions de cohérence temporelle et spatiale au formalisme développé précédemment.

Si l'on réduit la source primaire S de la figure 12.11, de largeur de bande finie, jusqu'à en faire un point source sur l'axe, les effets de cohérence temporelle prédominent. Les perturbations en S_1 et S_2 sont alors identiques. En effet, la cohérence mutuelle [équation (12.14)] entre les deux points devient alors l'autocohérence du champ. Donc $\Gamma(S_1, S_2, \tau) = \tilde{\Gamma}_{12}(\tau) = \tilde{\Gamma}_{11}(\tau)$ ou $\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = \tilde{\gamma}_{11}(\tau)$. On a le même résultat quand S_1 et S_2 sont confondus, et l'on appelle parfois $\tilde{\gamma}_{11}(\tau)$ le **degré de cohérence temporelle complexe** en ce point en deux instants qui diffèrent de τ . C'est le cas dans un interféromètre à division d'amplitude tel qu'un interféromètre de Michelson, dans lequel τ est le rapport entre la différence de chemin optique et c . L'expression de I [voir l'équation (12.18)], contiendrait alors $\tilde{\gamma}_{11}(\tau)$ plutôt que $\tilde{\gamma}_{12}(\tau)$.

*Voir les démonstrations dans la section 4.2 de *Theory of Partial Coherence* par Beran et Parrent.

Imaginons qu'un interféromètre à division d'amplitude divise une onde lumineuse en deux autres identiques et de la forme :

$$\tilde{E}(t) = E_0 e^{i\phi(t)} \quad (12.24)$$

puis les recombine ensuite pour produire un système de franges, alors :

$$\tilde{\gamma}_{11}(\tau) = \frac{\langle \tilde{E}(t + \tau) \tilde{E}^*(t) \rangle_T}{|\tilde{E}|^2} \quad (12.25)$$

ou
$$\tilde{\gamma}_{11}(\tau) = \langle e^{i\phi(t+\tau)} e^{-i\phi(t)} \rangle_T$$

Donc :

$$\tilde{\gamma}_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i[\phi(t+\tau) - \phi(t)]} dt \quad (12.26)$$

et
$$\tilde{\gamma}_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\cos \Delta\phi + i \sin \Delta\phi) dt$$

où $\Delta\phi = \phi(t + \tau) - \phi(t)$. Pour une onde plane strictement monochromatique de longueur de cohérence infinie, $\phi(t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$, $\Delta\phi = -\omega\tau$, et :

$$\tilde{\gamma}_{11}(\tau) = \cos \omega\tau - i \sin \omega\tau = e^{-i\omega\tau}$$

D'où $|\tilde{\gamma}_{11}| = 1$; l'argument de $\tilde{\gamma}_{11}$ est $-2\pi\nu\tau$, et la cohérence est complète. Pour une onde quasi monochromatique où τ est plus grand que le temps de cohérence, $\Delta\phi$ varie aléatoirement entre 0 et 2π de sorte que l'intégrale est en moyenne nulle, $|\tilde{\gamma}_{11}(\tau)| = 0$, correspondant à une incohérence complète. Une différence de chemin optique de 60 cm, une différence de 30 cm entre les longueurs des bras d'un interféromètre de Michelson produisent un délai de $\tau \approx 2$ ns entre les deux faisceaux. C'est à peu près le temps de cohérence d'une bonne lampe à décharge isotopique ; la visibilité des franges avec une telle source est mauvaise. Si la source est en lumière blanche, $\Delta\nu$ est grand, la durée de cohérence Δt_c est petite, et la longueur de cohérence est inférieure à une longueur d'onde. Pour que τ soit plus petit que Δt_c (par exemple, pour que la visibilité soit bonne), la différence de chemin optique doit être faible par rapport à la longueur d'onde. La lumière d'un laser représente l'autre extrême car Δt_c est alors si grande qu'une valeur de $c\tau$ qui causerait une défaillance appréciable de la visibilité nécessiterait un interféromètre gigantesque.

On voit que $\tilde{\Gamma}_{11}(\tau)$, étant une mesure de la cohérence temporelle, doit être intimement lié au temps de cohérence et donc

à la largeur de bande de la source. En fait, *la transformée de Fourier de la fonction d'autocohérence, $\tilde{\Gamma}_{11}(\tau)$, est le spectre d'émission de la source ou la distribution spectrale de son flux* (paragraphe 11.3.4).

Si l'on reprend l'expérience de Young (figure 12.11) avec une source étendue mais étroite en largeur de bande, ce sont les effets de la cohérence spatiale qui sont prépondérants. Les perturbations optiques en S_1 et S_2 diffèrent, et le système de franges dépend de $\Gamma(S_1, S_2, \tau) = \tilde{\Gamma}_{12}(\tau)$. En étudiant la région autour de la frange centrale où $(r_2 - r_1) = 0$, $\tau = 0$ et l'on peut en déduire $\tilde{\Gamma}_{12}(0)$ et $\tilde{\gamma}_{12}(0)$. Cette dernière quantité est le **degré de cohérence spatiale complexe** des deux points au même instant. $\tilde{\Gamma}_{12}(0)$ joue un rôle central dans l'interféromètre stellaire de Michelson, décrit dans la prochaine section.

Il existe une relation très utile entre le degré de cohérence complexe dans une région de l'espace et la distribution en luminance de la source étendue qui en est la cause. On va se servir de cette relation, le **théorème de van Cittert-Zernike**, comme d'un outil de calcul sans s'attarder sur son fondement formel. En fait, l'analyse de la section 12.2 en suggérait déjà quelques aspects. La figure 12.12 représente une source cohérente quasi monochromatique étendue, S , située dans le plan σ et de luminance $I(y, z)$. Elle montre aussi un écran d'observation sur lequel on considère deux points P_1 et P_2 , éloignés respectivement de R_1 et R_2 d'un petit élément de S . On souhaite déterminer sur ce plan $\tilde{\gamma}_{12}(0)$ qui décrit la corrélation des vibrations des champs en ces deux points. Notez que même si la source est incohérente, la lumière atteignant P_1 et P_2 aura en général un certain degré de cohérence car chaque élément de la source contribue au champ en chacun de ces points.

Le calcul de $\tilde{\gamma}_{12}(0)$ à partir des champs en P_1 et P_2 se fait grâce à une intégrale connue qui a la même forme que l'intégrale de diffraction et donne les mêmes résultats, pourvu qu'on réinterprète correctement chaque terme. Par exemple, $I(y, z)$ a le même rôle dans l'intégrale de cohérence que la fonction de transmission dans l'intégrale de diffraction. Ainsi, supposons que S ne soit pas une source mais une ouverture de forme et de taille identiques, et que $I(y, z)$ ne décrive pas la luminance mais représente la forme fonctionnelle correspondant à la distribution du champ à travers l'ouverture. En d'autres termes, imaginez une diapositive dans l'ouverture dont les caractéristiques de transmission en amplitude correspondent fonctionnellement à $I(y, z)$. Imaginez aussi que l'ouverture soit éclairée par une onde sphérique convergeant vers le point fixe P_2 (figure 12.12b), de sorte que *la figure de diffraction soit centrée en P_2* . La distribution du champ diffracté en un point, normalisée en P_2 , est égale à $\tilde{\gamma}_{12}(0)$ en ce point. C'est le théorème de van Cittert-Zernike.

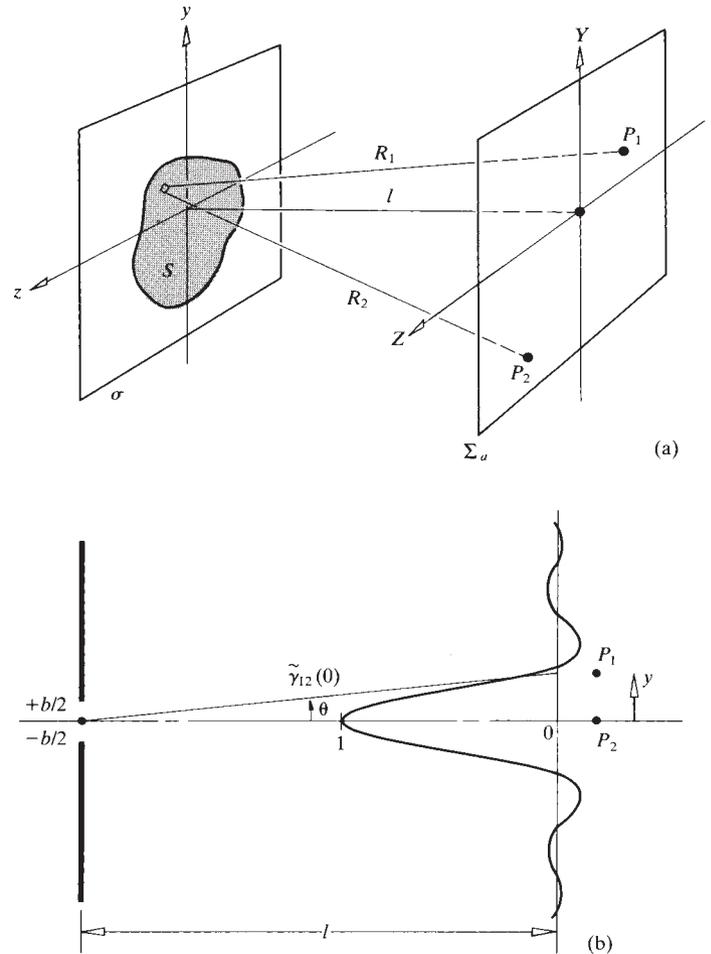


Figure 12.12 (a) Géométrie du théorème de van Cittert-Zernike. (b) La figure de diffraction normalisée correspond au degré de cohérence. Pour une fente source rectangulaire, la figure de diffraction est donnée par $\text{sinc}(\pi by/\lambda l)$.

Si P_1 et P_2 sont proches et si S est petit par rapport à l , le degré de cohérence complexe est égal à la transformée de Fourier de la distribution de luminance de la source. De plus, si la luminance de la source est uniforme, alors $\tilde{\gamma}_{12}(0)$ est simplement une fonction sinc pour une source rectangulaire et une fonction de Bessel quand elle est circulaire. Notez que la fonction sinc de la figure 12.12b est la même que celle de la figure 10.10, où $\beta = (kb/2) \sin \theta$ et $\theta \approx \sin \theta$. Donc si P_1 est à une distance y de P_2 , $\beta = kb\theta/2$ et $\theta = y/l$, donc $|\tilde{\gamma}_{12}(0)| = |\text{sinc}(\pi by/\lambda l)|$. Ce résultat est approfondi dans les exercices.

12.4 Cohérence et interférométrie stellaire

12.4.1 L'interféromètre stellaire de Michelson

En 1890, sur les conseils de Fizeau, A. Michelson proposa un interféromètre (figure 12.13) d'un intérêt particulier car il annonçait quelques-unes des plus importantes techniques modernes, et parce qu'il s'interprète bien en termes de cohérence. La fonction de l'*interféromètre stellaire*, comme on l'appelle, est de mesurer les faibles dimensions angulaires de corps célestes lointains.

Deux miroirs amovibles, M_1 et M_2 , collectent les rayons, qu'on suppose parallèles, en provenance d'une étoile lointaine. La lumière est ensuite dirigée vers deux ouvertures S_1 et S_2 grâce aux miroirs M_3 et M_4 , puis vers l'objectif d'un télescope. On égalise les chemins optiques $M_1M_3S_1$ et $M_2M_4S_2$, de sorte que la différence de phase entre M_1 et M_2 soit la même qu'entre S_1 et S_2 . Les deux ouvertures produisent un système de franges de Young dans le plan focal de l'objectif. En fait, les ouvertures ne sont pas vraiment nécessaires, les miroirs pouvant servir d'ouvertures par eux-mêmes.

Supposons qu'on pointe l'axe de l'appareil dans la direction de l'une des deux étoiles qui composent une étoile double. À cause des très grandes distances mises en jeu, les rayons des deux étoiles arrivent collimatés dans l'interféromètre. De plus,

on suppose, pour le moment, que la lumière est émise dans une bande étroite centrée en $\bar{\lambda}_0$. Les perturbations créées en S_1 et S_2 par l'étoile dans l'axe sont en phase, et il se forme alors un système de franges claires et sombres, centrées en P_0 .

De même, les rayons de l'autre étoile arrivent en faisant un angle θ , mais cette fois les perturbations en M_1 et M_2 (et donc en S_1 et S_2) sont déphasées de $\bar{k}_0 h \theta$ ou encore, retardées de $h\theta/c$, comme le montre la figure 12.13b. Le système de franges qui résulte de la seconde étoile est centré en un point P , décalé par rapport à P_0 d'un angle θ' tel que $h\theta/c = a\theta'/c$. Puisque ces étoiles se comportent comme des sources ponctuelles incohérentes, les distributions individuelles d'éclairement de leur figure d'interférence ne font que s'ajouter, et l'interfrange, identique pour les deux figures, ne dépend que de a . La visibilité étant fonction de h , si l'on fait croître h de zéro à $\bar{k}_0 h \theta = \pi$, c'est-à-dire jusqu'à ce que :

$$h = \frac{\bar{\lambda}_0}{2\theta} \quad (12.27)$$

les systèmes de franges s'éloignent l'un de l'autre jusqu'à ce que le maximum de l'un recouvre le minimum de l'autre, auquel cas $\mathcal{V} = 0$ si leur éclairement est le même. Ainsi, quand les franges disparaissent, la mesure de h suffit à déterminer la séparation angulaire entre les deux étoiles, θ . Remarquez que h est inversement proportionnel à θ .

Bien que les points source, à savoir les étoiles, soient complètement décorrélés, on notera que leur champ résultant

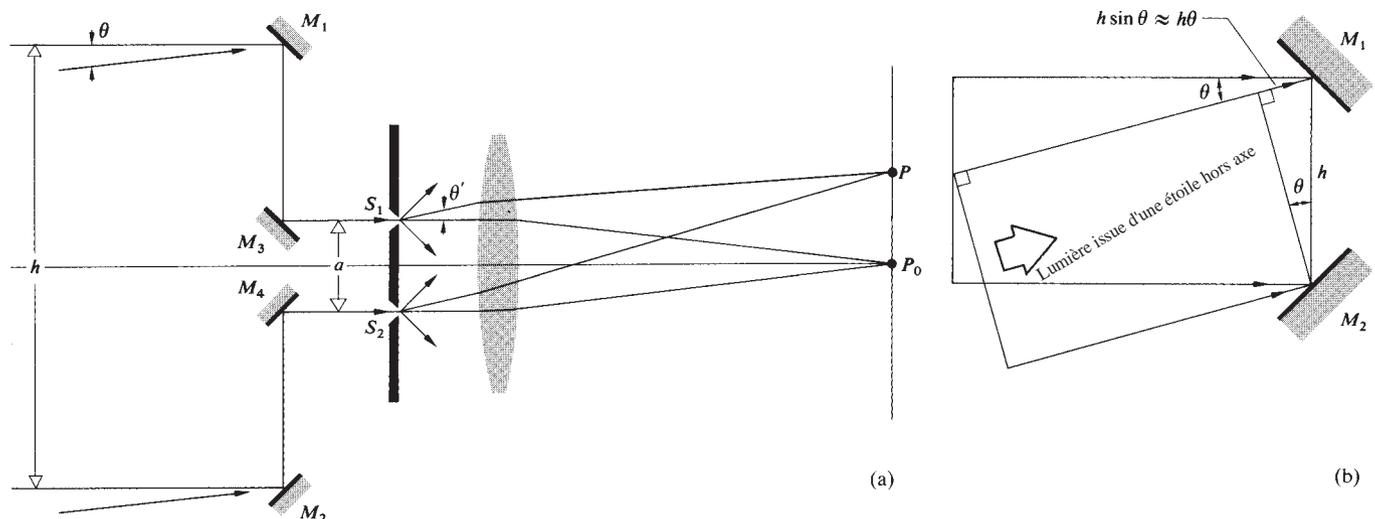


Figure 12.13 Interféromètre stellaire de Michelson.

en M_1 et M_2 ne sont pas forcément incohérents. Pour s'en convaincre, il faut remarquer que si h tend vers zéro, la différence de phase relative entre les champs en M_1 et M_2 issus d'une même étoile tend vers zéro, donc \mathcal{V} tend vers 1, et les champs sont très cohérents.

Dans le même esprit, on peut aussi mesurer le diamètre angulaire (θ) de certaines étoiles. Encore une fois, la visibilité des franges correspond au degré de cohérence du champ optique en M_1 et M_2 . En supposant que l'étoile soit circulaire et uniforme en luminance, la visibilité de ses franges est équivalente à celle du graphique de la figure 12.7. Précédemment, on a fait allusion au fait que, pour ce type de source, \mathcal{V} était donnée par une fonction de Bessel du premier ordre. Elle s'exprime donc par :

$$\mathcal{V} = |\tilde{\gamma}_{12}(0)| = 2 \left| \frac{J_1(\pi h \theta / \bar{\lambda}_0)}{\pi h \theta / \bar{\lambda}_0} \right| \quad (12.28)$$

Puisque $J_1(u)/u = \frac{1}{2}$ pour $u = 0$, le maximum de \mathcal{V} est 1. Le premier zéro de \mathcal{V} a lieu pour $\pi h \theta / \bar{\lambda}_0 = 3,83$, comme dans la figure 10.23. De même, les franges disparaissent quand :

$$h = 1,22 \frac{\bar{\lambda}_0}{\theta} \quad (12.29)$$

il suffit encore de mesurer h pour trouver θ .

Dans le montage réalisé par Michelson, les deux miroirs extérieurs pouvaient se déplacer sur une poutre qu'il avait installée sur le télescope de 2,5 m de l'observatoire du mont Wilson. Bételgeuse (α Orionis) a été la première étoile dont le diamètre angulaire fut mesuré grâce à cet interféromètre. C'est une étoile rouge-orange de la constellation d'Orion, dont le nom est la contraction d'une phrase qui, en arabe, veut dire *aisselle de la centrale*. Michelson fit disparaître les franges obtenues avec son interféromètre, une froide nuit de décembre 1920, pour $h = 3$ m, ce qui donne avec $\bar{\lambda}_0 = 570$ nm, $\theta = 1,22(570 \times 10^{-9})/3,07(2,54 \times 10^{-2}) = 22,6 \times 10^{-8}$ rad, ou 0,047 secondes d'arc. Michelson en déduisit, à partir de la distance connue de l'étoile, que son diamètre devait avoisiner les 380 millions de km, soit environ 280 fois celui du Soleil. En fait, Bételgeuse est une étoile variable, de forme irrégulière, dont le diamètre maximum est si grand qu'il est même supérieur à l'orbite de Mars autour du Soleil. La limitation principale d'une telle technique interférométrique provient de la séparation très importante qu'il est nécessaire d'avoir entre les miroirs pour la plupart des étoiles, sauf pour les plus grosses.

On suppose généralement que la cohérence est « bonne » quand la visibilité est supérieure à 0,88. Pour une source

circulaire, cette valeur est atteinte quand $\pi h \theta / \bar{\lambda}_0$ de l'équation (12.28) vaut un, c'est-à-dire quand :

$$h = 0,32 \frac{\bar{\lambda}_0}{\theta} \quad (12.30)$$

À une distance R d'une source de diamètre D et à bande étroite, il existe des **aires de cohérence** valant $\pi(h/2)^2$ et sur lesquelles $|\tilde{\gamma}_{12}| \geq 0,88$. Comme $D/R = \theta$,

$$h = 0,32 \frac{R \bar{\lambda}_0}{D} \quad (12.31)$$

Ces expressions sont très commodes pour estimer les paramètres physiques d'une expérience d'interférence ou de diffraction. Par exemple, si l'on dispose un filtre rouge ($\bar{\lambda}_0 = 600$ nm) devant un flash circulaire de 1 mm de diamètre, et si l'on se place à 20 m, alors :

$$h = 0,32(20)(600 \times 10^{-9})/10^{-3} = 3,8 \text{ mm}$$

Cela signifie que des ouvertures espacées au maximum de la distance h produiront de belles franges. Bien entendu, l'aire de cohérence augmente avec R , et c'est pourquoi même un lampadaire suffisamment lumineux peut servir de source s'il est « assez loin ».

12.4.2 Interférométrie à corrélation d'intensité

Revenons un instant sur la représentation d'une perturbation provenant d'une source thermique, comme dans la section 7.4.3. Ici, *thermique* se réfère à un rayonnement résultant de la superposition d'ondes émises spontanément par un grand nombre de sources atomiques indépendantes.* On représente un champ optique quasi monochromatique par :

$$E(t) = E_0(t) \cos [\varepsilon(t) - 2\pi \bar{\nu} t] \quad [7.65]$$

L'amplitude et la phase sont des fonctions qui varient lentement avec le temps. L'onde va osciller des dizaines de milliers de fois avant que l'amplitude (i.e. l'enveloppe des vibrations du champ) ou la phase ne soit modifiées de façon appréciable. Ainsi, de même que le temps de cohérence est une mesure de l'intervalle de temps pendant lequel la phase est relativement stable, de même il est représentatif de la durée sur laquelle $E_0(t)$ est prédictible. De larges fluctuations sur ε entraînent en

.....

*La lumière thermique est parfois appelée *lumière gaussienne* car l'amplitude de son champ suit une statistique de Gauss (p. 13).

général de larges fluctuations sur E_0 . La connaissance des fluctuations d'amplitude entraîne celle des fluctuations de la phase et, *in fine*, celle des fonctions de corrélation (i.e. cohérence). Donc, si les phases sont corrélées en deux points de l'espace-temps, les amplitudes devraient l'être aussi.

L'existence d'une figure d'interférence dans l'interféromètre stellaire de Michelson implique que les champs en M_1 et M_2 sont corrélés, c'est-à-dire que $\tilde{\Gamma}_{12}(0) = \langle \tilde{E}_1(t) \tilde{E}_2^*(t) \rangle_T \neq 0$. Si l'on pouvait mesurer l'amplitude du champ en ces points, ses fluctuations exhiberaient une interrelation. Puisque ce n'est pas possible à cause des très hautes fréquences qui sont en jeu, on peut, à la place, mesurer et comparer leurs fluctuations d'éclairement et peut-être en déduire $|\tilde{\gamma}_{12}(0)|$ (par une méthode qui n'a pas encore été dévoilée). En d'autres termes, s'il y a des valeurs de τ pour lesquelles $\tilde{\gamma}_{12}(\tau)$ est non nulle, le champ en ces deux points est partiellement cohérent, et l'on s'attend à ce qu'il y ait une corrélation entre les fluctuations d'éclairement en ces points. C'est l'idée essentielle derrière la série d'expériences remarquables menées entre les années 1952 et 1956 par R. Hanbury-Brown en collaboration avec R. Q. Twiss, et d'autres. L'*interféromètre à corrélation d'intensité* en fut l'aboutissement.

Jusqu'ici, on a abordé ce problème seulement d'une façon intuitive, plutôt que par un traitement rigoureux qui dépasserait le cadre de ce livre. On se contentera donc d'en faire ressortir les points les plus saillants.* Comme dans l'équation (12.14), on s'intéresse à la fonction d'intercorrélation des éclaircissements en deux points d'un champ partiellement cohérent, $\langle I_1(t + \tau) I_2(t) \rangle_T$. On suppose que les trains d'onde, représentés par des champs complexes, sont émis aléatoirement avec une statistique de Gauss :

$$\langle I_1(t + \tau) I_2(t) \rangle_T = \langle I_1 \rangle_T \langle I_2 \rangle_T + |\tilde{\Gamma}_{12}(\tau)|^2 \quad (12.32)$$

ou
$$\langle I_1(t + \tau) I_2(t) \rangle_T = \langle I_1 \rangle_T \langle I_2 \rangle_T [1 + |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|^2] \quad (12.33)$$

Les fluctuations instantanées en éclaircissement $\Delta I_1(t)$ et $\Delta I_2(t)$, autour de leur valeur moyenne $\langle I_1(t) \rangle_T$ et $\langle I_2(t) \rangle_T$, comme dans la figure 12.14, sont telles que :

$$\Delta I_1(t) = I_1(t) - \langle I_1 \rangle_T \quad \text{et} \quad \Delta I_2(t) = I_2(t) - \langle I_2 \rangle_T$$

et

$$\langle \Delta I_1(t) \rangle_T = 0 \quad \text{et} \quad \langle \Delta I_2(t) \rangle_T = 0$$

*Pour une discussion complète, voir par exemple L. Mandel, « Fluctuations of Light Beams », *Progress in Optics*, Vol. II, p. 193, ou Françon, *Optical Interferometry*, p. 182.

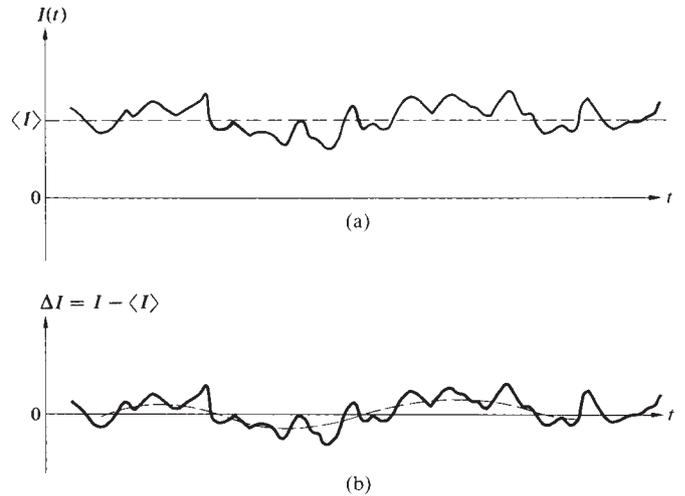


Figure 12.14 Variations d'éclairement.

les équations (12.32) et (12.33) deviennent :

$$\langle \Delta I_1(t + \tau) \Delta I_2(t) \rangle_T = |\tilde{\Gamma}_{12}(\tau)|^2 \quad (12.34)$$

ou
$$\langle \Delta I_1(t + \tau) \Delta I_2(t) \rangle_T = \langle I_1 \rangle_T \langle I_2 \rangle_T |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|^2 \quad (12.35)$$

(exercice 12.11). Ce sont les intercorrélations en fluctuation d'éclairement qu'on recherche. Elles perdurent tant que le champ est partiellement cohérent en ces deux points. Incidemment, ces expressions correspondent à une lumière polarisée linéairement. Si l'onde n'est pas polarisée, il faut introduire le facteur multiplicatif $\frac{1}{2}$ dans le terme de droite.

La validité du principe d'interférométrie en intensité a été établie initialement dans le domaine des radiofréquences. Ensuite, en 1956, Hanbury-Brown et Twiss ont proposé l'interféromètre stellaire illustré par la figure 12.15. Les seuls détecteurs qui étaient alors utilisables en optique étaient des composants photoélectriques dont le comportement était adapté à la nature quantique de la lumière. Donc :

...il n'était absolument pas certain que la corrélation fut pleinement préservée durant le processus d'émission photoélectrique. C'est pour ces raisons que nous avons monté une expérience en laboratoire de la manière décrite ci-dessous.*

*D'après R. Hanbury-Brown et R. Q. Twiss, « Correlation Between Photons in Two Coherent Beams of Light », *Nature* **127**, 27 (1956).

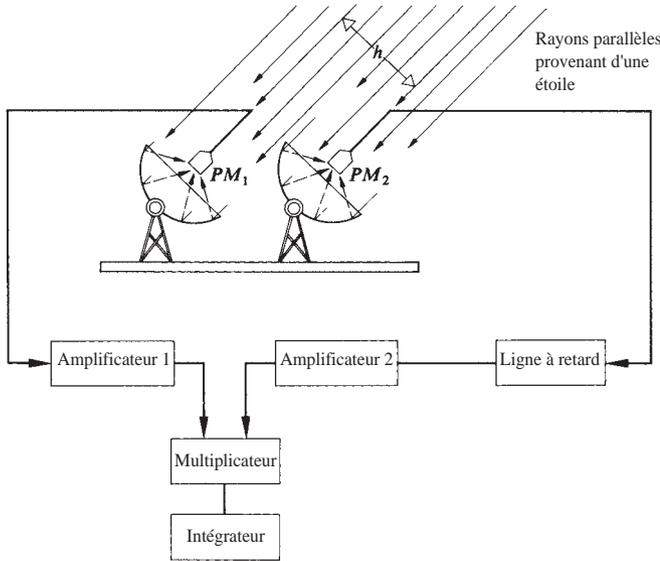


Figure 12.15 Interféromètre stellaire de corrélation.

Cette expérience est décrite par la figure 12.16. La lumière filtrée d'une lampe à arc de mercure passait à travers une ouverture rectangulaire, et différentes portions du front d'onde émergent étaient échantillonnées par deux photomultiplicateurs, PM_1 et PM_2 . Le degré de cohérence était modulé en déplaçant PM_1 , c'est-à-dire en faisant varier h . Le signal des

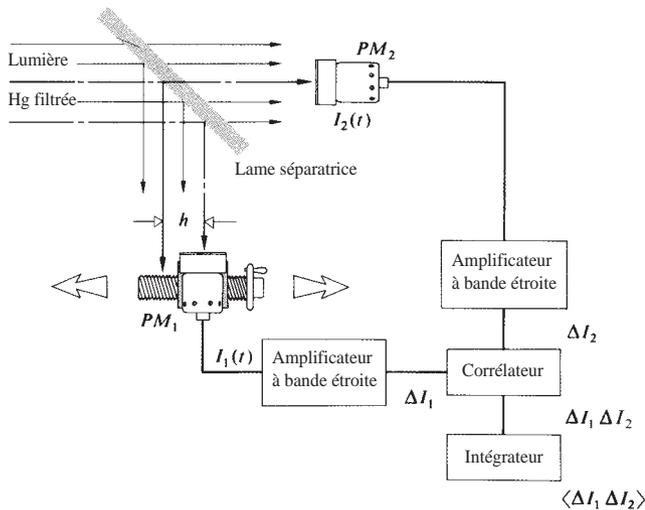


Figure 12.16 Expérience de Hanbury-Brown et Twiss.

deux photomultiplicateurs était proportionnel aux éclairagements incidents $I_1(t)$ et $I_2(t)$. Ils étaient ensuite filtrés puis amplifiés pour supprimer la composante continue (proportionnelle à $\langle I_1 \rangle_T$ et à $\langle I_2 \rangle_T$) et ne garder que les fluctuations, c'est-à-dire $\Delta I_1(t) = I_1(t) - \langle I_1 \rangle_T$ et $\Delta I_2(t) = I_2(t) - \langle I_2 \rangle_T$. Les deux signaux étaient ensuite multipliés l'un avec l'autre dans le corrélateur et la moyenne de ce produit, proportionnelle à $\langle \Delta I_1(t) \Delta I_2(t) \rangle_T$, était finalement enregistrée. La valeur de $|\tilde{\gamma}_{12}(0)|^2$ déduite de l'équation (12.35) pour différentes valeurs de h , étaient parfaitement en accord avec la théorie. Avec cette géométrie particulière, il n'y avait pas de doute que la corrélation existait ; de plus, elle était préservée à travers le processus de détection photoélectrique.

Les fluctuations de l'éclairage ont une bande passante à peu près équivalente à la largeur de bande spectrale de la lumière incidente ($\Delta\nu$), soit $(\Delta t_c)^{-1}$, c'est-à-dire environ 100 MHz dans le cas présent. Il est toujours plus facile de caractériser ce genre de fluctuations, plutôt que d'essayer de suivre des alternances à 10^{15} Hz. En dépit de cela, il faut tout de même disposer d'une électronique assez rapide, de bande passante supérieure à 100 MHz. De plus, les détecteurs ont un temps de réponse fini T , de sorte que les courants \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 sont proportionnels aux moyennes de $I_1(t)$ et de $I_2(t)$ sur la durée T et non pas à leur valeur instantanée. La figure 12.14b montre le phénomène de lissage des fluctuations. Pour $T > \Delta t_c$, cas le plus courant, il résulte une réduction d'un facteur $\Delta t_c/T$ de la corrélation :

$$\langle \Delta \mathcal{I}_1(t) \Delta \mathcal{I}_2(t) \rangle = \langle \mathcal{I}_1 \rangle \langle \mathcal{I}_2 \rangle \frac{\Delta t_c}{T} |\tilde{\gamma}_{12}(0)|^2 \quad (12.36)$$

Par exemple, dans la disposition du schéma expérimental précédent, la lumière filtrée de la lampe à mercure avait une cohérence d'environ 1 ns, alors que l'électronique avait un temps d'intégration effectif ≈ 40 ns. Remarquez que l'équation (12.36) n'est pas conceptuellement différente de l'équation (12.35) – elle est simplement un peu plus réaliste.

Peu après avoir réussi leur expérience en laboratoire, Hanbury-Brown et Twiss construisirent l'interféromètre stellaire de la figure 12.15. Ils utilisèrent des miroirs pour collecter la lumière et la focaliser sur deux photomultiplicateurs. Sur un bras se trouvait une ligne à retard qui compensait toute différence dans les temps d'arrivée de la lumière pour que les miroirs puissent être physiquement situés à la même hauteur. La mesure de $\langle \Delta \mathcal{I}_1(t) \Delta \mathcal{I}_2(t) \rangle_T$ pour différentes séparations des détecteurs permettait d'en déduire le module au carré du degré de cohérence, $|\tilde{\gamma}_{12}(0)|^2$, et ensuite le diamètre angulaire de la

source, comme dans l'interféromètre stellaire de Michelson, à cela près qu'ici le montage autorisait une séparation h plus importante. De plus, le problème délicat de la phase ayant été écarté, il n'était plus nécessaire d'avoir des miroirs d'une grande qualité optique. L'étoile Sirius fut la première à être étudiée de cette façon et la mesure de son diamètre angulaire donna 0,006 9 secondes d'arc. Pour certaines étoiles, on est descendu à des diamètres angulaires de 0,000 5 secondes d'arc grâce à cet instrument – que de chemin parcouru depuis Bételgeuse (0,047 secondes d'arc) !*

On peut grandement simplifier l'électronique employée pour la corrélation d'intensité si l'onde incidente est quasi monochromatique et l'éclairement très important. Le rayonnement d'un laser n'est pas thermique et ses fluctuations statistiques sont complètement différentes, mais on peut l'utiliser pour générer une lumière *pseudothermique**. Une source pseudothermique est une source brillante ordinaire (le laser est ce qui convient le mieux) vue au travers d'une lame en mouvement, d'épaisseur optique *non uniforme*, comme un disque en verre dépoli rotatif. Si l'on observe le faisceau émergent du disque à l'arrêt avec un *détecteur suffisamment lent*, les fluctuations d'éclairement seront complètement lissées. En mettant le disque en mouvement, les fluctuations d'éclairement apparaissent avec un temps de cohérence simulé relié à la vitesse du disque. On peut donc utiliser une source thermique

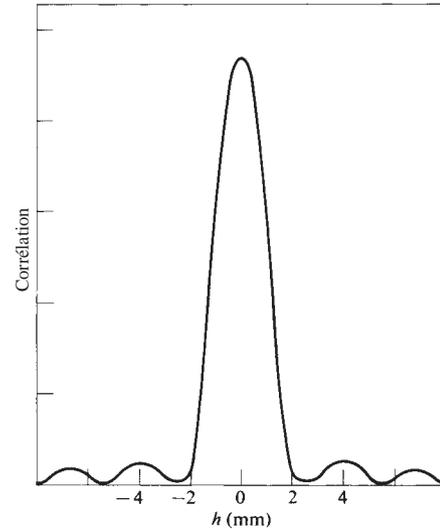


Figure 12.17 Fonction de corrélation pour une source pseudothermique. [D'après A. B. Haner et N. R. Isenor, *Am J. Phys.* **38**, 748 (1970).]

extrêmement brillante de durée de cohérence Δt_c variable (de 1 s à 10^{-5} s) pour étudier de très nombreux effets faisant intervenir la cohérence. Par exemple, la figure 12.17 montre la fonction de corrélation, proportionnelle à $[2J_1(u)/(u)]^2$, qui a été déterminée grâce aux fluctuations d'éclairement pour une source pseudothermique d'ouverture circulaire. Le montage expérimental ressemble à celui de la figure 12.16, avec une électronique considérablement plus simple.*

*Pour plus d'informations sur les aspects photoniques de la corrélation en éclairage, voir Garbuny, *Optical Physics*, paragraphe 6.2.5.2, ou Klein, *Optics*, paragraphe 6.4.

*Voir W. Martienssen et E. Spiller, « Coherence and Fluctuations in Light Beams », *Am J. Phys.* **32**, 919 (1964), et A. B. Haner et N. R. Isenor, « Intensity Correlations from Pseudo-thermal Light Sources », *Am. J. Phys.* **38**, 748 (1970). Le lecteur tirera un très grand profit de l'étude de ces articles.

*L'article de L. Mandel et E. Wolf, « Coherence Properties of Optical Fields », *Revs. Modern Phys.* **37**, 231 (1965) renvoie aux principaux aspects de ce chapitre mais sa lecture est difficile. Regarder aussi l'article de K. I. Kellermann, « Intercontinental Radio Astronomy » *Sci. Am.* **226**, 72 (Février 1972).

EXERCICES ET PROBLÈMES

Les solutions complètes des exercices (excepté ceux ayant un astérisque) figurent à la fin de l'ouvrage.

12.1 Soit la figure d'interférence obtenue à partir d'un interféromètre de Michelson éclairé par une lampe à vapeur de mercure. Qu'advient-il des franges au cours de l'allumage de la lampe, quand la pression de vapeur de mercure augmente jusqu'à sa valeur d'équilibre.

12.2* On souhaite déterminer l'éclairement dans le plan d'observation de l'expérience de Young quand les fentes sont éclairées simultanément par deux ondes planes monochromatiques de fréquences distinctes, et produisant des champs d'amplitudes E_1 et E_2 dans le plan d'observation. Tracer ces champs en fonction du temps en prenant $\lambda_1 = 0,8\lambda_2$. Ensuite tracer le produit $E_1 E_2$ (en un point P) en fonction du temps. Que peut-on dire de sa moyenne sur un long intervalle de temps donné ? À quoi ressemble $(E_1 + E_2)^2$? Le comparer avec $E_1^2 + E_2^2$. Donner une approximation de $\langle (E_1 + E_2)^2 \rangle_T$ sur un intervalle de temps long par rapport à la période des ondes.

12.3* Garder les résultats de l'exercice précédent en tête. Chaque onde produirait séparément une distribution d'éclairement I_1 et I_2 . Les tracer sur un même axe d'espace, ainsi que leur somme $I_1 + I_2$. Discuter les résultats et les comparer à la figure 7.16. Que devient leur éclairement quand on superpose successivement plusieurs ondes de différentes fréquences ? Expliquer votre raisonnement en termes de longueur de cohérence. Hypothétiquement, qu'arriverait-il au système de franges si la bande de fréquence tendait vers l'infini ?

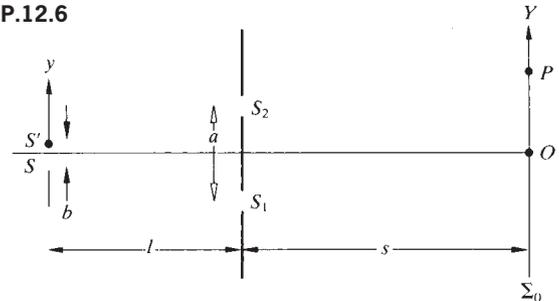
12.4 Avec les résultats de l'exercice précédent en tête, revenir à l'autocorrélation d'un sinus. Considérer un signal comme étant la superposition d'une multitude de composantes sinusoïdales. Tracer la fonction d'autocorrélation de ce signal avec trois ou quatre composantes, comme dans la partie (e) de la figure 11.37. Que devient la fonction d'autocorrélation si l'on superpose un grand nombre d'ondes et si le signal ressemble à du bruit ? Que signifie le fait que $\tau = 0$? Comment comparer cela à l'exercice précédent ?

12.5* Soit le montage de la figure 12.3. Calculer la visibilité quand l'interfrange (de max. à max.) est de 1 mm, et la taille de la source, projetée sur l'écran, de 0,5 mm.

12.6 Soit le montage de la figure P.12.6, montrer par intégration sur la source que :

$$I(Y) \propto b + \frac{\sin(\pi a/\lambda l)b}{\pi a/\lambda l} \cos(2\pi a Y/\lambda s)$$

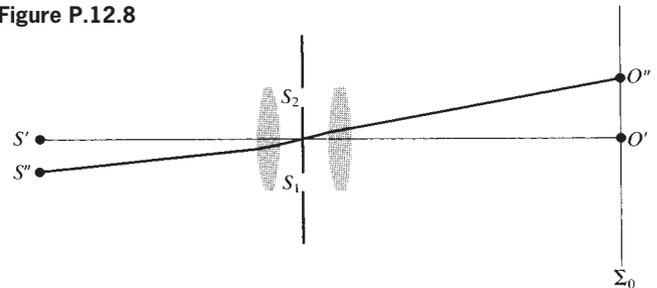
Figure P.12.6



12.7 Donner les détails du calcul qui conduit à l'expression de la visibilité de l'équation (12.22).

12.8 À quelles conditions l'éclairement en Σ_0 , sur la figure P.12.8, sera égal à $4I_0$, où I_0 est l'éclairement dû à une source ponctuelle incohérente unique ?

Figure P.12.8



12.9* Supposer que l'expérience de Young soit réalisée avec un trou circulaire de diamètre 0,1 mm placé devant une lampe à sodium ($\lambda_0 = 589,3$ nm). Si la source est à 1 m des fentes, quelle distance sépare les fentes quand le système de franges disparaît ?

12.10 En prenant $1/2^\circ$ pour diamètre angulaire du Soleil vu de la Terre, calculer le diamètre de l'aire de cohérence correspondante, en négligeant les variations de luminosité à sa surface.

12.11 Montrer que les équations (12.34) et (12.35) se déduisent des équations (12.32) et (12.33).

12.12* Dans l'équation (12.21), faire apparaître deux termes pour les contributions cohérente et incohérente, le premier résultant de la superposition de deux ondes cohérentes d'éclairement respectif $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| I_1$ et $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| I_2$ et de phase relative $\alpha_{12}(\tau) - \varphi$, et le second résultant de la superposition de deux ondes incohérentes d'éclairement respectif

$[1 - |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|] I_1$ et $[1 - |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|] I_2$. En déduire les expressions de $I_{\text{coh}}/I_{\text{incoh}}$ et $I_{\text{incoh}}/I_{\text{total}}$. Discuter la signification physique de cette formulation et montrer comment interpréter la visibilité des franges en s'appuyant sur elles.

12.13 Dans l'expérience des trous de Young, on recouvre l'un des trous avec un filtre de densité neutre qui diminue l'éclairement d'un facteur 10, et l'autre avec une lame de verre transparente, de sorte qu'aucun décalage de phase ne soit introduit. Calculer la visibilité des franges dans le cas hypothétique où l'éclairage est complètement cohérent.

12.14* Supposer qu'un montage de Young à deux fentes soit éclairé par le Soleil à une longueur d'onde moyenne de 550 nm. Déterminer la séparation des fentes qui ferait disparaître les franges.

12.15 On veut caractériser un montage de Young à double trou éclairé par une fente source uniforme, quasi monochromatique et incohérente de longueur d'onde moyenne 500 nm et de largeur b , située à 1,5 m des trous. Si ceux-ci sont séparés de 0,50 mm, quelle doit être la largeur de la fente pour que la visibilité dans le plan d'observation soit au minimum de 85 % ?

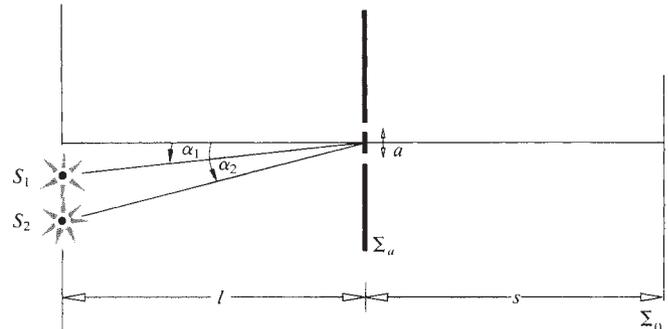
12.16* Prendre une fente source incohérente, quasi monochromatique et uniforme, comme une lampe à décharge, vue à travers un masque et un filtre. On souhaite éclairer un écran situé à 10 m, de sorte que le module du degré de cohérence complexe autour d'une région de 1 mm soit supérieur ou égal à 90 % pour une longueur d'onde de 500 nm. Quelle est la taille maximale de la fente ?

12.17* La figure P.12.17 montre deux points source quasi monochromatiques qui éclairent deux trous percés dans un masque. Montrer que les franges sur le plan d'observation ont une visibilité minimum quand :

$$a(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1}{2} m$$

où $m = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots$

Figure P.12.17



12.18 Considérer une source large quasi monochromatique ($\lambda = 500$ nm), constituée de lignes verticales, incohérentes et infiniment minces, séparées de $500 \mu\text{m}$ l'une de l'autre. Elles éclairent une paire de fentes verticales infiniment étroites sur un écran situé à 2 m. Quelle distance doit séparer les fentes pour que la visibilité des franges soit maximale ?



L'optique moderne : lasers et autres sujets

13.1 Lasers et lumière laser

Au début des années 1950, un remarquable dispositif, connu sous le nom de *maser* naquit des efforts d'un grand nombre de scientifiques, dont le chercheur américain Charles Hard Townes et les physiciens soviétiques Alexander Mikhailovich Prokhorov et Nikolai Gennadievich Basov. Tous trois partagèrent le prix Nobel de physique de 1964 pour leurs travaux. Le maser, acronyme de *Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation* (*Amplification de Micro-ondes par Émission Stimulée de Rayonnement*) est, comme son nom l'indique, un amplificateur de micro-ondes avec un bruit extrêmement bas*. Il fonctionnait de manière non conventionnelle en utilisant directement l'interaction quantique entre la matière et le rayonnement. Presque immédiatement après sa création, on spécula pour savoir si une telle technique pouvait être transposée dans le domaine de l'optique. En 1958, Townes et Arthur L. Schawlow avancèrent les conditions qui devaient être réunies pour obtenir une *Amplification de la Lumière par Émission Stimulée de Radiation* (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*), dont les premières lettres allaient composer le mot « laser ». En juillet 1960, Théodore H. Maiman annonça finalement le premier succès dans la mise au point d'un maser optique ou **laser**. Sans doute, l'une des plus importantes étapes de l'histoire de l'optique, et de la science, venait-elle d'être franchie.

Le laser est un dispositif quantique qui réussit à produire sa « merveilleuse » lumière en tirant profit de la manière subtile dont les atomes interagissent avec les rayonnements électromagnétiques. Afin de bien comprendre les bases fondamentales du fonctionnement du laser et la spécificité de son émission, nous allons d'abord exposer la théorie élémentaire du rayonnement

thermique ordinaire, émis, par exemple, par les ampoules ou les étoiles. Cette étape nécessitera d'introduire le rayonnement du corps noir et plus généralement les interactions entre le rayonnement EM et la matière. Nous ajouterons également une discussion sur la distribution de Boltzmann (p. 602), appliquée aux niveaux d'énergie atomiques. Avec cela pour point de départ, nous pourrions apprécier la notion centrale d'émission stimulée par l'intermédiaire des coefficients A et B d'Einstein (p. 602).

13.1.1 Rayonnement et matière en équilibre

Si la physique devait être réinventée, cela ne surprendrait personne qu'on le fasse en essayant de comprendre ce qu'est la lumière (c'est-à-dire l'énergie rayonnante). Les tout premiers débuts de la théorie quantique remontent à 1859 avec l'étude d'un phénomène problématique connu sous le nom de **rayonnement du corps noir**. Cette année-là, Charles Darwin publia *L'origine des espèces* et Gustav Robert Kirchhoff présenta un challenge intellectuel qui allait mener la physique à une véritable révolution.

Kirchhoff était préoccupé par le comportement des corps en équilibre thermique, et qui échangent de l'énergie rayonnante. Ce *rayonnement thermique* est l'énergie électromagnétique que tout objet émet, et dont l'origine est le mouvement aléatoire des atomes qui les constituent. Kirchhoff caractérisa la capacité des corps à émettre et à absorber l'énergie électromagnétique avec un *pouvoir émissif* ϵ_λ et un *facteur d'absorption* α_λ . Epsilon est l'énergie par unité de surface et par unité de temps émise dans une petite gamme de longueurs d'onde autour d'une valeur donnée de λ (en $\text{W}/\text{m}^2/\text{s}$). Certes, le rayonnement thermique correspond à une large gamme de fréquences, mais un dispositif de mesure d'énergie ne fonctionne généralement que dans une bande de longueurs d'onde. *Alpha est la fraction d'un rayonnement incident absorbé par l'objet dans cette bande de*

*Voir James P. Gordon, « The Maser », *Sci. Am.* 199, **42** (Décembre 1958).

longueur d'onde ; il est sans unité. Le pouvoir émissif et le facteur d'absorption dépendent à la fois de la nature de la surface du corps (couleur, texture, etc.) et de la longueur d'onde. Ainsi, un corps qui émet ou qui absorbe beaucoup à une longueur d'onde pourra émettre ou absorber peu à une autre.

Considérons une enceinte expérimentale isolée et en équilibre thermique à une température fixe T . Elle est certainement traversée d'échanges radiatifs, à une myriade de longueurs d'onde différentes, si l'on pense par exemple à un four rougeoiant. Kirchhoff présuma qu'il devait exister une formule ou une *fonction de distribution* $I_\lambda(\lambda)$, qui dépendait de T et qui devait donner les valeurs de l'**énergie par unité de surface et par unité de temps à chaque longueur d'onde**. Il s'agit de la **densité spectrale de flux** dans la cavité (ou **exitance spectrique** lorsqu'elle quitte la cavité). Il conclut que la quantité totale d'énergie qui était absorbée à toutes les longueurs d'onde par les parois devait être égale à la quantité totale d'énergie qu'elles émettaient, sinon T changerait, ce qui n'était pas le cas. De plus, Kirchhoff soutint que si les parois étaient composées de matériaux différents (se comportant différemment avec T), cette égalité devait être vérifiée pour chaque domaine de longueurs d'onde. Le flux absorbé par unité de surface à λ , à savoir $\alpha_\lambda I_\lambda$, devait être égal au flux émis par unité de surface, soit au pouvoir émissif, ε_λ , et cela pour tous les matériaux, quelles que soient leurs caractéristiques. La **loi du rayonnement de Kirchhoff** est donc :

$$\frac{\varepsilon_\lambda}{\alpha_\lambda} = I_\lambda \quad (13.1)$$

où la distribution I_λ , en $\text{J/m}^3\cdot\text{s}$ ou W/m^3 , est une fonction universelle qui est identique pour tous les types de parois de cavité, quels que soient le matériau, la couleur, la taille et la forme, et qui ne dépend que de T et de λ . C'est tout à fait extraordinaire ! Pourtant, longtemps auparavant (1792), le céramiste anglais Thomas Wedgwood avait déjà observé que les objets placés dans les fours à céramiques chauffés rougeoient en même temps que les parois, et ce, indépendamment de leur taille, de leur forme et de leur constitution.

Bien que Kirchhoff ne put obtenir la forme générale de sa fonction de distribution, il observa qu'un corps parfaitement absorbant, pour lequel $\alpha_\lambda = 1$, apparaîtrait noir, et que, dans ce cas particulier, $I_\lambda = \varepsilon_\lambda$. De plus, la fonction de distribution pour un objet parfaitement noir est la même que pour une enceinte isolée à la même température (visualisons un tel corps noir en équilibre dans un four chaud). La distribution spectrale du rayonnement à l'équilibre dans une cavité isolée est en tout point identique à celle d'un corps noir parfait à la

même température. Ainsi, **le rayonnement qui proviendrait d'un petit trou pratiqué dans l'enceinte devrait être identique à celui d'un objet parfaitement noir à la même température**.

La communauté scientifique accepta le défi de la détermination expérimentale de I_λ , mais les difficultés techniques étaient nombreuses et les progrès vinrent lentement. Le montage de base (figure 13.1a) est assez simple, bien qu'il nécessite une source fiable, ce qui fut un problème décourageant pendant une longue période. Il faut en effet, que les données recueillies soient indépendantes du type de montage et du détecteur utilisés, mais représentatives uniquement du paramètre recherché, qui est ici la densité d'éclairement par unité de longueur d'onde, ou éclairement spéctrique I_λ , du détecteur. Le type de courbes qui sont finalement enregistrées est représenté à la figure 13.1b, où chacune est une représentation de I_λ à une température particulière.

La loi de Stefan-Boltzmann

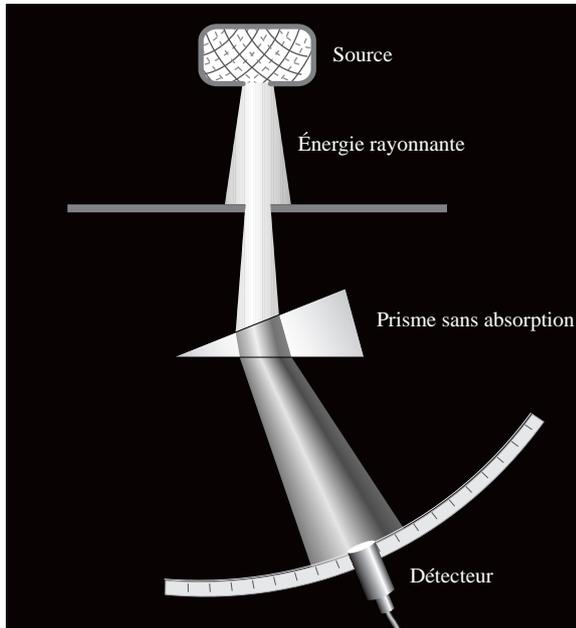
En 1865 John Tyndall publia des résultats expérimentaux, parmi lesquels le fait que l'énergie totale émise par un fil de platine chauffé est 11,7 fois plus élevée à $1\,200\text{ }^\circ\text{C}$ ($1\,473\text{ K}$) qu'à 525 ° (798 K). Assez étonnamment, Josef Stefan (1879) remarqua que le rapport de $(1\,473\text{ K})^4$ sur $(798\text{ K})^4$ était 11,6, soit presque 11,7, et il fit l'hypothèse que le rayonnement total était proportionnel à T^4 . Avec cette observation, Stefan était tombé juste (et il avait été assez chanceux). Les résultats de Tyndall étaient en fait assez éloignés de ceux d'un corps noir. Quoi qu'il en soit, ce fut L. Boltzmann qui apporta un fondement théorique à ces résultats (1884). Il s'agissait d'un traitement traditionnel de la pression de radiation exercée sur un piston dans un cylindre en utilisant les lois de la thermodynamique et la loi de Kirchhoff. L'analyse s'inspirait de l'étude d'un gaz dans un cylindre, mais à la place des atomes, le support actif était les ondes électromagnétiques. La loi de Stefan-Boltzmann pour les corps noirs (qui est correcte, bien qu'aujourd'hui nous l'obtiendrions différemment) est :

$$P = \sigma AT^4 \quad (13.2)$$

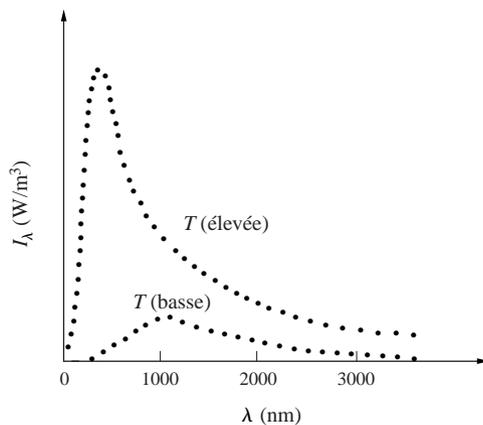
où P est la puissance totale rayonnée à toutes les longueurs d'ondes, A l'aire de la surface rayonnante, T la température absolue en kelvins, et σ une constante universelle définie par :

$$\sigma = 5,670\,33 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

L'intégrale de l'une ou l'autre des courbes du rayonnement du corps noir de la figure 13.1b pour T donnée est l'exitance



(a)



(b)

Figure 13.1 (a) Un montage expérimental élémentaire pour mesurer le rayonnement du corps noir. (b) Valeurs de I_λ à des longueurs d'onde successives mesurées par un détecteur. Chacune des courbes correspond à une température de source spécifique.

totale, soit le flux total émis par unité de surface. D'après l'équation (13.2), il s'agit de $P/A = \sigma T^4$.

Les objets réels ne sont pas des corps noirs parfaits ; le noir de carbone a un facteur d'absorption proche de un, mais uniquement à certaines fréquences (incluant évidemment le

visible). Son facteur d'absorption est bien plus faible dans l'infrarouge lointain. Malgré tout, la plupart des objets se comportent comme des corps noirs (au moins à certaines températures et pour certaines longueurs d'onde). Un corps humain est par exemple pratiquement assimilable à un corps noir dans l'infrarouge. C'est pourquoi, il est utile de disposer d'une expression similaire à celle du corps noir pour les corps qui ne sont pas noirs. On peut faire cela grâce à un facteur multiplicatif, appelé *émissivité totale* (ϵ), qui permet de relier le flux émis par un corps réel à celui qui est émis par un corps noir, pour lequel $\epsilon = 1$, à la même température, donc :

$$P = \epsilon \sigma A T^4$$

Le tableau 13.1 fournit quelques valeurs de ϵ (à température ambiante). Notons que l'émissivité est sans unité, et que $0 < \epsilon < 1$.

Si l'on place un objet de facteur d'absorption totale α dans un endroit clos telle qu'une cavité ou une pièce de pouvoir émissif ϵ_e et à la température T_e , le corps va émettre un rayonnement $\epsilon \sigma A T^4$ et absorber le rayonnement à l'intérieur de l'enceinte $\alpha(\epsilon_e \sigma A T^4)$. Pourtant, quelle que soit la température à laquelle le corps et l'enceinte sont en équilibre (i.e. $T = T_e$), ces rayonnements doivent être égaux ; d'où $\alpha \epsilon_e = \epsilon$. Le flux total rayonné (lorsque $T > T_e$) ou absorbé (lorsque $T < T_e$) par le corps est alors :

$$P = \epsilon \sigma A (T^4 - T_e^4)$$

Tout corps n'étant pas à 0 kelvin rayonne et du fait de la loi en T^4 , le rayonnement est très sensible aux changements de température. Un corps porté à 100 °C (373 K) rayonne environ 3,5 fois plus qu'à 0 °C (273 K), et une élévation de température augmente l'émission globale ; c'est pourquoi il devient

Tableau 13.1 Quelques valeurs représentatives de l'émissivité totale*

Matériau	ϵ
Feuille d'aluminium	0,02
Cuivre poli	0,03
Cuivre oxydé	0,5
Carbone	0,8
Peinture blanche, lisse	0,87
Brique rouge	0,9
Béton	0,94
Peinture noire, lisse	0,94
Suie	0,95

* $T = 300 \text{ K}$, température ambiante

progressivement de plus en plus difficile d'élever la température d'un objet (essayez de chauffer une petite cuillère en acier à 1 300 °C !) Élever la température d'un objet modifie également la distribution en fonction de la longueur d'onde. Au moment où le filament d'une ampoule « grille », la résistance, le courant et la température augmentent ; il passe de sa couleur de fonctionnement blanche-rougeâtre à un flash brillant de lumière blanche bleutée.

Loi du déplacement de Wien

Sans doute le dernier grand succès dans l'application de la théorie classique au problème du rayonnement du corps noir provint, en 1893, de la contribution du physicien et prix Nobel allemand Wilhelm Otto Fritz Franz Wien (1864-1928), connu par ses amis sous le nom de Willy. Il obtint ce que nous appelons aujourd'hui la **loi du déplacement**. Chaque courbe de corps noir atteint son maximum pour une valeur de la longueur d'onde (λ_{\max}) qui lui est propre, et qui dépend donc de sa température absolue T . Wien a pu démontrer que :

$$\lambda_{\max} T = \text{constante} \quad (13.3)$$

où la constante a été trouvée expérimentalement égale à 0,002 898 m·K. La longueur d'onde du pic d'émission est inversement proportionnelle à la température. Une élévation de température entraîne le déplacement du maximum vers des longueurs d'ondes plus courtes (donc des fréquences plus hautes – voir la courbe en pointillés de la figure 13.2).

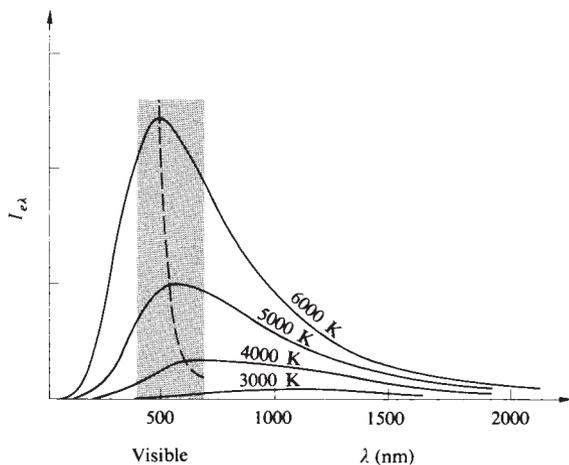


Figure 13.2 Courbes de radiation du corps noir. L'hyperbole passant par les sommets correspond à la loi de Wien.

À mesure qu'un morceau de charbon ardent (ou qu'une étoile) devient plus chaud, il passe d'un rouge sombre au rouge vif puis au blanc-bleuté (d'où l'expression « chauffé à blanc »). Un morceau de bois, qui est assez proche d'un corps noir, émet principalement dans l'infrarouge, et il ne commence à briller faiblement dans le visible qu'aux alentours de 600 °C ou 700 °C. Le rouge cerise brillant d'un morceau d'acier « chauffé au rouge » n'apparaît visible qu'à environ 1 300 °C.

En 1889, les chercheurs ont beaucoup amélioré l'état de l'art expérimental en utilisant, comme corps noir, un petit trou pratiqué dans une cavité chauffée (figure 13.3). L'énergie pénétrant dans une telle ouverture se réfléchit à l'intérieur de la cavité jusqu'à son absorption totale (la pupille de l'œil apparaît noire pour précisément la même raison). Un absorbant presque parfait est un émetteur presque parfait, et l'intérieur d'un petit trou pratiqué dans un four est une merveilleuse source de *rayonnement du corps noir*.

Ce fut à cette époque que la théorie classique commença à présenter des faiblesses. Toutes les tentatives pour faire correspondre la courbe de rayonnement (figure 13.2) avec une expression théorique basée sur l'électromagnétisme ne conduisit qu'à des succès très limités. Wien établit une formule qui convenait assez bien pour les données expérimentales obtenues aux basses longueurs d'onde, mais elle déviait substantiellement pour les hautes. Lord Rayleigh, et plus tard Sir James Jeans (1877-1946), développèrent une description en termes de modes d'ondes stationnaires du champ à l'intérieur de l'enceinte. Mais la *formule de Rayleigh-Jeans* qui en résultait ne rejoignait les courbes expérimentales qu'aux très grandes longueurs d'onde. L'échec de la théorie classique était totalement inexplicable. L'histoire de la physique était arrivée à un tournant.

La loi du rayonnement de Planck

À 42 ans, Max Karl Ernst Ludwig Planck, était le père plutôt réticent de la théorie quantique. À l'instar de tant d'autres théoriciens du début du siècle, il travaillait sur le rayonnement

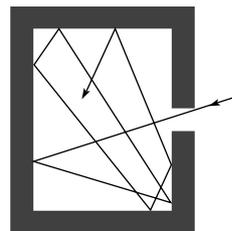


Figure 13.3 L'énergie rayonnante entrant par un petit trou va se réfléchir dans la chambre avec peu de chance d'émerger à nouveau par l'ouverture, et le trou semble donc noir. À l'inverse, l'ouverture d'une enceinte chauffée apparaît comme un corps noir.

du corps noir. Mais Planck allait réussir non seulement à établir la fonction de répartition spectrale de Kirchhoff, mais également à révolutionner la physique par la même occasion. On ne peut pas donner ici les détails de son raisonnement, d'autant plus que la version originale était fautive (Bose et Einstein la corrigèrent des années plus tard). Cependant, son impact fut si important qu'il vaut la peine de s'attarder sur certains de ses aspects corrects.

Planck savait que si une distribution arbitraire de molécules énergétiques était injectée dans une chambre d'expérimentation à température constante, elle se réarrangerait elle-même, à terme la forme de la distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann, puisqu'elle atteindrait inévitablement l'équilibre. Il était donc concevable que, si l'on injectait une distribution arbitraire d'énergie radiative dans une cavité à température constante, elle évoluerait également, de par elle-même, vers la distribution des énergies de Kirchhoff puisqu'elle atteindrait inévitablement l'équilibre.

En octobre 1900, Planck trouva une formule de distribution basée sur les résultats expérimentaux les plus récents. Cette invention mathématique, concoctée par « hypothèse chancelante », correspondait à toutes les données disponibles. Elle contenait deux constantes fondamentales, dont l'une, (h) allait être connue sous le nom de **constante de Planck**. Il s'agissait déjà d'un succès en soit, même si cela n'expliquait pas tout. Bien que Planck n'en eût pas la moindre idée à l'époque, il était à l'aube d'une étape qui allait, par inadvertance, révolutionner notre perception de l'Univers physique.

Assez naturellement, Planck se mit à la construction d'un schéma théorique qui mènerait logiquement à l'équation qu'il avait déjà obtenue. Il supposa que le rayonnement dans une enceinte interagissait avec des oscillateurs microscopiques simples, de type non spécifié. Ceux-ci vibraient sur les surfaces des parois de la cavité, absorbant et réémettant un rayonnement indépendant du matériau (en fait, les atomes des murs font exactement cela : du fait de leur configuration très serrée dans les parois solides, les atomes interagissent avec un très grand nombre de leurs voisins, ce qui brouille complètement leurs fines vibrations de résonance caractéristiques, leur permet d'osciller sur une large gamme de fréquences, et d'émettre un spectre continu). Malgré ces tentatives, Planck échoua. À cette époque, il était un disciple de E. Mach, qui avait peu d'intérêt pour la réalité des atomes, et pourtant, l'impossibilité de résoudre son problème poussa Planck à un « acte de désespoir ». Il finit par se tourner vers la statistique « déplaisante » de Boltzmann, qui était destinée aux nuages d'atomes qui constituent un gaz.

Boltzmann, le grand partisan des atomes, et Planck avaient été deux adversaires intellectuels pendant un certain temps. Et maintenant, Planck était obligé d'utiliser la statistique de son rival, qu'il allait d'ailleurs, ironiquement, mal appliquer. S'il voulait appliquer la méthode de comptage d'atomes de Boltzmann à quelque chose de continu, comme l'énergie, Planck devait apporter quelques ajustements à la procédure. Ainsi, selon Planck, on devait envisager au moins temporairement que l'énergie totale des oscillateurs était répartie en « éléments d'énergie », afin de pouvoir les compter. Il donna à ces éléments d'énergie une valeur proportionnelle à la fréquence ν des résonateurs. Souvenons-nous qu'il avait déjà trouvé la formule qu'il cherchait, dans laquelle apparaissait le terme $h\nu$. La constante de Planck,

$$6,626\,075\,5 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \quad \text{ou} \quad 4,135\,669\,2 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$$

est un très petit nombre et donc $h\nu$, qui est homogène à l'énergie, est elle-même une très petite quantité. En conséquence, il posa que la valeur de l'élément d'énergie était égale à : $\mathcal{E} = h\nu$.

Il s'agissait de faire une analyse statistique, le comptage était central. Pourtant, lorsqu'il appliquait la méthode suivant les règles de Boltzmann, cela lissait naturellement l'énergie, la rendant continue, ce qui était habituel. À nouveau, on ne doit pas trop se préoccuper des détails. La chose surprenante fut que Planck était tombé par hasard sur un mystère caché de la nature : **l'énergie est quantifiée** et elle vient par petites bouffées, mais il ne le réalisa pas tout de suite.

Planck obtint la formule suivante pour l'existence spectrique (ou éclairissement spectrique), à laquelle il était déjà arrivé en faisant correspondre les courbes aux données. Celle-ci constitue donc la réponse au défi de Kirchhoff :

$$I_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \left[\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \right] \quad (13.4)$$

où k_B est la constante de Boltzmann. Cela constitue la **loi du rayonnement de Planck**, qui, bien sûr, exprimait parfaitement le comportement du corps noir (figure 13.4). Notons de quelle façon l'expression contient la vitesse de la lumière, la constante de Boltzmann et la constante de Planck (h). Elle fait le lien entre la théorie électromagnétique et le domaine des atomes.

Bien que l'équation (13.4) représente une grande coupure par rapport aux idées précédentes, Planck ne voulut pas rompre avec la théorie classique. Il aurait été impensable pour lui de suggérer que l'énergie rayonnée pouvait ne pas être continue. « Cette énergie est forcée, au départ, à rester

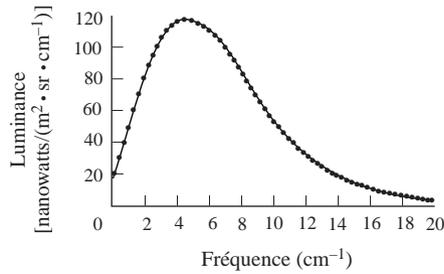


Figure 13.4 Le rayonnement cosmique du fond de l'Univers. Depuis le big-bang, l'Univers s'est étendu et refroidi. Les points de données (mesurés dans le spectre micro-ondes) ont été détectés par le satellite Cosmic Background Explorer (COBE). La ligne qui les joint est la courbe de corps noir de Planck pour une température de $2,735 \pm 0,06$ K.

groupée dans un certaine quanta... ». Planck remarqua par la suite qu'« il ne s'agissait que d'une hypothèse formelle et je n'y ai vraiment pas réfléchi plus que ça ». Ce n'est qu'aux alentours de 1905, entre les mains d'un penseur plus audacieux, Albert Einstein, que l'on apprit que les oscillateurs atomiques étaient réels et que leur énergie était quantifiée. Chaque oscillateur ne peut exister qu'avec une énergie qui est un multiple entier de $h\nu$ (un peu comme l'énergie potentielle gravitationnelle de quelqu'un montant un escalier). De plus, **l'énergie rayonnée est elle-même quantifiée**, sous forme de paquets localisés, et de valeur $\mathcal{E} = h\nu$.

13.1.2 L'émission stimulée

Le laser accomplit une « amplification de lumière » en utilisant des atomes énergétiques d'un milieu pour renforcer un rayonnement. Examinons donc la loi suivant laquelle sont normalement distribués les états d'énergie d'un système d'atomes à une température arbitraire. Ce problème fait partie de la discipline, plus générale, de la Mécanique Statistique et il est spécifiquement traité en termes de distribution de Maxwell-Boltzmann.

Population des niveaux d'énergie

Imaginons une enceinte pleine d'un gaz à l'équilibre à une température T . Si T est relativement basse, ce qui est le cas dans une pièce quelconque, la plupart des atomes seront dans leur état fondamental, mais quelques-uns prendront momentanément assez d'énergie pour « s'élever » dans un état excité. D'après la distribution classique de Maxwell-Boltzmann, il y

aura en moyenne un certain nombre d'atomes par unité de volume, N_i , qui seront dans un état excité d'énergie \mathcal{E}_i :

$$N_i = N_0 e^{-\mathcal{E}_i/k_B T}$$

où N_0 est une constante pour une température donnée. Il y a d'autant moins d'atomes dans cet état que son niveau d'énergie est élevé (l'exponentielle est d'autant plus petite), c'est-à-dire que la valeur de \mathcal{E} est grande.

Puisque nous nous intéressons à la transition atomique entre des états arbitraires, considérons le $j^{\text{ème}}$ niveau d'énergie où $\mathcal{E}_j > \mathcal{E}_i$. Ainsi, pour celui-ci, $N_j = N_0 e^{-\mathcal{E}_j/k_B T}$, et le rapport des populations occupant ces deux états est :

$$\frac{N_j}{N_i} = \frac{e^{-\mathcal{E}_j/k_B T}}{e^{-\mathcal{E}_i/k_B T}} \quad (13.5)$$

Il s'agit de la *population relative*, d'où il résulte que :

$$N_j = N_i e^{-(\mathcal{E}_j - \mathcal{E}_i)/k_B T} = N_i e^{-h\nu_{ji}/k_B T} \quad (13.6)$$

où nous avons utilisé le fait qu'une transition entre le $j^{\text{ème}}$ état et le $i^{\text{ème}}$ état correspond à un changement d'énergie $(\mathcal{E}_j - \mathcal{E}_i)$. Comme de telles transitions sont accompagnées de l'émission d'un photon de fréquence ν_{ji} , on peut substituer $(\mathcal{E}_j - \mathcal{E}_i) = h\nu_{ji}$.

Les coefficients A et B d'Einstein

En 1916, Einstein élaborait un traitement théorique élégant et assez simple de l'équilibre dynamique dans le cas d'un milieu matériel absorbant et réémettant qui serait plongé dans un rayonnement électromagnétique. Il lança cette analyse pour confirmer la loi du rayonnement de Planck, mais, plus important encore, ce fut elle qui créa le fondement théorique du laser. Le lecteur devrait déjà être familier avec le mécanisme élémentaire d'absorption (figure 3.35, p. 69). Supposons qu'un atome soit dans son état d'énergie le plus bas ou état fondamental, et qu'un photon d'énergie adéquate, interagisse avec lui. Le photon lui transmet cette énergie et entraîne ainsi le nuage électronique à prendre une nouvelle configuration. L'atome passe dans un état excité, d'énergie supérieure (figure 13.5). Dans un milieu dense, l'atome va probablement interagir avec ses voisins, qui eux aussi sont excités, et leur transmettre son surplus d'énergie par collisions.

Une telle configuration d'excédent d'énergie est en principe (mais pas toujours) de très courte durée. Sans intervention externe, en 10 ns environ, l'atome va émettre son excès d'énergie sous la forme d'un photon. En même temps, il

retourne dans un état stable par un processus appelé *émission spontanée* (figure 13.5b).

Le point remarquable est qu'il existe une troisième possibilité de processus, qui fut envisagée pour la première fois par Einstein et qui est crucial pour le principe du laser (qui ne fut inventé qu'environ un demi-siècle plus tard). Dans un milieu soumis à un rayonnement EM, il est possible qu'un photon interagisse avec un atome alors que ce dernier est encore dans son état excité. L'atome peut alors se débarrasser de son excédent d'énergie à l'instant même où arrive le photon incident,

par un processus appelé aujourd'hui **émission stimulée** (figure 13.5).

Dans le cas de l'absorption, le nombre d'atomes qui quittent, par seconde, l'état fondamental pour aller dans un état excité doit dépendre du flux de photons qui arrive sur ces atomes. En d'autres termes, il doit dépendre de la densité d'énergie u par unité de volume, donnée par l'équation (3.34), mais, plus spécifiquement, à la densité d'énergie par unité de volume qui est comprise dans le domaine de fréquence qui entraîne la transition, c'est-à-dire la densité spectrale d'énergie

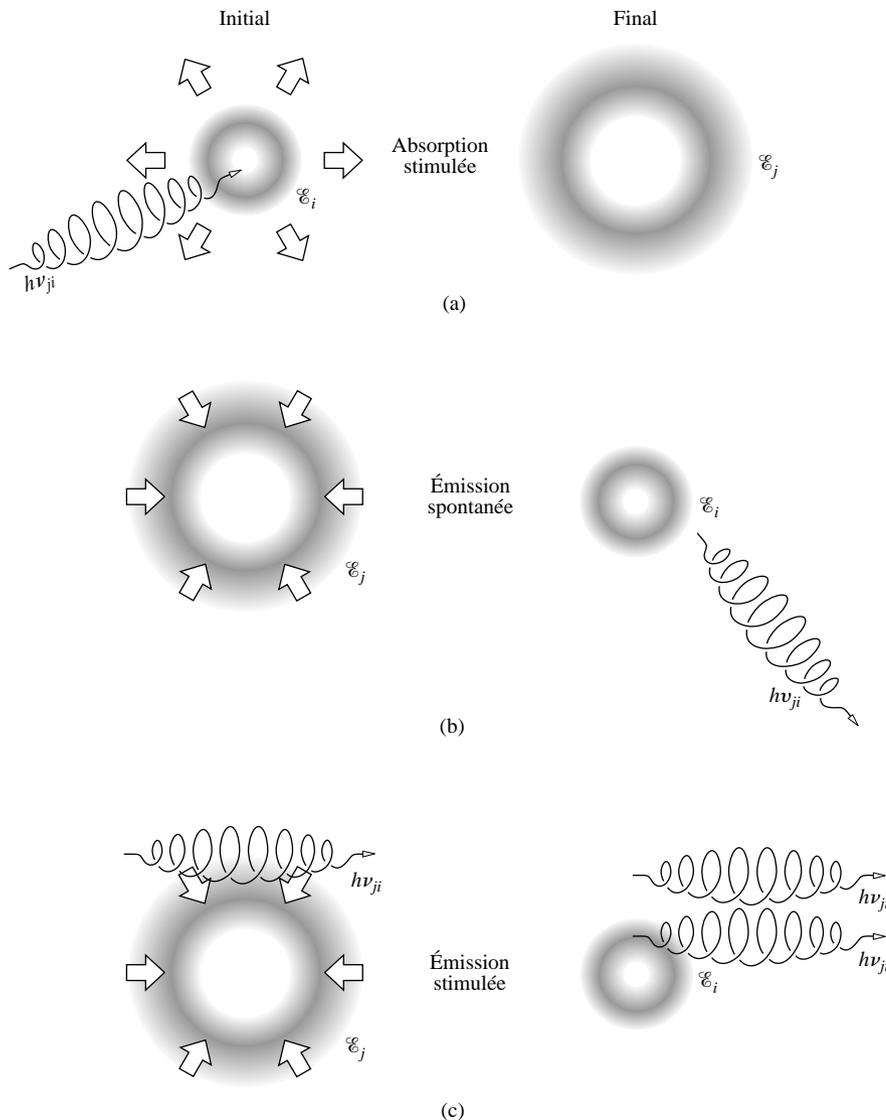


Figure 13.5 Représentation schématique (a) d'une absorption stimulée, (b) d'une émission spontanée et (c) d'une émission stimulée.

u_ν , par unité de volume, en $\text{J} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ (notons que si l'on considère le rayonnement comme un gaz de photons, la densité spectrale d'énergie par unité de volume peut être assimilée à la densité de photons par unité de volume dans une bande de fréquence de 1 Hz). La variation du nombre d'atomes par unité de temps, ou **taux de transition**, est également proportionnelle à la population, c'est-à-dire, à la densité d'atomes par unité de volume dans cet état (N_i). Plus ils sont nombreux, plus nombreux sont également ceux qui peuvent le quitter (par absorption) par seconde. Parce que ce processus est régi par le flux de photons, nous l'appellerons **absorption stimulée**. Le taux de transition est alors :

$$\text{[Absorption stimulée]} \quad \left(\frac{dN_i}{dt} \right)_{\text{ab}} = -B_{ij}N_i u_\nu \quad (13.7)$$

Ici, B_{ij} est une constante de proportionnalité, et le signe moins apparaît car N_i décroît. De manière similaire, pour l'émission stimulée :

$$\text{[Émission stimulée]} \quad \left(\frac{dN_j}{dt} \right)_{\text{st}} = -B_{ji}N_j u_\nu \quad (13.8)$$

Dans le cas de l'émission spontanée, le processus est indépendant du champ environnant, et :

$$\text{[Émission spontanée]} \quad \left(\frac{dN_j}{dt} \right)_{\text{sp}} = -A_{ji}N_j \quad (13.9)$$

Gardons à l'esprit que le rapport entre le taux de transition, c'est-à-dire le nombre d'atomes effectuant des transitions par seconde, le nombre total d'atomes, est la probabilité de transition par seconde, \mathcal{P} . En conséquence, la probabilité d'émission spontanée par seconde est $\mathcal{P}_{\text{sp}} = A_{ji}$.

Pour un atome seul, excité, et qui effectue une transition spontanée vers un état inférieur, l'inverse de la probabilité de transition par seconde est la **durée de vie** moyenne de l'état d'excitation τ . Ainsi, (en considérant des conditions excluant tout mécanisme autre que l'émission spontanée), si N atomes sont en état d'excitation, le taux de transitions total, c'est-à-dire, le nombre de photons émis par seconde, est $N\mathcal{P}_{\text{sp}} = NA_{ji} = N/\tau$. Une probabilité de transition faible signifie donc une longue durée de vie.

Les trois constantes A_{ji} , B_{ji} , et B_{ij} sont les coefficients d'Einstein. En suivant son raisonnement, on supposera (1) qu'il existe un équilibre thermodynamique entre le champ et les atomes à toute température ; (2) que la densité d'énergie par unité de volume a les caractéristiques d'un corps noir à T ; et (3) que les populations d'atomes sont en accord avec la distribution de Maxwell-Boltzmann, dans les deux états.

Étant donné que le système est à l'équilibre, le taux des transitions ascendantes ($i \rightarrow j$) doit être égal à celui des transitions descendantes ($j \rightarrow i$) :

$$B_{ij}N_i u_\nu = B_{ji}N_j u_\nu + A_{ji}N_j$$

En divisant chacune des expressions par N_i , et en réarrangeant les termes, on obtient :

$$\frac{N_j}{N_i} = \frac{B_{ij}u_\nu}{A_{ji} + B_{ji}u_\nu}$$

En utilisant l'équation (13.6), c'est-à-dire ce que l'on a trouvé en appliquant la distribution de Maxwell-Boltzmann, l'expression devient :

$$e^{-h\nu_{ji}/k_B T} = \frac{B_{ij}u_\nu}{A_{ji} + B_{ji}u_\nu}$$

Et résoudre en u_ν donne :

$$u_\nu = \frac{A_{ji}/B_{ji}}{(B_{ij}/B_{ji})e^{h\nu_{ji}/k_B T} - 1} \quad (13.10)$$

Einstein remarqua que lorsque $T \rightarrow \infty$, la densité spectrale de l'énergie u_ν , par unité de volume, c'est-à-dire la densité spectrale du nombre de photons par unité de volume, tendait vers l'infini. La figure 13.3 montre que l'éclairement spectrique I_λ (en fonction de λ) augmente en fonction de T , ce qui implique que la densité spectrale par unité de volume u_ν (en fonction de ν) se comporte de même. On va aborder à présent le fait que $I_\nu = \frac{c}{4}u_\nu$. De toute façon, comme $e^0 = 1$, pour que u_ν soit grand, il faut que :

$$B_{ij} = B_{ji} = B$$

pour une température T élevée. Puisque ces deux constantes sont indépendantes de la température, elles doivent vérifier cette égalité, quelle que soit T . Les probabilités d'émission stimulée et d'absorption stimulée sont respectivement $\mathcal{P}_{\text{st}} = B_{ji}u_\nu$ et $\mathcal{P}_{\text{ab}} = B_{ij}u_\nu$. Ainsi, **la probabilité d'émission stimulée est identique à la probabilité d'absorption stimulée** ; la probabilité pour qu'un atome effectue une transition stimulée vers le haut est la même que la probabilité, pour cet atome, de faire une transition stimulée vers le bas, alors qu'il est à l'état haut.

En simplifiant la notation (en posant $A = A_{ji}$), l'équation (13.10) devient :

$$u_\nu = \frac{A}{B} \left[\frac{1}{e^{h\nu_{ji}/k_B T} - 1} \right] \quad (13.11)$$

Le rapport A/B peut être exprimé par l'intermédiaire de quantités élémentaires en comparant cette équation avec :

$$I_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \left[\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \right] \quad (13.4)$$

Mais transformons d'abord I_λ en I_ν qui sont deux expressions de la densité spectrale d'exitance (ou éclairage de sortie), par intervalles unitaires $d\lambda$ et $d\nu$, respectivement. En partant du fait que $\lambda = c/\nu$, et en différentiant, on obtient $d\lambda = -c d\nu/\nu^2$. Parce que $I_\lambda d\lambda = I_\nu d\nu$, on trouve, en inversant les signes (qui signalent simplement que l'une croît alors que l'autre décroît), $I_\lambda c/\nu^2 = I_\nu$. Ainsi :

$$I_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \right] \quad (13.12)$$

À présent, comme dernière étape, on doit seulement comparer la densité spectrale de l'énergie par unité de volume u_ν dans l'enceinte avec l'exitance spectrale,

$$I_\nu = \frac{c}{4} u_\nu \quad (13.13)$$

qui en émerge. Plutôt que d'accabler le lecteur avec tous les calculs nécessaires à l'obtention de cette relation, nous nous contenterons de la justifier. Gardons à l'esprit que I_ν correspond au débit d'énergie par unité de surface normale, entrant d'un côté et ressortant de l'autre, pour un faisceau quittant l'enceinte. Dans le paragraphe 3.3.1, on a vu que le flux instantané par unité de surface normale, le vecteur de Poynting, était donné par $S = cu$. En moyenne, on a donc $I = cu$ pour un faisceau. Cependant, à l'intérieur de l'enceinte, avec la lumière circulant dans tous les sens, tous les photons qui contribuent à u ne contribuent pas à l'exitance dans une direction particulière. Sans doute, à l'intérieur de l'enceinte, une surface horizontale verrait passer autant d'énergie vers le haut que vers le bas. De plus, seules les composantes perpendiculaires à la surface contribuent à S , donc un facteur de $1/4$ n'est pas déraisonnable.

D'après les équations (13.11), (13.12) et (13.13), il découle que :

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \quad (13.14)$$

La probabilité d'émission spontanée est donc proportionnelle à la probabilité d'émission stimulée. Un atome capable de l'un de ces mécanismes est donc, proportionnellement, capable de l'autre. Les lasers fonctionnent par émission stimulée, et tout

ce qui accroît l'émission spontanée (i.e. A) au prix de l'émission stimulée (i.e. B) peut être envisagé comme allant au détriment du processus. Parce que le rapport A/B varie comme ν^3 , il semble que les lasers à rayons X soient très difficiles à fabriquer, ce qui est le cas !

Imaginons un ensemble d'atomes en équilibre thermique possédant seulement deux états possibles. En outre, considérons que les atomes ont une longue durée de vie afin de pouvoir ignorer l'émission spontanée. Lorsqu'ils sont éclairés par des photons d'énergie appropriée, l'absorption stimulée vide le niveau inférieur i , alors que l'émission stimulée dépeuple le niveau supérieur j . Le nombre de photons qui disparaissent par seconde par absorption stimulée est proportionnel à $\mathcal{P}_{ab} N_i$, et le nombre de ceux qui apparaissent par émission stimulée est proportionnel à $\mathcal{P}_{st} N_j$. Cependant, de l'égalité des coefficients B , il découle que $\mathcal{P}_{st} = \mathcal{P}_{ab}$. De ce fait, $\mathcal{P}_{ab} N_j = \mathcal{P}_{st} N_j$. D'autre part, si le système est en équilibre thermique, on a $N_i > N_j$, ce qui signifie que, par seconde, le nombre de photons qui disparaissent est supérieur au nombre de ceux qui entrent. Il y a une absorption nette de photons par l'état inférieur parce qu'il y a plus d'atomes dans cet état, quelle que soit la température. Ce serait le contraire s'il était possible de réaliser une *inversion de population*, dans laquelle $N_i < N_j$. Alors, l'émission stimulée prendrait le dessus sur l'absorption stimulée.

13.1.3 Le laser

Considérons un milieu ordinaire dans lequel quelques atomes sont dans un état excité, que nous appellerons $|j\rangle$ pour nous conformer aux notations de la mécanique quantique. Pour qu'un photon incident puisse amener l'un de ces atomes excités à effectuer une émission stimulée, il faut qu'il ait la fréquence ν_{ji} , comme à la figure 13.5c. Une caractéristique remarquable de ce processus est que **le photon émis a la même phase, la même polarisation et la même direction que le rayonnement excitateur**. On dit que le photon émis est dans le même « mode » de rayonnement que l'onde incidente à laquelle il tend à s'ajouter, augmentant ainsi sa densité de flux. Cependant, puisque la majorité des atomes sont ordinairement dans leur état fondamental, l'absorption est bien plus probable que l'émission stimulée.

Ce point met en lumière une question intéressante. Qu'arriverait-il si un certain pourcentage d'atomes pouvait être, de quelque manière que ce soit, excité vers un état supérieur, laissant l'état inférieur presque vide ? Pour des raisons évidentes, ce processus est ce qu'on appelle **l'inversion de population**.

Dans ce cas, un photon incident à la fréquence appropriée pourrait alors déclencher une avalanche de photons stimulés, *tous en phase*. L'onde initiale continuerait à croître tant qu'il n'y aurait pas de phénomène contradictoire important (tel que la diffusion), et pourvu que l'inversion des populations puisse être maintenue. Pour cela, il faut injecter de l'énergie (électrique, chimique, optique, etc.) dans le système pour maintenir l'inversion, et pour qu'un faisceau de lumière soit extrait après avoir traversé le *milieu actif*.

Le premier laser (impulsionnel à rubis)

Pour voir comment tout cela s'accomplit en pratique, examinons le dispositif original de Maiman (figure 13.6). Le premier laser opérationnel avait, comme milieu actif, un petit barreau cylindrique de rubis synthétique rose-pâle, qui était en fait un cristal de Al_2O_3 contenant à peu près 0,05 % (en poids) de Cr_2O_3 . Le rubis, qui est encore l'un des cristaux lasers les plus communs, avait déjà été utilisé dans les applications maser, et il avait été proposé comme matériau laser possible par Schawlow. Les faces des extrémités du barreau avaient été polies, parallèles et normales à l'axe. Ensuite, chacune avait été argentée (dont une de manière partielle) afin de former une **cavité résonante**.

Il était entouré par un tube à décharge gazeux hélicoïdal, qui fournissait un **pompage optique** de large spectre. Le rubis apparaît rouge parce que les atomes de chrome ont des bandes d'absorption dans le bleu et dans le vert (figure 13.7a). La mise en marche de la pompe produit un éclair intense de lumière, qui dure quelques millisecondes. La plus grande partie de cette énergie est perdue en chaleur, mais beaucoup d'ions Cr^{3+} sont excités dans les bandes d'absorption. La figure 13.7b présente un diagramme simplifié en niveaux d'énergie. Les ions excités se dés excitent rapidement (en environ 100 ns), en communiquant leur énergie au réseau cristallin et en effectuant des transitions non radiatives. Généralement, ils « retombent » vers deux états intermédiaires, très proches l'un de l'autre, et qui présentent une durée de vie particulièrement longue. Ils restent dans ces **états métastables** pendant quelques millisecondes (3 ms à température ambiante) avant de retomber aléatoirement, et presque toujours spontanément, dans leur état fondamental. Ce processus s'accompagne de l'émission du rayonnement rouge fluorescent caractéristique du rubis. La transition vers le niveau inférieur prédomine, et l'émission qui en résulte a lieu dans une gamme spectrale relativement large, centrée aux alentours de 694,3 nm. Elle se propage dans toutes les directions et est incohérente.

Lorsqu'on augmente le taux de pompage, il se produit une inversion des populations, et les quelques premiers photons émis spontanément stimulent une réaction en chaîne. Un quantum déclenche l'émission en phase, rapide, d'un autre quantum,

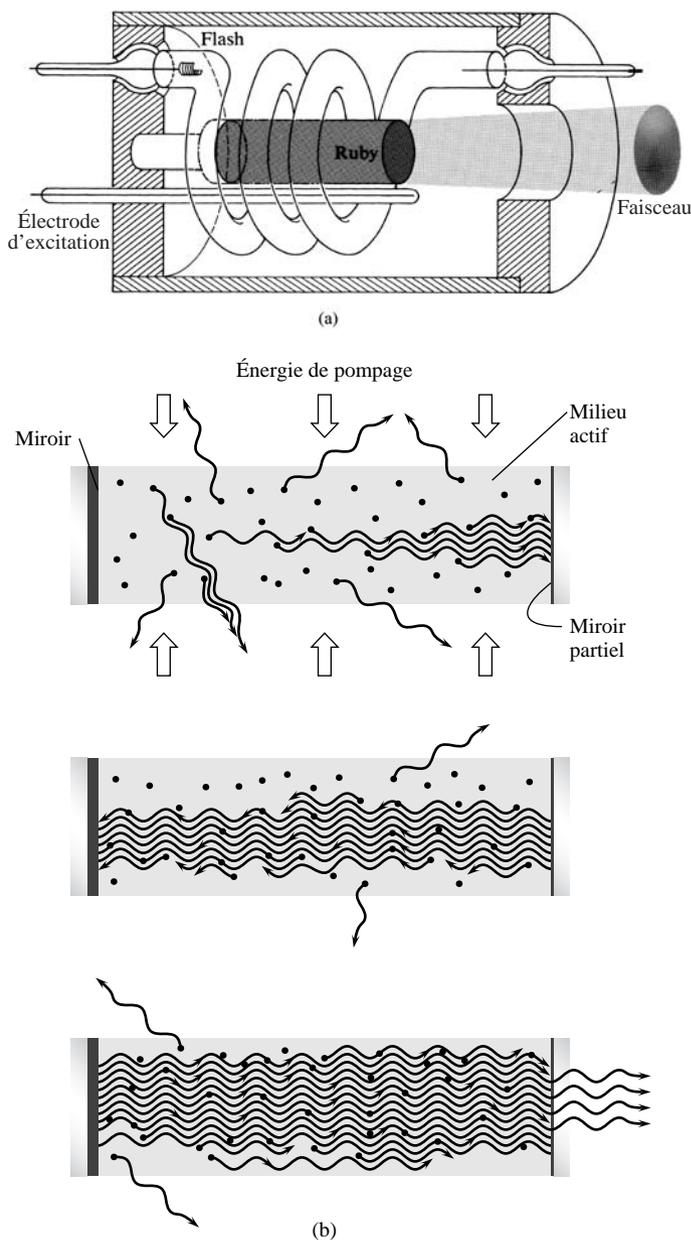


Figure 13.6 Configuration du premier laser à rubis, pratiquement en grandeur nature.

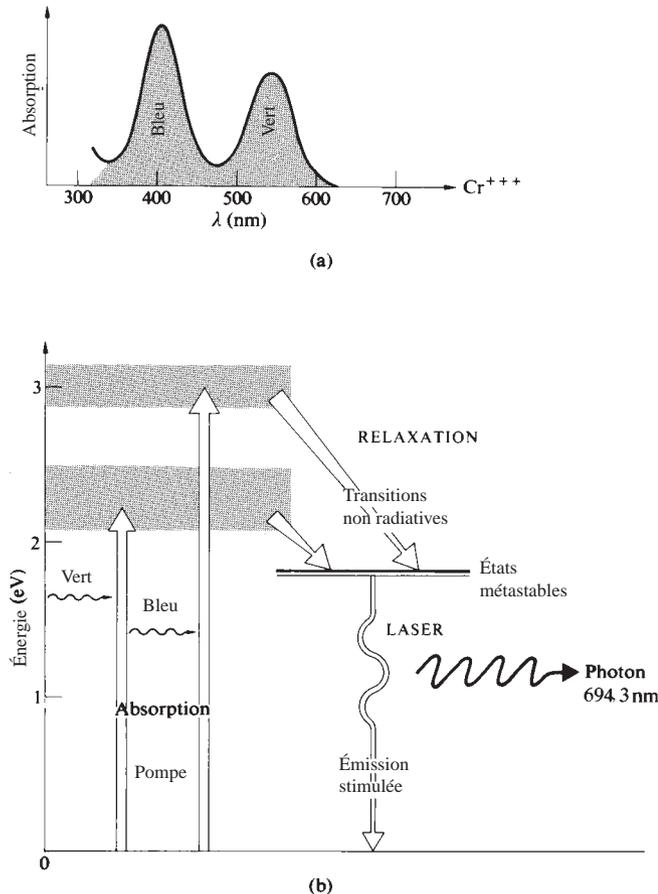


Figure 13.7 Niveaux d'énergie du laser à rubis.

transformant l'énergie des atomes métastables en onde lumineuse (figure 13.6b). L'onde se fortifie de plus en plus au fur et à mesure de ses aller-retour dans le milieu actif (pourvu que suffisamment d'énergie soit disponible pour surmonter les pertes des miroirs aux extrémités). Puisque l'une de ces surfaces réfléchissantes est partiellement argentée, une intense impulsion de lumière laser rouge (de durée à peu près égale à 0,5 ms et de largeur de raie d'à peu près 0,01 nm) émerge finalement par cette extrémité du barreau de rubis.

Notons la façon dont tout fonctionne impeccablement. Les grandes bandes d'absorption produisent facilement l'excitation initiale, alors que la longue durée de vie de l'état métastable facilite l'inversion de population. Ce système atomique comporte (1) des bandes d'absorption, (2) un état métastable et (3) un état fondamental ; aussi parle-t-on de laser à *trois niveaux*.

Aujourd'hui, on emploie généralement le laser à rubis comme source cohérente impulsionnelle de grande puissance, dans les travaux d'interférométrie, de diagnostics de plasma, en holographie et dans bien d'autres domaines. De tels dispositifs fonctionnent avec des longueurs de cohérence allant de 0,1 m à 10 m. Les configurations modernes ont en général des miroirs externes plans, l'un totalement réfléchissant et l'autre partiellement. En tant qu'oscillateur, le laser à rubis produit des impulsions de quelques millisecondes avec des énergies comprises entre 50 J et 100 J. Cependant, en utilisant un montage oscillateur-amplificateur en tandem, on peut obtenir des énergies de plus de 100 J. D'un rendement moyen inférieur à 1 %, le laser à rubis commercial produit un faisceau dont le diamètre est compris entre 1 mm et 25 mm, avec une divergence typique allant de 0,25 mrad à 7 mrad.

Cavités optiques résonnantes

La cavité résonnante qui, dans ce cas, est bien entendu un étalon Fabry-Pérot, joue un rôle essentiel dans le fonctionnement du laser. Dans les premières étapes du processus laser, les photons spontanés sont émis dans toutes les directions, comme les photons stimulés. Mais, exception faite de ceux qui se propagent pratiquement le long de l'axe de la cavité, tous passent rapidement en dehors des faces du rubis. Par contraste, le faisceau axial se construit au fur et à mesure qu'il rebondit et qu'il effectue des aller-retour dans le milieu actif. Cela explique le degré étonnant de collimation du faisceau laser émergent, qui est effectivement une onde plane cohérente. Alors que le milieu agit comme amplificateur de l'onde, le *feedback optique*, fourni par la cavité, transforme le système en oscillateur, et finalement en générateur de lumière. L'acronyme du mot laser est donc une appellation impropre.

De plus, la perturbation qui se propage à l'intérieur de la cavité prend une configuration d'une onde stationnaire qui est déterminée par la séparation (L) des miroirs. La cavité résonne (i.e. des ondes stationnaires y existent) quand il y a un nombre entier (m) de demi-longueurs d'ondes entre les deux miroirs, puisqu'il doit y avoir un nœud à chaque miroir. Ainsi :

$$m = \frac{L}{\lambda/2}$$

et

$$v_m = \frac{mv}{2L} \quad (13.15)$$

Il y a donc un nombre infini de **modes longitudinaux** possibles dans la cavité, chacun avec une fréquence distincte v_m .

Les modes consécutifs sont séparés par une différence constante,

$$\nu_{m+1} - \nu_m = \Delta\nu = \frac{v}{2L} \quad (13.16)$$

qui est la gamme spectrale libre de l'étalon [équation (9.79)] et, également, l'inverse du temps d'aller-retour. Pour un laser à gaz d'1 m de long, $\Delta\nu \approx 150$ MHz.

Les modes résonnants de la cavité sont considérablement plus étroits en fréquence que la largeur de bande de la transition atomique spontanée normale. Qu'il y en ait un seul ou plusieurs, ces modes sont ceux qui seront entretenus dans la cavité, de sorte que le faisceau émergent est restreint à une région proche de ces fréquences (figure 13.8). En d'autres termes, la transition radiative rend disponible une gamme de fréquences relativement large dans laquelle la cavité va sélectionner et amplifier seulement certaines bandes étroites et, si l'on le veut, même une seule de ces bandes. Cela est l'origine de la quasi monochromaticité extrême du laser. Alors que la bande passante de la transition du rubis à l'état fondamental a une valeur relativement large de 0,53 nm (330 GHz), à cause des interactions des ions chrome avec le réseau cristallin, la largeur de bande de la cavité du laser correspondante (l'étendue en fréquences du rayonnement d'un seul mode résonnant) est bien plus étroite (0,000 05 nm ou 30 MHz). Cette situation est dépeinte à la figure 13.8b, qui montre une ligne de transition typique et une série de pics de la cavité correspondante. Dans ce cas, chacune est séparée par $v/2L$, et chacune a une largeur de 30 MHz.

On obtient qu'un seul mode dans la cavité, si la séparation modale, donnée par l'équation (13.16), est supérieure à la largeur de bande de la transition. Ainsi, seul un mode serait contenu dans la gamme des fréquences disponibles fournies par la transition. Pour un laser à rubis (avec un indice de réfraction de 1,76), une longueur de cavité de quelques centimètres va facilement garantir l'opération d'un mode longitudinal unique. Le défaut de cette approche particulière est qu'elle limite la longueur de la région active qui contribue à l'énergie du faisceau, et donc qu'elle limite la puissance de sortie du laser.

En plus des modes d'oscillation longitudinaux ou axiaux, qui correspondent aux ondes stationnaires positionnées le long de son axe, la cavité peut également entretenir des **modes transversaux**. Comme les champs sont presque perpendiculaires à z , on les appelle modes TEM_{mn} (transverses électrique et magnétique). Les indices m et n représentent les nombres entiers de lignes nodales transversales respectivement suivant x et y dans le plan perpendiculaire à l'axe du faisceau émergent. De ce fait, la section du faisceau est donc segmentée en

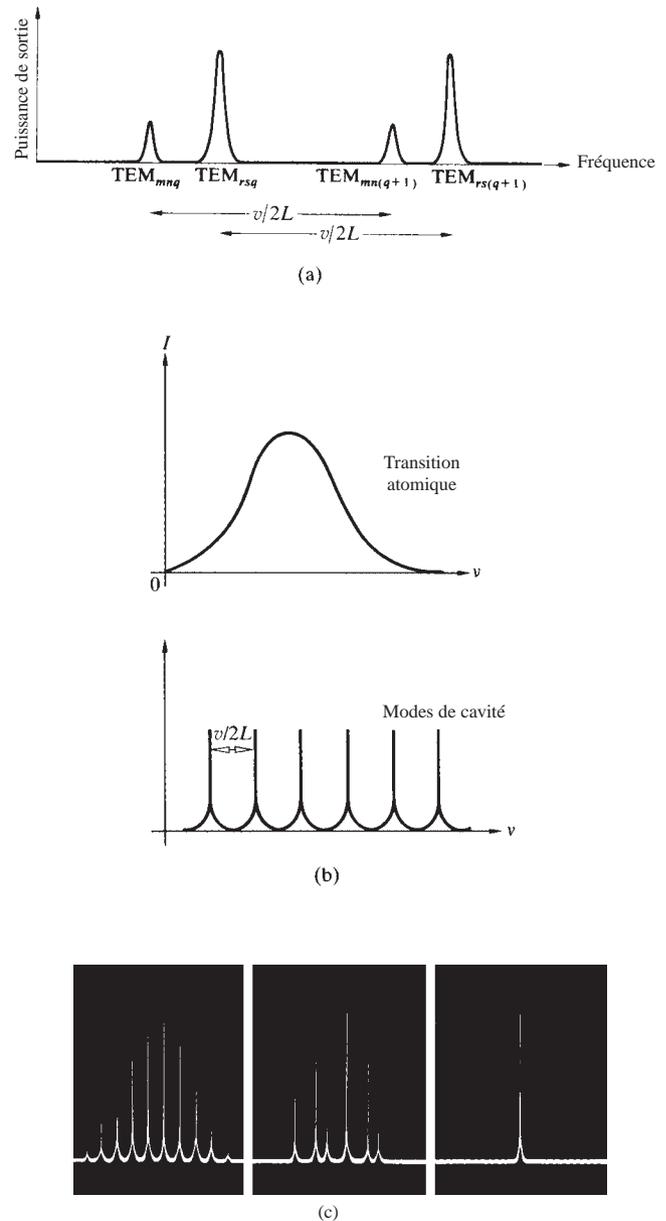


Figure 13.8 Modes laser : (a) nomenclature ; (b) comparaison de l'émission atomique à large spectre avec les modes étroits de cavité ; (c) trois configurations d'opérations pour un laser à gaz continu. On distingue d'abord plusieurs modes longitudinaux en dessous d'une enveloppe approximativement gaussienne, puis plusieurs modes longitudinaux et transversaux, et finalement un mode longitudinal unique.

une ou plusieurs régions. Chacune de ces répartitions est associée à un mode TEM donné, comme l'indiquent les figures 13.9 et 13.10. L'ordre le plus bas, ou mode transversal TEM_{00} , est sans doute le plus largement utilisé, et ce pour diverses raisons indiscutables. D'une part, l'éclairage dans un plan transverse est idéalement gaussien (figure 13.11) ; il n'y a pas de déphasage d'un point à un autre de ce plan, comme il y en a dans d'autres modes, et ce mode est donc complètement cohérent au niveau spatial. Par ailleurs, la divergence angulaire du faisceau est minimale et l'on peut le focaliser sur la surface la plus réduite. Il faut noter que l'amplitude dans ce mode n'est pas constante sur le front d'onde, et par conséquent le mode TEM_{00} correspond à une onde inhomogène.

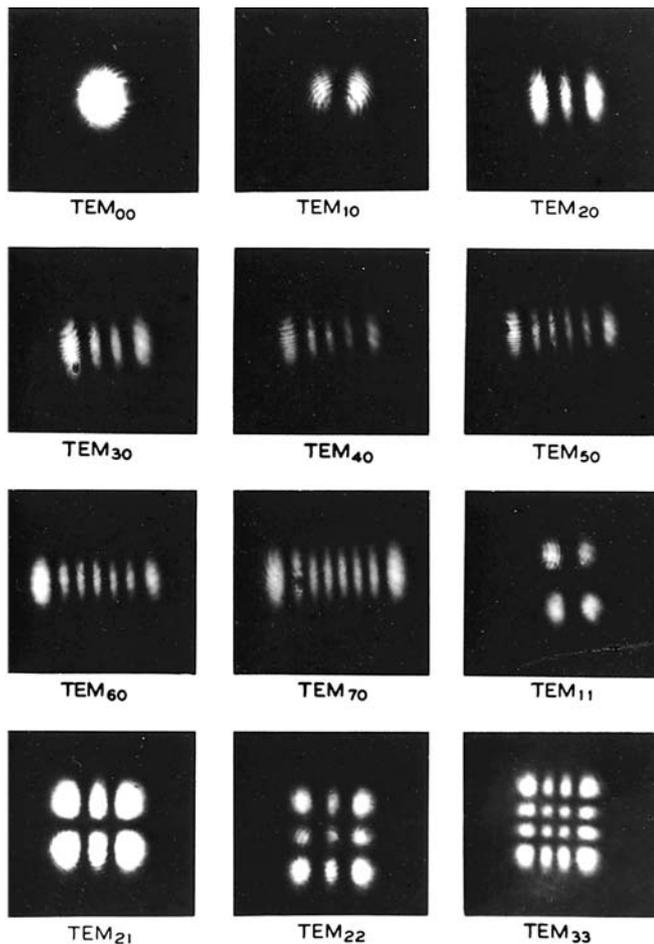


Figure 13.9 Figures selon différents modes (sans les faibles franges d'interférence, c'est ce que l'on obtient dans une coupe transversale du faisceau). (Photos Bell Telephone Laboratories.)

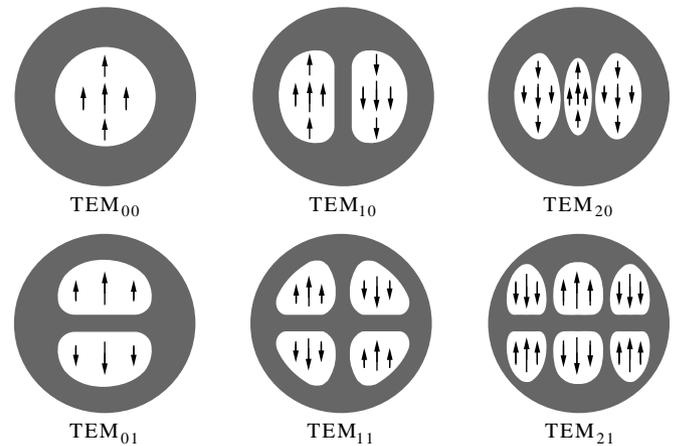


Figure 13.10 Configurations de mode (symétrie rectangulaire). Des modes de symétrie circulaire sont aussi observables, mais n'importe quelle petite asymétrie (telle qu'une fenêtre de Brewster) les détruit.

Une caractérisation complète de chaque mode prend la forme TEM_{mnq} , où q est le numéro du mode longitudinal. Pour chacun des modes transversaux (m, n), il peut y avoir de nombreux modes longitudinaux (i.e. valeurs de q). Souvent, cependant, il n'est pas nécessaire de travailler avec un mode longitudinal particulier, et le symbole q est souvent ignoré*.

*Voir R. A. Phillips et R. D. Gehrz, « Laser Mode Structure Experiments for Undergraduate Laboratories », *Am. J. Phys.* **38**, 429 (1970).

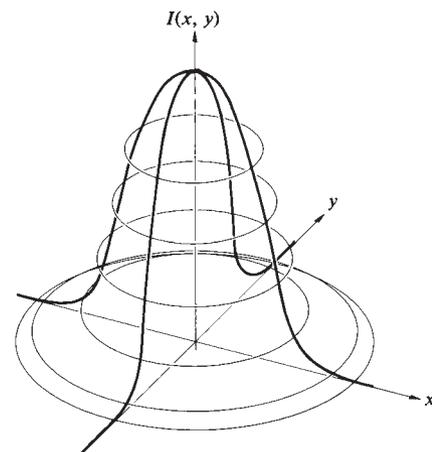


Figure 13.11 Distribution d'éclairage gaussienne.

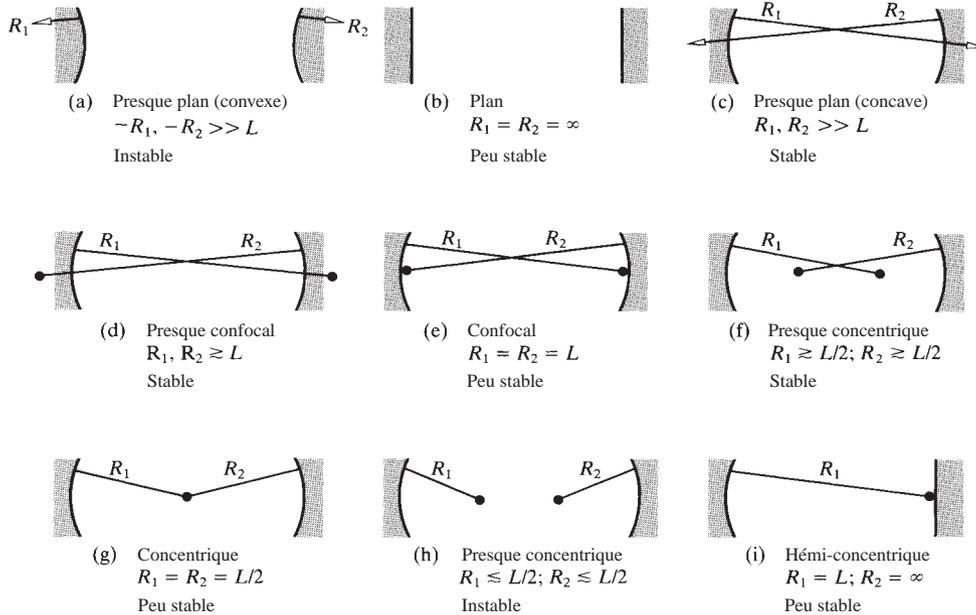


Figure 13.12 Configurations de cavité laser. (D'après O'Shea, Callen, et Rhodes, *An Introduction to Lasers and Their Applications*.)

Plusieurs autres configurations de cavités sont d'une importance pratique bien plus considérable que ne l'est le montage original à miroirs plans parallèles (figure 13.12). Si les miroirs plans sont remplacés par des miroirs sphériques concaves identiques, séparés par une distance quasiment égale à leur rayon de courbure, on obtient le *résonateur confocal*. Ainsi, les points focaux coïncident pratiquement sur l'axe, à mi-chemin entre les miroirs ; d'où le nom de *confocal*.

Si l'un des miroirs sphériques est remplacé par un miroir plan, la cavité est appelée *résonateur hémisphérique* ou *hémi-concentrique*. Ces deux configurations sont bien plus faciles à aligner que ne l'est la structure à miroirs plans-parallèles. Les cavités laser peuvent être *stables* ou *instables* selon que le faisceau tend à reprendre le même chemin et qu'il reste donc relativement proche de l'axe optique (figure 13.13). Dans une cavité instable, un faisceau va « sortir », s'éloignant de l'axe à chaque réflexion jusqu'à rapidement quitter complètement la cavité. En revanche, dans une configuration stable (avec des miroirs qui ont, disons, des facteurs de réflexion de 100 % et 98 %) le faisceau pourra traverser le résonateur plus d'une cinquantaine de fois. Les résonateurs instables sont communément utilisés dans les lasers de forte puissance, où le fait que le faisceau traverse une large région de milieu actif accroît l'amplification et permet d'extraire plus d'énergie. Cette approche est particulièrement utile pour les milieux (comme le dioxyde de carbone ou l'argon) dans lesquels le faisceau gagne beaucoup d'énergie à chaque

fois qu'il traverse la cavité. Le nombre nécessaire d'aller-retour (seuil du laser) est déterminé par ce que l'on appelle le *gain minimal* du milieu actif. On sélectionne une configuration de résonateur selon les exigences spécifiques du système ; il n'y a pas de montage unilatéralement meilleur qu'un autre.

On exprime la décroissance de l'énergie dans une cavité en termes de *facteur de qualité Q* du résonateur. L'origine de l'expression remonte aux premiers temps de l'ingénierie radio où

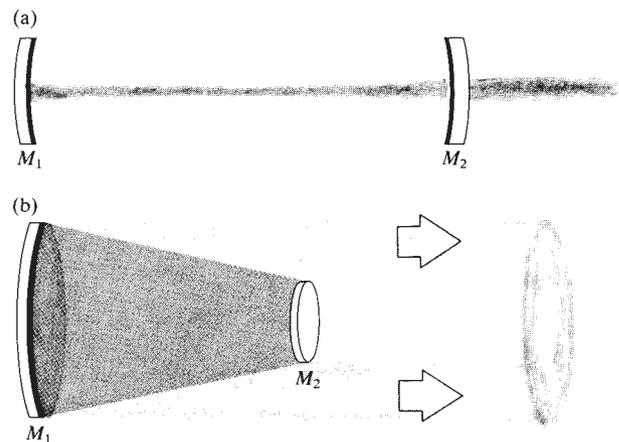


Figure 13.13 Résonateurs laser stable et instable. (D'après O'Shea, Callen, et Rhodes, *An Introduction to Lasers and Their Applications*.)

elle était alors utilisée pour décrire les performances d'un circuit oscillant (*tuning*). Un circuit avec peu de pertes et un facteur de qualité Q élevé signifie une bande passante étroite et une radio finement réglée. Si l'on ferme une cavité optique de quelque manière que ce soit, par exemple par le déplacement ou la suppression de l'un des miroirs, l'émission laser va en général cesser. Lorsqu'on le fait de manière délibérée, pour retarder le début de l'oscillation dans la cavité laser, cela s'appelle du *Q-spoiling* ou **Q-switching**. Le laser est alors qualifié de « déclenché ». La puissance de sortie d'un laser est autolimitée, dans la mesure où l'inversion de population est constamment réduite par émission stimulée due au champ à l'intérieur de la cavité. Cependant, si l'on empêche l'oscillation, on ne peut qu'augmenter considérablement le nombre d'atomes pompés dans l'état métastable (de longue durée de vie), et créer ainsi une inversion des populations très importante. Lorsqu'on rétablit la cavité au moment opportun, on déclenche une *impulsion géante* extrêmement puissante (pouvant aller sans doute jusqu'à plusieurs centaines de mégawatts), alors que les atomes retombent dans leur état le plus bas, presque à l'unisson. Il existe un très grand nombre de dispositifs déclencheurs, tels que des absorbeurs saturables, qui deviennent transparents sous fort éclairage, des prismes et des miroirs tournants, des modulateurs (*choppers*) mécaniques, des cellules acousto-optiques, ou des obturateurs électro-optiques (*shutters*) tels des cellules de Kerr ou de Pockels.

Faisceaux laser gaussiens

Le mode TEM_{00} qui se développe dans un résonateur a un profil gaussien (figure 13.11), et l'amplitude de l'onde diminue transversalement suivant une courbe en forme de cloche symétrique

par rapport à l'axe central (figure 13.14a). Rappelons-nous (p. 13) qu'une gaussienne est une exponentielle négative qui est fonction du carré de la variable, ici la distance (r) mesurée, dans un plan transversal, depuis l'axe central du faisceau (z). Du fait que celui-ci a une extension radiale finie, il est utile de mettre une limite arbitraire à sa largeur. En conséquence, on pose $r = w$ qui est la *demi-largeur du faisceau*, distance à laquelle le champ électrique du faisceau tombe de sa valeur axiale maximale E_0 à E_0/e ou 37 % de E_0 . Lorsque $r = w$, l'éclairement du faisceau, qui dépend du carré de l'amplitude, est donc I_0/e^2 , c'est-à-dire 14 % de I_0 . Une grande partie de l'énergie du faisceau est donc contenue dans ce cylindre imaginaire de rayon w , où (figure 13.14b) :

$$I = I_0 e^{-2r^2/w^2}$$

et $I = I_0 e^{-2}$, comme il faut s'y attendre, à $r = w$.

Comme on peut le voir à la figure 13.13a, lorsque la cavité laser est formée de miroirs sphériques, elle a tendance à « focaliser » le faisceau, lui imposant une section transversale minimale ou *waist*, de rayon w_0 . Dans de telles circonstances, la divergence externe du faisceau laser est essentiellement une continuation de la divergence à partir de ce *waist* (figure 13.15). En général, il existe un *waist* du faisceau quelque part entre les deux miroirs du résonateur laser, et sa localisation exacte dépend de la configuration spécifique. Par exemple, un résonateur confocal (figure 13.12) a un *waist* à mi-chemin entre les deux miroirs.

Une analyse plus complète des ondes EM dans la cavité, avec l'origine $z = 0$ dans le plan du *waist* du faisceau, donne l'expression :

$$w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (13.17)$$

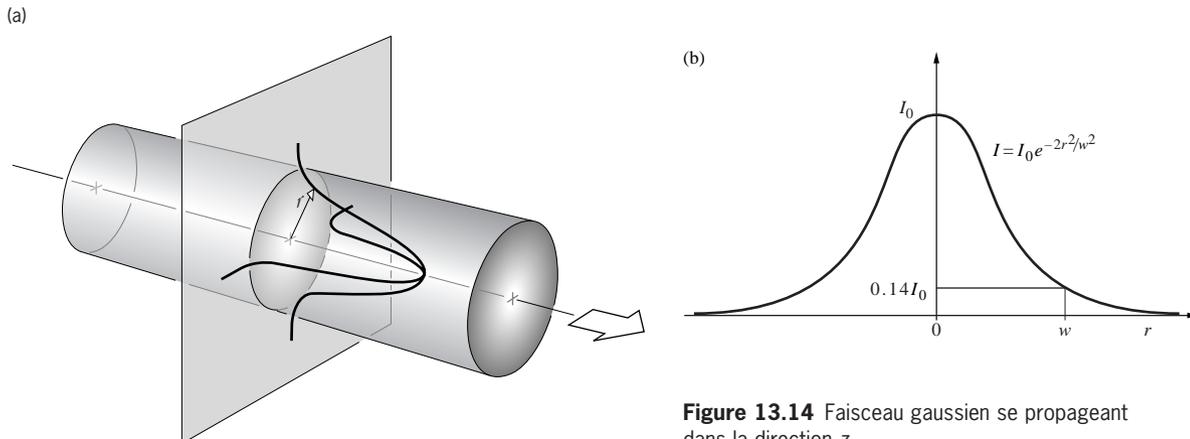


Figure 13.14 Faisceau gaussien se propageant dans la direction z .

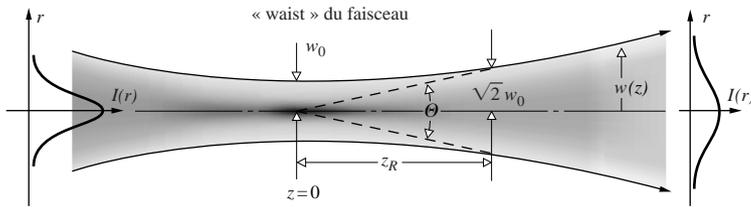


Figure 13.15 Étalement d'un faisceau gaussien.

pour la demi-largeur, à toute position z . La forme du faisceau correspondant à cette expression de $w(z)$ est une hyperbole de révolution autour de l'axe z . Une mesure expérimentale de la divergence du faisceau est la *distance à laquelle la surface de la coupe transversale du faisceau est la double de sa surface au waist*, ou, de manière équivalente, la valeur de z pour laquelle $w(z) = \sqrt{2}w_0$. Cette distance caractéristique, z_R , est connue sous le nom de **distance de Rayleigh**, et il découle de l'équation précédente pour $w(z)$ que :

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (13.18)$$

Plus le waist est petit (ou de manière équivalente, plus la surface de la coupe transversale est petite), plus la distance de Rayleigh est petite et plus le faisceau diverge vite. À de grandes distances du waist ($z \gg z_R$), la *largeur angulaire totale* du faisceau (Θ , en radians) s'approche de $2w(z)/z$. En d'autres termes, alors que la ligne de longueur z effectue une rotation d'angle Θ , son extrémité balaie une distance de $\approx 2w(z)$. Ainsi, lorsque z est grand et w_0 petit, le second terme de l'expression donnant $w(z)$ est bien supérieur à 1 et :

$$w(z) \approx w_0 \left[\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right]^{1/2} \approx \frac{\lambda z}{\pi w_0}$$

Comme $\Theta \rightarrow 2w(z)/z$,

$$\Theta = \frac{2\lambda}{\pi w_0} = 0,637 \frac{\lambda}{w_0}$$

À nouveau, **plus w_0 est petit, plus Θ est grand**, et plus le faisceau diverge. D'ailleurs, c'est pour cela que l'on utilisait à l'origine des mégaphones : les ondes émergent d'une grande ouverture divergent moins.

Alors que deux miroirs plans formant une cavité laser vont produire un faisceau à ouverture limitée par la diffraction, cela n'est ici plus le cas. Rappelons l'équation (10.58), qui décrit le rayon du disque Airy, et divisons chacun des côtés par f pour obtenir la demi-largeur angulaire par diffraction d'un faisceau

circulaire de diamètre D . En doublant ce résultat, on obtient Θ , la *largeur angulaire totale* ou **divergence d'un faisceau laser à ouverture limitée** :

$$\Theta \approx 2,44\lambda/D$$

Par comparaison, à grandes distances de la région de la coupe transversale minimale, la largeur angulaire totale d'un faisceau laser est :

$$\Theta \approx 1,27\lambda/D_0 \quad (13.19)$$

Où $D_0 = 2w_0$, le diamètre du faisceau, peut être calculé selon la configuration particulière de la cavité.

Le laser hélium-néon

L'annonce de Maimann sur la mise au point du premier laser opérationnel eut lieu lors d'une conférence de presse à New York, le 7 juillet 1960*. Dès février 1961, Ali Javan et ses associés W.R. Bennett, Jr. et D.R. Herriott, annonçaient leur succès dans la mise au point d'un laser à gaz hélium-néon émettant une *onde continue* (*continuous wave* en anglais, c-w) à 1 152,3 nm. Le laser He-Ne (figure 13.16) fait toujours partie des dispositifs les plus populaires de sa catégorie, fournissant la plupart du temps quelques milliwatts de puissance continue dans le visible (632,8 nm). Son premier intérêt est qu'il est facile à construire, relativement bon marché et assez fiable. De plus, dans la plupart des cas, on peut le mettre en route par une simple pression sur un interrupteur unique. Le pompage est en principe assuré par une décharge électrique (au choix, en courant continu ou alternatif, ou par excitation radiofréquence sans électrode). Les électrons et les ions

.....
*Son article initial, qui aurait permis de faire connaître ses résultats de manière plus traditionnelle, fut refusé à la publication par les éditeurs de la *Physical Review Letters*, et ce, pour leur plus grand dépit.

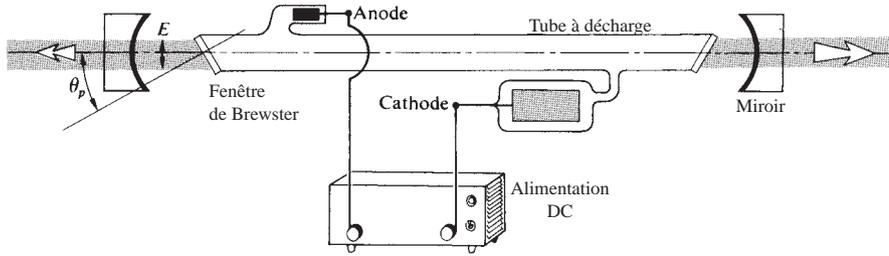


Figure 13.16 Configuration simple des premiers lasers He-Ne.

libres sont accélérés par l'application d'un champ électrique, ce qui entraîne, à la suite de collisions, une ionisation et une excitation encore plus grandes du milieu gazeux (en principe, un mélange d'environ 0,8 torr de He et d'à peu près 0,1 torr de Ne). Après être retombés de plusieurs niveaux élevés, un grand nombre d'atomes d'hélium s'accumulent dans les états de longue durée de vie, 2^1S et 2^3S . Ce sont des états métastables (figure 13.17), à partir desquels il n'existe pas de transitions radiatives autorisées. Les atomes d'hélium excités entrent en collision inélastique avec les atomes de néon qui sont dans leur état fondamental et leur transfèrent l'énergie nécessaire pour les hisser à leur tour dans les états $5s$ et $4s$. Il s'agit des niveaux laser supérieurs, et il y a alors une

inversion de population par rapport aux états inférieurs $4p$ et $3p$. Les transitions entre les états $5s$ et $4s$ sont interdites. Des photons spontanés initient l'émission stimulée, et la réaction en chaîne commence. Les transitions laser dominantes correspondent à 1 152,3 nm et 3 391,2 nm dans l'infrarouge, et, bien sûr, à la toujours classique 632,8 nm dans le visible (rouge brillant). Les états p se vident dans l'état $3s$, ceux-ci restant eux-mêmes peu peuplés et soutenant donc continuellement l'inversion. Le niveau $3s$ est métastable, de sorte que les atomes $3s$ retournent à l'état fondamental après avoir perdu leur énergie contre les parois de la cavité. C'est pourquoi le tube de verre contenant le plasma affecte à l'inverse le gain, et son diamètre est un paramètre important dans la conception du dispositif. Contrairement au rubis, où la transition laser se fait vers le niveau fondamental, l'émission stimulée dans le laser He-Ne se produit entre deux niveaux excités. En fait, puisque l'état $3p$ n'est en principe que partiellement occupé, une inversion de population est très facilement obtenue, et cela sans avoir à vider à moitié le niveau fondamental.

Examinons à nouveau la figure 13.16, qui illustre les caractéristiques utiles d'un laser He-Ne élémentaire. Les miroirs sont recouverts d'un film diélectrique multicouche qui a un facteur de réflexion de plus de 99 %. La sortie du laser est rendue linéairement polarisée par l'utilisation de fenêtres de Brewster (i.e. inclinées à l'angle de polarisation) constituant ainsi l'extrémité du tube à décharge. En effet, si les faces des extrémités étaient normales à l'axe, les pertes en réflexion (4 % à chaque face) deviendraient insupportables. En les inclinant selon l'angle de polarisation, on considère que les fenêtres ont un facteur de transmission de 100 % pour la composante du champ électrique qui est parallèle au plan d'incidence (le plan du dessin). Cet état de polarisation devient rapidement dominant, puisque la composante normale est partiellement réfléchi en dehors de l'axe, à chaque passage par les fenêtres. La lumière linéairement polarisée dans le plan d'incidence devient rapidement le mécanisme de

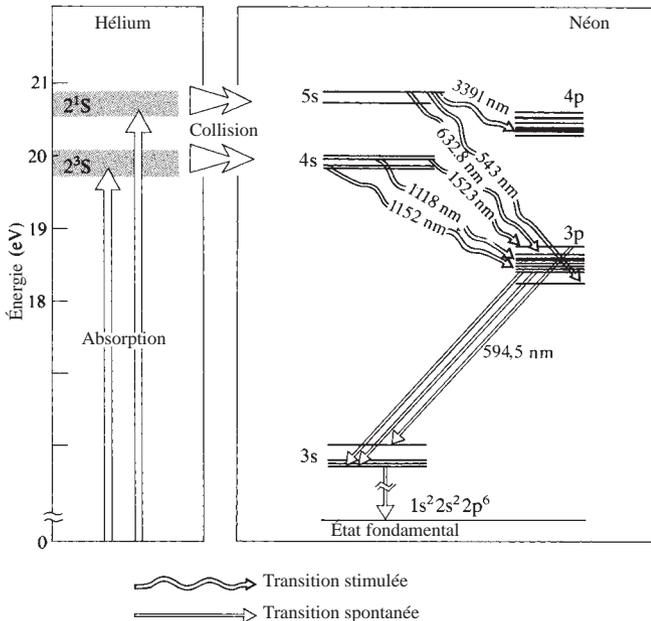


Figure 13.17 Niveaux d'énergie du laser He-Ne.

stimulation prépondérante dans la cavité, jusqu'à l'exclusion finale de la polarisation orthogonale*.

Recouvrir d'époxy les fenêtres des extrémités du tube laser et monter les miroirs à l'extérieur était une approche typique mais malheureuse, utilisée dans le commerce jusqu'au milieu des années 1970. Inévitablement, l'époxy se mettait à fuir, laissant entrer la vapeur d'eau et sortir l'hélium. Aujourd'hui, de tels lasers sont *scellés* ; le verre est fixé directement aux montures en métal (Kovar), qui maintiennent les miroirs à l'intérieur du tube. Les miroirs (dont l'un possède en principe un facteur de réflexion de 100 %) ont des revêtements modernes très résistants afin qu'ils puissent supporter les environnements de décharge dans le tube. À l'heure actuelle, la durée de vie opérationnelle typique est de 20 000 heures et plus (contre seulement quelques centaines d'heures dans les années 1960). Les fenêtres de Brewster sont en principe optionnelles, et la plupart des lasers He-Ne commercialisés émettent des faisceaux plus ou moins « non polarisés ». Le laser He-Ne typique, (avec une puissance de sortie comprise entre 0,5 mW et 5 mW) fonctionne dans le mode TEM₀₀. Il possède une longueur de cohérence d'environ 25 cm, un faisceau de diamètre approximativement égal à 1 mm et un rendement global très bas, compris entre seulement 0,01 % et 0,1 %. Bien qu'il existe des lasers He-Ne infrarouge, et même un nouveau laser He-Ne vert (543,5 nm), la version rouge brillante (632,8 nm) reste la plus répandue.

Un aperçu des développements en lasers

La technologie laser est un domaine si dynamique que ce qui était un prototype de laboratoire il y a un an ou deux peut être aujourd'hui un objet usuel disponible sur le marché. Le tourbillon est tel qu'il ne permet pas d'appliquer très longtemps des descriptions telles que « le plus petit », « le plus grand », « le plus puissant » etc. Avec cela à l'esprit, nous allons examiner brièvement l'état de l'art actuel, sans essayer d'anticiper les prodiges qui seront certainement faits dans le futur. Des faisceaux lasers ont déjà rebondi sur la Lune ; d'autres ont soudé des rétines décollées, engendré la fusion de neutrons, stimulé la poussée de graines, servi de moyens de communication, lu

des disques compacts, guidé des fraiseuses, des missiles, des navires, transporté des images de télévision en couleur, percé des trous dans des diamants, mis de petits objets en lévitation* et intrigué d'innombrables curieux !

En plus du laser à rubis, il existe bien d'autres **lasers à solide** dont la gamme de longueurs d'onde varie entre 170 nm et 3 900 nm environ. Par exemple, les Terres Rares trivalentes, Nd³⁺, Ho³⁺, Gd³⁺, Tm³⁺, Er³⁺, Pr³⁺ et Eu³⁺ participent à l'effet laser. Elles sont couplées à de nombreux hôtes, tels que CaWO₄, Y₂O₃, SrMoO₄, LaF₃, le grenat d'yttrium et d'aluminium (YAG), et le verre, pour n'en nommer que quelques-uns. Parmi ceux-ci, les lasers au verre dopé au néodyme et les lasers YAG dopés au néodyme sont particulièrement importants. Chacun d'entre eux constitue un milieu laser très puissant fonctionnant à 1 060 nm approximativement. On a réalisé des lasers Nd : YAG continus de puissance supérieure à un kilowatt. Des systèmes impulsions ont permis d'obtenir des puissances gigantesques en faisant fonctionner plusieurs lasers en tandem. Le premier laser de la série sert d'oscillateur déclenché qui allume l'étage suivant, qui fonctionne comme un amplificateur, et il peut y avoir ainsi un ou plusieurs de ces amplificateurs dans le système. En réduisant le feedback de la cavité, un laser ne sera plus auto-oscillateur, mais il amplifiera l'onde incidente qui a déclenché l'émission stimulée. L'amplificateur est en effet un milieu actif qui est pompé, mais dont les faces de sortie ne sont que partiellement réfléchissantes (ou même non réfléchissantes). Des systèmes à rubis de la sorte, délivrant quelques GW (gigawatts, i.e. 10⁹ W) sous la forme d'impulsions de plusieurs nanosecondes, sont disponibles dans le commerce.

Le 19 décembre 1984, le plus grand laser de l'époque, le Nova du *Lawrence Livermore National Laboratory* en Californie, déclencha pour la première fois ses 10 faisceaux simultanément. Il émet, pour s'échauffer, un tir de « seulement » 18 kJ à 350 nm, dans une impulsion de 1 ns (voir photo). Cet immense laser verre dopé au néodyme avait été conçu pour focaliser jusqu'à 120 TW sur une cible pour fusion nucléaire. Un tel système est à peu près 500 fois plus puissant que toutes les centrales des États-Unis, mais pendant environ 10⁻⁹ s. À la fin des années 1990, dans les dernières années de son fonctionnement, en n'utilisant qu'un seul faisceau du Nova, les

*La moitié de la puissance de sortie du laser n'est pas perdue par réflexions sur la fenêtre de Brewster lorsque la lumière transversale de l'état \mathcal{P} est diffusée. Simplement l'énergie n'est pas canalisée de manière continue par la cavité dans ce composant polarisant. Si elle se réfléchit en dehors du tube plasma, elle n'est plus présente pour stimuler à nouveau l'émission.

*Voir M. Lubin et A. Fraas, « Fusion by Laser », *Sci. Am.* 224, **21** (Juin 1971) ; R. S. Craxton, R. L. McCrory, et J. M. Soures, « Progress in Laser Fusion », *Sci. Am.* 255, **69** (Août 1986) ; et A. Ashkin, « The Pressure of Laser Light », *Sci. Am.* 226, **63** (Février 1972).



Le laser Nova. (Photo Lawrence Livermore National Laboratory.)



À l'intérieur de la chambre cible du dispositif de fusion par laser LLE. Les réactions de fusion ont lieu dans une petite sphère cible remplie de deutérium/tritium et irradiée par le laser Omega de 30 kJ. (Photo University of Rochester's Laboratory for Laser Energetics, Eugene Kowaluk, Image specialist.)

chercheurs du LLNL furent capables de produire des impulsions de 1,25 PW, chacune durant 490 fs et transportant 580 J.

Le successeur du Nova, qui apparut en 1980 (avec 24 lasers solides), a été installé dans le *Laboratory for Laser Energetics* de l'Université de Rochester. À présent, le LLE fait fonctionner le laser Omega à des niveaux de 30 à 45 kJ par impulsion et c'est le complexe mondial le plus important pour la recherche sur la fusion. Amélioré en 1995, Omega est un laser au verre phosphaté dopé au néodyme comportant 60 faisceaux, qui peut concentrer 60×10^{12} W sur une cible de la taille d'une tête d'épingle. Pour accomplir cet exploit, la sortie du laser initial est divisée à plusieurs reprises et chacun des faisceaux est ensuite amplifié grâce à des plaques de Nd : Verre. Juste avant d'atteindre la cible, les faisceaux sont triplés en fréquence à 351 nm grâce à des cristaux de KDP (p. 659). Pour répondre aux divers besoins des chercheurs, Omega fonctionne à son rythme maximum d'un tir par heure.

Toujours en construction, le successeur d'Omega sera logé dans le *Department of Energy* de l'immense *National Ignition Facility* américain. Ses 192 faisceaux délivreront 50 fois plus d'énergie sur ses cibles que ne le fait Oméga.

Il existe beaucoup de **laser à gaz** qui fonctionnent de l'IR lointain à l'UV (de 1 mm à 150 nm). Les principaux lasers de ce type sont les lasers hélium-néon, argon et krypton, ainsi que plusieurs systèmes moléculaires gazeux, tels que le dioxyde de carbone, le fluorure d'hydrogène, et l'azote moléculaire (N_2). L'argon émet principalement dans le vert, le bleu-vert et le violet (majoritairement à 488,0 et 514,5 nm), en continu ou en impulsif. En continu, bien que sa puissance de sortie soit en principe de quelques watts, il peut aller jusqu'à 150 W. Le laser à argon est similaire à beaucoup d'égards au laser He-Ne, bien que sa puissance soit plus importante, sa longueur d'onde plus petite, sa largeur de raie plus importante, et son prix plus élevé. Tous les gaz nobles (He, Ne, Ar, Kr, Xe) ont été conçus pour laser individuellement, comme les ions gazeux de nombreux autres éléments, mais les premiers ont été étudiés plus profondément.

La molécule de CO_2 , qui lase entre des modes vibrationnels, émet dans l'IR à 10,6 μm , avec des niveaux de puissance continue allant typiquement de quelques watts à plusieurs kilowatts. Son rendement peut aller jusqu'à 15 % lorsqu'il est dopé par l'addition de N_2 et de He. Alors qu'il fallait, à une époque, un tube de décharge de pratiquement 200 m de long pour produire 10 kW en continu, des « modèles de table » considérablement plus petits sont à présent disponibles dans le commerce. Pendant longtemps, dans les années 1970, la puissance maximale record a appartenu à un laser à gaz dynamique

expérimental qui utilisait un pompage thermique sur un mélange de CO_2 , N_2 , et H_2O pour générer 60 kW continu à 10,6 μm en opération multimode.

Le laser impulsif à azote opère à 337,1 nm dans l'UV, comme le laser continu hélium-cadmium. Un certain nombre de vapeurs métalliques (par exemple, Zn, Hg, Sn, Pb) ont affiché des transitions laser dans le visible, mais des problèmes tels que le maintien de l'uniformité de la vapeur dans la région de décharge ont handicapé leur exploitation. Le laser He-Cd émet à 325,0 nm et à 441,6 nm. Il s'agit de transitions de l'ion cadmium ayant lieu après une excitation résultant des collisions avec les atomes d'hélium métastables.

Le **laser à semi-conducteur**, connu aussi sous le nom de diode laser ou laser à jonction, fut inventé en 1962, peu après le développement de la diode électroluminescente (LED). Aujourd'hui il occupe un rôle central en optoélectronique, par sa pureté spectrale, son haut rendement (100 %), sa robustesse, sa capacité de modulation à hautes fréquences, sa longue durée de vie et sa puissance relativement élevée (jusqu'à 200 mW) malgré sa taille de tête d'épingle. Les diodes lasers ont déjà été utilisées par millions dans les communications par fibres optiques, les systèmes audio de disques lasers, etc.

Les premiers lasers de ce genre étaient à base d'arseniure de gallium, convenablement dopés pour former une jonction $p-n$. Le seuil laser élevé de ces homostructures les limitait à des modes opératoires impulsifs et à des températures cryogéniques ; sinon la chaleur développée dans leurs petites structures les détruisait. La première diode laser réglable à sel de plomb fut développée en 1964, mais elle ne devint disponible commercialement qu'une douzaine d'années plus tard. Elle fonctionne à la température de l'azote liquide, ce qui est un inconvénient certain, mais peut la faire émettre de 2 μm à 30 μm .

Depuis, des avancées ont abouti à la réduction du seuil, ce qui a permis de mettre au point la diode laser continue, fonctionnant à température ambiante. Des transitions ont lieu entre les bandes de conduction et de valence, et il en résulte une émission stimulée au voisinage immédiat de la jonction $p-n$ (figure 13.18). Assez généralement, quand un courant circule dans le sens direct dans une diode semi-conductrice, les électrons de la bande de conduction de la couche n se regroupent avec les trous de la couche p , émettant alors de l'énergie sous la forme de photons. Ce processus radiatif, qui rivalise en énergie avec les mécanismes d'absorption existants (tels que la production de phonons), prédomine lorsque la couche de recombinaison est petite et que le courant est important. Pour faire laser le système, on retient dans une cavité résonnante, la

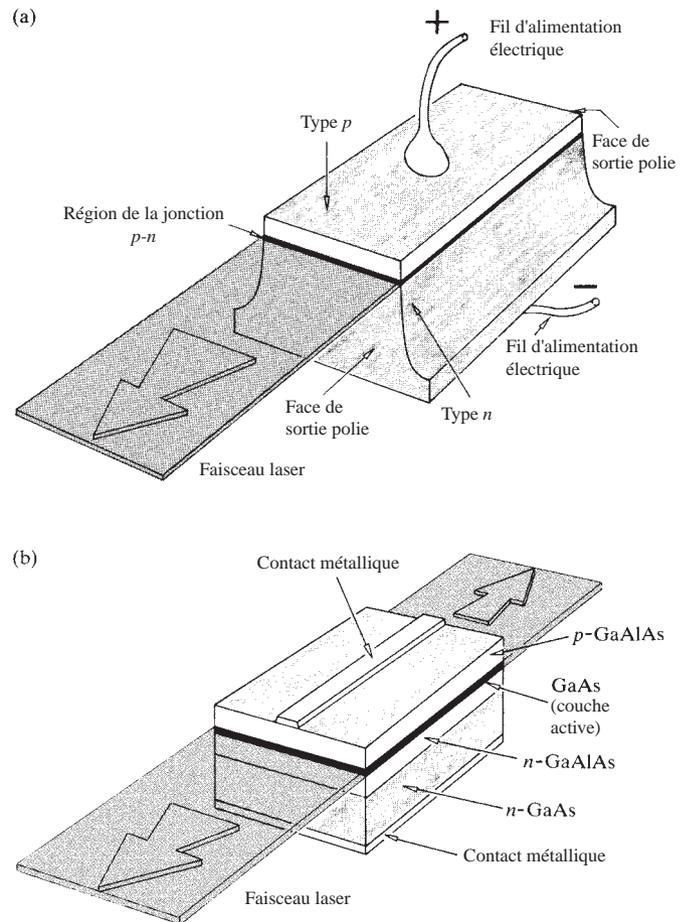


Figure 13.18 (a) Une des premières jonctions laser $p-n$ GaAs. (b) Une diode laser plus moderne.

lumière émise par la diode, ce qui en principe est rendu possible en polissant tout simplement les faces des extrémités perpendiculairement au plan de la jonction.

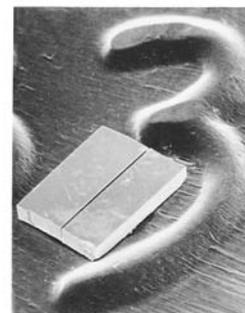
De nos jours, on conçoit des lasers semi-conducteurs pour répondre à des besoins spécifiques, et il existe de nombreuses configurations permettant de produire des longueurs d'onde allant de 700 nm à 30 μm environ. Le début des années 1970 a vu l'introduction du laser continu GaAs/GaAlAs. Fonctionnant à température ambiante dans la région allant de 750 nm à 900 nm (selon les quantités relatives d'aluminium et de gallium), la puce a, usuellement, un volume d'un seizième de centimètre cube environ. La figure 13.18b montre une diode laser de ce type à hétérostructure typique (un dispositif formé

de différents matériaux). Ici, le faisceau émerge dans deux directions à partir de la couche active de GaAs de $0,2\ \mu\text{m}$ d'épaisseur. Ces petits lasers peuvent produire jusqu'à $20\ \text{mW}$ en continu. Afin de tirer profit des faibles pertes du verre des fibres optiques autour de $\lambda \approx 1,3\ \mu\text{m}$, on a conçu le laser GaInAsP/InP au milieu des années 1970 avec une gamme spectrale allant de $1,2\ \mu\text{m}$ à $1,6\ \mu\text{m}$.

La photo jointe montre une cavité laser couplée-clivée dans laquelle on contrôle le nombre de modes axiaux, pour produire un rayonnement possédant une largeur de bande très étroite et réglable. Deux cavités couplées ensemble de chaque côté d'un petit espace restreignent le rayonnement à la largeur de bande extrêmement étroite qui peut être entretenue dans chacune des cavités résonantes*.

Le premier **laser à liquide** fonctionna en janvier 1963[†]. Tous les premiers dispositifs de cette sorte étaient exclusivement des *chélates* (i.e. des composés organo métalliques formés d'un ion métallique et de radicaux organiques). Ce laser à liquide original contenait une solution alcoolisée de benzoylacétionate d'eupropium émettant à $613,1\ \text{nm}$. La découverte de l'effet laser dans les liquides organiques nonchélates a été faite en 1966. Elle fut remarquée grâce au lasage fortuit (à $755,5\ \text{nm}$) d'une solution de chloroaluminium-phtalocyanine lors d'une recherche d'émission Raman stimulée dans cette substance[‡].

Un grand nombre de colorants fluorescents tels que les fluorescéines, les coumarines et les rhodamines ont été créés depuis pour laser à des fréquences allant de l'IR à l'UV, en général en impulsif, bien que l'on a pu obtenir des dispositifs continus. Il existe tant de colorants organiques qu'il paraît possible de construire de tels lasers à n'importe quelle fréquence dans le visible. De plus, ces dispositifs ont cette spécificité de pouvoir, grâce à leur nature, être accordés de manière continue sur une gamme de longueurs d'onde (de peut-être $70\ \text{nm}$ de large, bien qu'un système impulsif accordable sur $170\ \text{nm}$ ait été mis au point). Il existe en effet, d'autres arrangements permettant de faire varier la fréquence



Cavité laser couplée-clivée.
(Photos Bell Laboratories.)

d'un faisceau laser primaire (i.e. le faisceau entre avec une couleur et ressort avec une autre, paragraphe 13.4). Mais, dans le cas du laser à colorant, le faisceau primaire lui-même est accordé de manière interne. Cela est, par exemple, réalisé en changeant la concentration ou la longueur de la cellule contenant le colorant ou en ajustant un réseau de diffraction réfléchissant à l'extrémité de la cavité. Des systèmes lasers à colorants multicolores, qui peuvent facilement passer d'un colorant à un autre et donc fonctionner sur une très large gamme de fréquences, sont disponibles dans le commerce.

Un **laser chimique** est un laser qui opère avec de l'énergie produite par une réaction chimique. Le premier de la sorte a fonctionné en 1964, mais il fallut attendre 1969 pour qu'un laser chimique continu soit mis au point. L'un des plus prometteurs dans cette catégorie est le laser au fluorure de deutérium et au dioxyde de carbone (DF-CO_2). Il est auto-entretenu puisqu'il ne nécessite aucune source d'énergie extérieure. En bref, la réaction $\text{F}_2 + \text{D}_2 \rightarrow 2\text{DF}$, qui se produit lors du mélange de ces deux gaz relativement communs, génère assez d'énergie pour pomper un laser à CO_2 .

Finalement, il existe des lasers à solide, à gaz, à liquide et à vapeur (par exemple, H_2O). On trouve des lasers à semi-conducteur, à électrons libres (de $600\ \text{nm}$ à $3\ \text{mm}$), à rayons X, et des lasers aux propriétés très spéciales, tels que ceux qui émettent de très courtes impulsions, ou ceux qui ont une stabilité en fréquence extraordinaire. Ces derniers dispositifs sont très utiles

*Voir Y. Suematsu, « Advances in Semiconductor Lasers », *Phys. Today*, **32** (Mai 1985). Pour plus de détails sur les diodes lasers à hétérostructure, se référer à M. B. Panish et I. Hayashi, « A New Class of Diode Lasers », *Sci. Am.* 225, **32** (Juillet 1971).

[†]Voir Adam Heller, « Laser Action in Liquids », *Phys. Today* (Novembre 1967), p. 35, pour une discussion plus détaillée.

[‡]P. Sorokin, « Organic Lasers », *Sci. Amer.* 220, **30** (Février 1969).

dans le domaine de la spectroscopie à haute résolution, mais ils suscitent aussi un intérêt grandissant dans d'autres domaines de recherche (par exemple, dans les interféromètres utilisés pour tenter de détecter les ondes gravitationnelles). Dans tous les cas, les cavités de ces lasers doivent avoir des configurations précisément contrôlées, en dépit des perturbations par les variations de température, les vibrations et même les ondes sonores. Pour l'instant, le record est détenu par le laser du *Joint Institute for Laboratory Astrophysics* de Boulder, dans le Colorado, qui démontre une stabilité en fréquence (p. 329) de presque 10^{-14} .

13.1.4 La lumière fantastique

Les faisceaux lasers diffèrent d'un type de laser à un autre. Cependant, il existe plusieurs caractéristiques, remarquables, que tous partagent, à des degrés divers. Ce qui est clair est que la plupart des faisceaux lasers sont extrêmement directifs, ou si l'on préfère, hautement collimatés. Il suffit de souffler un peu de fumée sur un faisceau laser, qui sans cela est invisible, pour voir (par diffusion) un fantastique fil de lumière s'étirer le long d'une pièce. Un faisceau He-Ne en mode TEM₀₀ a, en principe, une divergence d'à peine une minute d'arc ou moins. Rappelons que, dans ce mode, l'émission se rapproche étroitement d'une distribution d'éclairement gaussienne ; c'est-à-dire que l'éclairement décroît de son maximum, au niveau de l'axe central, et n'a pas de lobes latéraux. Ce faisceau laser typique est assez étroit, ne mesurant normalement que quelques millimètres de diamètre en sortie. Comme le faisceau ressemble à une onde plane tronquée, il est bien sûr très *cohérent spatialement*. En fait, on peut voir sa directivité comme une manifestation de cette cohérence. La lumière laser est quasi monochromatique, et possède généralement une largeur de bande d'une extrême étroitesse (p. 327). En d'autres mots, elle est très *cohérente temporellement*.

Un autre attribut est l'importance du flux qui peut être délivré dans cette bande de fréquences étroite. Comme nous l'avons vu, le laser se distingue en ce qu'il émet toute son énergie sous la forme d'un faisceau étroit. Par contraste, il se peut qu'une ampoule incandescente de 100 W émette beaucoup plus d'énergie au total qu'un laser continu de plus faible puissance, mais son émission est incohérente, dispersée dans tout l'espace, et elle a, de plus, une grande largeur de bande. Une bonne lentille* peut intercepter un faisceau laser en totalité et focaliser

*L'aberration sphérique est habituellement le problème principal, puisque les faisceaux lasers sont, selon la règle, quasi monochromatiques et incidents le long de l'axe de la lentille.

toute son énergie sur une minuscule tache (dont le diamètre est de l'ordre de $\lambda f/D$). On peut obtenir facilement des taches de quelques dizaines de micromètres de diamètre avec des lentilles de distance focale suffisamment courte, et il est théoriquement possible de focaliser le faisceau sur une fraction de micromètre. Des éclaircissements de plus de 10^{17} W/cm² peuvent être facilement produits dans un faisceau laser focalisé, en opposition à, disons, une flamme d'oxyacétylène produisant environ 10^3 W/cm². Pour mieux se faire à ces niveaux de puissance, notons qu'un faisceau laser CO₂ de quelques kilowatts continu peut brûler un trou d'un demi-centimètre dans une plaque d'acier inox en 10 secondes environ. En comparaison, un trou d'épingle et un filtre positionnés devant une source ordinaire vont sans doute produire une lumière spatialement et temporellement cohérente, mais qui représentera une petite fraction seulement de la puissance totale émise.

Impulsions optiques femtosecondes

L'apparition du laser à colorant à modes bloqués au début des années 1970 donna un grand élan aux efforts qui étaient alors faits pour obtenir de très courtes impulsions de lumière*. En effet, dès 1974, on savait produire des impulsions optiques inférieures à une picoseconde (1 ps = 10^{-12} s), bien que le reste de la décennie ne connut que de faibles progrès. En 1981, deux contributions séparées permirent la création d'impulsions laser femtoseconde (i.e. <0,1 ps ou <100 fs) ; un groupe des Laboratoires Bell développa un laser à colorant en anneau à collision d'impulsions, et une équipe d'IBM conçut un nouveau schéma à compression d'impulsions.

Au-delà des implications dans le domaine pratique des communications électro-optiques, ces avancées ont fermement établi un nouveau champ de recherche appelé *phénomènes ultrarapides*. La manière la plus efficace d'étudier la progression d'un processus qui se déroule extrêmement rapidement (par exemple, les dynamiques de transport dans un semi-conducteur, la fluorescence, les processus biologiques photochimiques et les changements de configuration moléculaire) est de l'examiner à une échelle de temps courte par rapport à celle du phénomène analysé. Des impulsions de 10 fs permettent un accès totalement nouveau à des zones jusque-là obscures de l'étude de la matière.

On peut maintenant produire assez couramment des impulsions de seulement 8 fs (10^{-15} s), ce qui correspond à des

*Voir Chandrashekar Joshi et Paul Corkum, « Interactions of Ultra-Intense Laser Light with Matter », *Phys. Today* **36** (Janvier 1995).

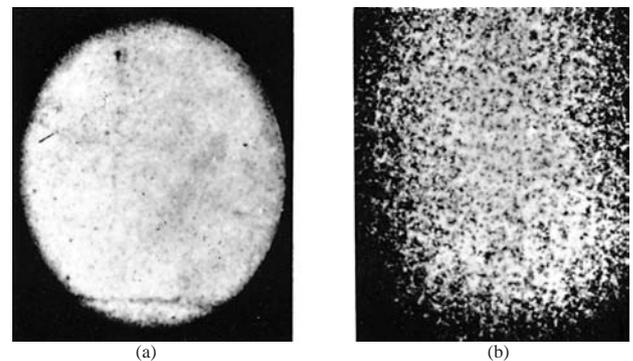
trains d'onde constitués d'environ 4 longueurs d'ondes dans le rouge. L'une des techniques qui rend ces groupes d'ondes femtosecondes possibles est basée sur une idée utilisée dans le domaine du radar dans les années 1950, appelée *compression d'impulsion*. Ici, on étale le contenu spectral d'une impulsion laser initiale, ce qui permet ainsi d'en réduire la durée. Rappelons que $\Delta\nu$ et Δt sont des quantités conjuguées de Fourier [équation (7.63)]. L'impulsion d'entrée (de plusieurs picosecondes de long) est passée dans un milieu dispersif non linéaire, à savoir, une fibre optique monomode. Lorsque l'éclairement est suffisamment élevé, l'indice de réfraction possède un terme non linéaire appréciable (paragraphe 13.4), et la fréquence porteuse des impulsions subit un décalage dépendant du temps. En traversant à peu près 30 m de fibre, la fréquence de l'impulsion est étirée dans le temps, suivant une modulation de type « chirp » (linéaire en fonction du temps). Ainsi, un étalement se produit dans le spectre de l'impulsion, avec les basses fréquences du début et les hautes fréquences à la fin. Ensuite, on fait passer l'impulsion spectralement élargie au travers d'un autre système dispersif (une ligne à retard) tel qu'une paire de réseaux de diffraction. Le retard dans la ligne est ajusté pour que les chemins se compensent et que les hautes fréquences rattrapent les basses, et que toutes les fréquences sortent en même temps, créant une impulsion de sortie temporellement compressée.

L'effet de speckle (granularité)

Une manifestation assez frappante et facile à observer de la cohérence spatiale de la lumière laser est son apparence granulaire après sa réflexion sur une surface diffusante. En utilisant un laser He-Ne (632,8 nm), on peut élargir sensiblement le faisceau en le faisant passer à travers une simple lentille et en le projetant sur un mur ou sur un morceau de papier. Le disque ainsi éclairé apparaît tacheté, avec des régions brillantes et sombres qui scintillent et vibrent dans une danse psychédélique aveuglante : c'est le *speckle*. Si l'on cligne des yeux, les grains grossissent ; si l'on marche vers l'écran, ils rétrécissent ; si l'on enlève ses lunettes de vue, la figure reste parfaitement au point. Si l'on est myope, les franges de diffraction causées par de la poussière sur les lunettes se brouillent et disparaissent, mais pas les tâches. On peut également tenir un crayon à différentes distances de son œil de manière à ce que le disque soit juste en dessus. À chaque position, on fixe le crayon ; où que l'on focalise, la figure de speckle reste parfaitement nette. En effet, on peut aussi regarder le motif à travers un microscope ; en ajustant l'instrument d'un extrême à l'autre, les granularités sont

toujours omniprésentes et restent parfaitement distinctes, alors que le mur est complètement flou.

La lumière spatialement cohérente réfléchiée par une surface diffusante remplit la région environnante avec une figure d'interférence *stationnaire* (comme dans le cas des dispositifs à division du front d'onde du paragraphe 9.3). À la surface, les granularités sont excessivement petites et elles grandissent avec la distance. Partout, le champ résultant est la superposition de nombreuses ondelettes diffusées. Celles-ci doivent avoir une phase relative constante déterminée par la longueur du chemin optique entre chaque diffuseur et le point en question, pour que la figure d'interférence ne se modifie pas. Les photos ci-dessous illustrent très bien cet effet. Elles montrent un bloc de ciment illuminé dans un cas par une lumière laser et dans l'autre par une lumière collimatée provenant d'une lampe à arc à Hg, chacune ayant à peu près la même cohérence spatiale. En revanche, alors que la longueur de cohérence du laser est bien plus grande que la hauteur de la surface, la longueur de cohérence de la lumière Hg ne l'est pas. Dans le premier cas, les granularités de la photographie sont grandes, et elles obscurcissent la structure de la surface. Dans le second cas, malgré sa cohérence spatiale, la figure de speckle n'est pas observable sur la photographie, et les caractéristiques de la surface prédominent. À cause de la texture rugueuse du ciment, la différence de chemin optique entre deux ondelettes arrivant en un point de l'espace et diffusées par différentes bosses de la surface est généralement plus grande que la longueur de cohérence de la lumière de la lampe au mercure. Cela signifie que les phases relatives des trains d'onde qui se superposent changent rapidement et aléatoirement avec le temps, faisant disparaître le motif d'interférence à grande échelle.



Figures de speckle. (a) Un bloc de ciment illuminé par une lampe à arc à mercure et (b) par un laser He-Ne. [D'après B. J. Thompson, *J. Soc. Phot. Inst. Engr.* **4**, 7 (1965).]

Un système de franges réel est formé par les ondes diffusées qui convergent à l'avant de l'écran. On peut voir les franges en plaçant une feuille de papier à un endroit approprié. Après avoir formé une image réelle dans l'espace, les rayons continuent à diverger, et l'on peut alors voir les franges directement avec l'œil correctement focalisé, dans toutes les régions de l'espace. En revanche, les rayons qui divergent initialement apparaissent à l'œil comme s'ils provenaient de l'arrière de l'écran de diffusion et forment donc une image virtuelle.

À cause de l'aberration chromatique, il semble que les yeux normaux et presbytes tendent à focaliser la lumière rouge à l'arrière de l'écran. Au contraire, une personne myope observe le champ réel à l'avant de l'écran (à toutes les longueurs d'onde). Ainsi, si l'observateur tourne sa tête vers la droite, la figure va se déplacer au début vers la droite (tant que la focalisation est à l'arrière de l'écran), puis vers la gauche (focalisation à l'avant). La figure suit donc les mouvements de tête, si l'on est proche de la surface. On peut observer le même mouvement de parallaxe apparent en regardant à travers une fenêtre. À l'extérieur, les objets auront l'air de se déplacer dans le même sens que la tête, et à l'intérieur, ce sera le contraire. Le faisceau laser brillant spatialement cohérent et à largeur de bande étroite est parfaitement approprié pour l'observation de l'effet de speckle, bien que d'autres moyens soient certainement possibles*. En lumière solaire non filtrée, les grains sont minuscules sur la surface, et multicolores. Il est facile d'observer cet effet sur un matériau noir plat et lisse (par exemple, du papier poster peint), mais on peut le voir sur un ongle ou une pièce de monnaie usée.

Bien qu'il fournisse une superbe démonstration, tant esthétique que pédagogique, l'effet de speckle peut être une véritable nuisance pratique dans des systèmes à éclairage cohérent. Par exemple, dans l'imagerie holographique, la figure de speckle correspond à des bruits de fond gênants. Par ailleurs, à peu près le même type d'effet peut être observé en écoutant une radio mobile alors que la force du signal change d'un lieu à l'autre, selon l'environnement et la figure d'interférence qui en résulte.

L'effet Raman spontané

Il est possible qu'un atome excité ne retourne pas à son état initial après l'émission d'un photon. Ce genre de phénomène

.....
*Pour plus de détails, voir L. I. Goldfisher, *J. Opt. Soc. Am.* **55**, 247 (1965) ; D. C. Sinclair, *J. Opt. Soc. Am.* **55**, 575 (1965) ; J. D. Rigden et E. I. Gordon, *Proc. IRE* **50**, 2367 (1962) ; B. M. Oliver, *Proc. IEEE* **51**, 220 (1963).

avait été observé et étudié par George Stokes avant l'avènement de la théorie quantique. Comme l'atome retombe dans un état intermédiaire, il émet un photon d'énergie inférieure à celle du photon incident primaire, dans ce que l'on appelle usuellement une *transition de Stokes*. Si le processus se déroule rapidement (environ 10^{-7} s), il est appelé **fluorescence**, alors que s'il y a un retard appréciable (dans certains cas en secondes, minutes, et même en heures), il s'agit de **phosphorescence**. L'utilisation d'un quantum ultraviolet pour produire une émission fluorescente dans le visible est devenue un fait accepté de notre vie quotidienne. Un grand nombre de matériaux communs (par exemple, des détergents, des colorants organiques, l'émail des dents) émettent une lumière caractéristique dans le visible et paraissent briller en lumière ultraviolette. D'où l'utilisation étendue du phénomène dans les affichages publicitaires ou pour « blanchir » les vêtements.

Une lumière quasi monochromatique diffusée par une substance va par la suite, pour l'essentiel, garder la même fréquence. Il se peut qu'on observe des composantes additionnelles très faibles, de fréquences plus hautes et plus basses (bandes latérales). De plus, la différence entre les bandes latérales et la fréquence centrale ν_i est caractéristique du matériau et suggère donc une application à la spectroscopie. L'**effet Raman spontané**, comme on le nomme aujourd'hui, fut prédit en 1923 par Adolf Smekal et observé expérimentalement en 1928 par Sir Chandrasekhara Vankata Raman (1888-1970), alors professeur de physique à l'université de Calcutta. Il était en fait difficile d'exploiter cet effet, car il nécessitait des sources puissantes (on se servait habituellement des décharges Hg) et de gros échantillons. Souvent l'ultraviolet de la source compliquait encore plus les choses en décomposant le spécimen. Et il n'est donc pas surprenant que les potentiels des aspects pratiques de l'effet Raman n'aient suscité que peu d'intérêt à l'origine. La situation a changé radicalement avec l'apparition du laser. La **spectroscopie Raman** est maintenant un outil analytique unique et puissant.

Afin d'apprécier comment le phénomène se produit, revoyons les caractéristiques des spectres moléculaires. Dans les régions de l'infrarouge lointain et les micro-ondes, une molécule peut absorber de l'énergie rayonnante, qu'elle convertit ensuite en énergie cinétique rotationnelle. De plus, elle peut absorber des photons infrarouges (i.e. ayant une gamme de longueur d'onde allant de 10^{-2} mm à 700 nm), en transformant cette énergie en un mouvement vibrationnel de la molécule. Finalement, une molécule peut absorber de l'énergie dans le visible et dans l'ultraviolet grâce au mécanisme de transitions électroniques, qui se rapprochent de ceux des atomes. Supposons alors une molécule dans un état vibrationnel. Utilisant les

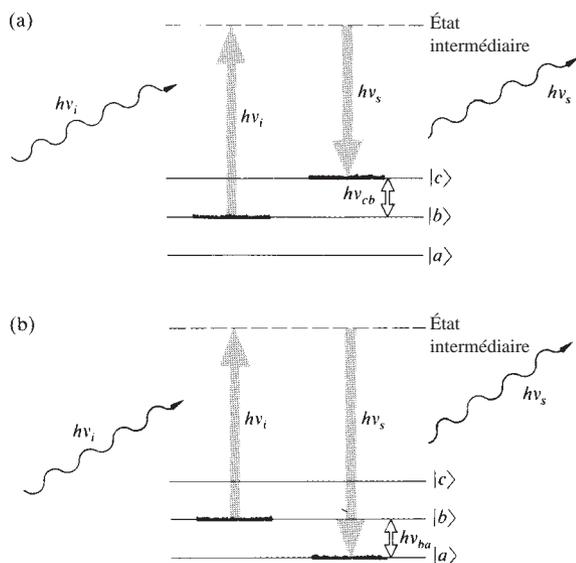


Figure 13.19 Diffusion Raman spontanée.

notations de la mécanique quantique, appelons-la $|b\rangle$, comme l'indique le diagramme de la figure 13.19a. Il n'est pas nécessaire qu'il s'agisse d'un état excité. Un photon incident d'énergie $h\nu_i$ est absorbé, élevant le système dans un état intermédiaire ou virtuel, après quoi ce système fait immédiatement une transition de Stokes, émettant un photon (diffusé) d'énergie $h\nu_s < h\nu_i$. Par conservation de l'énergie, la différence $h\nu_i - h\nu_s = h\nu_{cb}$ excite la molécule jusqu'à un niveau d'énergie vibrationnel supérieur $|c\rangle$. Il est possible qu'une excitation électronique ou rotationnelle en résulte également.

Par ailleurs, si l'état initial est déjà un état excité (l'échantillon est par exemple chauffé), la molécule, après avoir absorbé et émis un photon, va revenir dans un état encore plus bas (figure 13.19b), faisant ainsi une **transition anti-Stokes**. Dans ce cas, $h\nu_s > h\nu_i$, ce qui signifie qu'une partie de l'énergie vibrationnelle de la molécule ($h\nu_{ba} = h\nu_s - h\nu_i$) a été convertie en énergie radiative. Dans tous les cas, les différences résultantes entre ν_s et ν_i correspondent à des différences spécifiques de niveau d'énergie pour la substance analysée. Ce résultat permet donc d'étudier les caractéristiques dans sa structure moléculaire. Par comparaison, la figure 13.20 représente la diffusion de Rayleigh lorsque $\nu_s = \nu_i$.

Le laser est la source idéale pour la diffusion Raman spontanée. Il est brillant, quasi monochromatique et disponible dans une grande gamme de fréquences. La figure 13.21 illustre un système laser Raman typique. Des instruments complets de

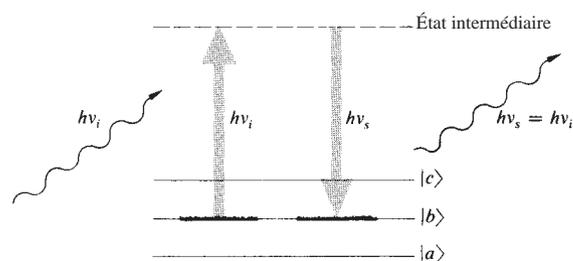


Figure 13.20 Diffusion Rayleigh.

recherche de la sorte sont disponibles dans le commerce, incluant le laser (en principe à hélium-néon, argon ou krypton), des systèmes de focalisation à lentilles, et des électroniques de comptage de photons. Le monochromateur à double balayage fournit la discrimination nécessaire entre ν_i et ν_s , comme la lumière laser non décalée (ν_i) est diffusée selon les spectres Raman (ν_s). Bien que la diffusion Raman, associée avec une rotation moléculaire, fut observée avant l'utilisation du laser, la sensibilité croissante maintenant disponible rend le processus plus simple et permet même l'examen des effets du mouvement des électrons.

L'effet Raman stimulé

En 1962, Eric J. Woodbury et Won K. Ng découvrirent assez fortuitement un effet connexe remarquable appelé *diffusion Raman stimulée*. Ils travaillaient avec un laser pulsé à rubis d'un million de watts crête comprenant un obturateur à cellule de Kerr au nitrobenzène (paragraphe 8.11.3). Ils trouvèrent qu'à peu près 10 % de l'énergie incidente à 694,3 nm avait été déplacée en longueur d'onde et apparaissait comme un faisceau diffusé *cohérent* à 766,0 nm. Il fut par la suite déterminé que le changement de fréquence correspondant, d'environ 40 THz, était caractéristique de l'un des modes vibrationnels de la molécule de nitrobenzène, comme l'étaient d'autres nouvelles fréquences également présentes dans le faisceau diffusé. La diffusion Raman stimulée peut se produire dans les solides, dans les liquides ou dans les gaz denses sous l'influence d'impulsions laser focalisées de haute énergie (figure 13.22). L'effet est montré schématiquement à la figure 13.23. Ici, deux faisceaux arrivent simultanément sur une molécule. L'un correspond à la fréquence laser ν_i , l'autre est à la fréquence diffusée ν_s . Dans le dispositif original, le faisceau diffusé était réfléchi par aller-retour au travers du spécimen, mais l'effet peut se produire sans résonateur. Le faisceau laser perd un photon $h\nu_i$,

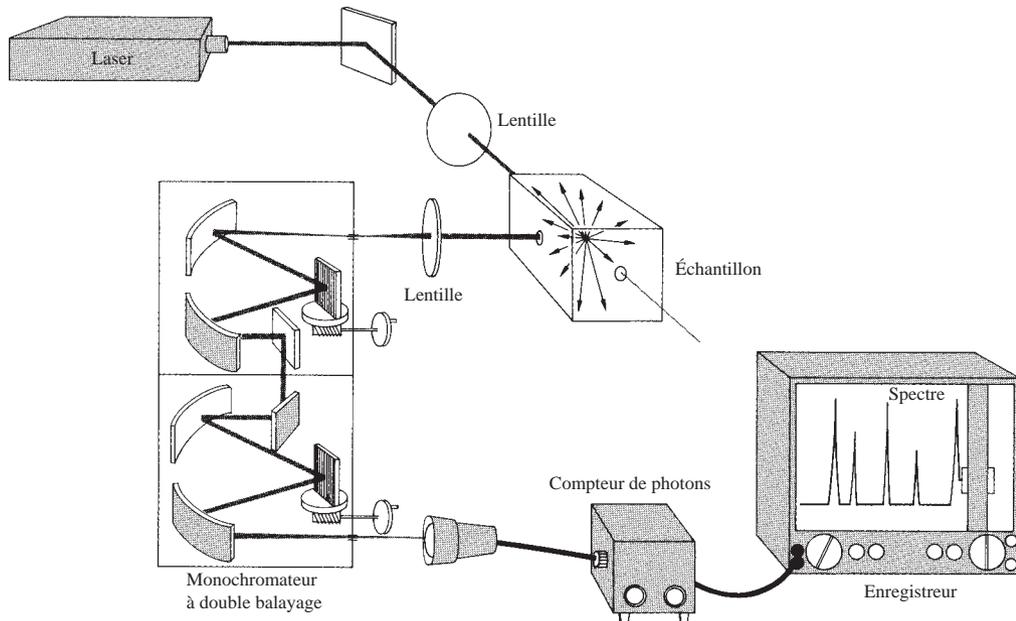


Figure 13.21 Un système de laser Raman.

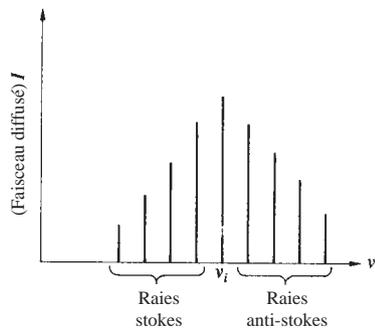
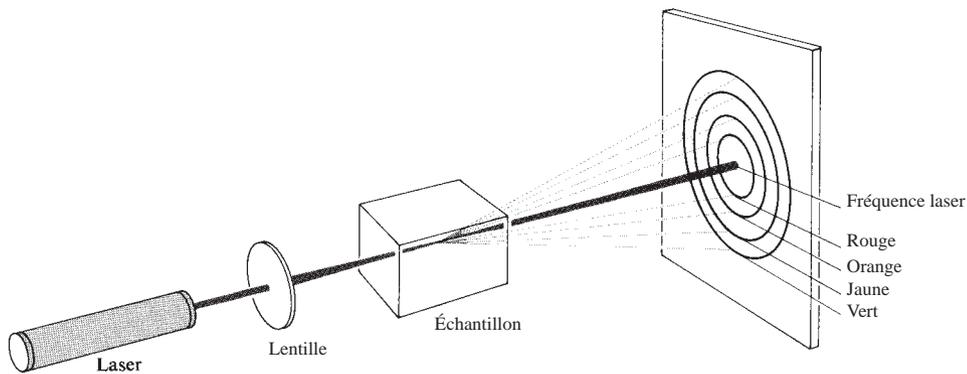


Figure 13.22 Diffusion Raman stimulée [Voir R. W. Minck, R. W. Terhune, et C. C. Wang, *Proc. IEEE* **54**, 1357 (1966).]

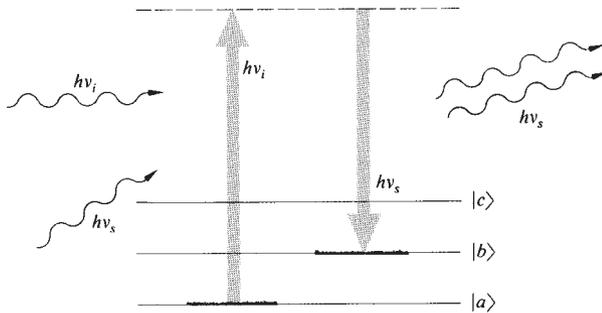


Figure 13.23 Diagramme des niveaux d'énergie de la diffusion Raman stimulée.

alors que le faisceau diffusé gagne un photon $h\nu_s$ et est conséquemment *amplifié*. L'énergie résiduelle ($h\nu_i - h\nu_s = h\nu_b$) est transmise à l'échantillon. La réaction en chaîne dans laquelle une large portion du faisceau incident est convertie en lumière Raman stimulée ne peut se produire qu'au-dessus d'un certain seuil en éclairissement pour le faisceau laser d'excitation.

La diffusion Raman stimulée fournit toute une nouvelle gamme de sources cohérentes de fortes puissances, de l'infrarouge à l'ultraviolet. Il faut mentionner qu'en principe chaque mécanisme de diffusion spontanée (par exemple, les diffusions Rayleigh et Brillouin) possède un homologue stimulé*.

13.2 Imagerie et distribution spatiale de l'information optique

La manipulation de toutes sortes de données par les techniques optiques est déjà devenue un *fait accompli technologique*. Depuis les années 1960, la littérature reflète, dans de nombreux domaines, cet intérêt considérable pour le traitement optique de l'information. Cela a des applications pratiques dans les domaines de l'amélioration des images télévisuelles et photographiques, le traitement des signaux radar et sonar (analyse de réseaux d'antennes phasés et synthétiques), de même que dans la reconnaissance de formes (par exemple, l'interprétation de photos aériennes et les études des empreintes digitales), pour n'en citer que quelques-unes.

*Pour plus de détails sur ces sujets, on peut lire l'article de Nicolaas Bloembergen, « The Stimulated Raman Effect » *Am. J. Phys.* **35**, 989 (1967). Il contient une très bonne bibliographie ainsi qu'un index historique. Beaucoup d'articles de *Lasers and Light* traitent également de ce sujet et leur lecture est très recommandée.

Notre intérêt est ici de développer la nomenclature et quelques idées nécessaires pour l'appréciation de cette avancée contemporaine de l'optique.

13.2.1 Fréquences spatiales

En électronique, on est concerné par les variations temporelles du signal, celles de la tension entre deux bornes. En optique, on est plus souvent intéressé par la répartition de l'information dans une région de l'espace à un moment donné. Par exemple, on peut considérer la scène représentée à la figure 13.24a comme une distribution de l'éclairissement bidimensionnel. Il peut s'agir d'une diapositive, d'une image de télévision ou d'une image projetée sur un écran. Dans tous les cas, on peut considérer qu'il y a une fonction $I(y, z)$, que l'on peut balayer sur une ligne horizontale ($z = 0$) et tracer point par point, comme à la figure 13.24b. On peut synthétiser la fonction $I(y, 0)$ en fonction d'harmoniques, en utilisant les techniques d'analyse de Fourier traitées aux Chapitres 7 et 11. Dans ce cas, la fonction est assez compliquée, et il faudrait beaucoup de termes pour la représenter correctement. Cependant, si la forme fonctionnelle de $I(y, 0)$ est connue, la procédure est assez directe. En balayant à travers une autre ligne, par exemple, $z = a$, on obtient $I(y, a)$, dessinée à la figure 13.24c et qui se révèle être une série d'impulsions carrées régulièrement espacées. Cette fonction est celle considérée au paragraphe 7.3, et quelques-unes de ces composantes de Fourier ont été sommairement représentées à la figure 13.24d. Si les sommets en (c) sont séparés, de centre à centre par, disons, des intervalles de 1 cm, la période spatiale est égale à 1 cm par cycle, et sa réciproque, qui est la fréquence spatiale, est égale à 1 cycle par cm.

Généralement, on peut transformer l'information associée avec n'importe quelle ligne en une série de fonctions sinusoidales, d'amplitude et de fréquence spatiale appropriées. Dans le cas d'objets simples, à modulation sinusoidale ou créneau, tels que ceux de la figure 13.25, toutes les lignes balayées horizontalement sont identiques, et les figures sont effectivement monodimensionnelles. On montre à la figure 7.32 le spectre en fréquence spatiale d'une onde carrée. Par ailleurs, pour la scène de la bouteille de vin et des chandelles, $I(y, z)$ est bidimensionnelle, et il nous faut donc penser en termes de transformées de Fourier bidimensionnelles (paragraphe 7.4.4 et 11.2.2). On doit également mentionner que, au moins en principe, on peut avoir enregistré l'amplitude du champ électrique à chaque point de la scène et procéder ainsi à une décomposition similaire de ce signal en ces composantes de Fourier.

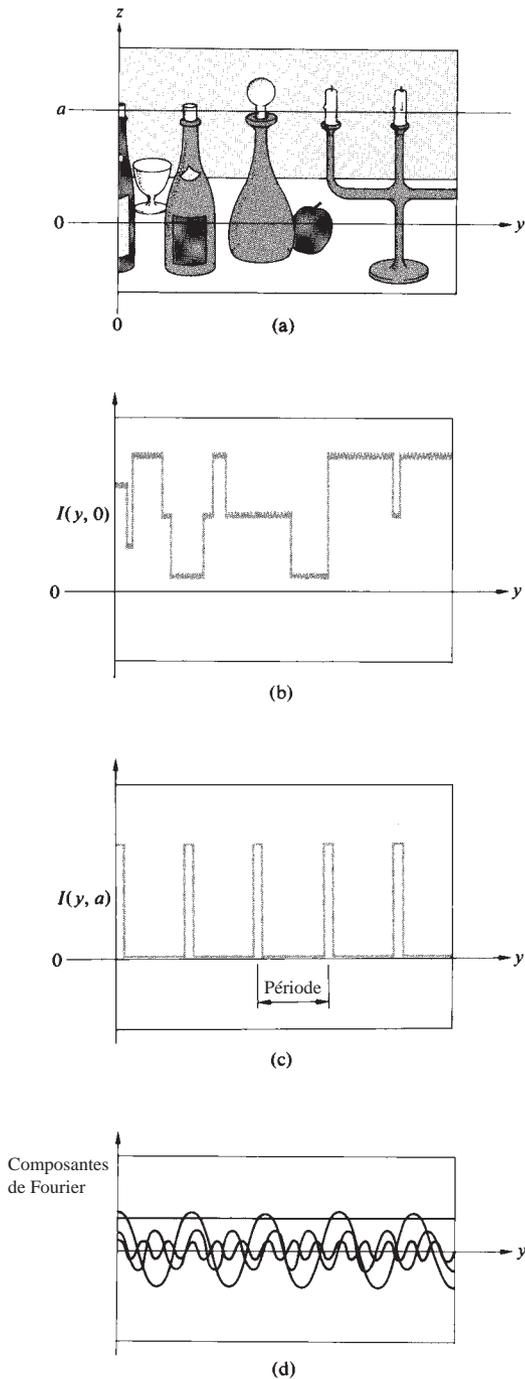


Figure 13.24 Distribution d'éclairage à deux dimensions.

Rappelons (paragraphe 11.3.3) que la figure de diffraction en champ lointain (ou de Fraunhofer) est identique à la transformée de Fourier de la fonction d'ouverture $\mathcal{A}(y, z)$, qui est proportionnelle à $\mathcal{E}_A(y, z)$, la vigueur de la source par unité de surface [équation (10.37)] du plan d'entrée ou du plan objet. En d'autres termes, si la distribution du champ sur le plan objet est donnée par $\mathcal{A}(y, z)$, sa transformée de Fourier bidimensionnelle va apparaître comme la distribution du champ $E(Y, Z)$ sur un écran très éloigné. Comme dans les figures 7.43 et 10.17, on peut introduire un objectif (L_i) après l'objet afin de raccourcir la distance au plan image. Cet objectif est communément appelé la **lentille de transformation**, puisqu'on peut l'imaginer comme un *ordinateur optique* capable de produire des transformations de Fourier instantanées. Maintenant, supposons que l'on illumine un réseau de transmission idéalisé avec une onde monochromatique cohérente, telle que l'onde plane émise par un laser ou une lampe à Hg collimatée et filtrée (figure 13.26).

Dans chacun des cas, on suppose que l'amplitude du champ est à peu près constante sur le front d'onde incident. La fonction d'ouverture est alors une fonction rectangle périodique (figure 13.27). En d'autres termes, si l'on se déplace dans le plan objet, l'amplitude du champ est soit nulle, soit constante. Si a est le pas du réseau, c 'est aussi la période spatiale de la fonction rectangle, et sa réciproque est la fréquence spatiale fondamentale du réseau. Le point central ($m = 0$) dans la figure de diffraction correspond au terme *continu* (*dc*) à la fréquence spatiale nulle. C'est le biais qui provient du fait que l'entrée $\mathcal{A}(y)$ est partout positive. On peut modifier ce biais en attribuant au fond un niveau de gros uniforme différent de zéro. À mesure que les points du plan image (ou, dans ce cas, les transformées) s'éloignent de l'axe central, leurs fréquences spatiales associées (m/a) augmentent en accord avec l'équation du réseau $\sin \theta_m = \lambda(m/a)$. Un réseau plus grossier aurait un pas a plus large, de telle sorte qu'un ordre donné (m) coïnciderait avec une fréquence plus basse, (m/a), et tous les points seraient plus proches de l'axe central ou axe optique.

Si l'on avait utilisé comme objet une diapositive ressemblant à une sinusoïde (figure 13.25a), il n'y aurait idéalement eu que trois pics dans le plan de la transformée de Fourier : le pic central, de fréquence nulle et le premier ordre ou fondamental ($m = \pm 1$) de chaque côté de l'axe. Si l'on passe à deux dimensions, une grille croisée (ou maille) produit la figure de diffraction représentée sur la photo jointe. Notons qu'en plus de la périodicité horizontale et verticale évidente de la structure, elle est également répétitive, par exemple, le

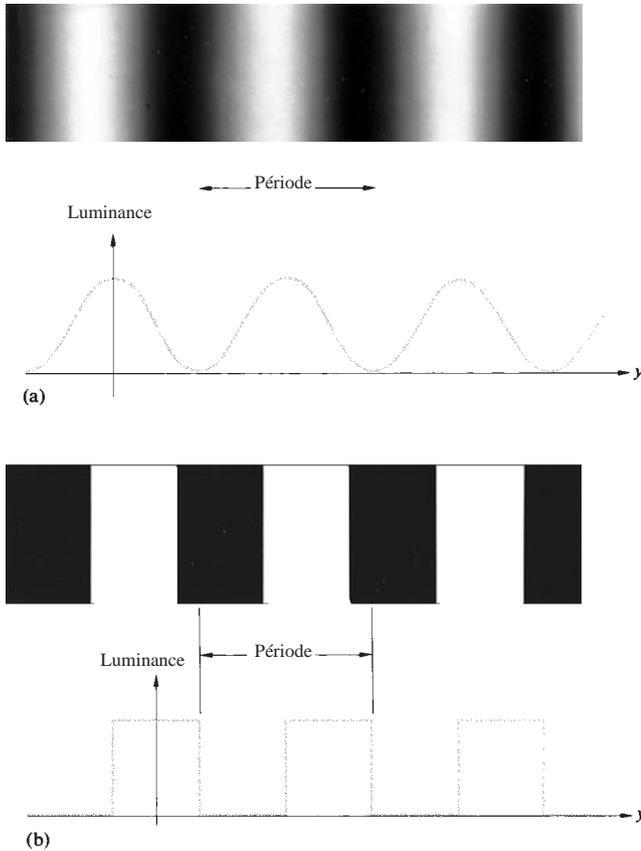


Figure 13.25 Cible (a) en sinus et (b) cible en carré.



Figure de diffraction d'un réseau croisé.

long des diagonales. Un objet plus compliqué, tel qu'une diapositive de la surface de la Lune, produirait une figure de diffraction extrêmement complexe. Du fait de la nature périodique simple de la grille, on a recours à sa décomposition en séries de Fourier, mais, dans le cas présent, on va devoir penser en transformées de Fourier. Dans tous les cas, *chaque point lumineux de la figure de diffraction dénote la présence d'une fréquence spatiale spécifique, proportionnelle à la distance de ce point à l'axe optique (emplacement de la fréquence nulle)*. Les composantes de la fréquence, de signe positif et négatif, apparaissent diamétralement opposées par rapport à l'axe central. Si l'on pouvait mesurer le champ électrique en chacun des points du plan de Fourier, on relèverait effectivement la transformée de la fonction d'ouverture, mais cela n'est pas facile. Ce que l'on peut mesurer simplement, en revanche, est la distribution d'éclairement.

13.2.2 Théorie de Abbe sur la formation des images

Considérons le système représenté à la figure 13.28a, qui n'est qu'une version élaborée de celui de la figure 13.28b. Des fronts d'onde plans, monochromatiques, provenant de la lentille de collimation (L_c) sont diffractés par un réseau. Il en résulte un front d'onde déformé, que l'on résout en un nouvel ensemble d'ondes planes, chacune correspondant à un ordre donné $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ou fréquence spatiale, et chacune se propageant dans une direction spécifique (figure 13.28b). L'objectif (L_o) sert de *lentille de transformation*, qui forme la figure de diffraction de Fraunhofer du réseau dans le plan de Fourier Σ_t (qui est aussi le plan focal image de L_o). Bien entendu, les ondes se propagent au-delà de Σ_t et arrivent au plan image Σ_i , où elles se superposent et interfèrent pour former une image inversée du réseau. En conséquence, les points G_1 et G_2 ont pour image respective P_1 et P_2 . L'objectif forme deux motifs distincts intéressants. Le premier est la transformée de Fourier, dans le plan focal conjugué du plan de la source, et l'autre est l'image de l'objet, formée dans le plan conjugué du plan objet. La figure 13.29 montre le même dispositif pour une longue fente étroite et horizontale, éclairée de manière cohérente.

On peut considérer les points S_0, S_1, S_2 etc. du plan de transformée de la figure 13.28a comme des émetteurs d'ondelettes de Huygens, et la figure de diffraction résultante sur Σ_t est alors l'image du réseau. En d'autres termes, *l'image provient d'un double processus de diffraction*. Une autre façon de voir est de dire que l'onde incidente est diffractée par l'objet, puis

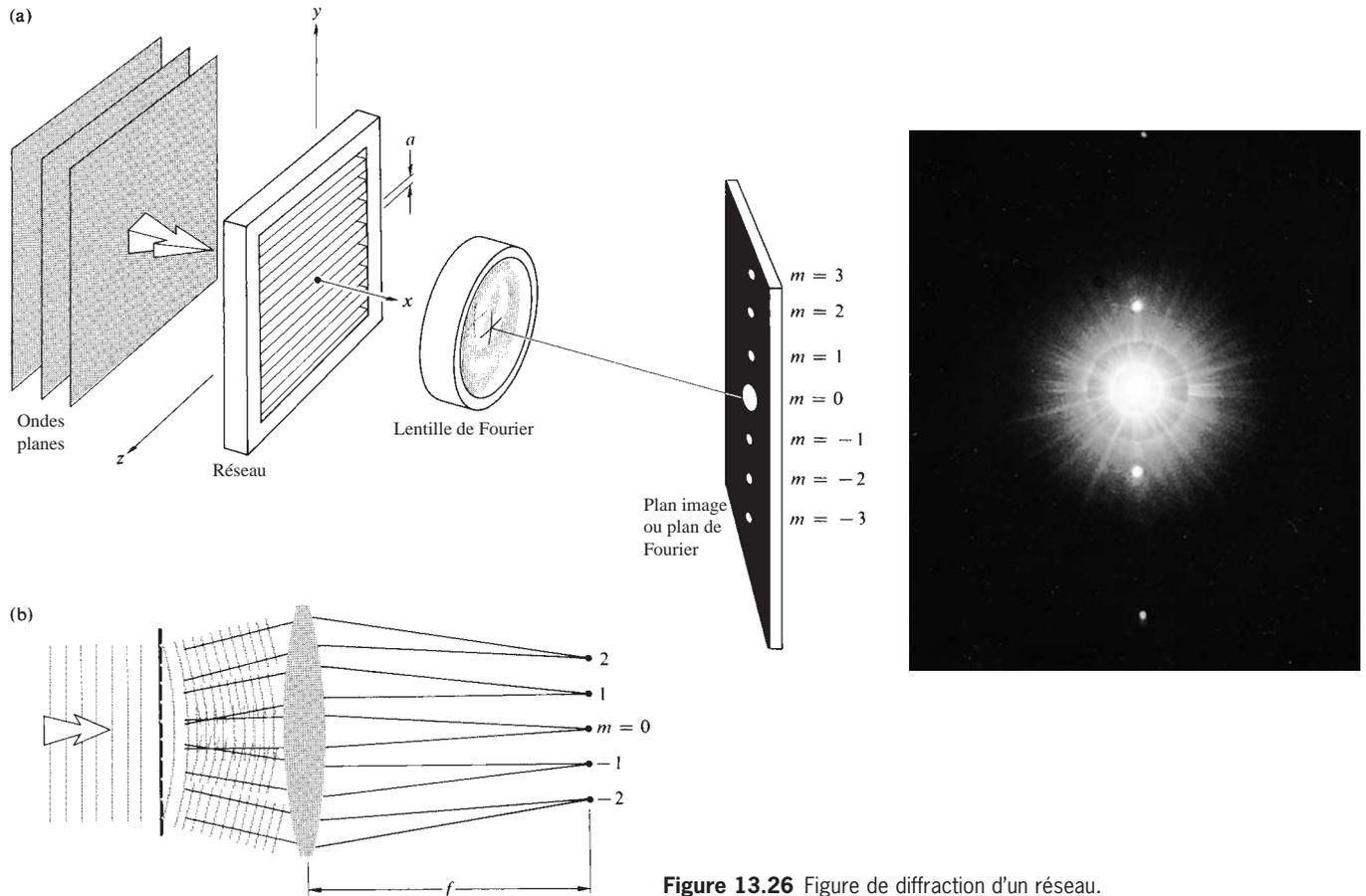


Figure 13.26 Figure de diffraction d'un réseau.

diffractionnée une fois de plus par l'objectif. Si cette lentille n'était pas là, il se formerait une figure de diffraction de l'objet sur Σ_i , au lieu de son image.

Ces idées furent initialement proposées par le professeur Ernst Abbe (1840-1905) en 1873*. Son intérêt à l'époque concernait la théorie de la microscopie, dont la relation avec la discussion précédente est claire si l'on considère L_f comme un objectif de microscope. De plus, si l'on remplace le réseau par un petit morceau de matériau translucide (i.e. le spécimen

examiné), et si on l'éclaire par une petite source et un condenseur, le système ressemble tout à fait à un microscope.

Carl Zeiss (1816-1888), qui, au milieu des années 1800, dirigeait une entreprise de microscopes à Jena, réalisa les limitations des techniques de l'époque, basées sur le tâtonnement. En 1866, il engagea les services d'Ernst Abbe, alors chargé de cours à l'université de Jena, afin d'établir une approche plus scientifique dans la conception des microscopes. Abbe trouva rapidement, par expérimentation, qu'une plus grande ouverture en sortie donnait une meilleure résolution, même si le cône de la lumière incidente ne remplissait qu'une petite portion de l'objectif. D'une certaine manière, « l'espace sombre » en bord de pupille contribuait à l'image. En conséquence, il considéra que l'approche du processus de diffraction, alors bien connu, qui se produisait sur le bord d'une lentille (conduisant à la figure d'Airy pour un point source) n'avait pas le même effet que pour un objectif de télescope éclairé de

*Une approche alternative quasiment équivalente fut proposée en 1896 par Lord Rayleigh. Il envisagea chacun des points d'un objet comme une source cohérente dont l'onde émise était diffractée par la lentille en une figure d'Airy. À leur tour, chacun de ceux-là était centré sur le point image idéal (sur Σ_i) du point source correspondant. Ainsi, Σ_i était recouvert par un ensemble de figures d'Airy qui se superposent et interfèrent.

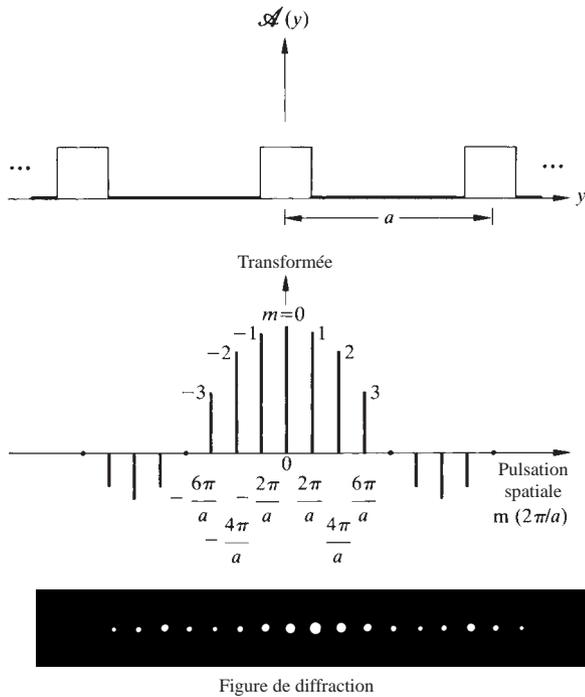


Figure 13.27 Onde carrée et sa transformée de Fourier.

manière incohérente. Les spécimens, dont la taille était de l'ordre de λ , diffusaient apparemment de la lumière dans « l'espace sombre » de l'objectif du microscope. Observons, ce qui est le cas de la figure 13.28b, que si l'ouverture de l'objectif n'est pas assez grande pour collecter toute la lumière diffractée, l'image ne correspond pas exactement à l'objet. Elle se rapporte plutôt à un objet fictif dont la figure de diffraction complète correspond à celle collectée par L_t . On sait, d'après le paragraphe précédent, que ces portions perdues de la région extérieure de la figure de Fraunhofer sont associées aux fréquences spatiales les plus hautes. Et, comme on va le voir à présent, leur suppression va résulter en une perte en netteté et en résolution de l'image.

En pratique, à moins que le réseau considéré précédemment n'ait une largeur infinie, il ne peut pas être strictement périodique. Cela signifie que la partie continue de son spectre de Fourier est dominé par les termes des séries de Fourier discrètes usuelles. Des objets complexes et irréguliers affichent, quant à eux, clairement la nature continue de leurs transformées de Fourier. Dans tous les cas, il faut mettre l'accent sur le fait que, à moins que l'objectif de la lentille ait une ouverture infinie, *il fonctionne comme un filtre passe-bas qui rejette les fréquences spatiales supérieures à une certaine valeur et qui laisse passer toutes les fréquences inférieures* (les premières étant celles qui se situent au-delà de la limite physique de la lentille). En conséquence, tous les systèmes de lentilles réels seront limités dans leur capacité à reproduire la teneur en

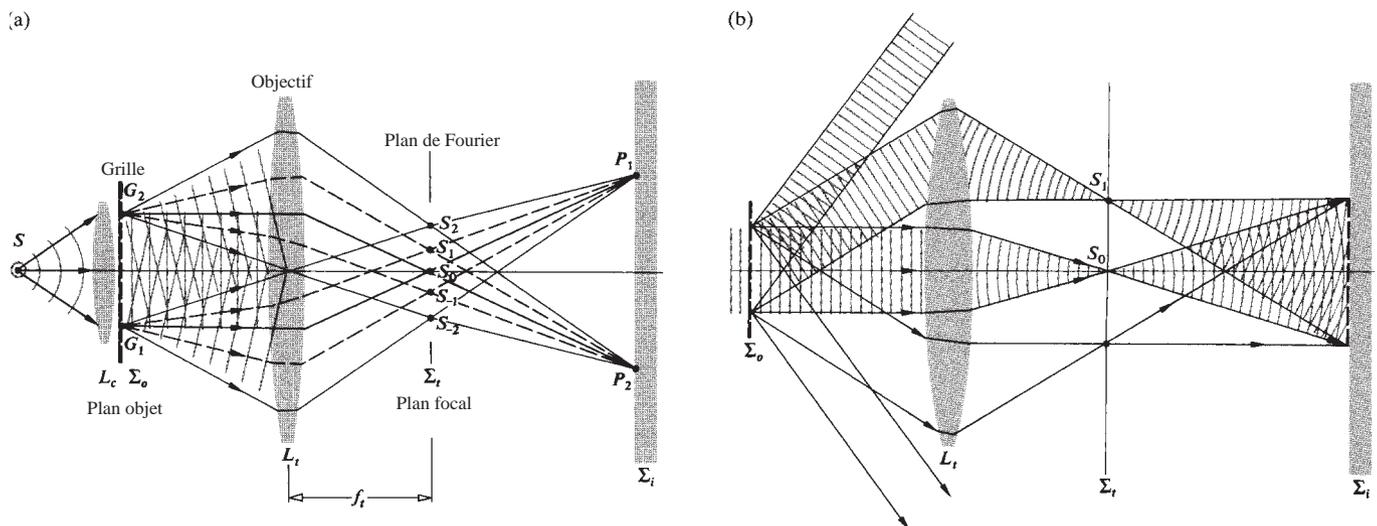


Figure 13.28 Formation d'image.

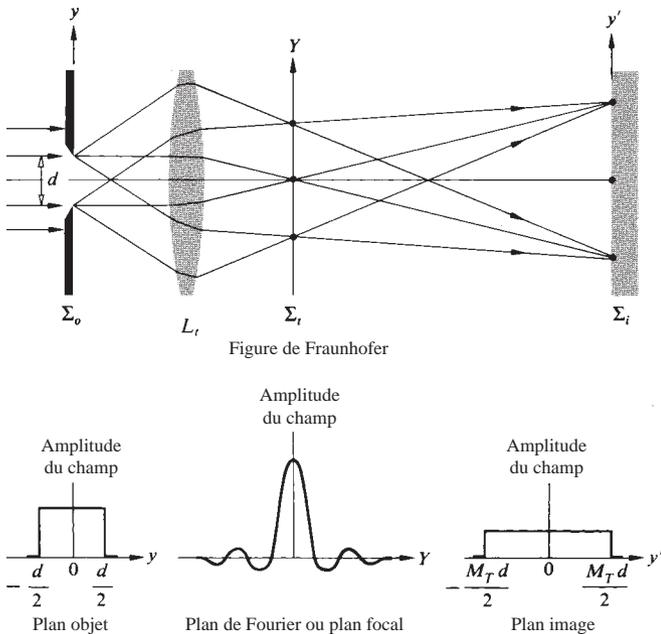


Figure 13.29 L'image d'une fente.

hautes fréquences spatiales d'un objet réel sous éclairage cohérent*. Il faut également mentionner qu'il y a une non-linéarité élémentaire associée aux systèmes optiques d'imagerie fonctionnant à des fréquences spatiales élevées†.

13.2.3 Filtrage spatial

Supposons que l'on réalise le montage de la figure 13.28a, en utilisant un laser comme source d'ondes planes. Si les points S_0, S_1, S_2 , etc. sont les sources de la figure de Fraunhofer, il faut que l'écran image soit situé à $x = \infty$ (bien que l'on prenne souvent une dizaine de mètres en pratique). Au risque d'être répétitifs rappelons que la raison de la présence de L_t était à l'origine de ramener la figure de diffraction de l'objet à distance finie. Introduisons à présent une *lentille d'imagerie* L_i (figures 13.30 et 13.31) afin de rapporter de l'infini, la figure

*Voir H. Volkman, « Ernst Abbe and His Work », *Appl. Opt.* **5**, 1720 (1966), pour une description plus précise des nombreuses contributions de Abbe en optique.

†R. J. Becherer et G. B. Parrent, Jr., « Nonlinearity in Optical Imaging Systems », *J. Opt. Soc. Am.* **57**, 1479 (1967).

de diffraction de l'ensemble des points sources S_0, S_1, S_2, \dots , remplaçant ainsi Σ_i à une distance convenable. La lentille de transformation fait converger la lumière de l'objet en une figure de diffraction dans le plan Σ_t . Elle produit ainsi sur Σ_t une transformée de Fourier bidimensionnelle de l'objet. De fait, le spectre des fréquences spatiales de l'objet est étalé à travers le plan de la transformée. Ensuite, L_i (la *lentille de transformation « inverse »*) projette sur le plan image la figure de diffraction de la distribution de lumière qui se trouve sur Σ_t . En d'autres termes, elle diffracte le faisceau diffracté, ce qui signifie effectivement qu'elle produit une transformée inverse. Ainsi, il apparaît essentiellement comme image finale, une transformée inverse des données sur Σ_t .

En pratique L_t et L_i sont des lentilles à plusieurs éléments, bien corrigées et identiques ($f_t = f_i$) (pour un travail de qualité, elles doivent avoir des résolutions d'à peu près 150 paires de lignes/mm ; une paire de lignes étant une période sur la figure 13.25b). Pour des applications moins exigeantes, deux objectifs de projecteur de grande ouverture (à peu près 100 mm) ayant des distances focales appropriées d'environ 300 ou 400 mm conviennent très bien. Une de ces lentilles est alors simplement retournée de telle manière que leurs plans focaux images coïncident avec Σ_t . Par ailleurs, il n'est pas nécessaire que le plan d'entrée (ou plan objet) soit situé à une distance focale en avant de L_t ; la transformée apparaît toujours sur Σ_t . Déplacer Σ_0 n'affecte que la phase de la distribution d'amplitude, ce qui n'a généralement que peu d'intérêt. Le dispositif des figures 13.30 et 13.31 est désigné comme étant un *ordinateur optique cohérent*. Il permet d'insérer des obstructions (i.e. des masques ou des filtres) dans le plan de la transformée, ce qui a pour résultat de bloquer partiellement ou complètement certaines fréquences spatiales, les empêchant d'atteindre le plan image. On appelle **filtrage des fréquences spatiales** ce procédé d'altération du spectre des fréquences de l'image (voir paragraphe 7.4.4).

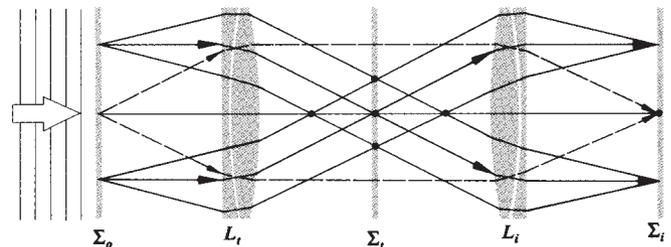


Figure 13.30 Plans de l'objet, de la transformée et de l'image.

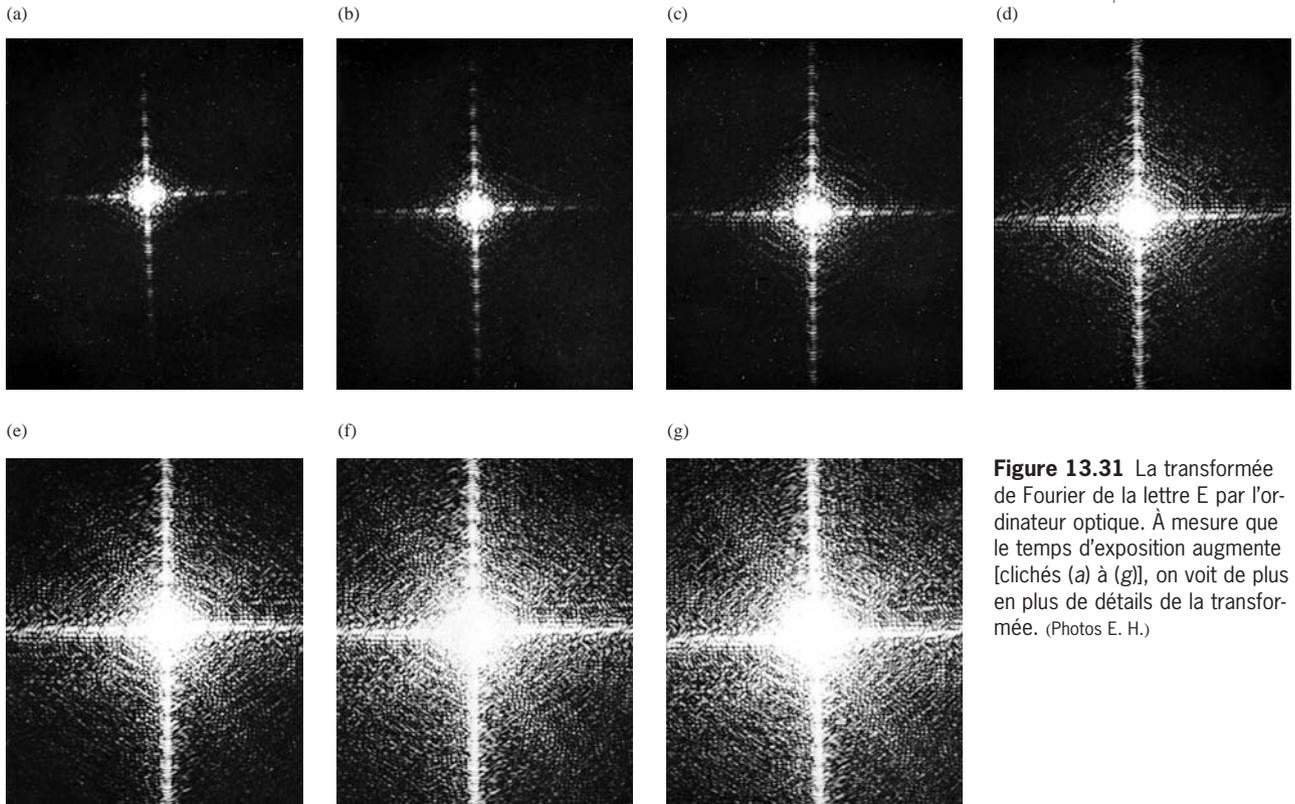
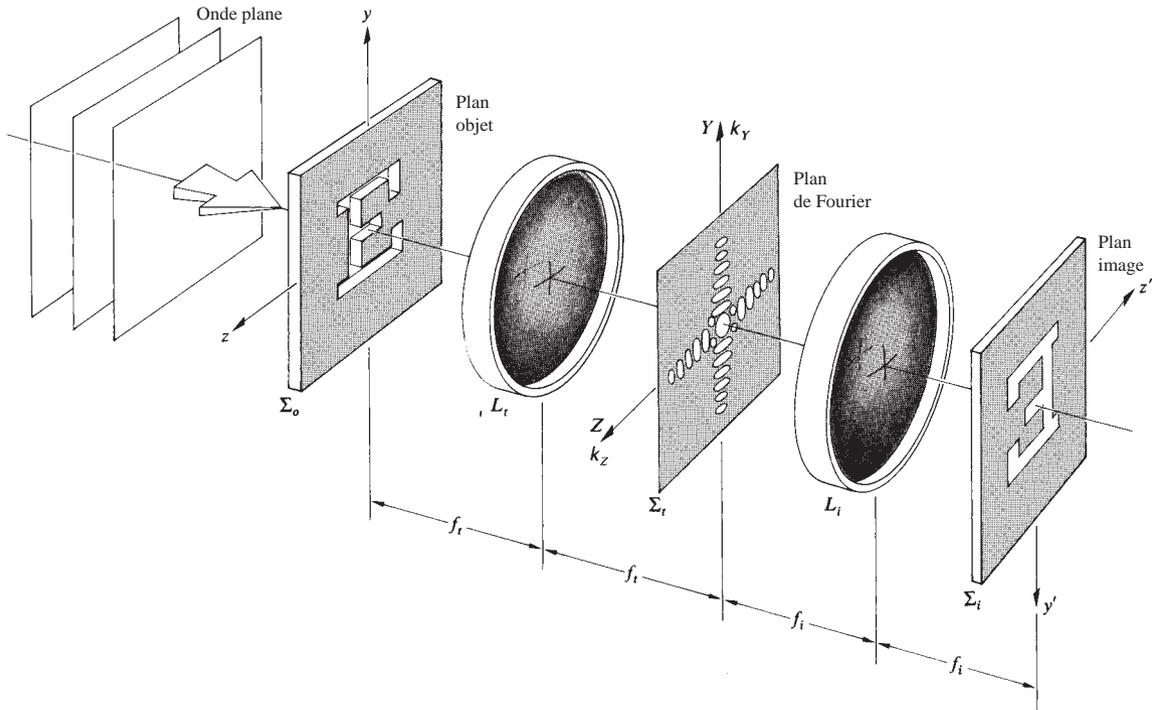


Figure 13.31 La transformée de Fourier de la lettre E par l'ordinateur optique. À mesure que le temps d'exposition augmente [clichés (a) à (g)], on voit de plus en plus de détails de la transformée. (Photos E. H.)

Selon la précédente analyse de la diffraction de Fraunhofer, on sait qu'une longue fente étroite placée en Σ_0 , sans considérations de son orientation ou de sa localisation, produit une transformée en Σ_r , qui consiste en une série de traits lumineux disposés le long d'une ligne droite perpendiculaire à la fente (figure 10.6) et *passant par l'origine*. En conséquence, si un objet en forme de segment de droite est décrit par $y = mz + b$, sa figure de diffraction s'étend le long de la ligne $Y = -Z/m$ ou, de manière équivalente, d'après les équations (11.64) et (11.65), $k_Y = -k_Z/m$. Avec cela et le motif d'Airy en tête, on devrait pouvoir anticiper approximativement les structures de transformées d'objets variés. Par ailleurs, n'oublions pas que ces transformées sont centrées sur l'axe optique du système, de fréquence nulle. Par exemple, un signe plus transparent dont la ligne horizontale est plus épaisse que la ligne verticale possède une transformée bidimensionnelle ayant à nouveau plus ou moins la forme d'un signe plus. La ligne horizontale épaisse crée une série de traits courts verticaux, alors que l'élément vertical plus fin produit une ligne de traits longs horizontaux. Rappelons que les éléments objets de petites dimensions diffractent dans des angles relativement grands. En suivant Abbe, on peut repenser la totalité du sujet en ces termes, plutôt qu'en utilisant les concepts de filtrage spatial et de transformées, qui sont représentatifs de la version la plus moderne de la théorie de la communication.

Les portions verticales du symbole **E** de la figure 13.31 produisent le spectre large de fréquences qui apparaît comme la partie horizontale de la figure. Notons que toutes les lignes d'un objet parallèles entre elles donnent lieu à une répartition

de lumière unique, alignée dans le plan de la transformée, et qui passe par l'origine sur Σ_r (l'intersection est zéro), comme dans le cas d'un réseau. La diapositive du chiffre 5 va produire une distribution de points à la fois horizontale et verticale, s'étendant sur une gamme de fréquences assez large. Il y aura aussi des structures concentriques quasi annulaires à basses fréquences. Les transformées de disques, de cercles et d'autres figures proches vont manifestement avoir une symétrie circulaire. De même, une ouverture elliptique horizontale va créer des bandes elliptiques concentriques orientées verticalement. La plupart du temps, les figures obtenues en champ lointain possèdent un centre de symétrie (voir les problèmes 10.14 et 11.29).

Nous voilà à présent en meilleure position pour apprécier ce procédé de filtrage spatial et, à cette fin, nous allons considérer une expérience similaire à celle qui fut publiée en 1906 par A. B. Porter. La figure 13.32a montre une fine grille métallique dont le motif périodique est perturbé par quelques particules de poussière. Avec la grille en Σ_0 , la figure 13.32b présente la transformée telle qu'elle apparaît en Σ_r . Maintenant commence le plus amusant. Puisque les informations de la transformée relatives à la poussière sont situées dans la sorte de nuage irrégulier autour du point central, on peut facilement l'éliminer en insérant un masque opaque en Σ_r . Si le masque a des trous qui correspondent à chacun des maxima principaux, ne transmettant ainsi que ces fréquences, l'image apparaît débarrassée des poussières (figure 13.33a). À l'autre extrême, si l'on ne laisse passer que le motif en nuage près du centre, une très petite partie de la structure périodique apparaît,

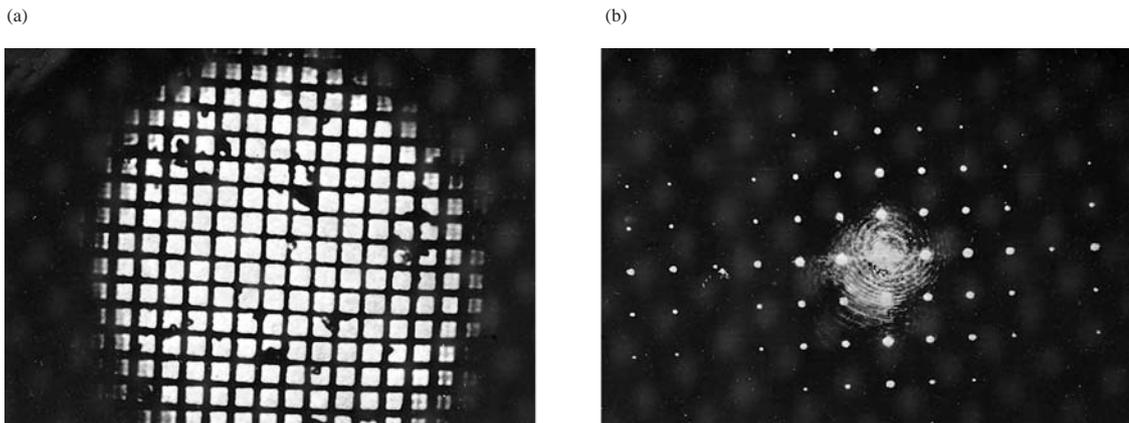


Figure 13.32 Une maille fine, légèrement poussiéreuse et sa transformée. (Photos D. Dutton, M. P. Givens, et R. E. Hopkins, *Spectra-Physics Laser Technical Bulletin Number 3*.)

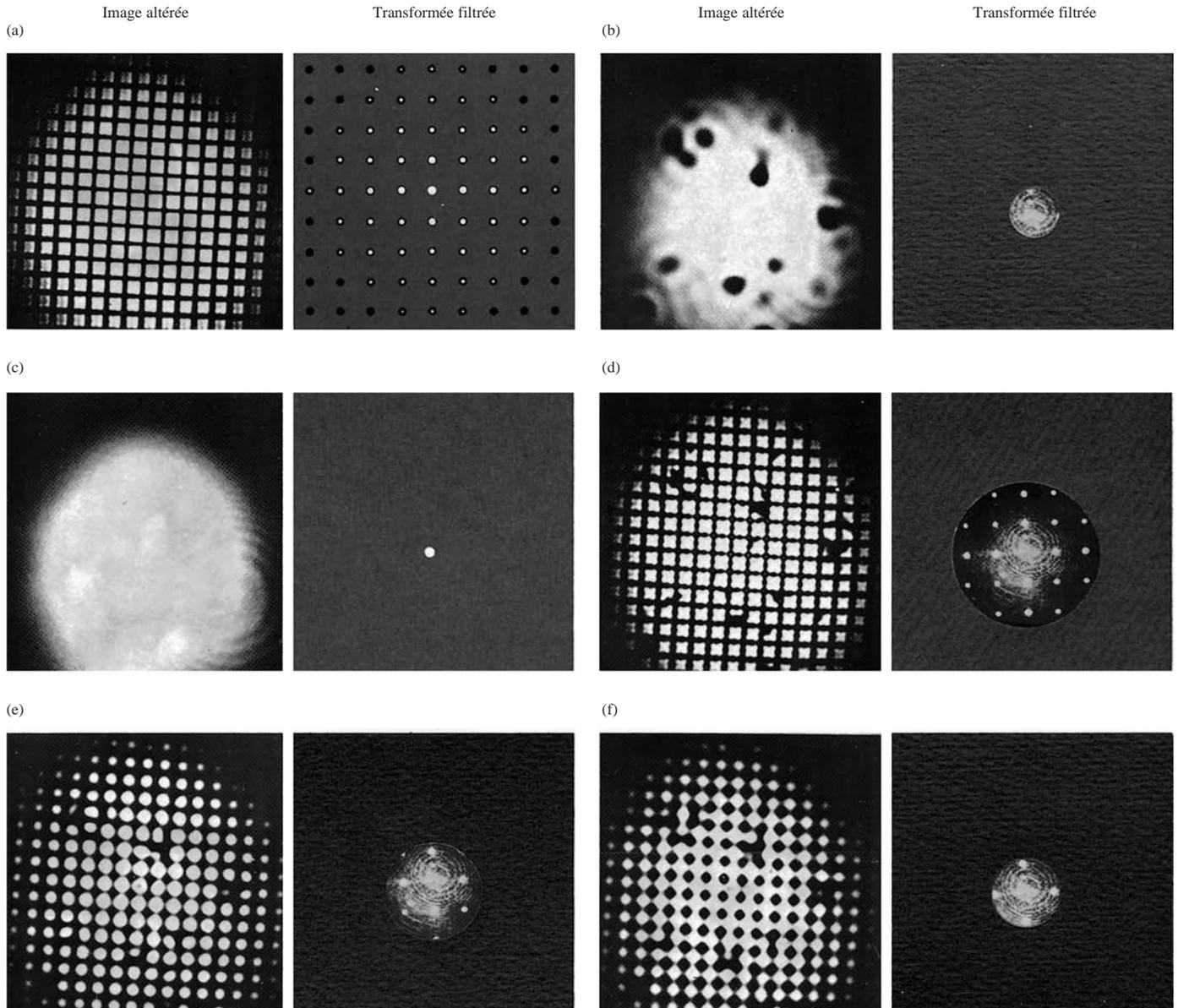
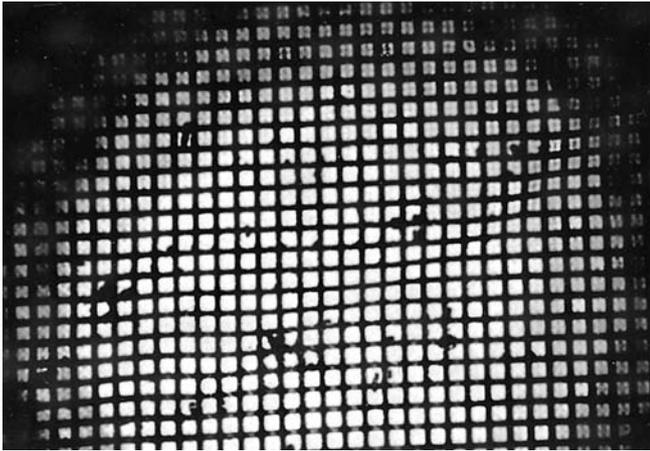


Figure 13.33 Images obtenues lorsque diverses portions de la figure de diffraction de la figure 13.32b sont obturées par les masques ou filtres spatiaux associés. (Photos D. Dutton, M. P. Givens, et R. E. Hopkins, *Spectra-Physics Laser Technical Bulletin Number 3.*)

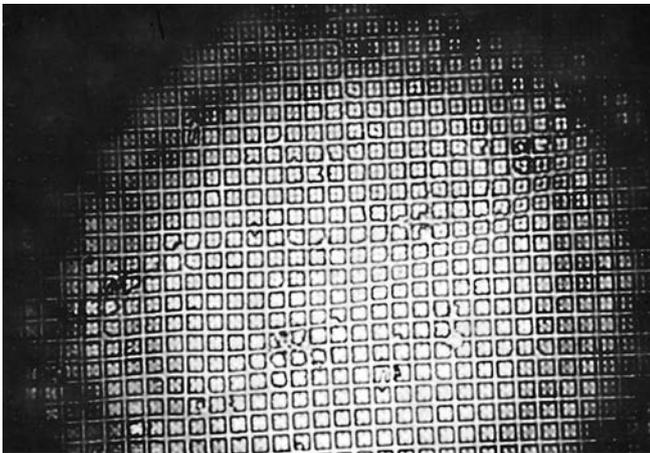
donnant une image constituée presque uniquement des particules de poussières (figure 13.33b). Ne transmettre que le point central, ou ordre zéro, produit un éclaircissement uniforme, comme si la grille n'était plus là. On peut observer que plus les hautes

fréquences sont éliminées, plus les détails de l'image se détériorent nettement ((d), (e), et (f) dans la figure 13.33). On peut comprendre facilement ce résultat en se rappelant comment une fonction, qui présente ce que l'on peut appeler des « bords

(a)



(b)



La partie (b) est une version filtrée de (a) où l'ordre zéro a été enlevé.
(Photos D. Dutton, M. P. Givens, et R. E. Hopkins, *Spectra-Physics Laser Technical Bulletin Number 3*.)

tranchants » (des flancs droits) est décomposable en harmoniques. L'onde carrée de la figure 7.29 sert à illustrer ce point. Il est évident que l'addition d'harmoniques d'ordres supérieurs sert principalement à équarrir la fonction dans les coins et à aplanir les pics et les creux de son profil. De cette manière, *les hautes fréquences spatiales contribuent aux détails des bords tranchants entre les régions claires et sombres de l'image*. La suppression des termes de hautes fréquences provoque un arrondissement de la fonction rectangle et donc une perte de résolution dans le cas bidimensionnel.

Qu'arriverait-il si l'on enlevait la composante continue (figure 13.33c), et si l'on laissait tout passer sauf le point central ? Un point de l'image originale qui est noir sur la photo dénote un éclaircissement presque nul. Les diverses composantes du champ optique s'annulent complètement les unes les autres en ce point : par conséquent, il n'y a pas de lumière. Avec la suppression du terme continu, le point en question devrait donc certainement avoir une amplitude de champ non nulle, qui, élevée au carré ($I \propto E_0^2/2$), va produire un éclaircissement non nul. Il s'ensuit que les régions qui étaient originellement noires sur la photo vont maintenant apparaître blanchâtres, alors que les régions qui étaient blanches vont devenir grisâtres, comme on peut le voir sur la photo ci-contre.

Examinons à présent quelques-unes des applications possibles de cette technique. La figure 13.34a montre un montage photographique de la Lune, consistant en une série de bandes de pellicule qui ont été assemblées afin de former une image unique. Les données vidéo ont été transmises vers la Terre par *Lunar Orbiter 1*. Manifestement, ce sont les discontinuités régulières entre bandes adjacentes de la photographie objet qui créent la distribution de fréquence verticale, à grande largeur de bande, qui est évidente sur la figure 13.34c. Lorsqu'on élimine ces composantes de fréquence, il n'apparaît plus que l'image résultant d'un tel assemblage. De la même manière, on peut supprimer des données parasites dans les photographies de traces de particules subatomiques dans des chambres à bulles*. Ces photographies sont difficiles à analyser à cause de la présence des traces du faisceau non diffusées (figure 13.35), que l'on peut facilement supprimer par filtrage spatial, puisqu'elles sont toutes parallèles entre elles.

Considérons le procédé familier de similitude (tramée) par lequel une imprimante peut créer l'illusion de tons de gris variés en utilisant que de l'encre noire et du papier blanc (pour cela, il faut regarder de près les photographies des quotidiens). Si la diapositive † d'une similitude est insérée en Σ_0 sur la figure 13.30, son spectre de fréquence apparaît sur Σ_r . Encore une fois, les composantes de fréquence relativement haute provenant de la trame peuvent facilement être éliminées. Cela

.....
*D. G. Falconer, « Optical Processing of Bubble Chamber Photographs », *Appl. Opt.* **5**, 1365 (1966), comprend certaines utilisations additionnelles de l'ordinateur optique cohérent.

.....
†Le film polaroid 55 P/N est satisfaisant pour un travail de résolution moyenne, alors que les plaques Kodak 649 sont adéquates lorsqu'on exige de la diapositive une plus haute résolution.

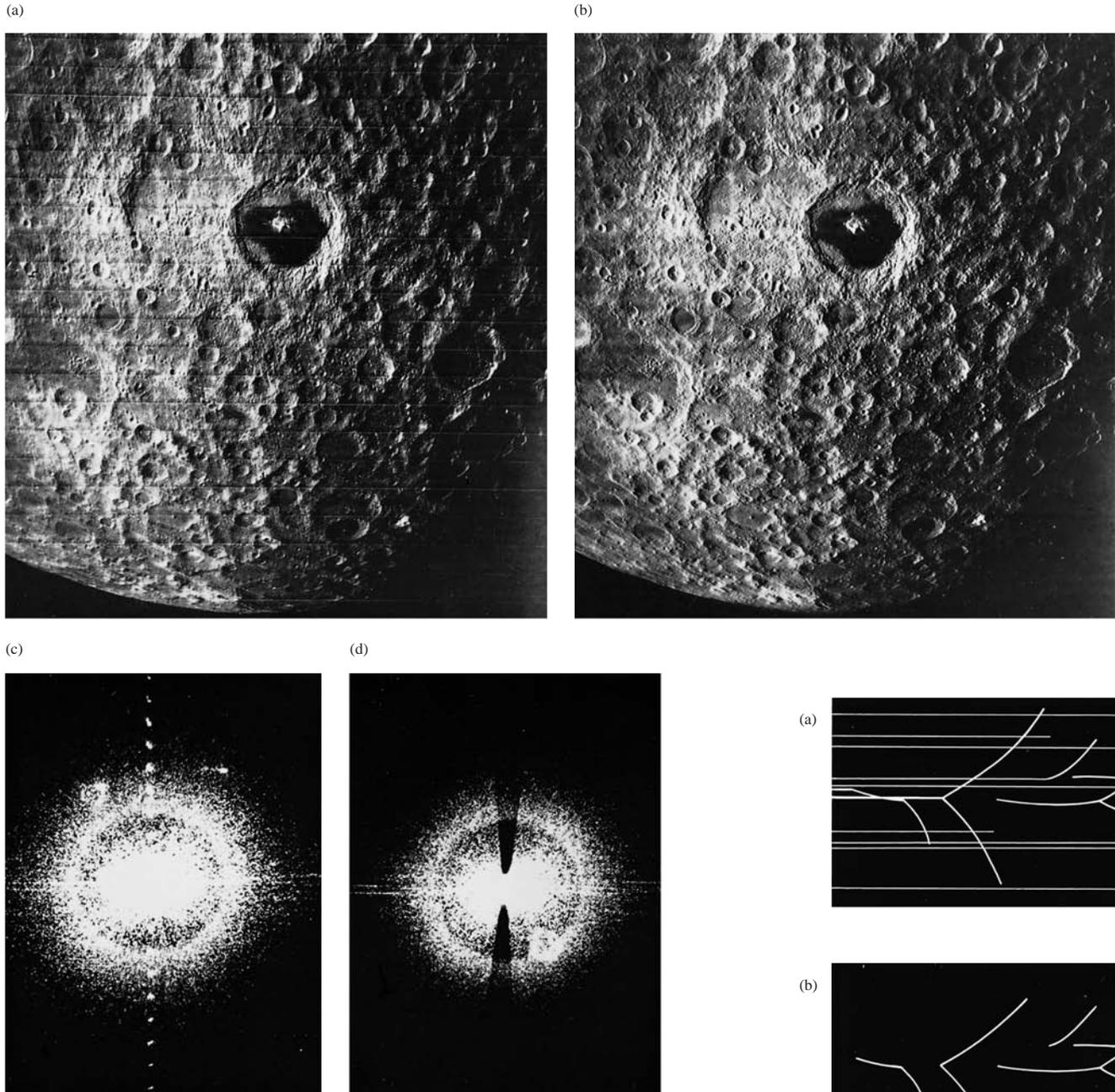


Figure 13.34 Filtrage spatial. (a) Une photo composite de la Lune prise par Lunar Orbiter. (b) Version filtrée de la photo sans lignes horizontales. (c) Une transformée non filtrée typique d'un paysage lunaire. (d) Figure de diffraction après filtrage de la ligne verticale de points. (Photos D. A. Ansley, W. A. Blikken, The Conductron Corporation, et NASA.)

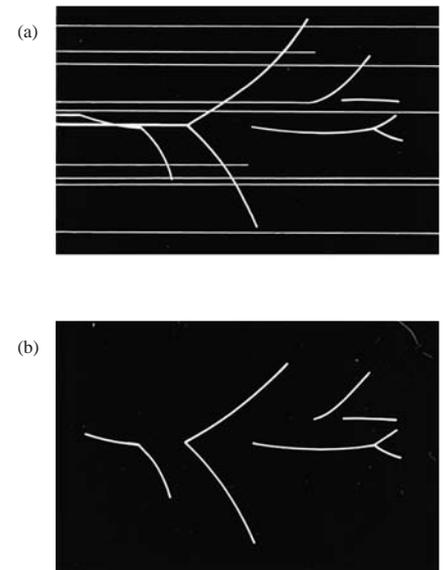


Figure 13.35 Traces de chambre à bulle filtrée et non filtrée.

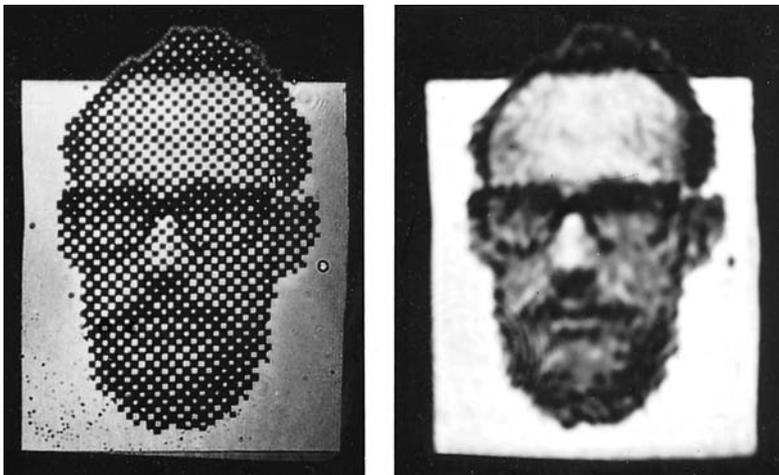


Figure 13.36 Un autoportrait de K. E. Bethke consistant uniquement en zones noires et blanches comme dans une similigravure. Lorsque les hautes fréquences sont retirées par filtrage, des teintes de gris apparaissent et les limites très marquées disparaissent. [D'après R. A. Phillips, *Am. J. Phys.* **37**, 536 (1969).]

produit une image en nuances de gris (figure 13.36) qui ne montre pas la nature discontinue de l'original. On peut construire un filtre précis pour n'obtenir que les fréquences de la trame carrée en utilisant une diapositive négative de la transformée d'une grille en damier élémentaire. On peut aussi utiliser un filtre passe-bas à ouverture circulaire pour couper quelques-uns des détails fins de la scène originale (pour autant que la fréquence de la grille soit suffisamment haute).

On peut employer la même procédure pour effacer l'aspect granuleux de photographies très agrandies, ce qui peut être essentiel pour les photos de reconnaissance aérienne. D'un autre côté, on peut affiner les détails d'une photographie légèrement floue en accentuant ses hautes fréquences. On peut y arriver avec un filtre qui absorberait préférentiellement la région des basses fréquences du spectre. À partir des années 1950, de nombreux efforts ont été faits pour l'amélioration de la photographie et les succès qui ont suivi ont été remarquables. L'un des plus éminents parmi ces contributeurs fut A. Maréchal de l'Institut d'Optique (université de Paris). Celui-ci associa des filtres d'amplitude et des filtres de phase pour reconstituer les détails de photographies très floues. Ces derniers sont des revêtements transparents déposés sur des lames de verre optique afin de retarder la phase de diverses portions du spectre (paragraphe 13.2.4).

Comme ce travail sur le traitement des données optiques va continuer dans les années à venir, nous verrons sans doute,

dans des applications de plus en plus nombreuses, le remplacement des étapes photographiques par des dispositifs électro-optiques en temps réel (par exemple, des ensembles de modulateurs acousto-optiques formant une entrée multicanal sont déjà utilisés*). L'ordinateur optique cohérent va atteindre une certaine maturité, devenant un outil encore plus puissant lorsque les fonctions d'entrée, de filtrage et de sortie seront traitées de manière électro-optique. Un flot continu de données pourra, en temps réel, entrer et sortir d'un tel dispositif.

13.2.4 Contraste de phase

Au dernier paragraphe, on a brièvement mentionné que l'image reconstruite pouvait être modifiée par l'introduction d'un filtre de phase. L'exemple sans doute le plus connu de cette technique date de 1934, avec

le travail du physicien néerlandais Fritz Zernike, qui inventa la méthode du **contraste de phase**, et qui l'appliqua au *microscope à contraste de phase*. Un objet peut être « vu » parce qu'il se distingue de son environnement, par sa couleur, sa teinte ou par une absence de couleur,



Fritz Zernike (1888-1966) remporta le prix Nobel de physique en 1953.

qui contraste avec le milieu. On appelle ce genre de structure un *objet d'amplitude*, parce qu'elle est observable grâce aux variations qu'elle provoque dans l'amplitude de l'onde lumineuse. L'onde réfléchie ou transmise par un tel objet devient *modulée en amplitude* par ce processus. En revanche, il est souvent désirable de « voir » des *objets de phase*, c'est-à-dire, des objets transparents qui, pour cette raison, ne produisent

.....
*On a à peine abordé le sujet du traitement optique de l'information ; une plus ample discussion de ce sujet est donnée, par exemple, par Goodman dans *Introduction to Fourier Optics*, Chapter 7. Ce livre donne aussi de bonnes références en matière de lectures. Voir aussi P. F. Mueller, « Linear Multiple Image Storage », *Appl. Opt.* **8**, 267 (1969). Comme pour toute l'optique moderne, ces sujets évoluent très vite et l'obsolescence est rapide.

quasiment aucun contraste avec leur environnement et n'altèrent que la phase de l'onde détectée. L'épaisseur optique de tels objets varie généralement d'un point à un autre par changement, soit de l'indice de réfraction, soit de l'épaisseur réelle, soit des deux à la fois. Manifestement, puisque l'œil ne peut pas détecter les variations de phase, de tels objets sont invisibles. C'est ce problème qui a poussé les biologistes à développer des techniques pour permettre de voir des spécimens microscopiques transparents en convertissant ainsi des objets de phase en objets d'amplitude. Cependant, cette approche n'est pas toujours satisfaisante, par exemple lorsque la teinture tue un spécimen que l'on cherche à étudier vivant, ce qui est trop souvent le cas.

Rappelons que se produit la diffraction lorsqu'une portion de surface de phase constante est obstruée d'une manière ou d'une autre, c'est-à-dire lorsqu'une région du front d'onde est

modifiée en amplitude ou en phase (i.e. sa forme). Supposons alors qu'une onde plane passe au travers d'une particule transparente qui retarde la phase d'une région du front d'onde. L'onde émergente n'est plus parfaitement plane mais contient une petite échancrure correspondant à la zone retardée par le spécimen ; l'onde est *modulée en phase*.

En optant pour une vision simpliste des choses, on peut dire qu'une onde modulée en phase $E_{PM}(\vec{r}, t)$ (figure 13.37) résulte de la sommation de l'onde plane incidente originale $E_i(x, t)$ et d'une perturbation localisée $E_d(\vec{r}, t)$ (le symbole \vec{r} signifie que E_{PM} et E_d dépendent de y et de z , alors que E_i , uniforme, n'en dépend pas). Si le déphasage est très petit, la perturbation locale est une onde de très petite amplitude, E_{0d} , retardée de seulement $\lambda_0/4$ environ, comme sur la figure 13.38. À cet endroit, la différence entre $E_{PM}(\vec{r}, t)$ et $E_i(x, t)$ est $E_d(\vec{r}, t)$. La perturbation $E_i(x, t)$ est appelée onde directe ou *onde d'ordre*

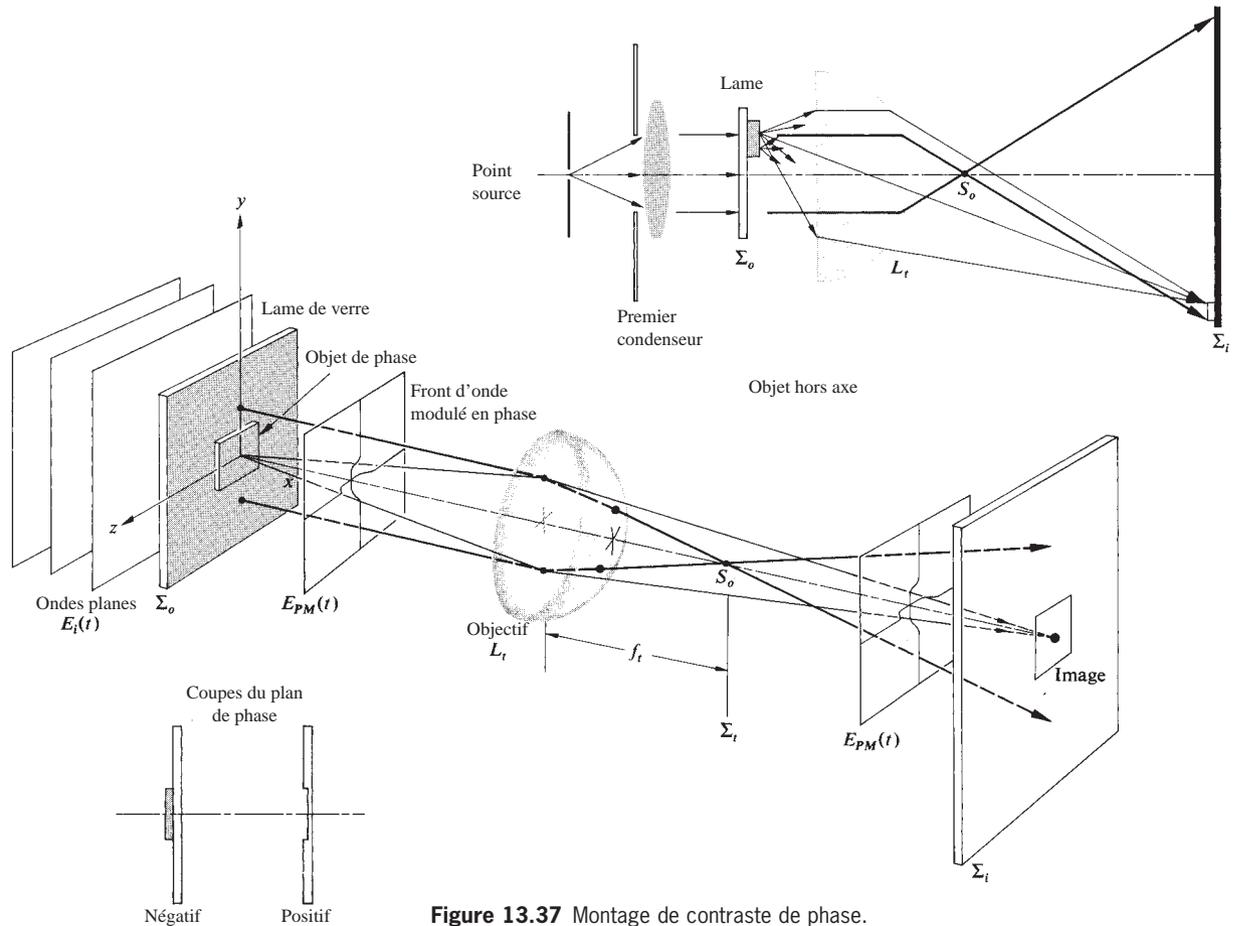


Figure 13.37 Montage de contraste de phase.

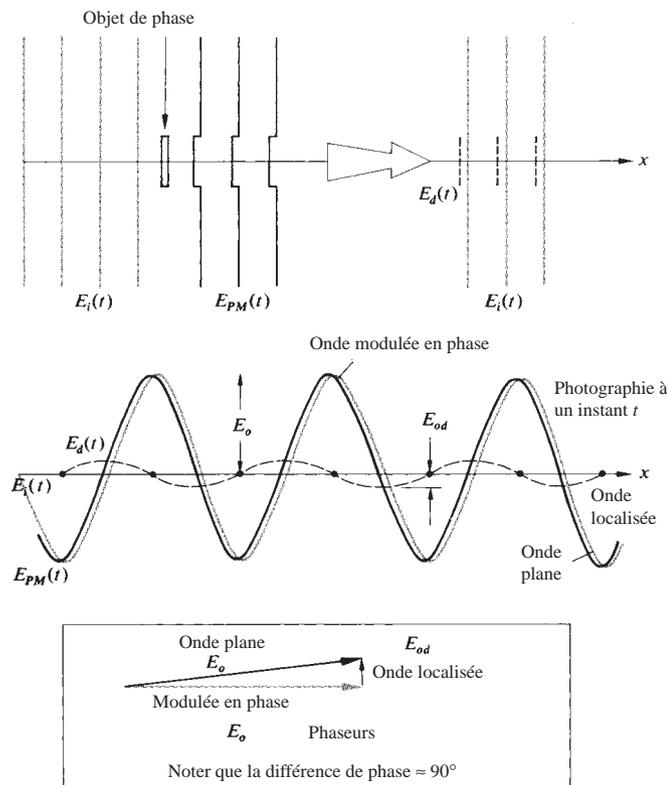


Figure 13.38 Fronts d'onde dans le processus de contraste de phase.

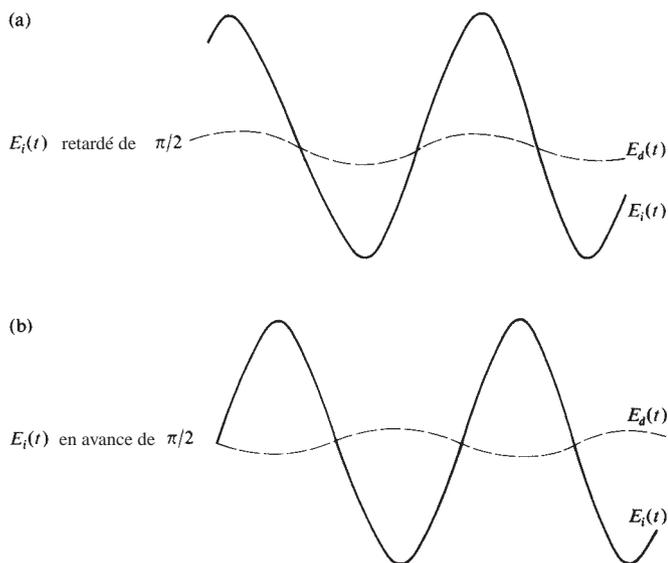


Figure 13.39 Effet du déphasage.

zéro, alors que $E_d(\vec{r}, t)$ est l'onde diffractée. La première produit un champ uniforme en Σ_i non affecté par l'objet, alors que la seconde porte toutes les informations sur la structure optique de la particule. Après avoir largement divergé depuis l'objet, ces termes de fréquences spatiales d'ordre supérieur (voir paragraphe 13.2.1) vont converger dans le plan image. Les ondes directes et diffractées se recombinent avec un déphasage de $\pi/2$, formant à nouveau l'onde qui est déphasée. Puisque l'amplitude de l'onde reconstituée $E_{PM}(\vec{r}, t)$ est partout la même sur Σ_i , bien que la phase varie d'un point à un autre, l'éclairement est uniforme, et l'on ne peut donc pas observer d'image. De même, le continu (ordre zéro) d'un réseau de phase sera déphasé de $\pi/2$ par rapport aux ordres supérieurs.

Si l'on pouvait, d'une manière ou d'une autre décaler la phase relative entre les faisceaux diffractés et le faisceau direct d'un angle $\pi/2$ additionnel avant leur recombinaison, ils seraient toujours cohérents et pourraient alors interférer de manière constructive ou destructive (figure 13.39). Dans chacun des cas, le front d'onde reconstruit sur cette région de l'image serait alors modulé en amplitude, et l'image serait visible.

On peut le montrer d'une manière analytique très simple où :

$$E_i(x, t)|_{x=0} = E_0 \sin \omega t$$

est l'onde lumineuse monochromatique incidente en Σ_o sans le spécimen en place. La particule va induire une variation de phase $\phi(y, z)$ qui dépend de la position, de telle manière que l'onde quittant cette particule est :

$$E_{PM}(\vec{r}, t)|_{x=0} = E_0 \sin [\omega t + \phi(y, z)] \quad (13.20)$$

Il s'agit d'une onde d'amplitude constante, et qui donne une image de même type dans le plan conjugué. En fait, il y a quelques pertes, mais si la lentille est grande et sans aberration, et si l'on néglige l'orientation et la taille de l'image, l'équation (13.20) suffit à représenter l'onde PM que ce soit en Σ_o ou en Σ_i . En reformulant la perturbation de telle sorte que :

$$E_{PM}(y, z, t) = E_0 \sin \omega t \cos \phi + E_0 \cos \omega t \sin \phi$$

et en se limitant à des valeurs de ϕ très petites, on obtient :

$$E_{PM}(y, z, t) = E_0 \sin \omega t + E_0 \phi(y, z) \cos \omega t$$

Le premier terme est indépendant de l'objet, alors que le second ne l'est manifestement pas. Ainsi, comme précédemment, si

l'on change leur phase relative par $\pi/2$, c'est-à-dire, si l'on change le cosinus en sinus ou vice versa, on obtient :

$$E_{AM}(y, z, t) = E_0[1 + \phi(y, z)] \sin \omega t \quad (13.21)$$

qui est une onde à amplitude modulée. Observons qu'on peut exprimer $\phi(y, z)$ en termes de développement de Fourier, introduisant par-là les fréquences spatiales associées à l'objet. Cette discussion est précisément analogue à celle proposée en 1936 par E. H. Armstrong pour convertir les ondes radios AM en FM ($\phi(t)$ peut être envisagée comme une modulation de fréquence dans laquelle le terme d'ordre zéro est la porteuse). Un filtre électrique sélectif était utilisé pour séparer la porteuse du spectre d'informations restantes afin que le déphasage de $\pi/2$ puisse être accompli. La méthode de Zernike consiste à faire à peu près la même chose. Zernike inséra, dans le plan de la transformée Σ_t de l'objectif, un filtre spatial qui introduisait le déphasage de $\pi/2$. Observons que la lumière directe forme une

petite image de la source sur l'axe optique à l'emplacement de Σ_t . Le filtre peut alors consister en une petite échancrure circulaire, de profondeur d , gravée dans un verre plan transparent d'indice n_g . Idéalement, seul le faisceau direct passe à travers cette marque, auquel cas il prend une *avance de phase* par rapport à l'onde diffractée de $(n_g - 1)d$, qui devrait être égale à $\lambda_0/4$. Un filtre de la sorte est appelé une *lame de phase*. Puisque ces effets correspondent à la figure 13.39b, c'est-à-dire à une interférence destructrice, les objets de phase plus épais ou qui ont un indice plus élevé apparaissent sombres sur fond clair. Si la lame de phase possède inversement un petit disque sur-élevé en son centre, c'est l'inverse qui se produit. On parle alors dans le premier cas de *contraste de phase positif* et dans le second de *contraste de phase négatif*.

En pratique, on cherche à obtenir une image plus claire en utilisant non pas une source ponctuelle, mais une source large associée à un condenseur. Les ondes planes émergentes illuminent un diaphragme annulaire (figure 13.40), qui, en sa qualité

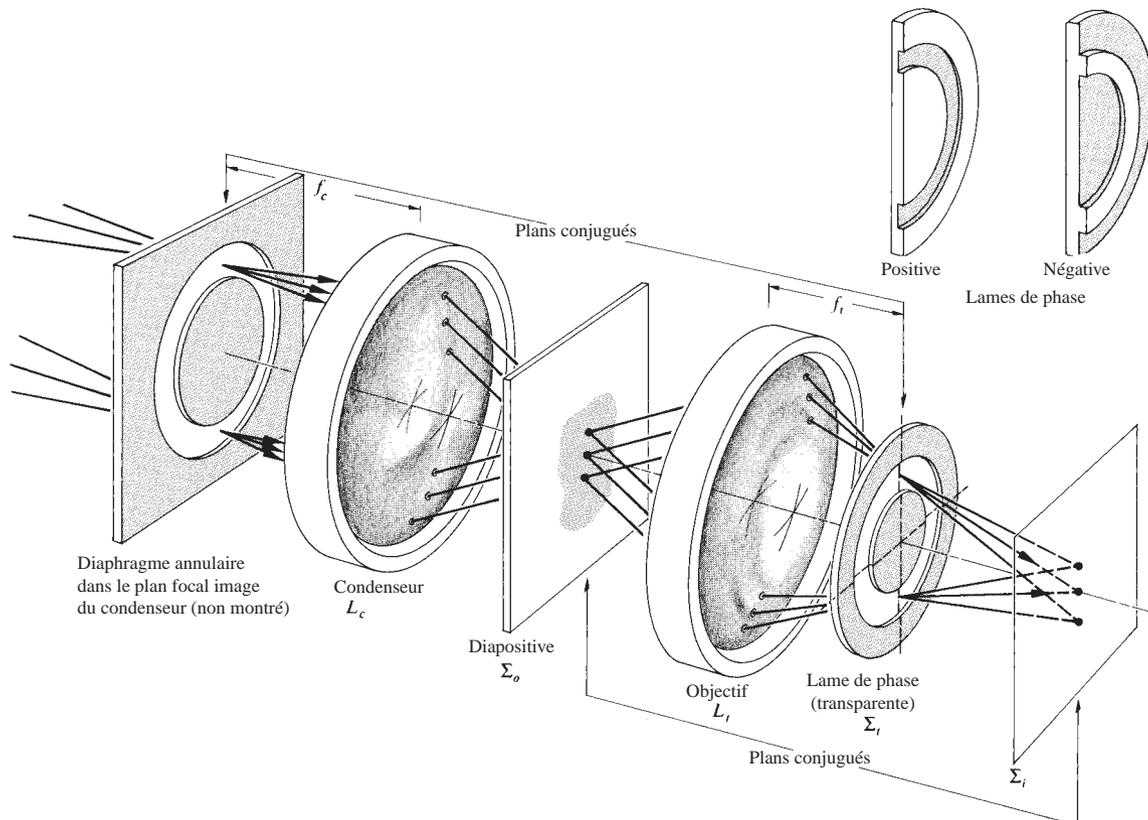


Figure 13.40 Contraste de phase (seul l'ordre zéro est représenté).

de plan source, est conjugué au plan de Fourier de l'objectif. Les ondes d'ordre zéro, que l'on voit sur la figure, passent à travers l'objet selon les principes de l'optique géométrique. Elles traversent ensuite la fine région annulaire de la lame de phase située en Σ_r . Cette région est suffisamment petite pour que la majorité des rayons diffractés passe à côté. En rendant la région annulaire également absorbante (par exemple avec un film de métal fin), on réduit le terme d'ordre zéro, très grand et uniforme (figure 13.41), par rapport aux ordres supérieurs, et l'on améliore le contraste. En d'autres termes, E_0 est réduit à une valeur comparable à celle de l'onde diffractée E_{0d} . En général, un microscope sera accompagné d'un assortiment de ces lames de phase présentant différentes absorptions.

Dans le langage de l'optique moderne (la mariée encore rougissante de la théorie des communications), le contraste de phase est simplement le processus par lequel on introduit un déphasage de $\pi/2$ dans le spectre d'ordre zéro de la transformée de Fourier d'un objet de phase (et peut-être également, par lequel on atténue son amplitude), grâce à l'utilisation d'un filtre spatial approprié.

Le microscope à contraste de phase, qui permit à Zernike de remporter le prix Nobel en 1953, a trouvé plusieurs applications (voir photo), parmi lesquelles l'une des plus fascinantes est sans doute l'étude des fonctions vitales d'organismes normalement invisibles.

13.2.5 Fond noir et méthodes de Schlieren

Supposons que l'on retourne au montage de la figure 13.37 et que l'on examine un objet de phase. Cette fois, plutôt que de retarder et d'atténuer l'ordre zéro central, on le supprime complètement avec un disque opaque en S_o . Sans l'objet, le



(a)



(b)

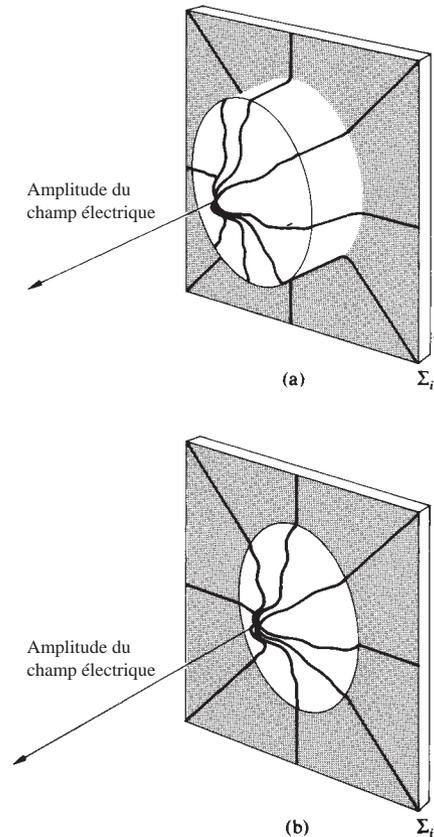
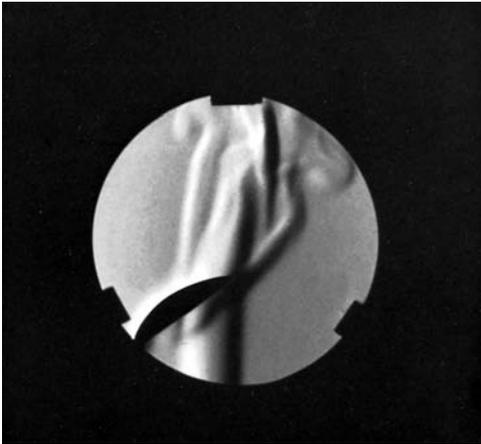


Figure 13.41 Amplitude du champ sur une région circulaire du plan image. Dans un cas, il n'y a pas d'absorption dans la lame de phase, et l'éclairement est une « petite ondulation sur un grand plateau ». Lorsque l'on atténue l'ordre zéro, le contraste augmente.

(a) Une photomicrographie conventionnelle de diatomées, fibres et bactéries. (b) Une photomicrographie de phase de la même scène. (Photos T. J. Lowery et R. Hawley.)

plan image sera complètement noir, d'où le nom de *fond noir*. Si l'on met l'objet en place, seule l'onde diffractée localement va apparaître en Σ_i pour former l'image (cela peut également s'obtenir en microscopie par illumination rasante de l'objet afin qu'aucune lumière directe n'entre dans la lentille de objectif). Observons qu'en éliminant la composante continue, on réduit l'amplitude (figure 13.41) et les portions qui, avant filtrage étaient proches de zéro, vont devenir négatives. Dans la mesure où l'éclairement est proportionnel au carré de l'amplitude, cette manipulation résulte en une inversion de contraste, proche de ce qui aurait été vu par contraste de phase (paragraphe 13.2.4). En général, cette technique n'est pas aussi satisfaisante que le contraste de phase qui provoque dans l'image une distribution d'éclairement qui est directement proportionnelle aux variations de phase introduites par l'objet.

En 1864, A. Toepler introduisit une procédure pour examiner les imperfections des lentilles connue sous le nom de méthode **schlieren** ou de **strioscopie***. On la présente ici du fait de son utilisation très répandue dans une large gamme d'études de mécanique des fluides et aussi parce qu'il s'agit d'un autre bel exemple de l'application du filtrage spatial. Les systèmes schlieren sont particulièrement utiles dans l'analyse des ondes balistiques, aérodynamiques, et ultrasoniques (voir photo), et partout où il est souhaitable d'examiner des



Une photo Schlieren d'une cuillère dans une flamme de bougie.
(Photo E. H.)

*Le mot allemand *Schlieren* signifie *rayures* ou *stries*. On l'écrit généralement avec une majuscule parce qu'en allemand, tous les noms communs commencent par une majuscule ; mais il n'y a pas eu de M. Schlieren.

variations de pression qui puisse se révéler par une cartographie en indice de réfraction.

Supposons que l'on réalise l'un des montages possibles pour observer la diffraction de Fraunhofer (par exemple, figures 10.3 ou P.10.5). Mais, au lieu d'utiliser comme ouverture un objet d'amplitude, on insère un objet de phase, par exemple, une cellule remplie de gaz (figure 13.42). Une figure de Fraunhofer va se former en Σ_r . Si ce plan est suivi par l'objectif d'un appareil photo, on obtient une image de la cellule dans le plan du film. Mais si l'on peut photographier n'importe quel objet d'amplitude qui se trouve dans la zone de test, les objets de phase, eux, restent toujours invisibles. Imaginons à présent que l'on introduise une lame de couteau en Σ_r , en la faisant monter progressivement du bas jusqu'à ce qu'elle obture (parfois seulement partiellement) l'ordre zéro et par conséquent la partie basse de tous les ordres supérieurs. Comme dans la méthode du fond noir, les objets de phase sont maintenant perceptibles. Des inhomogénéités dans les fenêtres de la cellule test et des défauts dans la lentille sont également visibles. Pour cette raison, et aussi parce qu'on recherche souvent un champ de vision assez large, les systèmes à miroirs (figure 13.43) ne sont pas très utilisés.

On met en place un éclairage quasi monochromatique en principe lorsqu'on doit analyser les données résultantes électroniquement, par exemple, avec un photodétecteur. D'un autre côté, les sources à spectre large permettent d'exploiter la considérable sensibilité des émulsions photographiques à la couleur, et un certain nombre de systèmes schlieren couleur ont été conçus.

13.3 Holographie

Cela fait maintenant longtemps que nous côtoyons la technologie de la photographie. Nous sommes tous habitués à voir le monde en trois dimensions, aplati sur la page d'un album. Quoiqu'il soit vraiment présent sur l'écran, le personnage d'une publicité, avec son large sourire, ne semble pas plus palpable que la tour Eiffel sur une carte postale. Tous deux partagent la sévère limitation d'être simplement des cartographies d'éclairements. En d'autres termes, lorsqu'on reproduit l'image d'une scène par des moyens ordinaires quels qu'ils soient, ce que l'on voit finalement n'est pas une reproduction précise de la lumière qui éclairait alors l'objet. Il s'agit plutôt d'un enregistrement, point par point, du carré de l'amplitude. La lumière réfléchie par une photographie transmet une information sur l'éclairement, mais ne donne rien sur la phase de

l'onde qui émanait auparavant de l'objet. En revanche, si l'amplitude et la phase de l'onde d'origine pouvaient être toutes deux reconstruites, le champ qui en résulterait (en considérant que les fréquences soient les mêmes) ne serait pas différenciable de l'original. Cela signifie que l'on pourrait voir (et photographier) l'image parfaitement reformée en trois dimensions, exactement comme si l'objet était devant nos yeux, en train de produire réellement l'onde.

13.3.1 Les méthodes

Dennis Gabor pensait depuis longtemps à ces problèmes, avant qu'il ne commence, en 1947, à mener ses expériences d'holographie, maintenant célèbres, au *Research Laboratory* de la *British Thomson-Houston Company*. Son montage original,

représenté à la figure 13.44, était un dispositif d'imagerie en deux étapes sans objectif. Dans un premier temps, il enregistrait photographiquement la figure d'interférence entre la lumière quasi monochromatique diffusée par l'objet et une onde de référence cohérente. Il appela **hologramme** la figure résultante sur la plaque, d'après le mot grec *holos* signifiant *le tout*. La deuxième étape du procédé était la *reconstruction* du champ optique ou de l'image qu'il obtenait en faisant diffracter un faisceau cohérent par la plaque de l'hologramme, après développement. D'une façon rappelant la technique de contraste de phase de Zernike (paragraphe 13.2.4), l'hologramme était formé



Dennis Gabor (1900-1979), physicien hongrois naturalisé anglais ; il obtint le prix Nobel en 1971.

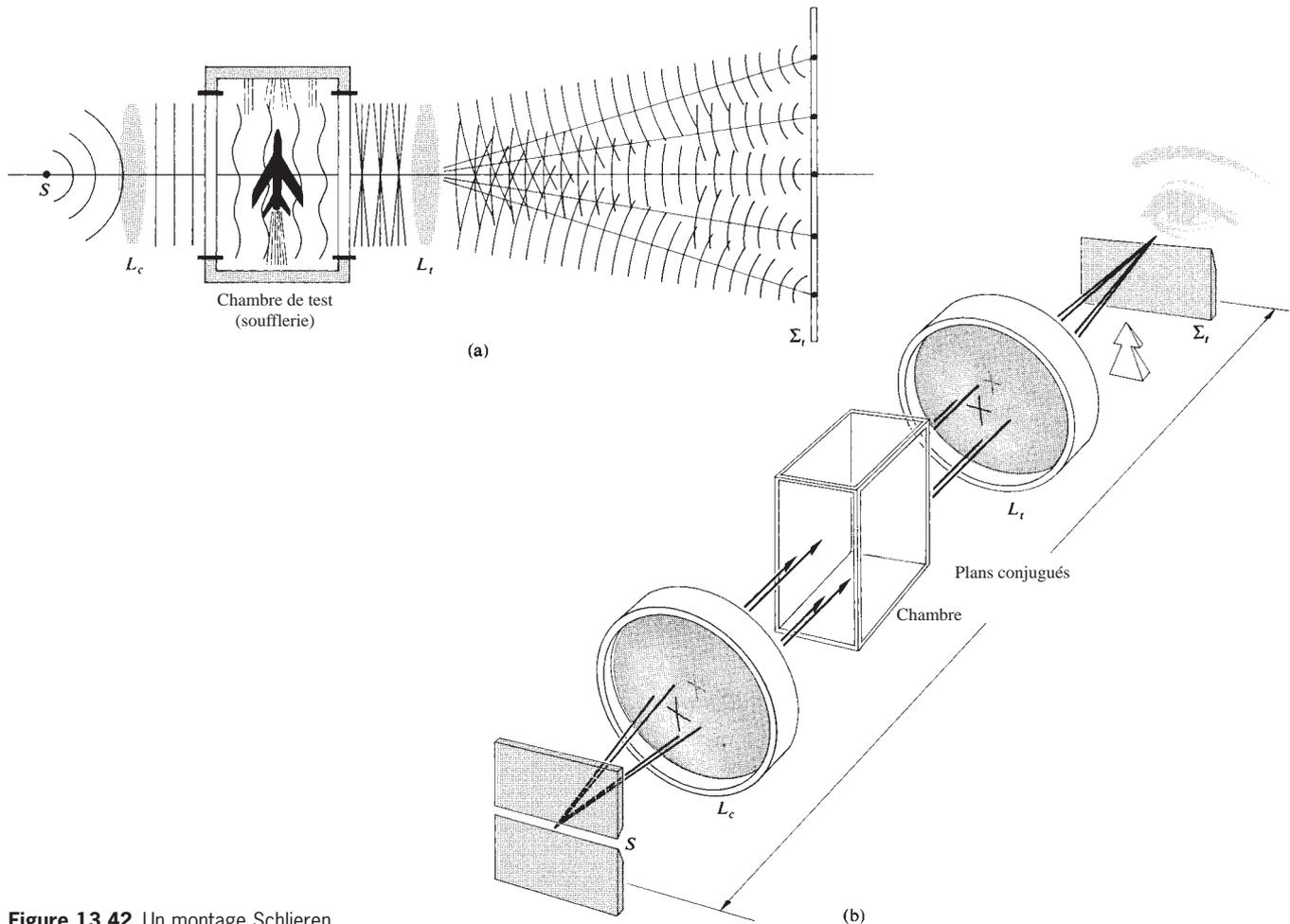


Figure 13.42 Un montage Schlieren.

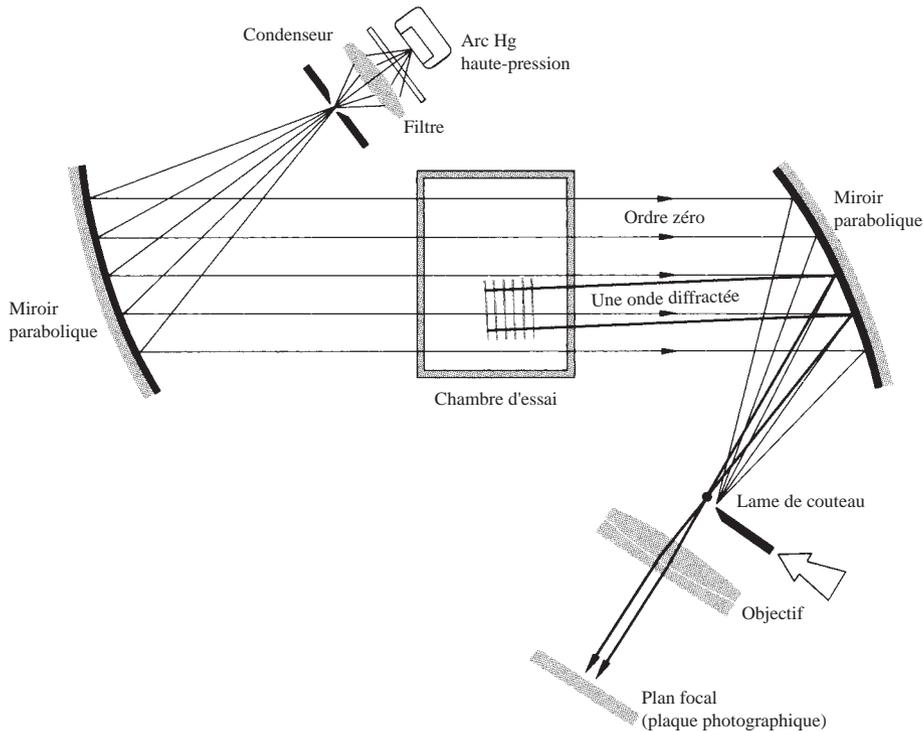


Figure 13.43 Un montage Schlieren à miroirs.

lorsque l'onde de référence, ou onde de fond, non diffusée interférerait avec l'onde diffractée par le petit objet semi-transparent, S , (qui était souvent, dans ces années-là, un morceau de microfilm). Le point clé est que la figure d'interférence ou l'hologramme contient, d'après la configuration des franges, une information qui correspond à la fois à l'amplitude et à la phase de l'onde diffusée par l'objet.

Il faut bien le reconnaître, il n'est pas du tout évident, au point où nous en sommes, que le fait d'éclairer la plaque photographique de l'hologramme avec une onde plane conduise à la reconstruction de l'objet d'origine. Il nous suffira de dire pour le moment que, si l'objet est très petit, l'onde diffusée est pratiquement sphérique et la figure d'interférence est une série de cercles concentriques (centrés autour d'un axe traversant l'objet et normal au plan de l'onde). À part le fait que les franges circulaires peuvent varier graduellement en éclaircissement de l'une à l'autre, la distribution d'éclaircissement résultante correspond à celle d'un réseau zoné de Fresnel conventionnel (paragraphe 10.3.5). Rappelons qu'un réseau zoné fonctionne quelque peu comme une lentille dans la mesure où il diffracte de la lumière incidente collimatée en un faisceau convergent, vers un point focal réel P_r . En plus de cela, il produit une onde

divergente qui semble provenir du point P_v et constitue une image virtuelle. On peut donc imaginer, de manière assez simpliste, que chaque point d'un objet étendu produit son propre réseau zoné, qui est déplacé par rapport aux autres. L'ensemble de tous ces réseaux zonés qui se superposent partiellement forme alors l'hologramme*.

Au cours de la phase de reconstruction, chaque réseau zoné forme à la fois une image réelle et une image virtuelle d'un seul point objet. De cette manière, point par point, l'hologramme reconstitue le champ de lumière originel. Lorsque le faisceau de reconstruction possède la même longueur d'onde que le faisceau d'enregistrement initial (ce qui est rarement le cas), l'image virtuelle n'est pas distordue et apparaît à l'endroit occupé auparavant par l'objet. Ainsi, c'est le champ image virtuel qui correspond au champ de objet d'origine, c'est pourquoi on dit souvent que l'image virtuelle est l'*image vraie*, et que l'image réelle est l'*image conjuguée*. Dans tous les cas, on peut considérer l'hologramme comme une superposition de

*Voir M. P. Givens, « Introduction to Holography », *Am. J. Phys.* **35**, 1056 (1967).

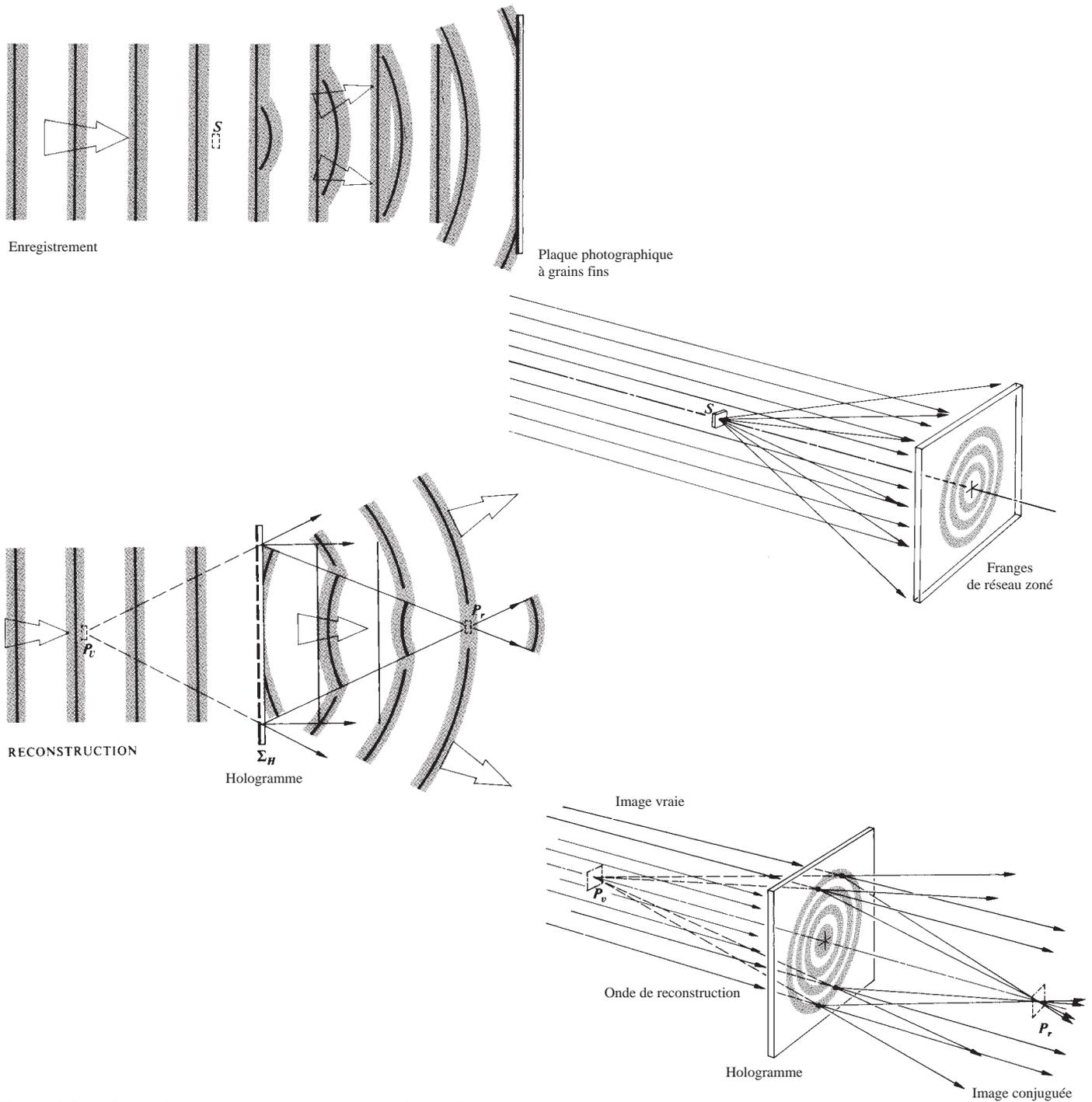


Figure 13.44 Enregistrement holographique (en ligne) et restitution d'une image.

figures d'interférence, qui, au moins pour cette configuration assez simple, ressemblent à des réseaux zonés. Comme on va le voir, le réseau sinusoïdal est un système de franges aussi fondamentales qui conduit à des hologrammes complexes.

Les recherches de Gabor, qui lui valurent le prix Nobel de physique de 1971, étaient motivées par un besoin d'amélioration dans le domaine de la microscopie électronique. Bien que ses travaux aient produit un certain intérêt au début, ils tombèrent progressivement dans un quasi-oubli pendant une quinzaine d'années. Au début des années soixante, il y eut une résurgence d'intérêt pour le procédé de Gabor de **reconstruction du front d'onde**, particulièrement dans le radar, puis, grâce à la disponibilité de la nouvelle lumière laser cohérente et à une série d'avancées technologiques, l'holographie devint un sujet de recherche très prometteur. Cette renaissance commença au *Radar Laboratory* de l'université du Michigan, grâce aux travaux de Emmett N. Leith et Juris

Upatnieks. Entre autres choses, ils perfectionnèrent les montages de réalisation d'hologrammes illustrés à la figure 13.45. Contrairement à la configuration *en ligne* de Gabor, où l'image conjuguée est située malencontreusement devant l'image vraie, les deux images étaient maintenant séparées de manière satisfaisante, comme le montre le diagramme. Une fois de plus, l'hologramme est une figure d'interférence émanant d'une onde de référence cohérente et d'une onde diffusée par l'objet (ce type de montage est souvent qualifié d'**hologramme de Fresnel en bande latérale**). La figure 13.46 représente un montage pour produire des hologrammes de Fresnel en bande latérale pour des objets transparents.

On peut expliquer les phénomènes de deux manières : l'une essentiellement picturale, à partir de l'optique de Fourier, et l'autre de façon mathématique directe. On va examiner ces deux perspectives car elles se complètent. Il s'agit tout d'abord d'un problème d'interférence (ou, si l'on préfère, de

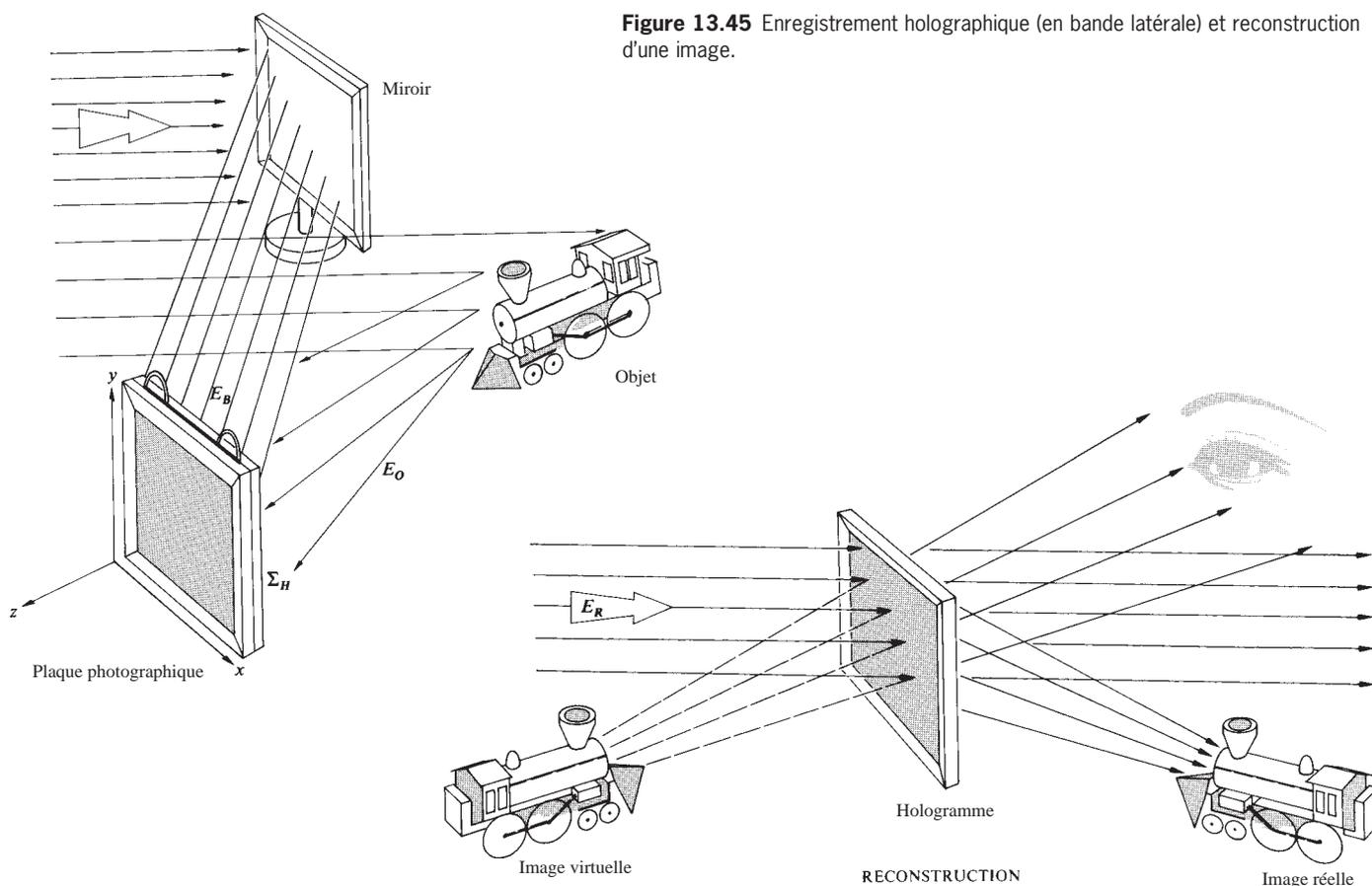


Figure 13.45 Enregistrement holographique (en bande latérale) et reconstruction d'une image.

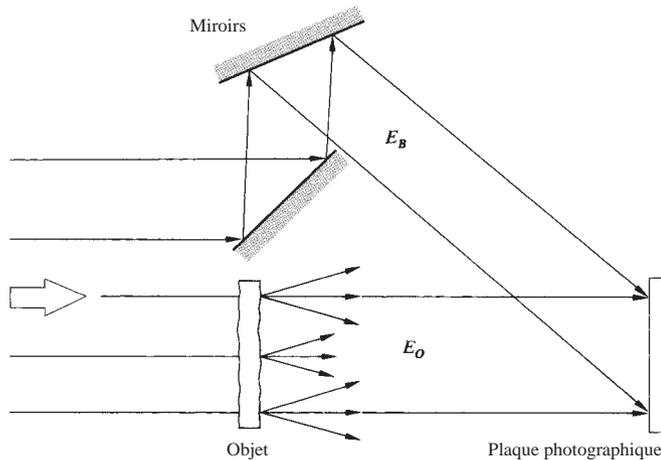


Figure 13.46 Montage holographique de Fresnel en bande latérale pour un objet transparent.

diffraction). On peut donc revenir encore une fois aux fronts d'onde complexes de l'objet, composés d'ondes planes de Fourier (figures 7.43 et 10.7*d*) qui se propagent dans les directions associées aux différentes fréquences spatiales de l'objet, en réflexion ou en transmission. Chacune des ondes planes de Fourier interfère avec l'onde de référence sur la plaque photographique, qui préserve l'information associée à cette fréquence spatiale particulière, sous la forme d'une figure d'interférence caractéristique.

Pour voir comment cela se passe, examinons la version simplifiée, à deux ondes, représentée à la figure 13.47. À l'instant concerné, il se trouve que l'onde de référence a son maximum le long de la face d'entrée du film, et l'ondelette objet diffusée, arrivant avec un angle θ , a des maxima aux points A , B et C , qui sont donc des points où se produisent les pics d'interférence à ce moment-là. Mais, à mesure que les deux ondes progresseront vers la droite, elles resteront en phase en ces points, des creux se superposant avec d'autres creux, et les maxima resteront fixés en A , B et C . De la même façon, entre ces points, le creux d'une onde se superpose à une crête de l'autre, et il résulte un minimum. La phase relative (ϕ) de ces deux ondes, qui varie point par point le long du film, peut être écrite comme une fonction de x . Comme ϕ est modifiée de 2π lorsque x a pour longueur \overline{AB} , $\phi/2\pi = x/\overline{AB}$. Notons que $\sin \theta = \lambda/\overline{AB}$, et en éliminant la longueur spécifique \overline{AB} , l'expression générale de la phase devient :

$$\phi(x) = (2\pi x \sin \theta)/\lambda \quad (13.22)$$

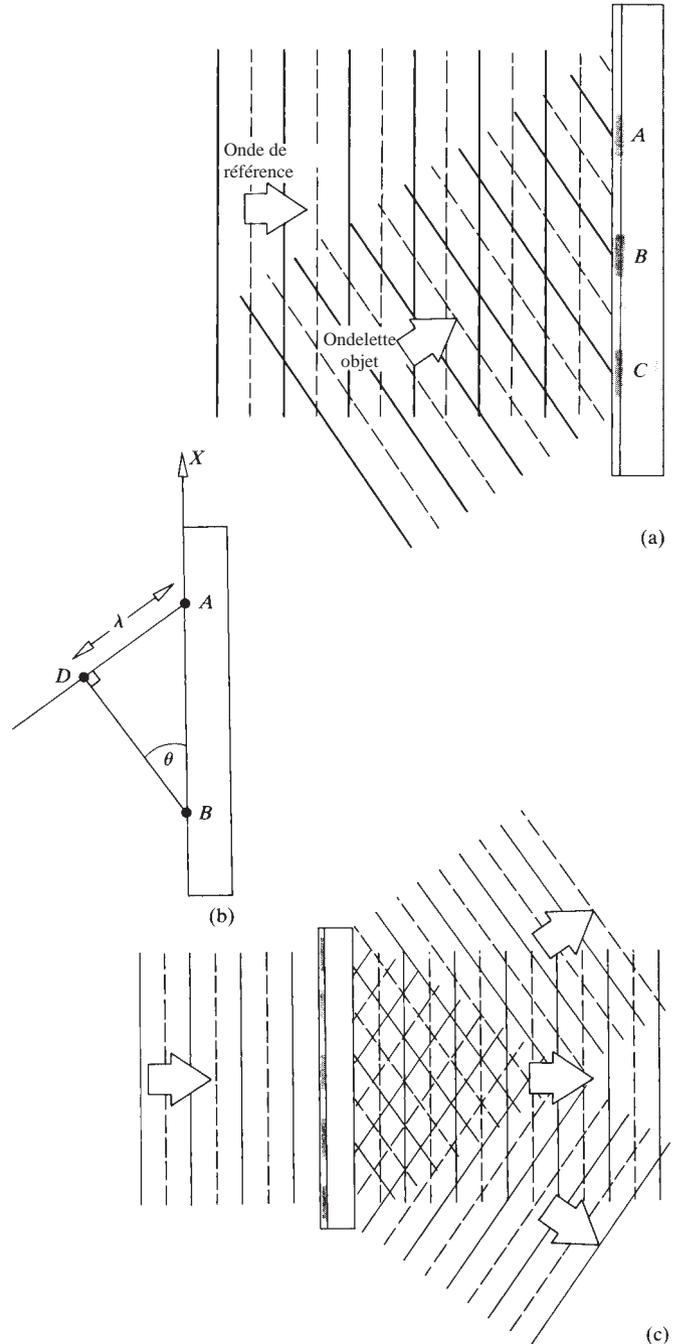


Figure 13.47 Interférence de deux ondes planes créant un réseau en cosinus.

Si les deux ondes ont la même amplitude E_0 , alors le champ électrique résultant suit l'équation (7.17) :

$$E = 2E_0 \cos \frac{1}{2}\phi \sin (\omega t - kx - \frac{1}{2}\phi)$$

et la distribution d'éclairement, proportionnelle à l'amplitude du champ au carré, d'après l'équation (3.44), est de la forme :

$$I(x) = \frac{1}{2}c\epsilon_0(2E_0 \cos \frac{1}{2}\phi)^2 = 2c\epsilon_0E_0^2 \cos^2 \frac{1}{2}\phi$$

$$\text{ou} \quad I(x) = 2c\epsilon_0E_0^2 + 2c\epsilon_0E_0^2 \cos \phi. \quad (13.23)$$

On a donc, dans le plan du film, une distribution cosinusoidale d'éclairement avec une période spatiale \overline{AB} et une fréquence spatiale $(1/\overline{AB})$ pour $\sin \theta/\lambda$.

Si l'on développe le film de sorte que sa transmission en amplitude soit proportionnelle à $I(x)$, on obtient un réseau d'amplitude cosinusoidal. Lorsqu'on éclaire cet hologramme simple (qui correspond essentiellement à un objet sans structure ne comportant aucune information) par une onde plane identique à l'onde de référence originale (figure 13.47c), il en sort trois faisceaux : l'ordre zéro et les deux du premier ordre. L'un des deux faisceaux du premier ordre va dans la direction du faisceau objet et correspond à la reconstruction de son front d'onde.

Supposons maintenant que pour aller au-delà de cet hologramme élémentaire, on examine un objet possédant une structure optique simple, à fréquence spatiale unique, tel qu'un réseau cosinusoidal en amplitude. Une représentation un peu idéalisée (qui exclut les termes d'ordre supérieur dus à la taille limitée du faisceau et du réseau) est évoquée à la figure 13.48, et montre la partie éclairée du réseau, les trois faisceaux transmis et le faisceau de référence. Il en résulte trois versions légèrement différentes de la figure 13.47, où chacune des trois ondes transmises forme un angle légèrement différent (θ) avec l'onde de référence. Par conséquent, chacune des trois zones qui se superposent va correspondre, d'après l'équation (13.22), à un ensemble de franges en cosinus de fréquences spatiales légèrement différentes. Encore une fois, lorsque l'on éclaire l'hologramme (figure 13.48a et b), trois ondes en émergent : l'onde non diffractée, et celles qui redonnent l'image virtuelle et l'image réelle. Observons que ce n'est qu'à l'endroit où les trois faisceaux se rencontrent pour mettre en commun leurs contenus de fréquences spatiales que les images du réseau d'origine se forment.

Lorsque l'objet est plus complexe, il faut s'attendre au fait que la phase relative (ϕ) entre l'onde objet et l'onde de référence varie d'un point à l'autre d'une façon compliquée, et module donc la porteuse de base (figure 13.49), produite par

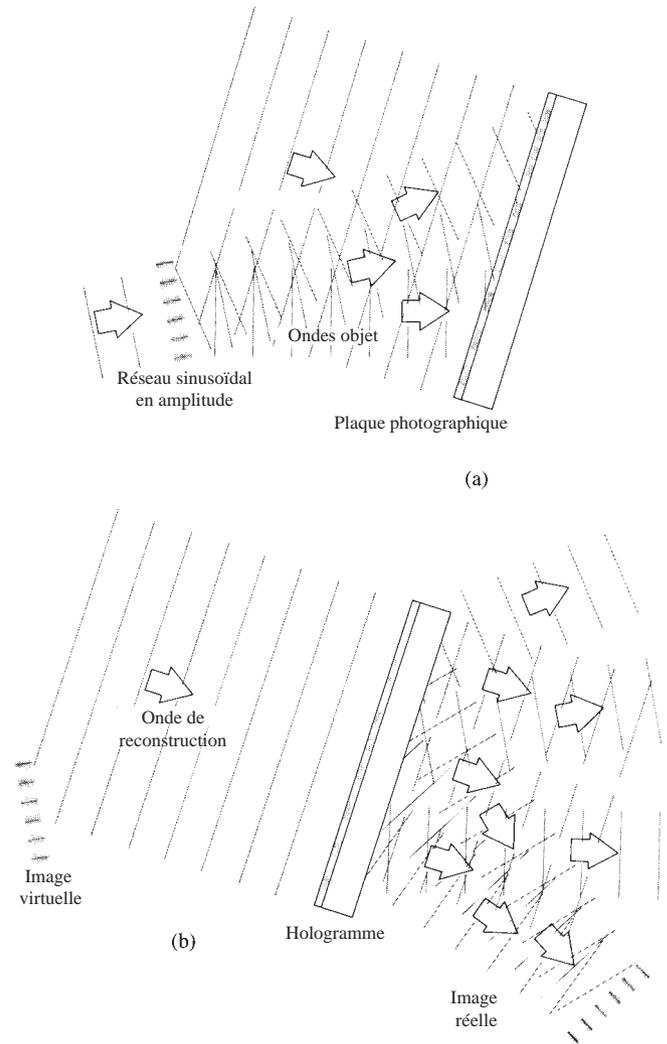


Figure 13.48 Il existe trois régions de fréquences spatiales différentes. Chacune d'elles produit sur l'hologramme trois ondes à la reconstruction.

deux ondes planes lorsqu'aucun objet n'est présent. On peut alors généraliser à partir de la figure 13.48 et conclure que la différence de phase ϕ (qui varie avec θ) est encodée dans la configuration des franges. De plus, si l'amplitude de l'onde de référence et celle de l'objet avaient été différentes, l'éclairement de ces franges aurait été altéré en conséquence. On peut donc deviner qu'en chaque point de la plaque photographique, l'amplitude de l'onde objet sera encodée dans la visibilité des franges résultantes.

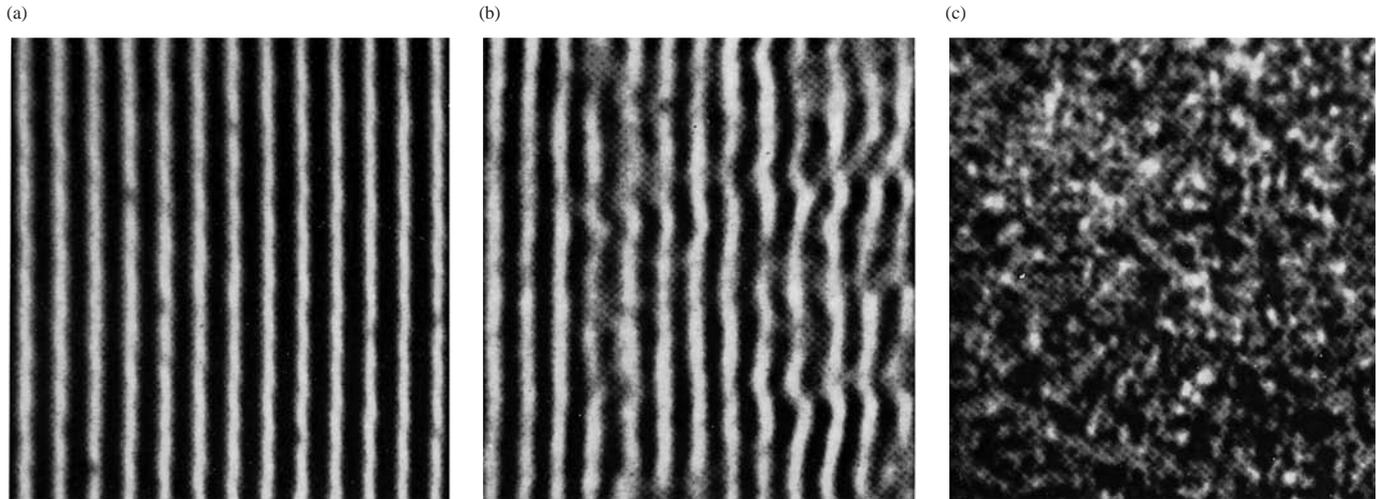


Figure 13.49 Divers degrés de modulation des franges de l'hologramme. (Photo Emmett N. Leith et *Scientific American*.)

On peut traiter le processus décrit à la figure 13.45 de la manière analytique suivante : supposons que le plan xy soit le plan de l'hologramme, Σ_H . Alors :

$$E_B(x, y) = E_{0B} \cos [2\pi\nu t + \phi(x, y)] \quad (13.24)$$

décrit l'onde de référence en Σ_H (en négligeant des considérations de polarisation). Son amplitude, E_{0B} , est constante, alors que sa phase varie en fonction de la position, ce qui signifie que le front d'onde de référence est incliné d'une manière connue par rapport à Σ_H . Par exemple, si l'onde était orientée de telle manière qu'elle puisse coïncider avec Σ_H par une simple rotation d'angle θ autour de y , la phase en n'importe quel point du plan de l'hologramme ne dépendrait que de x . Ainsi, ϕ prendrait à nouveau la forme :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta = kx \sin \theta$$

qui serait, dans ce cas particulier, indépendante de ν et proportionnelle à x . Par souci de simplicité, on l'écrira de manière générale sous la forme $\phi(x, y)$ et l'on retiendra qu'il s'agit d'une fonction simple connue. On peut alors écrire l'onde diffusée par l'objet comme :

$$E_O(x, y) = E_{0O}(x, y) \cos [2\pi\nu t + \phi_O(x, y)] \quad (13.25)$$

où l'amplitude et la phase sont maintenant toutes les deux des fonctions complexes de la position, correspondant à un front

d'onde irrégulier. Du point de vue de la théorie des communications, il s'agit d'une onde porteuse modulée en amplitude et en phase, et qui transporte toute l'information disponible sur l'objet. Notons que l'information est encodée sous forme de variations spatiales, plutôt que temporelles, de l'onde. Les deux perturbations E_B et E_O se superposent et interfèrent pour former une distribution d'éclairement, qui est enregistrée par l'émulsion photographique. À une constante multiplicative près, l'éclairement qui en résulte est $I(x, y) = \langle (E_B + E_O)^2 \rangle_T$, soit, d'après le paragraphe 9.1 :

$$I(x, y) = \frac{E_{0B}^2}{2} + \frac{E_{0O}^2}{2} + E_{0B}E_{0O} \cos (\phi - \phi_O) \quad (13.26)$$

Observons une nouvelle fois que la phase de l'onde de l'objet détermine la localisation sur Σ_H de l'éclairement maximal et minimal. De plus, le contraste, ou visibilité des franges :

$$\mathcal{V} \equiv (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min}) \quad [12.1]$$

soit, dans le plan de l'hologramme :

$$\mathcal{V} = 2E_{0B}E_{0O} / (E_{0B}^2 + E_{0O}^2) \quad (13.27)$$

contient l'information appropriée sur l'amplitude de l'onde objet.

Une fois de plus, dans la terminologie de la théorie des communications, la plaque photographique sert à la fois d'enregistreur et de détecteur ou de mélangeur. Sa surface

reproduit une distribution de zones opaques correspondant à une forme d'onde spatiale modulée. En conséquence, le troisième terme, en différence de fréquences de l'équation (13.27), est modulé à la fois en amplitude et en phase par la dépendance en position de $E_{00}(x, y)$ et de $\phi_O(x, y)$.

On peut voir, sur la figure 13.49b, un agrandissement d'une portion des franges qui constituent l'hologramme d'un objet semi-transparent simple à deux dimensions. Si les deux ondes qui interfèrent étaient parfaitement planes, (comme à la figure 13.49a), il n'y aurait pas les variations observées dans la position des franges et dans l'éclairement (ce qui représente l'information), et l'on aurait une figure traditionnelle de Young (paragraphe 9.3). La configuration avec réseau de transmission sinusoïdal (figure 13.49a) peut être interprétée comme une porteuse, modulée par le signal. De plus, on peut imaginer que la superposition cohérente d'innombrables réseaux zonés, chacun provenant d'un point de l'objet étendu, s'est métamorphosée pour donner les franges modulées de la figure 13.49b. Si la modulation augmentait de manière considérable (ce qui serait le cas avec un grand diffuseur à trois dimensions), les franges perdraient cette symétrie encore discernable sur la figure 13.49b et deviendraient considérablement plus complexes. Incidemment, les hologrammes sont souvent couverts de tourbillons et de systèmes d'anneaux concentriques parasites qui proviennent de la diffraction par les poussières présentes sur les éléments optiques.

On peut ajuster le développement de l'émulsion pour que le profil de transmission en amplitude de l'hologramme ainsi obtenu soit proportionnel à $I(x, y)$. Dans ce cas-là, l'onde finale émergente, $E_F(x, y)$, est proportionnelle au produit $I(x, y)E_R(x, y)$, où $E_R(x, y)$ est l'onde de reconstruction incidente sur l'hologramme. Si l'onde de reconstruction, de fréquence ν , est incidente obliquement sur Σ_H , comme l'était l'onde de référence, on peut écrire :

$$E_R(x, y) = E_{0R} \cos [2\pi\nu t + \phi(x, y)] \quad (13.28)$$

L'onde finale (à une constante multiplicative près) est le produit des équations (13.26) et (13.28) :

$$\begin{aligned} E_F(x, y) &= \frac{1}{2}E_{0R}(E_{0B}^2 + E_{0O}^2) \cos [2\pi\nu t + \phi(x, y)] \\ &+ \frac{1}{2}E_{0R}E_{0B}E_{0O} \cos (2\pi\nu t + 2\phi - \phi_O) \\ &+ \frac{1}{2}E_{0R}E_{0B}E_{0O} \cos (2\pi\nu t + \phi_O) \end{aligned} \quad (13.29)$$

Trois termes décrivent alors la lumière émanant de l'hologramme ; le premier peut être réécrit comme :

$$\frac{1}{2}(E_{0B}^2 + E_{0O}^2)E_R(x, y)$$

qui est une version modulée en amplitude de l'onde de reconstruction. En effet, chaque portion de l'hologramme fonctionne comme un réseau de diffraction, et ce premier terme en représente à nouveau le faisceau direct, non dévié d'ordre zéro. Comme il ne contient aucune information sur la phase de l'onde objet ϕ_O , il ne présente ici que peu d'intérêt.

Les deux autres termes, ou *bandes latérales*, sont respectivement les termes somme et différence. Ce sont les deux *premiers ordres* diffractés par l'hologramme, qui se comporte comme un réseau. Le premier des deux (c'est-à-dire le terme somme) représente une onde qui, à une constante multiplicative près, possède la même amplitude que l'onde objet $E_{00}(x, y)$. De plus, sa phase contient une contribution en $2\phi(x, y)$, qui, on s'en souvient, provient d'une rotation comme l'inclinaison des fronts d'onde de référence et de reconstruction par rapport à Σ_H . C'est ce facteur de phase qui fournit la séparation angulaire entre l'image réelle et l'image virtuelle. De plus, au lieu de contenir la phase de l'onde objet, le terme somme contient son inverse. Il s'agit donc d'une onde transportant toute l'information appropriée sur l'objet, mais d'une manière qui n'est pas correcte. En effet, il s'agit de l'image réelle qui est formée en lumière convergente dans l'espace situé au-delà de l'hologramme, c'est-à-dire entre l'hologramme et l'observateur. L'inversion de phase se manifeste sous la forme d'une image « retournée », semblable à l'effet pseudoscopique qui se produit lorsque les éléments d'une paire de photos stéréoscopiques sont interchangés. Des bosses apparaissent sous la forme de creux et les points de l'objet qui étaient en avant et plus proches de Σ_H , apparaissent plus proches mais en arrière de Σ_H . Ainsi, le point de l'objet initial le plus proche de l'observateur apparaît le plus loin dans l'image réelle. La scène est donc retournée sur elle-même selon un axe, d'une façon qu'il faut avoir vue pour bien la comprendre.

Imaginons, par exemple, que l'on regarde l'image holographique conjuguée d'une piste de bowling. La rangée « arrière » des quilles, même si elle est cachée partiellement par les « premiers » rangs, donne une image plus proche de l'observateur que le premier rang. Malgré cela, il faut se rappeler que ce n'est pas comme si l'on regardait l'ensemble par derrière, puisqu'aucune lumière provenant de l'arrière des quilles n'a été enregistrée : c'est bien une vue de face, mais retournée. Par conséquent, l'image conjuguée a généralement peu d'utilité, même si l'on peut lui rendre sa configuration normale en formant un deuxième hologramme avec l'image réelle en tant qu'objet.

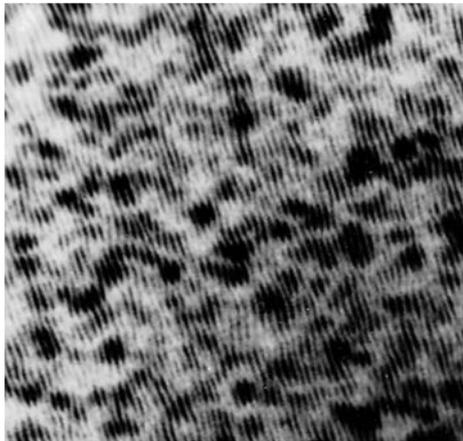
Le terme différence de l'équation (13.29), a précisément la forme (à une constante multiplicative près) de l'onde objet

$E_{00}(x, y)$. Si l'on regarde au travers de l'hologramme éclairé (et non pas l'hologramme lui-même), comme s'il s'agissait d'une fenêtre donnant sur la scène située au-delà, on peut « voir » l'objet exactement comme s'il était véritablement présent. On peut déplacer légèrement la tête pour observer ce qui se cache derrière un élément qui se trouve au premier plan. En d'autres termes, en plus d'une tridimensionnalité totale, les effets de parallaxe sont visibles comme dans aucune autre technique de reproduction (voir photo). Imaginons que l'on regarde l'image holographique d'une loupe posée sur une page imprimée. Lorsqu'on déplace le regard par rapport au plan de l'hologramme, les mots grossis par la loupe (qui n'est elle-même qu'une image) changent, tout comme ils le feraient dans la vie « réelle » avec une lentille « réelle » et une page

« réelle ». Dans le cas d'une scène étendue et de grande profondeur, il faudrait accommoder pour mettre au point sur les régions de la scène situées à des distances différentes. Exactement de la même manière, il faudra refocaliser un objectif d'appareil photographique pour pouvoir photographier les différentes régions de l'image virtuelle (voir la photo page 649).

Les hologrammes présentent d'autres caractéristiques intéressantes et extrêmement importantes. Par exemple, si l'on se tient à proximité d'une fenêtre, on peut l'obstruer complètement avec un morceau de carton, en ne laissant qu'un petit trou au travers duquel on pourra encore observer la scène. C'est vrai aussi pour un hologramme, car chacun de ses fragments contient l'information sur l'objet en entier, au moins

(a)



(b)



(c)



(d)

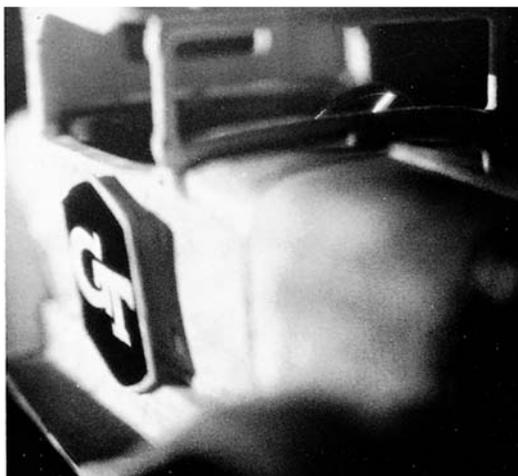


Les clichés (b) à (d) sont trois vues différentes de la même image holographique générée par l'hologramme du cliché (a). (Photos Smith, *Principles of Holography*.)

(a)



(b)



Reconstruction de l'image holographique d'une maquette de voiture. Les positions de l'appareil photo et du plan de mise au point ont été changées entre (a) et (b). (Photos O'Shea, Callen, et Rhodes, *An Introduction to Lasers and Their Applications*.)

celle qui est vue depuis le même point d'observation. Chaque fragment peut donc reproduire, avec, il est vrai, une résolution plus faible, l'image entière.

La figure 13.50 résume graphiquement la plus grande partie de ce qui a été dit jusqu'à présent, tout en fournissant un exemple de montage expérimental pour produire et visualiser des hologrammes. Ici, on tient compte de l'épaisseur de l'émulsion photographique, ce qui n'était pas le cas de la figure 13.47, où elle était traitée comme étant purement à deux dimensions. Bien sûr, n'importe quelle émulsion a une épaisseur de valeur bien définie, qui est, typiquement, de l'ordre de $10\ \mu\text{m}$; ce qui est à comparer avec la période spatiale des franges, voisine, en moyenne, de $1\ \mu\text{m}$. La figure 13.51a est plus proche de la réalité car elle montre les types de franges tridimensionnelles qui peuvent exister dans l'émulsion. Pour des ondes planes, ces franges, planes et parallèles entre elles, sont orientées de manière à bissecter l'angle entre l'onde de référence et l'onde objet. Remarquons que, jusqu'à présent, on regardait *au travers* de l'hologramme, qui était donc un **hologramme par transmission**, obtenu chaque fois que l'onde de référence et celle de l'objet proviennent du même côté de la plaque.

Il se produit quelque chose de similaire lorsque l'onde de référence et celle de l'objet traversent l'émulsion en sens opposés, comme à la figure 13.51b. Si, par simplicité, on considère à nouveau des ondes planes, on peut visualiser la figure résultante en faisant glisser deux crayons le long des fronts. Il devrait donc être clair que les franges sont des segments de droites (donc des plans) parallèles à la surface de la plaque. Lorsqu'une onde objet, réelle et fortement déformée,

se superpose avec une onde de référence, plane et cohérente, ses franges sont modulées par l'information décrivant l'objet. Le réseau de diffraction tridimensionnel correspondant est appelé **hologramme par réflexion**. En phase de lecture, il réfléchit le faisceau d'éclairage vers l'observateur, qui voit donc une image virtuelle derrière l'hologramme (comme s'il regardait dans un miroir).

On a, jusqu'ici, interprété en termes de réseaux zonés les différents schémas holographiques sans se soucier de savoir si l'onde diffractée en champ *proche* ou *lointain* (c'est-à-dire si l'on avait respectivement un hologramme de Fresnel ou de Fraunhofer). En fait, cette interprétation s'applique généralement lorsque l'interférogramme résulte de la superposition des ondelettes sphériques diffusées par chaque point objet avec un plan cohérent ou même avec une onde de référence sphérique (à condition que la courbure de cette dernière soit différente de celle des ondelettes). Un problème inhérent, que ces schémas ont en commun, provient du fait que les rayons d'un réseau zoné, R_m , varient, d'après l'équation (10.91), en $m^{1/2}$. Ainsi, les franges d'un réseau zoné sont plus denses au bord (c'est-à-dire aux valeurs de m les plus élevées). Cela équivaut à des anneaux de fréquence spatiale croissante que doit enregistrer la plaque photographique. C'est la même contrainte dans la représentation avec les réseaux cosinusoidaux, où la fréquence spatiale augmente avec θ . Quelle que soit la finesse de son grain, l'émulsion est limitée dans sa réponse en fréquence spatiale, et il y a donc un seuil au-delà duquel elle ne peut plus enregistrer de données. Tout cela représente une limitation en résolution, pour la phase de reconstruction. En revanche, on peut rendre quasiment

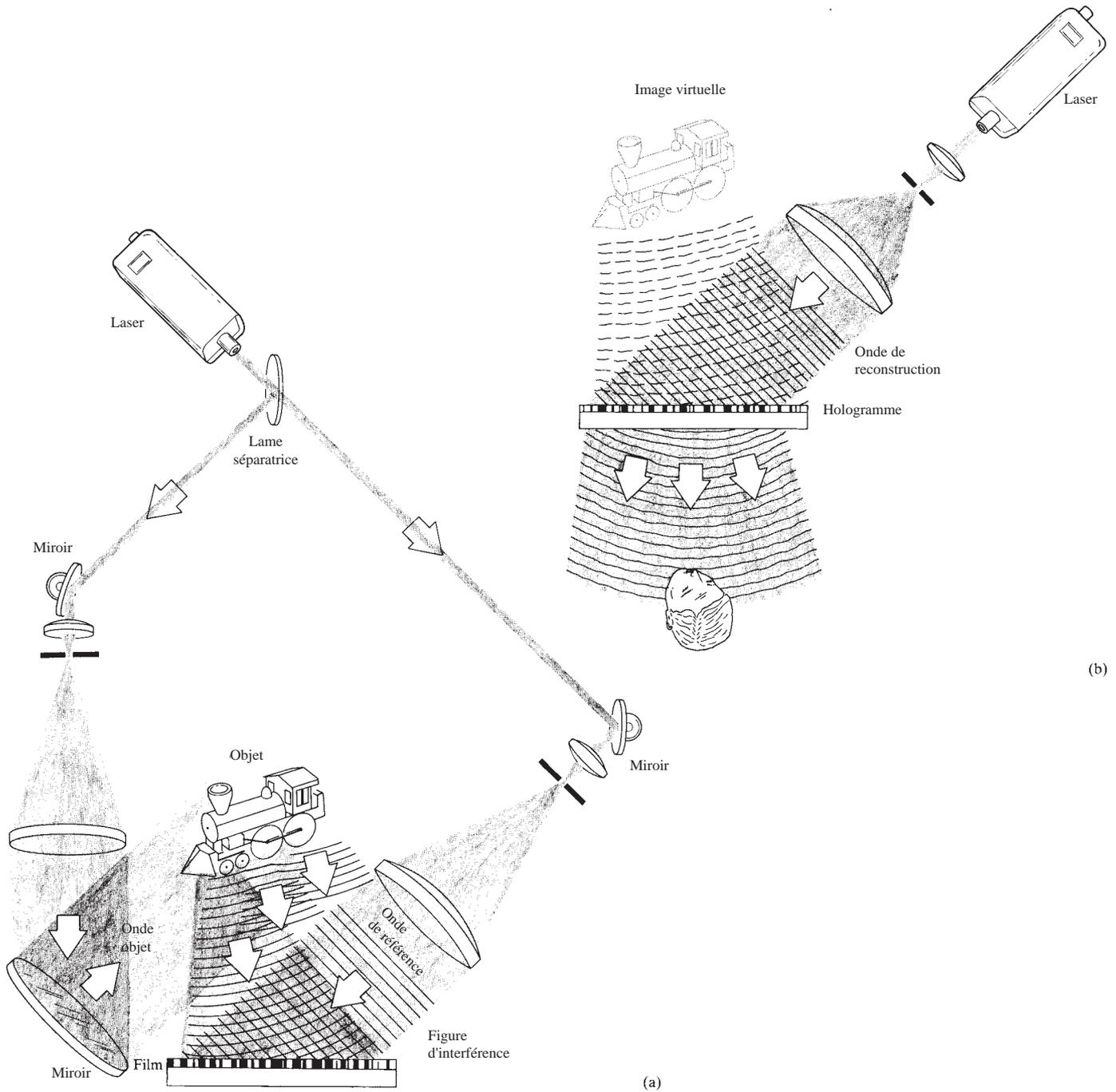


Figure 13.50 (a) Enregistrement de l'hologramme en transmission d'une locomotive jouet. (b) Reconstruction d'un hologramme en transmission.

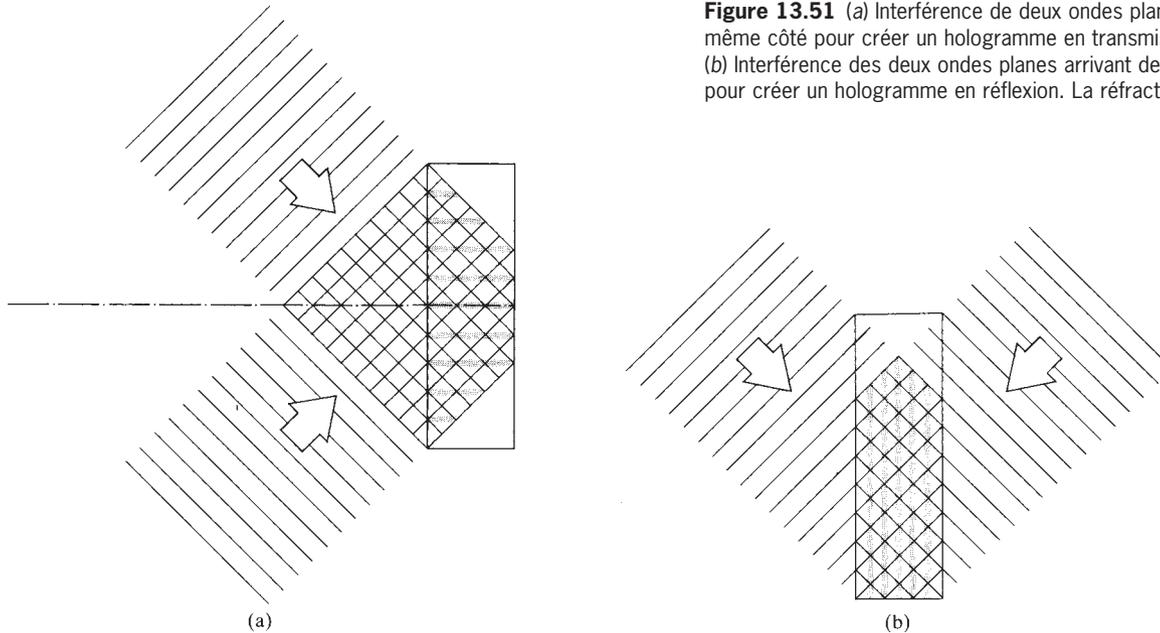


Figure 13.51 (a) Interférence de deux ondes planes qui arrivent du même côté pour créer un hologramme en transmission. (b) Interférence des deux ondes planes arrivant des deux côtés opposés pour créer un hologramme en réflexion. La réfraction a été omise.

constante la fréquence moyenne des franges, on peut considérablement réduire les limitations imposées par le milieu photographique et donc améliorer la résolution correspondante. Aussi longtemps qu'elle peut enregistrer la fréquence spatiale moyenne des franges, même une émulsion grossière (un appareil comme le Polaroid P/N) peut être utilisée sans grande perte de résolution. La figure 13.52 présente un type de montage qui permet justement d'obtenir cet effet en donnant aux ondelettes objet diffractées et à l'onde de référence sphérique à peu près la même courbure. L'interférogramme résultant est connu sous le nom d'**hologramme de Fourier** (dans ce cas précis, il s'agit de la variété de haute résolution *sans lentille*). Ce schéma est conçu de telle manière que l'onde de référence annule la dépendance quadratique (de type réseau zoné) de la phase avec la position sur Σ_H . Cela se produit de façon exacte uniquement pour un objet planaire à deux dimensions. Dans le cas d'un objet tridimensionnel (figure 13.53), cela ne peut être obtenu que sur un plan, et l'hologramme résultant est donc une composition des deux types, c'est-à-dire qu'il est à la fois à réseau zoné et à transformée de Fourier. Contrairement aux autres montages, les deux images produites par un hologramme de Fourier sont virtuelles, dans le même plan et symétriques par rapport à l'origine (voir photo).

D'une façon similaire à tous les hologrammes précédents, l'hologramme de Fourier se comporte comme un réseau. Si l'on regarde une petite source de lumière blanche (une lampe

de poche dans une pièce sombre fonctionne à merveille) à travers un hologramme de Fourier, on voit bien les deux images symétriques ; mais elles sont extrêmement vagues et entourées de bandes de couleurs spectrales. La similarité avec la lumière blanche qui est passée à travers un réseau est indubitable*.

.....
*Voir DeVelis et Reynolds, *Theory and Applications of Holography*; Stroke, *An Introduction to Coherent Optics and Holography*; Goodman, *Introduction to Fourier Optics*; Smith, *Principles of Holography*; ou encore *The Engineering Uses of Holography*, édité par E. R. Robertson et J. M. Harvey.



Reconstruction d'un hologramme par transformée de Fourier. [D'après G. W. Stroke, D. Brumm, et A. Funkhauser, *J. Opt. Soc. Am.* **55**, 1327 (1965).]

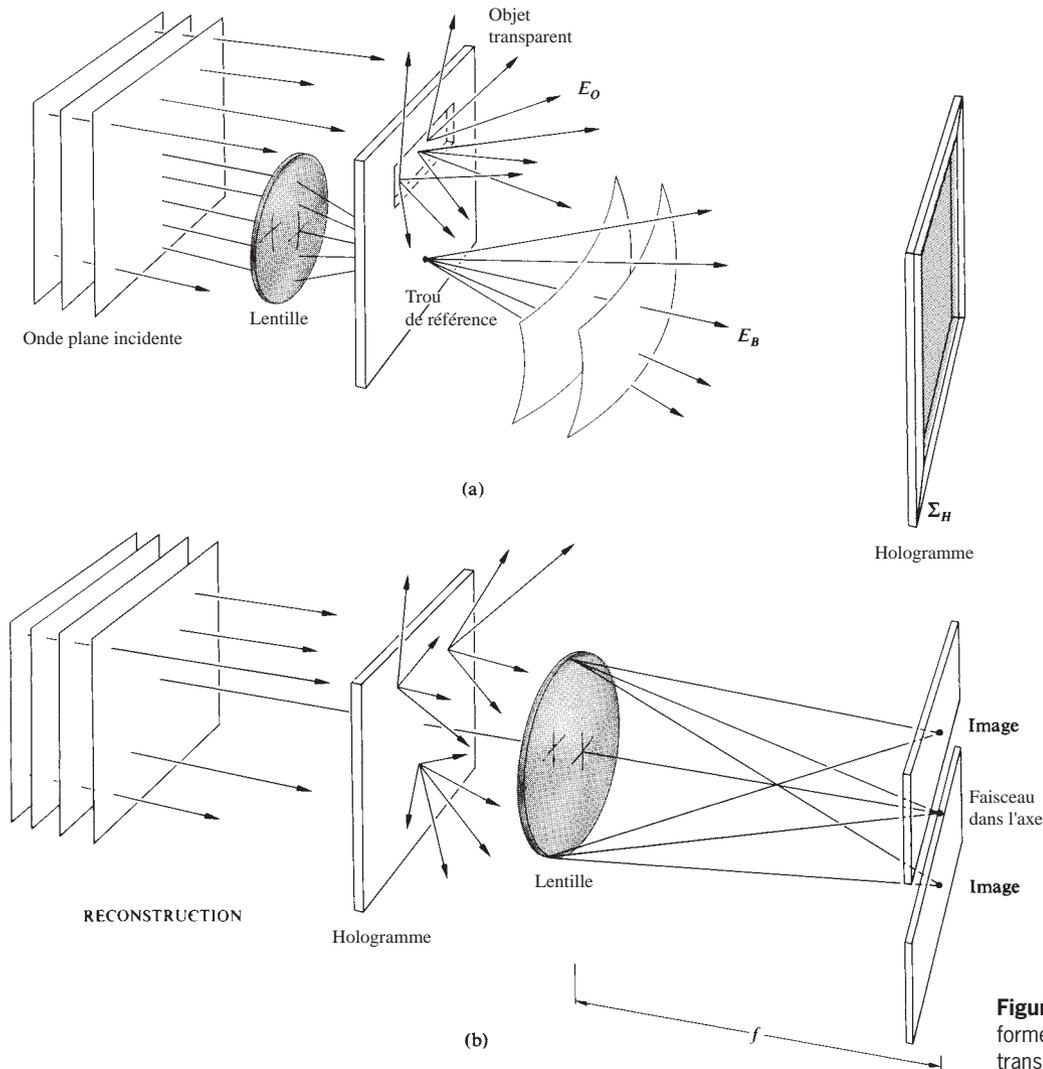


Figure 13.52 Holographie par transformée de Fourier sans lentille (objet transparent).

13.3.2 Développements et applications

Pendant des années, l'holographie a été une invention en quête d'applications, en dépit de certaines opportunités évidentes, comme l'inévitable panneau d'affichage en trois dimensions. Heureusement, plusieurs développements technologiques significatifs ont récemment commencé, qui devraient assurer une extension du domaine et de l'utilité de l'holographie. Au commencement, les efforts se traduisaient par d'innombrables images de voitures et de trains miniatures, de pièces d'échec et de statuettes, en fait des petits objets posés sur des blocs de granit géants. Ils devaient être petits à cause de la puissance

limitée des lasers et de la longueur de cohérence, alors que la plaque de granit omniprésente servait à isoler les moindres vibrations qui pouvaient troubler les franges et dégrader ou effacer l'information enregistrée. Un grand bruit ou une bourrasque de vent pouvait détériorer l'image reconstruite en faisant bouger la plaque photographique, l'objet ou les miroirs, d'une fraction de micromètre pendant l'exposition (qui durait au moins une ou deux minutes). C'était l'ère des « natures mortes » de l'holographie. Mais, à présent, avec la disponibilité de nouveaux films plus sensibles et la brièveté (40 ns) des impulsions puissantes des lasers impulsionnels monomodes à

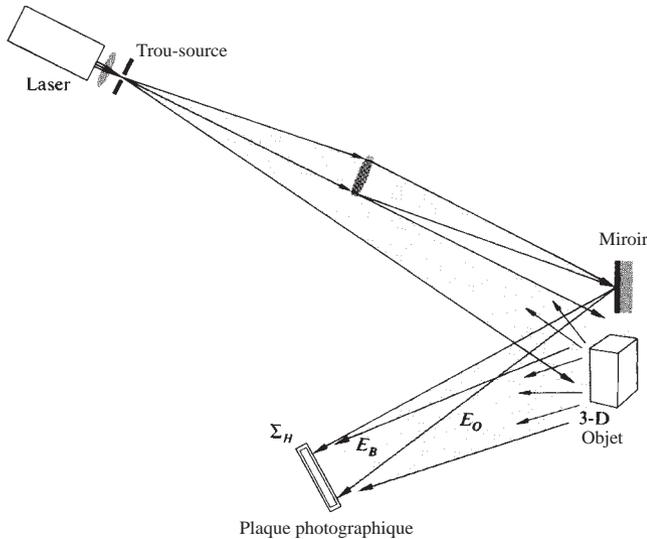


Figure 13.53 Holographie par transformée de Fourier sans lentille (objet opaque).

rubis, même l'art du portrait et l'holographie sur le vif sont devenus une réalité* (voir photo).

Au cours des années 1960 et de la majorité des années 1970, l'accent était porté sur les évidentes merveilles visuelles de l'holographie. Cela a continué dans les années 1980 avec la production en masse de plus d'une centaine de millions d'hologrammes par réflexion bon marché en plastique (incrustés dans les cartes de crédit, insérés dans des emballages de bonbons, décorant les couvertures de magazines, les bijoux, les disques). Le développement d'un photopolymère stable, bon marché et capable de produire des images de haute qualité, a stimulé d'autant plus la fabrication de ces hologrammes jetables. De nos jours, on reconnaît de plus en plus de potentiel à l'holographie comme un moyen d'instrumentation en dehors de l'imagerie, et l'on trouve de plus en plus d'applications importantes à cette nouvelle direction.

Hologrammes de volume

Le physicien soviétique Yuri Nikolayvitch Denisyuk, élaboré, en 1962, un montage de réalisation d'hologrammes qui était

*L. D. Siebert, *Appl. Phys. Letters* **11**, 326 (1967), et R. G. Zech et L. D. Siebert, *Appl. Phys. Letters* **13**, 417 (1968).

conceptuellement similaire au procédé original de photographie en couleur de Gabriel Lippmann (1891). En bref, l'onde objet, réfléchiée par l'objet, se propage au retour pour se superposer à l'onde cohérente de référence. Ainsi, les deux ondes forment une figure tridimensionnelle d'ondes stationnaires comme sur la figure 13.51. On enregistre la distribution spatiale des franges dans l'épaisseur de l'émulsion pour former ce que l'on appelle un **hologramme de volume**. Plusieurs variantes ont été introduites depuis, mais les idées de base sont restées inchangées. Plutôt que de constituer une structure diffusante à deux dimensions de type réseau, l'hologramme de volume est un réseau en trois dimensions. Il s'agit d'une matrice à trois dimensions périodique, modulée, d'objets de phase ou d'amplitude, qui représente l'information. On peut l'enregistrer de différentes façons, comme, par exemple, avec des photoémulsions épaisses dans lesquelles les objets d'amplitude sont des grains d'argent ; avec des verres photochromatiques ; avec des cristaux d'halogène, tels que KBr qui répond au rayonnement par les variations de ses centres colorés, ou avec un cristal ferroélectrique, tel que le niobate de lithium qui subit de petits changements dans son indice de réfraction, formant ainsi ce qu'on peut appeler un hologramme de phase en volume. Dans n'importe quel cas, le résultat est une structure volumique de données emmagasinées dans le matériau. Au cours du procédé de reconstruction, celui-ci se comporte comme un cristal irradié par des rayons X. Il diffuse l'onde (reconstructrice) incidente selon la loi de Bragg



Reconstruction d'un portrait holographique. (Photo L. D. Siebert.)

(p. 501). Ce fait n'est pas très surprenant car les centres de diffusion et λ sont dimensionnés à l'échelle optique.

Une propriété importante des hologrammes de volume est l'interdépendance (par la loi de Bragg : $2d \sin \theta = m\lambda$, équation (10.71)) entre la longueur d'onde et l'angle de diffraction. En fait, une seule couleur peut être diffractée par l'hologramme dans une direction donnée. Une autre propriété significative est qu'en changeant plusieurs fois de suite l'angle d'incidence (ou la longueur d'onde), on peut emmagasiner de nombreux hologrammes dans un milieu unique. Cette dernière propriété rend ces systèmes extrêmement attractifs pour le stockage en mémoires de masse. Par exemple, on a réalisé un hologramme de 8 mm d'épaisseur pour emmagasiner 550 pages d'information ; chacune pouvant être lue individuellement. En théorie, un cristal de niobate de lithium est capable d'emmagasiner des milliers d'hologrammes, dont n'importe lequel peut être relu en dirigeant sur le cristal un faisceau laser sous l'angle approprié. Les recherches en cours s'intéressent aussi au niobate tantalate de potassium (KTN), cristal photoréfractif, comme moyen de stockage potentiel. À partir de là, on peut imaginer un film holographique en trois dimensions, une bibliothèque, où l'enregistrement des informations privées de chaque individu (grains de beauté, cartes de crédit, impôts, mauvaises habitudes, revenus, histoire de notre vie, etc.), contiendrait dans une poignée de petits cristaux transparents !

On a réalisé des reconstructions multicolores à partir de plaques holographiques de volume (noir et blanc). On superpose deux, trois (ou plus) faisceaux lasers colorés mutuellement incohérents, pour fabriquer en parallèle des hologrammes séparés d'objet. Ces manipulations peuvent être faites l'une après l'autre ou en même temps. Lorsque les hologrammes sont éclairés simultanément par les différents faisceaux, il en résulte une image multicolore.

Un autre schéma important et hautement prometteur, réalisé par G.W. Stroke et A.E. Labeyrie, est connu sous le nom d'**holographie par réflexion en lumière blanche**. Ici, l'onde de reconstruction est un simple faisceau de lumière blanche provenant, par exemple, d'une lampe de poche ou d'un projecteur, dont le front d'onde ressemble un peu à celui d'une onde quasi monochromatique de référence originelle. Lorsqu'un tel dispositif est éclairé du même côté que l'observateur, seule la longueur d'onde spécifique pénétrant dans l'hologramme de volume au bon angle de Bragg est réfléchi pour reconstruire une image virtuelle 3-D. Ainsi, si la scène a été enregistrée en lumière laser rouge, seule une lumière rouge peut être réfléchi pour donner lieu à une image. Dans un intérêt pédagogique, il faut préciser, cependant, que l'émulsion

peut se contracter au cours du procédé de fixation et si elle ne regagne pas chimiquement sa forme initiale (avec, par exemple, de la triéthylolamine), l'espacement des plans de Bragg, d , décroît. Cela signifie qu'à un angle donné, θ , la longueur d'onde réfléchi va décroître proportionnellement. Ainsi, une scène qui a été enregistrée en lumière He-Ne rouge pourrait apparaître orange ou même verte lors de la lecture si elle est reconstruite par un faisceau de lumière blanche. Si plusieurs hologrammes superposés et correspondant à des longueurs d'onde différentes sont stockés, une image multicolore va en résulter. Les avantages de l'utilisation d'une source de lumière blanche ordinaire pour reconstruire des images 3-D en couleurs sont évidents et d'une portée considérable.

Interférométrie holographique

L'une des avancées récentes les plus innovantes et pratiques de l'holographie moderne concerne le domaine de l'interférométrie. Trois approches caractéristiques ont démontré leur utilité dans de nombreuses méthodes de contrôle non destructifs, par exemple, dans le cas où l'on souhaite étudier les distorsions submicroniques d'un objet, du fait de contraintes de vibrations, de variations de température, etc. Dans la technique de *double exposition*, on crée tout d'abord un hologramme de l'objet non perturbé, puis, avant de développer, on expose cet hologramme une seconde fois à la lumière provenant cette fois de l'objet déformé. Le résultat final fait intervenir deux ondes reconstruites qui se chevauchent et forment une figure d'interférences qui est représentative des déplacements subis par l'objet (c'est-à-dire des changements en longueur de chemin optique ; voir photo). Des variations d'indice, telles que celles survenant dans les tunnels de soufflerie ou des dispositifs semblables, produisent le même type de figure.

Dans la méthode en *temps réel*, on place le sujet à gauche dans sa position initiale, et l'on prend un hologramme. L'image virtuelle qui en résulte est supposée se superposer de manière précise avec l'objet (figure 13.54). Si l'on regarde l'objet à travers l'hologramme, toute distorsion de l'objet en cours d'essai apparaît sous la forme de franges, que l'on peut étudier en temps réel, à mesure qu'elles évoluent. La méthode peut s'appliquer à n'importe quel objet, opaque ou transparent, et l'on peut enregistrer continuellement la réponse sur un film.

La troisième méthode est l'approche de la *moyenne temporelle*, particulièrement intéressante pour les systèmes oscillants rapides et de faible amplitude. Ici, la plaque photographique est exposée pendant une durée relativement longue, au cours de laquelle l'objet vibrant exécute un certain nombre d'oscillations.



Interférogramme holographique à double exposition. [D'après S. M. Zivi et G. H. Humberstone, « Chest Motion Visualized by Holographic Interferometry », *Medical Research Eng.* p. 5 (Juin 1970).] Comparer avec la photo radar de la page 453.

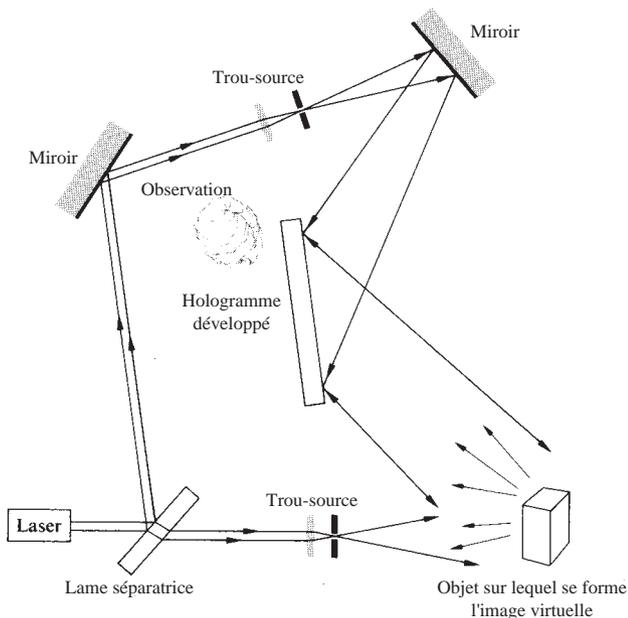


Figure 13.54 Interférométrie holographique en temps réel.

On peut considérer l'hologramme résultant comme la superposition d'une multitude d'images, qui résulte en une figure d'ondes stationnaires. Les zones brillantes révèlent des régions nodales stationnaires ou statiques, alors que les lignes de contour tracent des zones d'amplitude vibrationnelle constante.

Aujourd'hui le contrôle holographique de systèmes mécaniques est une pratique bien établie dans le monde de l'industrie. Il continue à être utilisé dans un large éventail d'applications, depuis la réduction du bruit dans les transmissions automobiles jusqu'aux inspections de routine sur les réacteurs d'avion.

L'holographie acoustique

En holographie acoustique, on utilise des ultrasons pour créer l'hologramme et un faisceau laser pour reconstruire une image reconnaissable. Dans une de ces applications, le motif stationnaire ondulé à la surface d'un certain volume d'eau, produit par des transducteurs cohérents immergés, correspond à l'hologramme d'un objet situé dans l'eau (figure 13.55). Une photographie de la surface permet de réaliser un hologramme qui peut être alors éclairé optiquement, pour former une image visuelle de l'objet qui est en dessous. Alternativement, on peut éclairer par le dessus les ondulations de la surface avec un faisceau laser pour produire une reconstruction instantanée en réflexion.

Les avantages des techniques acoustiques résident dans le fait que les ondes sonores peuvent se propager à des distances considérables dans les liquides et les solides denses, alors que la lumière en est incapable. Ainsi, les hologrammes acoustiques peuvent détecter différentes choses comme des sous-marins en immersion et divers organes du corps humain*. Dans le cas de la figure 13.55, on pourrait voir quelque chose qui ressemble à un film en rayons X d'un poisson. La photo est l'image d'une pièce de monnaie formée par l'holographie acoustique en utilisant des ultrasons à 48 MHz. Dans l'eau, cela correspond à une longueur d'onde d'approximativement $30 \mu\text{m}$, et chaque contour de frange révèle donc une variation du relief de $\frac{1}{2}\lambda$, soit de $15 \mu\text{m}$.

*Voir A. F. Metherell, « Acoustical Holography », *Sci. Am.* **36**, 221, (Octobre 1969). Se reporter à A. L. Dalisa et al., « Photoanodic Engraving of Holograms on Silicon », *Appl. Phys. Letters* **17**, 208 (1970), pour une autre utilisation intéressante des figures de relief de surface.

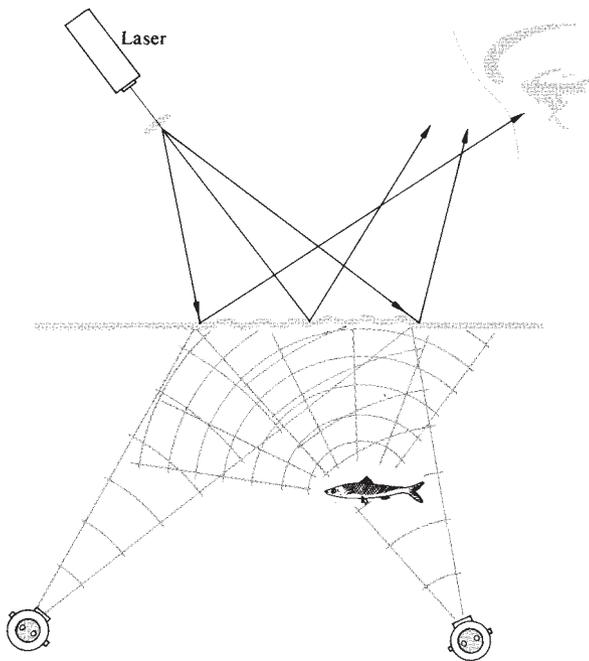


Figure 13.55 Holographie acoustique.



Image interférométrique d'un penny par holographie acoustique.
(Photo Holosonics, Inc.)

Éléments optiques holographiques

De manière évidente, lorsque deux ondes planes se superposent, comme à la figure 13.47, elles produisent un réseau cosinusoidal. Cela suggère immédiatement l'idée qu'on peut utiliser l'holographie à des fins autres que l'imagerie, comme

la réalisation de réseaux de diffraction. Un *élément optique holographique* (HOE) est un composant diffractif consistant en un système de « franges » (c'est-à-dire un ensemble d'objets d'amplitude ou de phase, qui diffractent), créé soit directement par interférométrie soit par simulation informatique. Les réseaux de diffraction holographiques, à la fois blazés et sinusoïdaux, sont disponibles dans le commerce (avec jusqu'à 3 600 traits/mm environ). Bien que généralement moins efficace que des réseaux gravés, ils produisent beaucoup moins de lumière parasite, ce qui peut être important dans de nombreuses applications.

Supposons que l'on enregistre la figure d'interférence d'un faisceau convergent en utilisant une onde de référence plane. En éclairant avec une onde plane appropriée l'hologramme en transmission résultant, on reconstruit une onde convergente, et l'hologramme fonctionne donc comme un lentille (figure 13.44). Similairement, si le faisceau de référence est une onde divergente depuis un point source, et l'objet une onde plane, l'hologramme résultant, s'il est éclairé par le point source, produira en retour une onde plane. De cette façon, un élément optique holographique peut accomplir les tâches d'un objectif complexe avec l'avantage d'une conception de système compact, léger et bon marché.

On utilise déjà les éléments optiques holographiques dans les scanners des caisses de supermarché qui lisent automatiquement les code-barre normalisés (UPC : *Universal Product Code*) présents sur les produits. Un pinceau laser passe à travers un disque rotatif composé d'un certain nombre de lentilles holographiques prismatiques, qui se refocalisent rapidement, décalent, et « balayent » le pinceau à travers un volume donné, garantissant que le code est lu au premier passage sur l'appareil. Les éléments optiques holographiques sont également utilisés dans les « viseurs tête-haute » des cockpits d'avion, qui projettent au pilote les données de vol par réflexion sur une lame semi-réfléchissante, tout en lui laissant la possibilité de voir le paysage au travers. On les trouve aussi dans les photocopieurs et dans les concentrateurs solaires.

On utilise aussi les éléments optiques holographiques en tant que *filtres spatiaux adaptés* dans des corrélateurs optiques pour détecter certaines défaillances dans les semi-conducteurs, ou encore pour distinguer les chars d'assaut dans les images de reconnaissance. Dans de telles applications, l'élément optique holographique est un hologramme formé en utilisant la transformée de Fourier de la cible (par exemple une image de tank ou encore un mot imprimé), comme objet. Supposons que le problème soit de trouver automatiquement un mot sur une page de texte en utilisant un ordinateur optique comme celui de la

figure 13.30 (c'est-à-dire de faire correspondre le mot et la page de mots). L'hologramme à transformée de la cible est placé dans le plan de transformation et éclairé par la transformée de la page entière. L'amplitude du champ émergent de ce filtre HOE est alors proportionnelle au produit des transformées de la page et du mot. La transformée de ce produit, effectuée par la dernière lentille et affichée dans le plan image, est l'intercorrélacion désirée (rappelons-nous du théorème de Wiener-Khintchine). Si le mot se trouve sur la page, il y aura une forte corrélation, et un point brillant apparaîtra en surimpression dans l'image finale aux endroits où le mot cible se situe*.

Enfin, il faut savoir qu'il est possible de synthétiser, point par point, un hologramme d'un objet fictif. En d'autres termes, dans l'approche la plus directe, on peut réaliser des hologrammes en calculant, avec un ordinateur, la distribution d'éclairement que l'on obtiendrait si l'objet réel était éclairé de manière appropriée au cours d'une session d'enregistrement hypothétique. En général, on réalise par microlithographie l'hologramme ainsi calculé. Lorsqu'on l'éclaire, le résultat est une image en trois dimensions d'un objet qui n'a jamais eu d'existence réelle dès le début. En réalité, les éléments optiques holographiques réalisés par ordinateur sont maintenant produits de façon routinière, souvent pour servir de référence dans certains tests optiques. Cette conjonction de technologies peut donc produire des fronts d'onde qui seraient autrement irréalisables ; le futur est donc très prometteur.

13.4 Optique non linéaire

Généralement, on entend par optique non linéaire l'ensemble des phénomènes où le carré (et les puissances supérieures) de l'intensité des champs électriques et magnétiques jouent un rôle prépondérant. L'effet Kerr (paragraphe 8.11.3), qui correspond à une variation d'indice de réfraction proportionnelle au carré de la tension appliquée (et donc du champ électrique), est typique de plusieurs effets non linéaires connus depuis longtemps.

Le traitement usuel classique de la propagation de la lumière (superposition, réflexion, réfraction etc.) suppose une relation linéaire entre le champ électromagnétique et le système atomique constituant le milieu qui réagit. Mais, de même qu'un dispositif mécanique oscillant (par exemple, une masse et un ressort) peut être conduit à une réponse non linéaire par

l'application de forces suffisamment grandes, un rayon de lumière extrêmement intense peut provoquer des effets optiques non linéaires appréciables.

Les champs électriques associés aux faisceaux de lumière provenant de sources ordinaires (ou traditionnelles) sont beaucoup trop faibles pour qu'un tel comportement soit facilement observable. C'est pour cette raison, en plus d'un manque initial de moyens techniques, qu'on dû attendre l'arrivée du laser pour pouvoir obtenir des niveaux suffisamment puissants en optique. Pour citer un exemple des valeurs de champs qu'il est possible d'attendre actuellement, on considère qu'une bonne lentille peut focaliser un faisceau laser sur un diamètre à peu près égal à 10^{-3} cm, ce qui correspond approximativement à une surface de 10^{-9} m². Une impulsion de 200 mégawatts provenant d'un laser à rubis déclenché doit alors produire un éclairement de 20×10^{16} W/m². Il s'ensuit (problème 13.27) que l'amplitude du champ électrique correspondant est donnée par :

$$E_0 = 27,4 \left(\frac{I}{n} \right)^{1/2} \quad (13.30)$$

Dans ce cas particulier, pour $n \approx 1$, l'amplitude du champ est à peu près égale à $1,2 \times 10^8$ V/m. C'est plus qu'il n'en faut pour causer un claquage de l'air (environ 3×10^6 V/m), et inférieur de quelques ordres de grandeur aux champs typiques qui assurent la cohésion d'un cristal (le champ de cohésion de l'électron dans un atome d'hydrogène est de 5×10^{11} V/m). La possibilité d'obtention de tels champs, qui peuvent même être encore plus élevés (10^{12} V/m), a permis la réalisation de nombreux phénomènes et composants non linéaires très importants. On limitera la présente discussion à la considération des phénomènes non linéaires associés à des milieux passifs (c'est-à-dire des milieux qui fonctionnent essentiellement comme catalyseurs sans manifester leurs propres fréquences caractéristiques). Plus spécifiquement, on considérera la rectification optique, la génération d'harmoniques optiques, le mixage de fréquences et la lumière autofocalisante. Cependant, on ne parlera pas des diffusions Raman Rayleigh et Brillouin stimulées, qui illustrent les phénomènes d'optique non linéaire survenant dans des milieux actifs (imposant leurs fréquences caractéristiques à l'onde lumineuse*).

Comme on s'en souvient, le champ électromagnétique d'une onde lumineuse se propageant dans un milieu, exerce

*Voir A. Ghatak et K. Thyagarajan, *Contemporary Optics*, p. 214.

*Pour un traitement plus poussée, voir N. Bloembergen, *Nonlinear Optics*, ou G. C. Baldwin, *An Introduction to Nonlinear Optics*.

des forces sur les liaisons faibles de ses électrons périphériques (ou de valence). D'ordinaire, ces forces sont assez petites, et dans un milieu isotrope linéaire, la polarisation électrique résultante est parallèle, et directement proportionnelle au champ appliqué. En effet, la polarisation suit le champ, et si ce dernier est harmonique, la polarisation l'est également. Par conséquent, on peut écrire :

$$P = \epsilon_0 \chi E \quad (13.31)$$

où χ est une constante sans dimension appelée *susceptibilité électrique*. De manière évidente, dans le cas extrême de champs très importants, on peut s'attendre à ce que P sature, car il ne peut pas augmenter indéfiniment de façon proportionnelle à E (c'est déjà ce qui se passe pour H dans le cas familier de matériaux ferromagnétiques, où le moment magnétique devient saturé pour des valeurs de H assez basses). Ainsi, lorsque E augmente, on peut s'attendre à ce que la non-linéarité, généralement insignifiante, augmente graduellement. Comme les directions de \vec{P} et de \vec{E} coïncident dans le cas le plus simple d'un milieu isotrope, on peut formuler la polarisation comme un développement en série :

$$P = \epsilon_0(\chi E + \chi_2 E^2 + \chi_3 E^3 + \dots) \quad (13.32)$$

La susceptibilité linéaire usuelle, χ , est beaucoup plus grande que les coefficients des termes non linéaires, χ_2 , χ_3 etc. Ainsi, ces derniers ne contribuent sensiblement que pour des champs élevés. Supposons maintenant une onde lumineuse :

$$E = E_0 \sin \omega t$$

incidente sur le milieu. La polarisation électrique résultante :

$$P = \epsilon_0 \chi E_0 \sin \omega t + \epsilon_0 \chi_2 E_0^2 \sin^2 \omega t + \epsilon_0 \chi_3 E_0^3 \sin^3 \omega t + \dots \quad (13.33)$$

peut être réécrite sous la forme :

$$P = \epsilon_0 \chi E_0 \sin \omega t + \frac{\epsilon_0 \chi_2}{2} E_0^2 (1 - \cos 2\omega t) + \frac{\epsilon_0 \chi_3}{4} E_0^3 (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t) + \dots \quad (13.34)$$

Lorsque les harmoniques traversent le milieu, ils créent ce qui pourrait être vu comme une onde de polarisation, c'est-à-dire une redistribution ondulante de charges à l'intérieur du matériau, en réponse au champ. Si le terme linéaire était le seul qui

soit efficace, l'onde de polarisation électrique correspondrait à un courant oscillatoire qui suivrait de près la lumière incidente. La lumière émise par un tel procédé serait l'onde réfractée usuelle, se propageant généralement avec une vitesse réduite v et possédant la même fréquence que la lumière incidente. En revanche, la présence de termes d'ordre supérieur dans l'équation (10.33) implique que l'onde de polarisation n'a pas le même profil harmonique que le champ incident. En fait, l'équation (13.34) peut être comparée à une représentation en séries de Fourier du profil altéré de $P(t)$.

13.4.1 Rectification optique

Le second terme de l'équation (13.34) a deux composantes de grand intérêt. En premier, il existe un *potentiel de polarisation constant ou continu*, proportionnel à E_0^2 . Par conséquent, si un faisceau intense polarisé linéairement traverse un cristal approprié (piézoélectrique), la présence d'une non-linéarité quadratique va, en partie, se manifester par une polarisation électrique constante du milieu. Une différence de tension, proportionnelle à l'éclairement du faisceau, va alors apparaître dans le cristal. Cet effet, par analogie avec son équivalent en radiofréquence, est connu sous le nom de **rectification optique**.

13.4.2 Génération d'harmoniques

Le terme $\cos 2\omega t$ [équation (13.34)] correspond à la variation de la polarisation électrique à une fréquence double de celle du fondamental (c'est-à-dire, double de celle de l'onde incidente). La lumière re-rayonnée, par les oscillateurs forcés, possède, elle-aussi, une composante à cette même fréquence, 2ω . Ce procédé est connu sous le nom de **génération de second harmonique**, ou SHG. En termes de représentation photonique, on peut imaginer deux photons identiques d'énergie $h\omega$ qui s'unissent à l'intérieur du milieu pour former un seul photon d'énergie $h2\omega$. En 1961, Peter A. Franken et plusieurs de ses collaborateurs de l'université du Michigan furent les premiers à observer expérimentalement la génération de second harmonique. Ils focalisèrent une impulsion de 3 kW de lumière rouge en provenance d'un laser à rubis (694,3 nm) sur un cristal de quartz. Une fraction à peu près égale à 10^{-8} de cette onde incidente fut convertie en seconde harmonique ultraviolet à 347,15 nm.

Pour un matériau donné, si $P(E)$ est une fonction impaire, (c'est-à-dire, si inverser la direction du champ \vec{E} inverse simplement la direction de \vec{P}), alors les puissances paires de E

doivent disparaître dans l'équation (13.32). C'est exactement ce qui se passe dans un milieu isotrope, comme le verre ou l'eau, car il n'y existe pas de directions favorisées (vrai dans tout liquide). De plus, dans des cristaux comme la calcite, qui ont une structure comportant un *centre de symétrie* ou un *centre d'inversion*, une inversion de tous les axes de coordonnées doit laisser inchangées les relations mutuelles entre les quantités physiques. Ainsi, on ne peut pas avoir d'harmoniques pairs avec des matériaux de cette sorte. La génération de troisième harmonique (THG) peut en revanche, exister, on l'a observée dans plusieurs matériaux (p. 615), dont la calcite. La condition requise pour la génération de second harmonique par un cristal (en l'absence de symétrie d'inversion) est aussi la condition nécessaire pour qu'il soit également piézo-électrique. Sous pression, un cristal piézoélectrique [comme le quartz, le phosphate dihydrogéné de potassium (KDP), ou le phosphate dihydrogéné d'ammonium (ADP)], subit une distorsion asymétrique de sa distribution de charges, ce qui produit une tension. Sur les 32 classes de cristaux, 20 sont de cette sorte et peuvent donc être utiles pour la SHG. La simple expression scalaire [équation (13.32)] n'est en fait pas une description adéquate d'un cristal diélectrique typique. Les choses sont beaucoup plus compliquées car les composantes du champ selon plusieurs directions différentes d'un cristal peuvent affecter la polarisation électrique dans n'importe quelle direction. Un traitement complet nécessite que \vec{P} et \vec{E} soient reliés non pas par un seul scalaire mais par un tenseur, le tenseur de susceptibilité*.

Une difficulté majeure pour la génération de seconds harmoniques avec des puissances notables provient de la dépendance en fréquence de l'indice de réfraction, c'est-à-dire de la dispersion. Au moment initial, où l'onde incidente (ou onde ω) commence à créer le second harmonique (ou onde 2ω), les deux ondes sont cohérentes. Au fur et à mesure que l'onde ω se propage au travers du cristal, elle continue à en créer, ces contributions interférant de manière constructive à la condition qu'elles maintiennent entre elles une relation de phase appropriée. Or, l'onde ω voyage à une vitesse de phase v_ω qui est d'ordinaire différente de celle $v_{2\omega}$ de l'onde 2ω . Ainsi, le second harmonique émis en cours de route tombe périodiquement en opposition de phase avec d'autres contributions 2ω , apparues précédemment. Lorsqu'on calcule l'éclairement du

second harmonique, $I_{2\omega}$, à la sortie d'une plaque d'épaisseur ℓ^\dagger , on obtient :

$$I_{2\omega} \propto \frac{\sin^2 [2\pi(n_\omega - n_{2\omega})\ell/\lambda_0]}{(n_\omega - n_{2\omega})^2} \quad (13.35)$$

(figure 13.56). Cela démontre que $I_{2\omega}$ a sa valeur maximale lorsque $\ell = \ell_c$, où :

$$\ell_c = \frac{1}{4} \frac{\lambda_0}{|n_\omega - n_{2\omega}|} \quad (13.36)$$

Ce paramètre est communément connu sous le nom de *longueur de cohérence* (un autre nom aurait été mieux adapté). Celle-ci est généralement de l'ordre de $20 \lambda_0$.

En dépit de cet effet, il est possible d'optimiser l'efficacité de la SHG par une *adaptation d'indice (index matching)*, qui annule les effets indésirables de la dispersion. En bref, on fait en sorte que $n_\omega = n_{2\omega}$. Un matériau communément utilisé en SHG est le KDP. Il est piézoélectrique, transparent mais aussi biréfringent uniaxe négatif. De plus, il possède la propriété intéressante suivante : si la lumière incidente est une *onde ordinaire* polarisée linéairement, le second harmonique est une *onde extraordinaire*. Comme on peut le voir sur la figure 13.57, si la lumière se propage à l'intérieur d'un cristal de KDP dans la direction faisant l'angle θ_0 par rapport à l'axe optique, l'indice $n_{o\omega}$ de l'onde ordinaire à ω sera égal à l'indice du second harmonique extraordinaire $n_{e2\omega}$. Les ondelettes du second harmonique vont alors interférer de manière constructive, augmentant par-là l'efficacité de conversion de plusieurs ordres de grandeur. Les générateurs de seconds harmoniques sont simplement des cristaux coupés et orientés de manière appropriée. Ils sont disponibles dans le commerce, mais il faut se rappeler que θ_0 est une fonction de λ , et que chacun de ces matériaux fonctionne à une fréquence donnée. Dernièrement, on a réussi à produire 1 W continu à 532,3 nm en plaçant un cristal de niobate sodium barium dans la cavité d'un laser de 1 W à 1,06 μm . Le fait que l'onde ω fasse des aller-retour dans le cristal augmente l'efficacité totale de la conversion.

La génération d'harmoniques optiques a vite perdu sa qualité exotique initiale pour devenir un procédé commercial de routine au début des années 1980. Il y a eu aussi des réalisations techniques excitantes, comme l'ensemble des doubleurs de fréquence de 74 cm de diamètre (voir photo) du programme de

*Il n'y a d'ailleurs rien d'extraordinaire à un tel comportement, cela arrive tout le temps. Il y a des tenseurs d'inertie, des tenseurs de coefficient de démagnétisation, des tenseurs de contraintes et ainsi de suite.

†Voir, par exemple, B. Lengyel, *Introduction to Laser Physics*, Chapitre VII. Il s'agit d'un traitement élémentaire très fin.

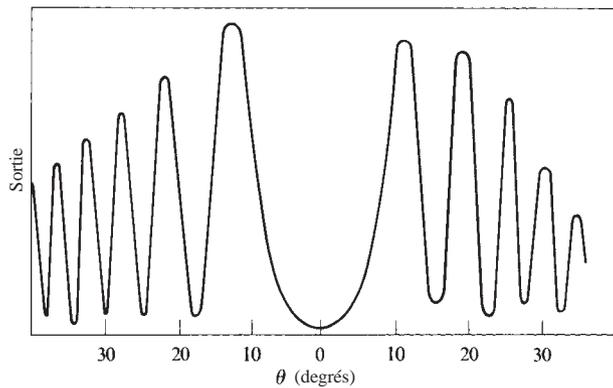
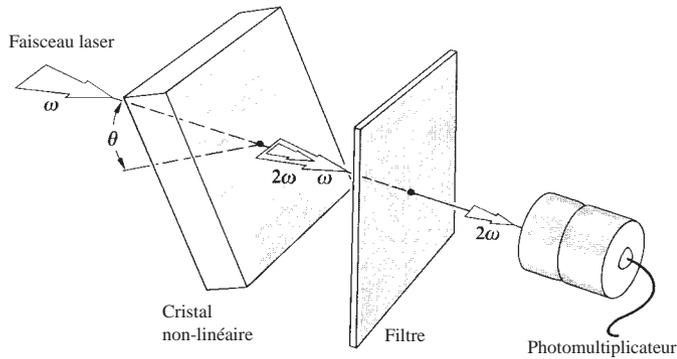


Figure 13.56 Génération du second harmonique en fonction de θ pour une plaque de quartz de 0,78 mm d'épaisseur. Les pointes se produisent lorsque la largeur effective est un multiple de ℓ_c . [D'après P. D. Maker, R. W. Terhune, M. Nisenoff, et C. M. Savage, *Phys. Rev. Letters* **8**, 21 (1962).]

fusion laser Nova, qui a conduit à son tour au système de triplement de fréquence Omega une dizaine d'années plus tard (p. 615). La fonction de Nova était de faire passer plus de 80 % de l'émission infrarouge (1,05 μm) du laser verre-néodyme, à une longueur d'onde plus efficace pour la fusion. À cause de sa taille importante, le convertisseur était une mosaïque alignée de panneaux de plus petits cristaux de KDP formant deux couches, l'une derrière l'autre. Pour obtenir le second harmonique (à 0,53 μm dans le vert), l'ensemble est positionné de façon à ce que chaque couche fonctionne indépendamment pour produire deux composantes décalées en fréquence, qui se superposent. Chacune sort d'une couche de cristaux avec une polarisation orthogonale. Le troisième harmonique (à 0,35 μm dans l'UV)

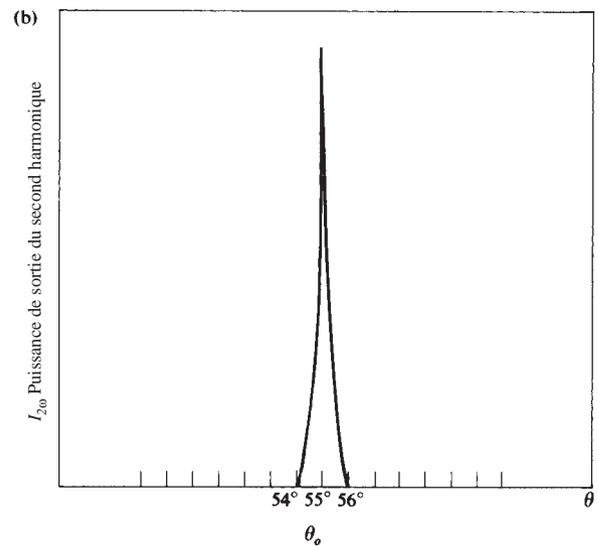
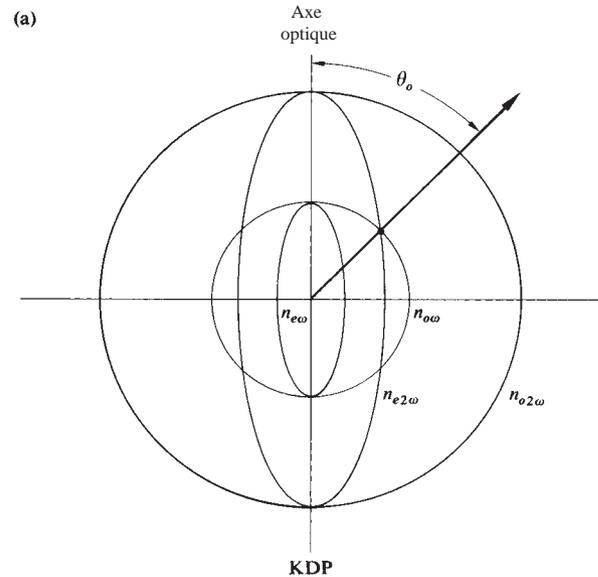


Figure 13.57 (a) Ellipsoïdes des indices de réfraction du KDP. (b) $I_{2\omega}$ en fonction de l'orientation du cristal pour le KDP. (D'après Maker et al.)

est créé en réorientant ensemble, suivant l'angle approprié à l'adaptation de phase, de manière à transférer environ les deux tiers de l'énergie du faisceau dans le second harmonique après traversée de la première couche de cristaux. La deuxième couche mélange l'IR restant et le vert du second harmonique pour produire le troisième harmonique, dans l'ultraviolet.



Le convertisseur de fréquence en KDP pour le laser Nova.
(Photo Lawrence Livermore National Laboratory.)

13.4.3 Le mélange de fréquences

Une autre situation, d'intérêt pratique considérable, fait intervenir le *mélange* de deux ou de plusieurs faisceaux primaires de différentes fréquences dans un diélectrique non linéaire. On peut comprendre assez facilement le procédé en substituant une onde de la forme :

$$E = E_{01} \sin \omega_1 t + E_{02} \sin \omega_2 t \quad (13.37)$$

dans l'expression la plus simple de P donnée par l'équation (13.32). La contribution du deuxième ordre est alors :

$$\epsilon_0 \chi_2 (E_{01}^2 \sin^2 \omega_1 t + E_{02}^2 \sin^2 \omega_2 t + 2E_{01}E_{02} \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t)$$

On peut exprimer les deux premiers termes respectivement comme des fonctions de $2\omega_1$ et $2\omega_2$, alors que la dernière quantité donne naissance aux termes en somme et en différence de fréquences, $\omega_1 + \omega_2$ et $\omega_1 - \omega_2$.

Si l'on choisit l'approche quantique, on peut dire que le photon de fréquence $\omega_1 + \omega_2$ correspond simplement à une fusion des deux photons originaux en un nouveau photon, comme c'était déjà le cas de la SHG, où les deux quanta avaient la même fréquence. L'énergie et la quantité de mouvement des photons annihilés sont portées par le photon-source somme. La génération du photon différence ($\omega_1 - \omega_2$) est un peu plus compliquée à comprendre. La conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement impose le fait que, par interaction avec un photon à ω_2 , seul

le photon de fréquence élevée ω_1 disparaît, créant de ce fait deux nouveaux quanta, un photon à ω_2 et un photon à la différence.

En tant qu'application de ce phénomène, supposons que l'on communique, à l'intérieur d'un cristal non linéaire, une onde de fréquence ω_p de forte puissance, appelée *faisceau de pompe*, avec une *onde de signal* de fréquence inférieure ω_s et de faible niveau que l'on cherche à amplifier. Le faisceau de pompe est, de ce fait, converti en signal et en onde différence, appelée *idler* à la fréquence $\omega_i = \omega_p - \omega_s$. Si l'on fait battre le faisceau idler avec le faisceau de pompe, ce dernier fournit des quantités additionnelles d'idler et de signal, ce qui fait que les ondes de signal et d'idler sont amplifiées. Il s'agit en fait d'une extension, au domaine de l'optique, du concept bien connu de l'*amplification paramétrique*, dont l'utilisation dans les micro-ondes remonte à la fin des années 1940. Le premier *oscillateur paramétrique optique*, qui fut mis en service dès 1965, est décrit à la figure 13.58. On avait traité les faces planes et parallèles des extrémités d'un cristal non linéaire (niobate de lithium) pour former une cavité Fabry-Pérot. Les fréquences de signal et d'idler (de longueurs d'onde voisines de 1 000 nm) correspondaient à deux fréquences résonnantes de la cavité. Lorsque l'éclairement de la pompe était suffisamment élevé, une partie de son énergie était transférée dans les modes oscillatoires du signal et de l'idler, d'où un renforcement important de ces modes et l'émission d'un rayonnement cohérent à ces fréquences. Ce transfert d'énergie d'une onde à l'autre dans un milieu sans perte est typique des procédés paramétriques. En changeant l'indice de réfraction du cristal (par la température, par le champ électrique, etc.), on peut régler la fréquence de l'oscillation. Différentes configurations d'oscillateurs sont apparues depuis les débuts, à base d'autres matériaux non linéaires, comme le niobate de sodium et de barium. L'oscillateur paramétrique optique est une source de rayonnement cohérent semblable au laser, réglable sur une large bande spectrale, de l'IR jusqu'à l'UV.

13.4.4 Autofocalisation

Lorsqu'on soumet un milieu diélectrique à un champ électrique variable dans l'espace (en d'autres termes, lorsqu'il y a un gradient de champ parallèle à \vec{P}), il en résulte une force interne, ce qui a pour effet d'altérer sa densité, de changer sa permittivité, et donc de faire varier son indice de réfraction, qu'il s'agisse d'un milieu isotrope linéaire ou non linéaire.

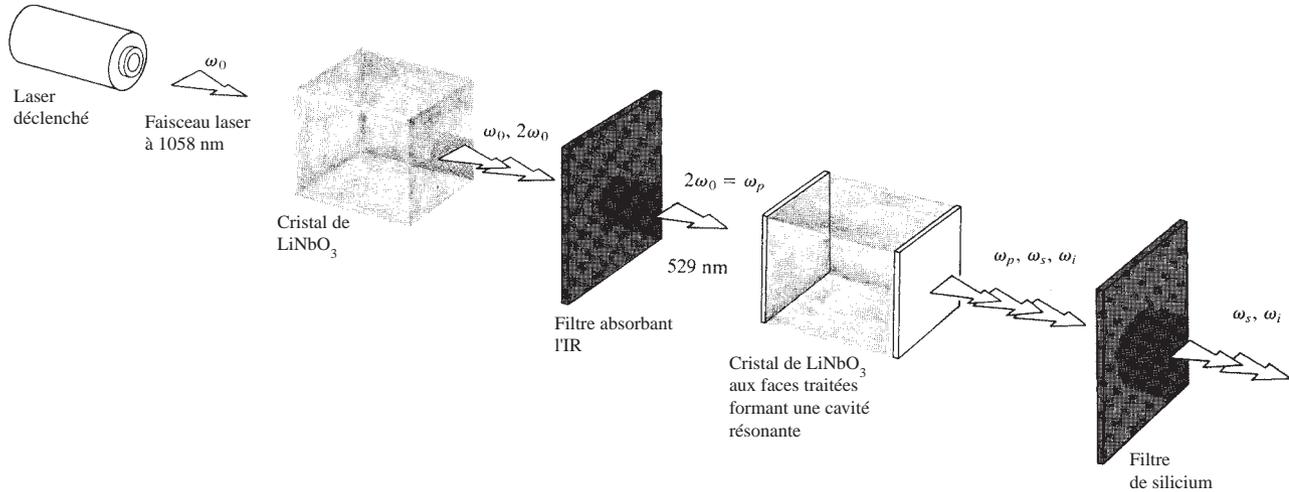


Figure 13.58 Un oscillateur optique paramétrique. [D'après J. A. Giordmaine et R. C. Miller, *Phys. Rev. Letters* **4**, 973 (1965).]

Supposons à présent que l'on dirige un faisceau laser intense, d'éclairement gaussien vers un spécimen. Les variations de l'indice de réfraction, provoquées par le faisceau, font que le milieu va se comporter dans la région du faisceau comme une lentille convergente. En conséquence, le faisceau se focalise, ce qui entraîne une augmentation encore plus forte de l'éclairement. La contraction du faisceau se poursuit dans un processus appelé **autofocalisation**. L'effet peut être entretenu

jusqu'à ce que le faisceau atteigne un diamètre de filament (environ 5×10^{-6} m), quand il est totalement guidé comme s'il était dans une fibre optique à gradient d'indice implanté dans le milieu*.

*Voir J. A. Giordmaine, « Nonlinear Optics ». *Phys. Today*, **39** (Janvier 1969).

EXERCICES ET PROBLÈMES

Les solutions complètes des exercices (excepté ceux ayant un astérisque) figurent à la fin de l'ouvrage.

13.1* Au bout d'un certain temps, un cube d'acier brut (10 cm de côté) placé à l'intérieur d'un four à une température de 400 °C atteint l'équilibre thermique. Sachant que son émissivité totale est de 0,97, déterminer le flux émis par chaque face du cube.

13.2 Une personne normalement constituée présente une surface corporelle totale de 1,4 m² et une température de peau moyenne de 33 °C. Déterminer la puissance totale émise par unité de surface, l'émittance, si l'émissivité totale d'une personne est de 97 % et la

température ambiante de 20 °C. Combien d'énergie le corps humain rayonne-t-il par seconde ?

13.3 En utilisant un pyromètre optique, on mesure une valeur d'émittance égale à 22,8 W/cm² par un petit trou pratiqué dans un four. Calculer la température interne du four.

13.4 La température d'un objet assimilé à un corps noir est portée de 200 K à 2 000 K. Déterminer l'accroissement correspondant d'énergie rayonnée.

13.5* La température de peau moyenne d'un être humain est de 33 °C. En considérant le corps humain comme un corps noir rayonnant à cette température, déterminer la longueur d'onde pour laquelle est émis le maximum d'énergie.

13.6* Quelle est la longueur d'onde qui transporte le plus d'énergie lorsqu'un objet assimilé à un corps noir rayonne dans un environnement à température ambiante (20 °C) ?

13.7* La température de surface d'une étoile blanche bleutée de classe O est environ 40×10^3 K. À quelle fréquence émet-elle son maximum d'énergie ?

13.8* Lorsqu'on enregistre le spectre du Soleil hors atmosphère, on peut observer un pic d'excitance spectrique à environ 465 nm. Calculer la température de surface du Soleil si on l'assimile à un corps noir. Cette approximation conduit en fait à un résultat trop élevé d'environ 400 K.

13.9* Un objet assimilé à un corps noir émet un maximum d'énergie par unité de longueur d'onde dans le rouge ($\lambda = 680$ nm). Quelle est sa température de surface ?

13.10* La densité spectrale d'excitance (énergie émise par unité de surface, unité de temps et unité de longueurs d'onde) d'un corps noir à une température T est donnée par :

$$I_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \left[\frac{1}{\frac{hc}{\lambda k_B T} - 1} \right]$$

À une température donnée, la puissance totale rayonnée par unité de surface du corps noir est égale à l'aire sous la courbe de I_λ en fonction de λ . Utiliser cette relation pour retrouver la loi de Stefan-Boltzmann. [Astuce : pour simplifier l'exponentielle, effectuer un changement de variable dans l'intégrale en posant :

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$$

Utiliser le fait que $\int_0^\infty x^n \frac{dx}{e^x - 1} = \Gamma(n+1) \zeta(n+1)$ où la fonction gamma est donnée par $\Gamma(n+1) = n!$ et la fonction zéta de Riemann pour $n = 3$ est $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.]

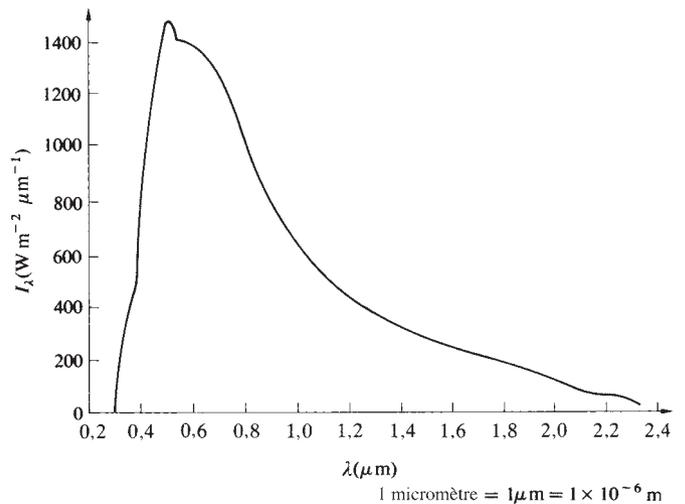
13.11* En physique atomique, l'énergie est souvent mesurée en électron-volts. Retrouver l'expression suivante pour l'énergie d'un photon en eV lorsque la longueur d'onde est en nanomètres :

$$\mathcal{E} = \frac{1\,239.8 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\lambda}$$

Quelle est l'énergie d'un photon à 600 nm ?

13.12 La figure P.13.12 montre l'éclairement spectrique incident sur une surface horizontale, de jour, par beau temps, au niveau de la mer et avec le Soleil au zénith. Quel est le photon le plus énergétique que l'on peut s'attendre à rencontrer (en eV et en J) ?

Figure P.13.12



13.13* Soit une ampoule jaune (550 nm) de 100 W placée à 100 m d'un obturateur de 3 cm de diamètre. En considérant que l'ampoule a un rendement énergétique de 2,5 %, combien de photons passent par l'ouverture si l'obturateur est ouvert pendant $\frac{1}{1000}$ s ?

13.14 La *constante solaire* est l'éclairement sur une surface sphérique centrée sur le Soleil de même rayon que celui de l'orbite de la Terre. Sa valeur est de $0,133 - 0,14$ W/cm². Si l'on considère une longueur d'onde moyenne de 700 nm, combien de photons arriveront par seconde, au maximum, sur chaque mètre carré d'un panneau solaire situé au-dessus de l'atmosphère ?

13.15 Une cellule de 50 cm³ est remplie d'argon à une pression de 20,3 Pa et une température de 0 °C. On considère que pratiquement tous les atomes se situent dans leur état fondamental. Une lampe flash entourant l'échantillon excite 1 % des atomes dans un même état excité dont la durée de vie est de $1,4 \times 10^{-8}$ s. Quel est le débit maximum de photons émis par le gaz (débit chutant bien entendu avec le temps) ? Considérer que le seul mécanisme en jeu est celui de l'émission spontanée et que le milieu est un gaz idéal.

13.16* Montrer que, pour un système d'atomes et de photons en équilibre à une température T , le rapport entre le taux de transition de l'émission stimulée et celui de l'émission spontanée est donné par :

$$\left[\frac{1}{\frac{h\nu}{e^{k_B T}} - 1} \right]$$

13.17* Un système d'atomes en équilibre thermique émet et absorbe des photons de 2 eV. Déterminer le rapport entre le taux de

transition de l'émission stimulée et celui de l'émission spontanée à une température de 300 K. Discuter des implications de cette réponse. [Astuce : voir le problème précédent].

13.18 Refaire le problème précédent pour une température de $30,0 \times 10^3$ K et comparer les résultats des deux calculs.

13.19* Pour un système d'atomes (en équilibre) à deux niveaux, montrer que, à hautes températures où $k_B T \gg \mathcal{E}_j - \mathcal{E}_i$, les densités de population des deux niveaux tendent à devenir égales.

[Astuce : former le rapport entre le taux de transition de l'émission totale et celui de l'absorption].

13.20* Un rayonnement à 21 cm venant de l'espace est détecté depuis la Terre. Son origine provient des grands nuages spatiaux d'hydrogène gazeux. En prenant la température du fond de l'Univers égale à 3 K, déterminer le rapport entre le taux de transition de l'émission stimulée et celui de l'émission spontanée, et commenter le résultat.

13.21* Un faisceau ($\lambda = 632,8$ nm) provenant d'un laser He-Ne, initialement de 3 cm de diamètre, éclaire un mur situé à 100 m. Étant donné que le système est limité par la diffraction, quelle est la taille de la tache lumineuse sur le mur ?

13.22* Estimer approximativement la quantité d'énergie qui peut être délivrée par un laser impulsif à rubis dont le cristal fait 5 mm de diamètre pour 0,05 m de long. Considérer que les impulsions ont une durée de $5,0 \times 10^{-6}$ s. La densité de l'oxyde d'aluminium (Al_2O_3) est de $3,7 \times 10^3$ kg/m³. Utiliser cette donnée pour commenter la figure 13.6, ainsi que le fait que les ions chrome font une transition laser de 1,79 eV. Quelle puissance crête est disponible par impulsion ?

13.23 Quel est le taux de transition pour les atomes de néon dans un laser He-Ne si la différence d'énergie est de 1,96 eV pour l'émission à 632,8 nm et la puissance de sortie de 1 mW ?

13.24* Étant donné qu'un laser à rubis opérant à 694,3 nm a une bande spectrale de 50 MHz, quelle est sa largeur de bande, en nm ?

13.25* Déterminer la différence de fréquences entre deux modes longitudinaux d'une cavité résonante pour un laser à gaz typique de 25 cm de long ($n \approx 1$).

13.26* Un laser à gaz continu He-Ne a une largeur de bande Doppler d'environ 1,4 GHz à 632,8 nm. En prenant $n = 1$, déterminer la longueur maximale de la cavité pour un fonctionnement avec un seul mode axial. Faire un dessin des lignes de transition et des modes de cavité correspondants.

13.27 Montrer que l'amplitude maximale du champ électrique, E_{max} , correspondant à un éclairement donné I est :

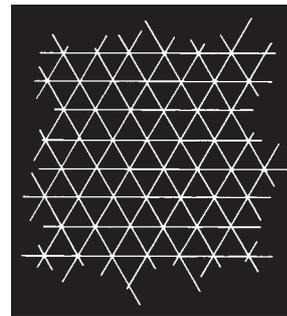
$$E_{\text{max}} = 27,4 \left(\frac{I}{n} \right)^{1/2} \text{ en V/m}$$

où n est l'indice de réfraction du milieu.

13.28* Un laser He-Ne opérant à 632,8 nm a un diamètre de waist intérieur de 0,6 mm. Calculer la largeur angulaire totale (ou divergence) du faisceau.

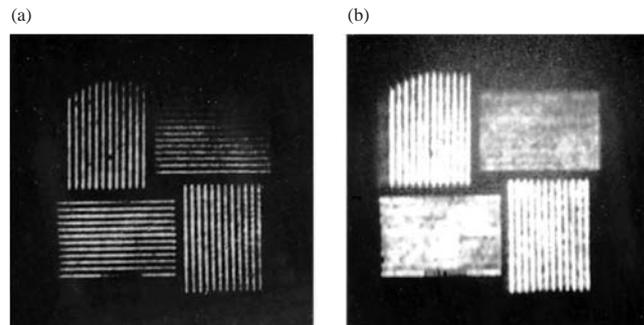
13.29 À quoi ressemblerait la figure de diffraction de la triple grille de la figure P.13.29 ?

Figure P.13.29



13.30 Faire un dessin sommaire de la figure de diffraction de Fraunhofer de la diapositive de la figure P.13.30a. Comment devrait-on filtrer l'image pour arriver à la figure P.13.30b ?

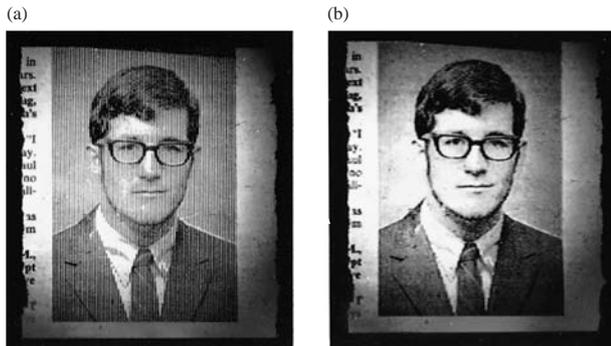
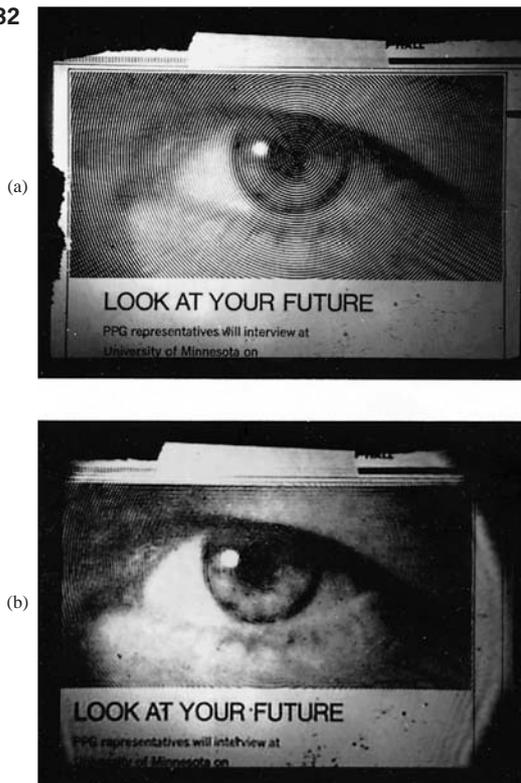
Figure P.13.30



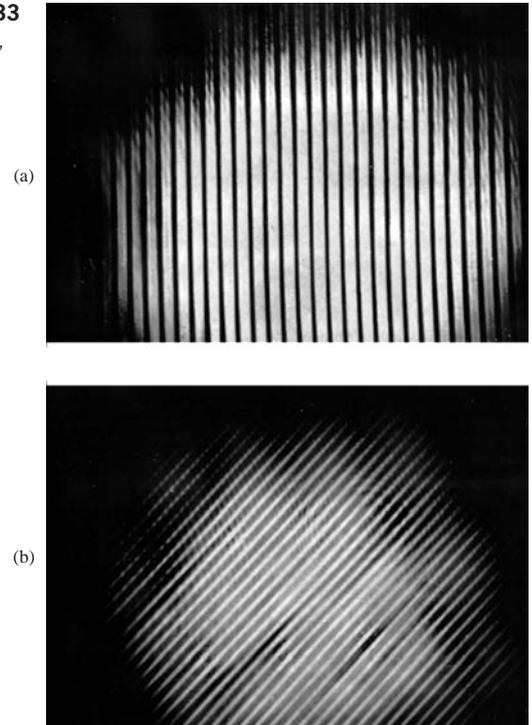
13.31 Refaire le problème précédent en utilisant la figure P.13.31.

13.32* Refaire le problème précédent en utilisant la figure P.13.32.

13.33 En considérant la figure 13.32, quel type de filtre spatial produirait chacune des figures montrées à la figure P.13.33 ?

Figure P.13.31 (Photos de R. A. Phillips.)**Figure P.13.32**(Photos
R. A. Phillips.)

13.34 Avec la figure 13.31 en tête, montrer que le grossissement transversal du système est donné par $-f_i/f_o$ et représenter le tracé de rayons correspondant. Tracer un rayon passant par le centre de la première lentille avec un angle θ par rapport à l'axe optique. Depuis le point de l'intersection de ce rayon avec Σ_o , tracer un rayon passant par le centre de la deuxième lentille avec un angle Φ . Démontrer que $\Phi/\theta = f_i/f_o$. En utilisant la notion de fréquence spatiale, montrer,

Figure P.13.33(Photos D. Dutton,
M. P. Givens, et
R. E. Hopkins.)

d'après l'équation (11.64) que k_o dans le plan objet est relié à k_i dans le plan image par :

$$k_i = k_o(f_i/f_o)$$

Quelle est la conséquence sur la taille de l'image lorsque $f_i > f_o$? Que peut-on dire sur la période spatiale des données d'entrée en comparaison avec l'image de sortie ?

13.35 Un réseau de diffraction comportant 50 traits par cm est l'objet de l'ordinateur optique présenté à la figure 13.31. S'il est illuminé de manière cohérente par des ondes planes dans le vert (543,5 nm) provenant d'un laser He-Ne, et que chaque lentille a 100 cm de focale, quel sera l'espacement entre les taches de diffraction dans le plan de la transformée ?

13.36* Soit un réseau en cosinus (i.e. une diapositive dont le profil de transmission *en amplitude* est en cosinus) avec une période spatiale de 0,01 mm. Le réseau est éclairé par des ondes planes quasi monochromatiques à $\lambda = 500$ nm, et le montage est identique à celui de la figure 13.31. On suppose que les distances focales des lentilles de Fourier et d'imagerie sont respectivement de 2 m et de 1 m.

a) Commenter la figure de diffraction qui serait obtenue et déterminer le type de filtre qui ne laisserait passer *que* les termes de premier ordre. Décrire l'ensemble en détail.

- b) À quoi ressemblerait l'image sur Σ_i avec le filtre en place ?
 c) Comment peut-on faire pour ne laisser passer que le terme continu et à quoi ressemblerait alors l'image ?

13.37 Supposons que l'on insère, dans le plan de la transformée du problème précédent, un masque qui obstrue tout, sauf la contribution en diffraction $m = +1$. À quoi ressemblerait l'image reformée sur Σ_i ? Expliquer le raisonnement. On suppose que l'on enlève ensuite seulement le terme $m = +1$ ou le $m = -1$. À quoi ressemblerait alors l'image ?

13.38* En considérant le problème 13.36 avec le réseau en cosinus orienté horizontalement, représenter l'amplitude du champ électrique le long de y' lorsqu'il n'y a pas de filtrage. Tracer la loi d'éclairement image correspondante. À quoi ressemblerait le champ électrique de l'image si le terme continu était filtré ? Le tracer, ainsi que la nouvelle loi d'éclairement. Que peut-on dire de la fréquence spatiale de l'image avec et sans le filtre. Relier les réponses à la figure 11.13.

13.39 On remplace le réseau en cosinus du problème précédent par un réseau à profil carré, consistant en une alternance de nombreuses bandes transparentes et opaques, de largeurs égales. On filtre ensuite tous les termes dans le plan de Fourier, excepté le terme d'ordre zéro et les deux points de diffraction de premier ordre. Ceux-ci ont des éclairements relatifs de 1, de 0,36 et de 0,36. Comparer ceux-ci aux figures 7.32a et 7.33. Déterminer une expression pour la forme générale de la distribution d'éclairement dans le plan image. Tracer celle-ci. À quoi ressemblerait le système de franges résultant ?

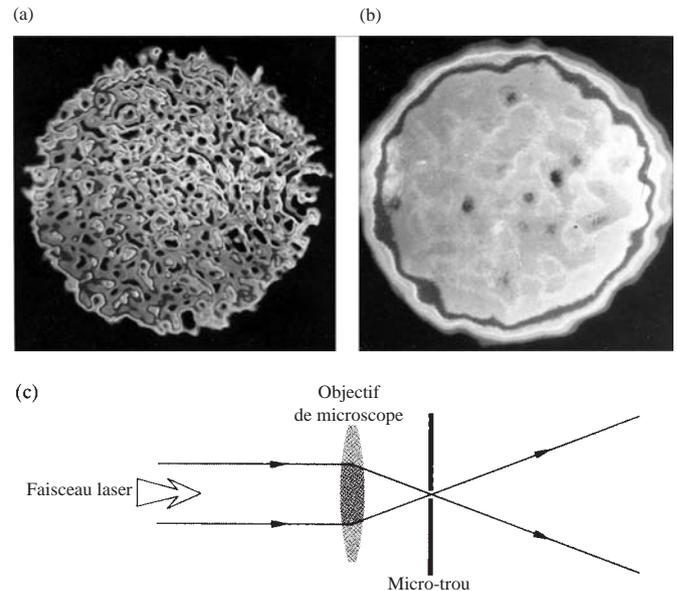
13.40 Une fine grille métallique carrée comportant 50 fils par cm est placée verticalement dans le plan objet de l'ordinateur optique de la figure 13.30. Si les lentilles ont chacune 1 m de focale, quelle doit être la longueur d'onde du rayonnement, si l'on veut que les taches de diffraction aient une séparation horizontale et verticale de 2 mm dans le plan de Fourier. Quel est le pas de la grille dans le plan image ?

13.41* Soit un masque opaque comportant un ensemble de petits trous circulaires de même taille constituant un motif ordonné, comme si chaque trou était disposé aux quatre coins des cases d'un échiquier. Un robot vient alors perforer d'autres trous de manière complètement aléatoire. L'écran résultant sert ensuite d'objet dans un montage équivalent à celui du problème 13.39. À quoi ressemble la figure de diffraction ? Si les trous du réseau régulier sont espacés chacun de 0,1 mm, quelle est la fréquence spatiale qui leur correspond sur l'image ? Décrire un filtre qui pourrait enlever les trous aléatoires sur l'image finale.

13.42* Soit une grande diapositive sur laquelle figure l'image d'une personne constituée d'une distribution régulière de petits trous circulaires, tous de la même taille, mais chacun avec sa propre densité, pour définir l'amplitude du champ local. On considère que la diapositive est éclairée par une onde plane. Discuter l'idée de représenter l'amplitude du champ électrique à la sortie de la diapositive comme le produit (en moyenne) d'une distribution régulière, à deux dimensions, d'une fonction en « cylindre » (figure 11.4), par la fonction « image » continue à deux dimensions : la première est une « planche à clous » et la seconde, la photographie d'origine. En appliquant le théorème de convolution, déterminer la répartition de la lumière dans le plan de Fourier. Comment peut-elle être filtrée afin de produire une image de sortie continue ?

13.43* Le montage de la figure P.13.43 est utilisé pour convertir un faisceau laser collimaté en onde sphérique. Le trou d'aiguille purifie le faisceau ; il élimine les effets de diffraction dus aux poussières présentes sur la lentille. Quel est le principe de ce dispositif ?

Figure P.13.43 (a) et (b) Un faisceau laser de haute puissance avant et après filtrage spatial. (Photos Lawrence Livermore National Laboratory.)



13.44 Quelle serait la figure de speckle si l'on envoyait un faisceau laser sur une suspension comme du lait, plutôt que sur un mur lisse ?

Annexe 1

Théorie électromagnétique

ÉQUATIONS DE MAXWELL SÔUS FORME DIFFÉRENTIELLE

Les équations de Maxwell sous forme intégrale sont les quatre expressions suivantes :

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\ell} = - \iint_A \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \quad [3.5]$$

$$\oint_C \frac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu} \cdot d\vec{\ell} = \iint_A \left(\vec{\mathbf{J}} + \epsilon \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\mathbf{S}} \quad [3.13]$$

$$\oiint_A \epsilon \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iiint_V \rho \, dV \quad [3.7]$$

et

$$\oiint_A \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = 0 \quad [3.9]$$

où les différents paramètres sont, comme habituellement, en unités SI.

On peut écrire les équations de Maxwell sous une forme différentielle, plus utile pour obtenir les aspects ondulatoires du champ électromagnétique. Le passage entre les deux écritures se fait facilement en utilisant deux théorèmes de l'analyse vectorielle, à savoir, le théorème d'Ostrogradsky :

$$\oiint_A \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{\mathbf{F}} \, dV \quad (A1.1)$$

et le théorème de Stokes :

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\ell} = \iint_A \nabla \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \quad (A1.2)$$

Ici, la quantité $\vec{\mathbf{F}}$ n'est pas un vecteur fixe mais une fonction qui dépend des variables de position. C'est une règle qui associe un vecteur unique, par exemple, en coordonnées cartésiennes $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z)$, avec

chaque point de l'espace (x, y, z) . Les fonctions de ce type, qui représentent la valeur d'un vecteur, comme $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$, sont connues sous le nom de champs vectoriels.

En appliquant le théorème de Stokes à l'amplitude du champ électrique, on obtient :

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\ell} = \iint_A \nabla \times \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \quad (A1.3)$$

Si l'on compare cette expression avec l'équation (3.5), il suit que :

$$\iint_A \nabla \times \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = - \iint_A \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \quad (A1.4)$$

Ce résultat doit être vrai pour toute surface entourée par le chemin C . Cela ne peut être le cas que si les fonctions intégrées sont elles-mêmes égales, c'est-à-dire si :

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = - \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (A1.5)$$

Une application similaire du théorème de Stokes à $\vec{\mathbf{B}}$ conduit, en utilisant l'équation (3.13), à :

$$\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu \left(\vec{\mathbf{J}} + \epsilon \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \right) \quad (A1.6)$$

Le théorème d'Ostrogradsky appliqué à l'amplitude du champ électrique conduit à :

$$\oiint_A \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} \, dV \quad (A1.7)$$

En utilisant l'équation (3.7), on obtient alors :

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} \, dV = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho \, dV \quad (A1.8)$$

et comme cela doit être vrai quel que soit le volume (i.e. pour un domaine fermé arbitraire), les deux fonctions intégrées doivent être

égales. En conséquence, pour tout point (x, y, z, t) de l'espace et du temps :

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{A1.9})$$

De la même façon, si l'on applique le théorème d'Ostrogradsky au champ $\vec{\mathbf{B}}$ et si l'on le combine à l'équation (3.9), on obtient :

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad (\text{A1.10})$$

Les équations (A1.5), (A1.6), (A1.9), et (A1.10) sont les équations de Maxwell sous forme différentielle. Se référer aux équations (3.18) à (3.21) pour le cas simple de l'espace vide ($\rho = J = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$) en coordonnées cartésiennes.

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Pour obtenir l'équation d'onde électromagnétique sous sa forme la plus générale, on doit encore une fois considérer la présence d'un milieu. On a vu au paragraphe 3.5.1 qu'il est nécessaire d'introduire le vecteur polarisation $\vec{\mathbf{P}}$, qui est une mesure du comportement global du milieu, dans le sens où il représente le moment dipolaire électrique résultant par unité de volume. Comme le champ à l'intérieur du matériau a été modifié, on est amené à définir une nouvelle quantité de champ, le déplacement $\vec{\mathbf{D}}$:

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} \quad (\text{A1.11})$$

On a donc :

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{D}}}{\epsilon_0} - \frac{\vec{\mathbf{P}}}{\epsilon_0}$$

Le champ électrique interne $\vec{\mathbf{E}}$ est la différence entre le champ $\vec{\mathbf{D}}/\epsilon_0$ qui existerait en absence de polarisation, et le champ $\vec{\mathbf{P}}/\epsilon_0$ provenant de la polarisation.

Pour un matériau diélectrique, isotrope, linéaire, homogène, $\vec{\mathbf{P}}$ et $\vec{\mathbf{E}}$ sont dans la même direction et mutuellement proportionnels (colinéaires). Il résulte que $\vec{\mathbf{D}}$ est également proportionnel à $\vec{\mathbf{E}}$:

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}} \quad (\text{A1.12})$$

De la même façon que $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{D}}$ s'étend à travers l'espace et il n'est aucunement limité à la région occupée par le diélectrique, comme l'est $\vec{\mathbf{P}}$. Les lignes de $\vec{\mathbf{D}}$ commencent et finissent sur des charges libres en mouvement. Celles de $\vec{\mathbf{E}}$ commencent et finissent soit sur des charges libres soit sur des charges de polarisations liées. S'il n'y a pas de charges libres, comme cela peut être le cas au voisinage d'un diélectrique polarisé, ou dans le vide, les lignes de $\vec{\mathbf{D}}$ se referment sur elles-mêmes.

Comme, en général, la réponse d'un milieu optique à des champs $\vec{\mathbf{B}}$ est très semblable à celle du vide, il n'est pas nécessaire de détailler

le processus. Il suffit de dire que le matériau devient polarisé. On peut définir un vecteur de polarisation magnétique ou d'aimantation $\vec{\mathbf{M}}$ comme étant le moment dipolaire magnétique par unité de volume. Afin de caractériser l'influence du milieu magnétiquement polarisé, on introduit le vecteur auxiliaire $\vec{\mathbf{H}}$, traditionnellement appelé *champ magnétique*.

$$\vec{\mathbf{H}} = \mu_0^{-1} \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{M}} \quad (\text{A1.13})$$

Pour un milieu isotrope, linéaire (non ferromagnétique), homogène, $\vec{\mathbf{B}}$ et $\vec{\mathbf{H}}$ sont parallèles et proportionnels :

$$\vec{\mathbf{H}} = \mu^{-1} \vec{\mathbf{B}} \quad (\text{A1.14})$$

Avec les équations (A1.12) et (A1.14), on obtient une *équation constitutive* supplémentaire :

$$\vec{\mathbf{J}} = \sigma \vec{\mathbf{E}} \quad (\text{A1.15})$$

Connue sous le nom de *loi d'Ohm*, celle-ci constitue un énoncé d'une règle déterminée expérimentalement et valable pour des conducteurs à températures constantes. Le champ électrique, et donc la force agissant sur chaque électron d'un conducteur, déterminent le débit de charges. La constante de proportionnalité reliant $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{J}}$ est la conductivité du milieu considéré, σ .

Examinons l'environnement général d'un milieu isotrope, homogène, linéaire (non ferroélectrique et non ferromagnétique), au repos. En utilisant les relations constitutives, on peut réécrire les équations de Maxwell sous la forme :

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad [\text{A1.9}]$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad [\text{A1.10}]$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad [\text{A1.5}]$$

et

$$\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu \sigma \vec{\mathbf{E}} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \quad (\text{A1.16})$$

Si l'on veut que ces expressions mènent à une équation d'onde (2.61), il faut prendre les dérivées secondes par rapport aux variables d'espace. En prenant le rotationnel de l'équation (A1.16), on obtient :

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{B}}) = \mu \sigma (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) \quad (\text{A1.17})$$

Si l'on suppose que $\vec{\mathbf{E}}$ est une fonction de comportement approprié, on peut intervenir les dérivées par rapport au temps et à l'espace. On peut se servir de l'équation (A1.5) pour obtenir la dérivée seconde recherchée par rapport au temps.

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{B}}) = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2} \quad (\text{A1.18})$$

Le triple produit vectoriel peut être simplifié en utilisant l'identité entre opérateurs suivante :

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (A1.19)$$

Ainsi,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$$

donc, en coordonnées cartésiennes :

$$(\nabla \cdot \nabla) \vec{B} = \nabla^2 \vec{B} \equiv \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2}$$

Comme la divergence de \vec{B} est nulle, l'équation (A1.18) devient :

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (A1.20)$$

Une équation similaire est satisfaite par le champ électrique. En suivant sensiblement la même procédure que précédemment, on prend le rotationnel de l'équation (A1.5) :

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B})$$

En éliminant \vec{B} , celle-ci devient :

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Et en utilisant ensuite l'équation (A1.19), on arrive à :

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla(\rho/\epsilon)$$

en ayant utilisé le fait que :

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = \nabla(\rho/\epsilon)$$

Pour un milieu non chargé ($\rho = 0$),

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (A1.21)$$

Les équations (A1.20) et (A1.21) sont connues sous le nom *d'équations des télégraphistes**.

Dans les milieux non conducteurs, $\sigma = 0$, et ces équations deviennent :

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (A1.22)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (A1.23)$$

et, similairement,

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (A1.24)$$

et

$$\nabla^2 \vec{D} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0 \quad (A1.25)$$

Dans le cas particulier non conducteur du vide :

$$\rho = 0 \quad \sigma = 0 \quad K_e = 1 \quad K_m = 1$$

ces équations deviennent simplement :

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (A1.26)$$

et

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (A1.27)$$

Ces deux expressions décrivent des champs couplés dépendant du temps et de l'espace, et toutes deux ont la forme de l'équation d'onde différentielle.

.....
 *Pour une paire de fils parallèles qui pourrait servir de ligne télégraphique, la valeur finie de la résistance du fil résulte en une perte de puissance et en un échauffement par effet Joule. Une onde électromagnétique se propageant le long de cette ligne a de moins en moins d'énergie. Les dérivées premières par rapport au temps des équations (A1.20) et (A1.21) proviennent du courant de conduction et définissent la dissipation ou l'amortissement.

Annexe 2

Théorie de la diffraction de Kirchhoff

Afin de résoudre l'équation de Helmholtz [équation (10.113)], considérons deux fonctions scalaires U_1 et U_2 pour lesquelles le théorème de Green est :

$$\begin{aligned} & \iiint_V (U_1 \nabla^2 U_2 - U_2 \nabla^2 U_1) dV \\ &= \oiint_S (U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1) \cdot d\vec{S} \quad (\text{A2.1}) \end{aligned}$$

Il est clair que si U_1 et U_2 sont solutions de l'équation de Helmholtz, c'est-à-dire, si :

$$\nabla^2 U_1 + k^2 U_1 = 0$$

et

$$\nabla^2 U_2 + k^2 U_2 = 0$$

alors
$$\oiint_S (U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{A2.2})$$

Posons $U_1 = \tilde{\mathcal{E}}$, la partie spatiale d'une perturbation optique scalaire non spécifiée [équation (10.112)] et posons :

$$U_2 = \frac{e^{ikr}}{r}$$

où r est mesuré depuis un point P . Ces deux fonctions satisfont clairement l'équation de Helmholtz. Il y a une singularité au point P , où $r = 0$, et on l'entoure par une petite sphère de manière à exclure P de la région fermée délimitée par S (voir figure A2.1). L'équation (A2.2) devient alors :

$$\begin{aligned} & \oiint_S \left[\tilde{\mathcal{E}} \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \tilde{\mathcal{E}} \right] \cdot d\vec{S} \\ &+ \oiint_{S'} \left[\tilde{\mathcal{E}} \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \tilde{\mathcal{E}} \right] \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{A2.3}) \end{aligned}$$

On étend ensuite à S' la portion de l'intégrale correspondante. Sur la petite sphère, le vecteur unité normal $\hat{\mathbf{n}}$ pointe vers l'origine en P , et :

$$\nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = \left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) e^{ikr} \hat{\mathbf{n}}$$

parce que le gradient est dirigé radialement vers l'extérieur. En termes de l'angle solide ($dS = r^2 d\Omega$) mesuré en P , l'intégrale sur S' devient :

$$\oiint_{S'} \left(\tilde{\mathcal{E}} - ik\tilde{\mathcal{E}}r + r \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial r} \right) e^{ikr} d\Omega \quad (\text{A2.4})$$

où $\nabla \tilde{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = -(\partial \tilde{\mathcal{E}} / \partial r) r^2 d\Omega$. Comme la sphère entourant P rétrécit, $r \rightarrow 0$ sur S' et $\exp(ikr) \rightarrow 1$. Du fait de la continuité de \mathcal{E} , sa valeur en n'importe quel point sur S' s'approche de sa valeur en P , c'est-à-dire, $\tilde{\mathcal{E}}_P$. Les deux derniers termes de l'équation (A2.4) tendent vers zéro, et l'intégrale devient égale à $4\pi \tilde{\mathcal{E}}_P$. Finalement, l'équation (A2.3) devient alors :

$$\tilde{\mathcal{E}}_P = \frac{1}{4\pi} \left[\oiint_S \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \tilde{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} - \oiint_S \tilde{\mathcal{E}} \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot d\vec{S} \right] \quad [10.114]$$

connue sous le nom de *théorème intégral de Kirchhoff*.

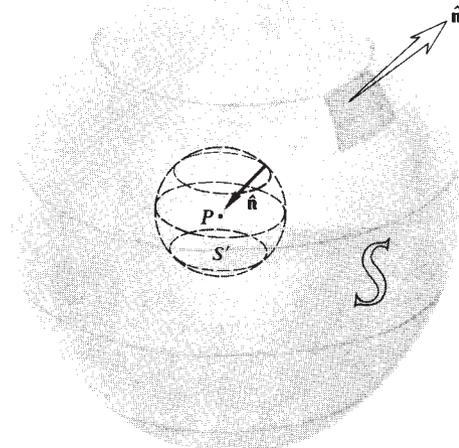


Tableau 1

LA FONCTION SINC

(sin u)/u

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	1,000000	0,999983	0,999933	0,999850	0,999733	0,999583	0,999400	0,999184	0,998934	0,998651
0,1	0,998334	0,997985	0,997602	0,997186	0,996737	0,996254	0,995739	0,995190	0,994609	0,993994
0,2	0,993347	0,992666	0,991953	0,991207	0,990428	0,989616	0,988771	0,987894	0,986984	0,986042
0,3	0,985067	0,984060	0,983020	0,981949	0,980844	0,979708	0,978540	0,977339	0,976106	0,974842
0,4	0,973546	0,972218	0,970858	0,969467	0,968044	0,966590	0,965105	0,963588	0,962040	0,960461
0,5	0,958851	0,957210	0,955539	0,953836	0,952104	0,950340	0,948547	0,946723	0,944869	0,942985
0,6	0,941071	0,939127	0,937153	0,935150	0,933118	0,931056	0,928965	0,926845	0,924696	0,922518
0,7	0,920311	0,918076	0,915812	0,913520	0,911200	0,908852	0,906476	0,904072	0,901640	0,899181
0,8	0,896695	0,894182	0,891641	0,889074	0,886480	0,883859	0,881212	0,878539	0,875840	0,873114
0,9	0,870363	0,867587	0,864784	0,861957	0,859104	0,856227	0,853325	0,850398	0,847446	0,844471
1,0	0,841471	0,838447	0,835400	0,832329	0,829235	0,826117	0,822977	0,819814	0,816628	0,813419
1,1	0,810189	0,806936	0,803661	0,800365	0,797047	0,793708	0,790348	0,786966	0,783564	0,780142
1,2	0,776699	0,773236	0,769754	0,766251	0,762729	0,759188	0,755627	0,752048	0,748450	0,744833
1,3	0,741199	0,737546	0,733875	0,730187	0,726481	0,722758	0,719018	0,715261	0,711488	0,707698
1,4	0,703893	0,700071	0,696234	0,692381	0,688513	0,684630	0,680732	0,676819	0,672892	0,668952
1,5	0,664997	0,661028	0,657046	0,653051	0,649043	0,645022	0,640988	0,636942	0,632885	0,628815
1,6	0,624734	0,620641	0,616537	0,612422	0,608297	0,604161	0,600014	0,595858	0,591692	0,587517
1,7	0,583332	0,579138	0,574936	0,570725	0,566505	0,562278	0,558042	0,553799	0,549549	0,545291
1,8	0,541026	0,536755	0,532478	0,528194	0,523904	0,519608	0,515307	0,511001	0,506689	0,502373
1,9	0,498053	0,493728	0,489399	0,485066	0,480729	0,476390	0,472047	0,467701	0,463353	0,459002
2,0	0,454649	0,450294	0,445937	0,441579	0,437220	0,432860	0,428499	0,424137	0,419775	0,415414
2,1	0,411052	0,406691	0,402330	0,397971	0,393612	0,389255	0,384900	0,380546	0,376194	0,371845
2,2	0,367498	0,363154	0,358813	0,354475	0,350141	0,345810	0,341483	0,337161	0,332842	0,328529
2,3	0,324220	0,319916	0,315617	0,311324	0,307036	0,302755	0,298479	0,294210	0,289947	0,285692
2,4	0,281443	0,277202	0,272967	0,268741	0,264523	0,260312	0,256110	0,251916	0,247732	0,243556
2,5	0,239389	0,235231	0,231084	0,226946	0,222817	0,218700	0,214592	0,210495	0,206409	0,202334
2,6	0,198270	0,194217	0,190176	0,186147	0,182130	0,178125	0,174132	0,170152	0,166185	0,162230
2,7	0,158289	0,154361	0,150446	0,146546	0,142659	0,138786	0,134927	0,131083	0,127253	0,123439
2,8	0,119639	0,115854	0,112084	0,108330	0,104592	0,100869	0,097163	0,093473	0,089798	0,086141
2,9	0,082500	0,078876	0,075268	0,071678	0,068105	0,064550	0,061012	0,057492	0,053990	0,050506
3,0	0,047040	0,043592	0,040163	0,036753	0,033361	0,029988	0,026635	0,023300	0,019985	0,016689
3,1	0,013413	0,010157	0,006920	0,003704	0,000507	-0,002669	-0,005825	-0,008960	-0,012075	-0,015169
3,2	-0,018242	-0,021294	-0,024325	-0,027335	-0,030324	-0,033291	-0,036236	-0,039160	-0,042063	-0,044943
3,3	-0,047802	-0,050638	-0,053453	-0,056245	-0,059014	-0,061762	-0,064487	-0,067189	-0,069868	-0,072525
3,4	-0,075159	-0,077770	-0,080358	-0,082923	-0,085465	-0,087983	-0,090478	-0,092950	-0,095398	-0,097823
3,5	-0,100224	-0,102601	-0,104955	-0,107285	-0,109591	-0,111873	-0,114131	-0,116365	-0,118575	-0,120761
3,6	-0,122922	-0,125060	-0,127173	-0,129262	-0,131326	-0,133366	-0,135382	-0,137373	-0,139339	-0,141282
3,7	-0,143199	-0,145092	-0,146960	-0,148803	-0,150622	-0,152416	-0,154186	-0,155930	-0,157650	-0,159345
3,8	-0,161015	-0,162661	-0,164281	-0,165877	-0,167448	-0,168994	-0,170515	-0,172011	-0,173482	-0,174929
3,9	-0,176350	-0,177747	-0,179119	-0,180466	-0,181788	-0,183086	-0,184358	-0,185606	-0,186829	-0,188027

TABLEAU 1 (SUITE)

(sin u)/u

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
4,0	-0,189201	-0,190349	-0,191473	-0,192573	-0,193647	-0,194698	-0,195723	-0,196724	-0,197700	-0,198652
4,1	-0,199580	-0,200483	-0,201361	-0,202216	-0,203046	-0,203851	-0,204633	-0,205390	-0,206124	-0,206833
4,2	-0,207518	-0,208179	-0,208817	-0,209430	-0,210020	-0,210586	-0,211128	-0,211647	-0,212142	-0,212614
4,3	-0,213062	-0,213487	-0,213888	-0,214267	-0,214622	-0,214955	-0,215264	-0,215550	-0,215814	-0,216055
4,4	-0,216273	-0,216469	-0,216642	-0,216793	-0,216921	-0,217028	-0,217112	-0,217174	-0,217214	-0,217232
4,5	-0,217229	-0,217204	-0,217157	-0,217089	-0,217000	-0,216889	-0,216757	-0,216604	-0,216430	-0,216235
4,6	-0,216020	-0,215784	-0,215527	-0,215250	-0,214953	-0,214635	-0,214298	-0,213940	-0,213563	-0,213166
4,7	-0,212750	-0,212314	-0,211858	-0,211384	-0,210890	-0,210377	-0,209846	-0,209296	-0,208727	-0,208140
4,8	-0,207534	-0,206911	-0,206269	-0,205609	-0,204932	-0,204236	-0,203524	-0,202794	-0,202046	-0,201282
4,9	-0,200501	-0,199702	-0,198887	-0,198056	-0,197208	-0,196344	-0,195464	-0,194568	-0,193656	-0,192728
5,0	-0,191785	-0,190826	-0,189853	-0,188864	-0,187860	-0,186841	-0,185808	-0,184760	-0,183699	-0,182622
5,1	-0,181532	-0,180428	-0,179311	-0,178179	-0,177035	-0,175877	-0,174706	-0,173522	-0,172326	-0,171117
5,2	-0,169895	-0,168661	-0,167415	-0,166158	-0,164888	-0,163607	-0,162314	-0,161010	-0,159695	-0,158369
5,3	-0,157032	-0,155684	-0,154326	-0,152958	-0,151579	-0,150191	-0,148792	-0,147384	-0,145967	-0,144540
5,4	-0,143105	-0,141660	-0,140206	-0,138744	-0,137273	-0,135794	-0,134307	-0,132812	-0,131309	-0,129798
5,5	-0,128280	-0,126755	-0,125222	-0,123683	-0,122137	-0,120584	-0,119024	-0,117459	-0,115887	-0,114310
5,6	-0,112726	-0,111137	-0,109543	-0,107943	-0,106338	-0,104728	-0,103114	-0,101495	-0,099871	-0,098243
5,7	-0,096611	-0,094976	-0,093336	-0,091693	-0,090046	-0,088396	-0,086743	-0,085087	-0,083429	-0,081768
5,8	-0,080104	-0,078438	-0,076770	-0,075100	-0,073428	-0,071755	-0,070080	-0,068404	-0,066726	-0,065048
5,9	-0,063369	-0,061689	-0,060009	-0,058329	-0,056648	-0,054967	-0,053287	-0,051606	-0,049927	-0,048248
6,0	-0,046569	-0,044892	-0,043216	-0,041540	-0,039867	-0,038195	-0,036524	-0,034856	-0,033189	-0,031525
6,1	-0,029863	-0,028203	-0,026546	-0,024892	-0,023240	-0,021592	-0,019947	-0,018305	-0,016667	-0,015032
6,2	-0,013402	-0,011775	-0,010152	-0,008533	-0,006919	-0,005309	-0,003703	-0,002103	-0,000507	0,001083
6,3	0,002669	0,004249	0,005824	0,007393	0,008956	0,010514	0,012066	0,013612	0,015151	0,016684
6,4	0,018211	0,019731	0,021244	0,022751	0,024250	0,025743	0,027228	0,028706	0,030177	0,031640
6,5	0,033095	0,034543	0,035983	0,037414	0,038838	0,040253	0,041661	0,043059	0,044449	0,045831
6,6	0,047203	0,048567	0,049922	0,051268	0,052604	0,053931	0,055249	0,056558	0,057857	0,059146
6,7	0,060425	0,061695	0,062955	0,064204	0,065444	0,066673	0,067892	0,069101	0,070299	0,071487
6,8	0,072664	0,073830	0,074986	0,076130	0,077264	0,078386	0,079498	0,080598	0,081688	0,082765
6,9	0,083832	0,084887	0,085930	0,086962	0,087982	0,088991	0,089987	0,090972	0,091945	0,092906
7,0	0,093855	0,094792	0,095717	0,096629	0,097530	0,098418	0,099293	0,100157	0,101008	0,101846
7,1	0,102672	0,103485	0,104286	0,105074	0,105849	0,106611	0,107361	0,108098	0,108822	0,109533
7,2	0,110232	0,110917	0,111589	0,112249	0,112895	0,113528	0,114149	0,114756	0,115350	0,115931
7,3	0,116498	0,117053	0,117594	0,118122	0,118637	0,119138	0,119627	0,120102	0,120563	0,121012
7,4	0,121447	0,121869	0,122277	0,122673	0,123055	0,123423	0,123779	0,124121	0,124449	0,124765
7,5	0,125067	0,125355	0,125631	0,125893	0,126142	0,126378	0,126600	0,126809	0,127005	0,127188
7,6	0,127358	0,127514	0,127658	0,127788	0,127905	0,128009	0,128100	0,128178	0,128243	0,128295
7,7	0,128334	0,128360	0,128373	0,128373	0,128361	0,128335	0,128297	0,128247	0,128183	0,128107
7,8	0,128018	0,127917	0,127803	0,127677	0,127539	0,127388	0,127224	0,127049	0,126861	0,126661
7,9	0,126448	0,126224	0,125988	0,125739	0,125479	0,125207	0,124923	0,124627	0,124320	0,124000

TABLEAU 1 (SUITE)

(sin u)/u

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
8,0	0,123670	0,123328	0,122974	0,122609	0,122232	0,121845	0,121446	0,121036	0,120615	0,120183
8,1	0,119739	0,119286	0,118821	0,118345	0,117859	0,117363	0,116855	0,116338	0,115810	0,115272
8,2	0,114723	0,114165	0,113596	0,113018	0,112429	0,111831	0,111223	0,110605	0,109978	0,109341
8,3	0,108695	0,108040	0,107376	0,106702	0,106019	0,105327	0,104627	0,103918	0,103200	0,102473
8,4	0,101738	0,100994	0,100243	0,099483	0,098714	0,097938	0,097154	0,096362	0,095562	0,094755
8,5	0,093940	0,093117	0,092287	0,091450	0,090606	0,089755	0,088896	0,088031	0,087159	0,086280
8,6	0,085395	0,084503	0,083605	0,082701	0,081790	0,080874	0,079951	0,079023	0,078089	0,077149
8,7	0,076203	0,075253	0,074296	0,073335	0,072369	0,071397	0,070421	0,069439	0,068453	0,067463
8,8	0,066468	0,065468	0,064465	0,063457	0,062445	0,061429	0,060410	0,059386	0,058359	0,057328
8,9	0,056294	0,055257	0,054217	0,053173	0,052127	0,051077	0,050025	0,048970	0,047913	0,046853
9,0	0,045791	0,044727	0,043660	0,042592	0,041521	0,040449	0,039375	0,038300	0,037223	0,036145
9,1	0,035066	0,033985	0,032904	0,031821	0,030738	0,029654	0,028569	0,027484	0,026399	0,025313
9,2	0,024227	0,023141	0,022055	0,020970	0,019884	0,018799	0,017714	0,016630	0,015547	0,014464
9,3	0,013382	0,012301	0,011222	0,010143	0,009066	0,007990	0,006916	0,005843	0,004772	0,003703
9,4	0,002636	0,001570	0,000507	-0,000554	-0,001612	-0,002669	-0,003722	-0,004774	-0,005822	-0,006868
9,5	-0,007911	-0,008950	-0,009987	-0,011021	-0,012051	-0,013078	-0,014101	-0,015121	-0,016138	-0,017150
9,6	-0,018159	-0,019164	-0,020165	-0,021161	-0,022154	-0,023142	-0,024126	-0,025106	-0,026081	-0,027051
9,7	-0,028017	-0,028977	-0,029933	-0,030884	-0,031830	-0,032771	-0,033707	-0,034637	-0,035562	-0,036482
9,8	-0,037396	-0,038304	-0,039207	-0,040104	-0,040995	-0,041881	-0,042760	-0,043633	-0,044500	-0,045361
9,9	-0,046216	-0,047064	-0,047906	-0,048741	-0,049570	-0,050392	-0,051208	-0,052017	-0,052819	-0,053614
10,0	-0,054402	-0,055183	-0,055957	-0,056724	-0,057484	-0,058237	-0,058982	-0,059720	-0,060450	-0,061173
10,1	-0,061888	-0,062596	-0,063296	-0,063988	-0,064673	-0,065350	-0,066019	-0,066680	-0,067333	-0,067978
10,2	-0,068615	-0,069244	-0,069865	-0,070477	-0,071082	-0,071678	-0,072266	-0,072845	-0,073416	-0,073979
10,3	-0,074533	-0,075078	-0,075615	-0,076143	-0,076663	-0,077174	-0,077677	-0,078170	-0,078655	-0,079131
10,4	-0,079599	-0,080057	-0,080507	-0,080947	-0,081379	-0,081802	-0,082216	-0,082620	-0,083016	-0,083403
10,5	-0,083781	-0,084149	-0,084509	-0,084859	-0,085200	-0,085532	-0,085855	-0,086169	-0,086473	-0,086768
10,6	-0,087054	-0,087331	-0,087599	-0,087857	-0,088106	-0,088346	-0,088576	-0,088797	-0,088999	-0,089212
10,7	-0,089405	-0,089589	-0,089764	-0,089929	-0,090085	-0,090232	-0,090370	-0,090498	-0,090617	-0,090727
10,8	-0,090827	-0,090919	-0,091001	-0,091073	-0,091137	-0,091191	-0,091236	-0,091272	-0,091299	-0,091316
10,9	-0,091324	-0,091324	-0,091314	-0,091295	-0,091267	-0,091229	-0,091183	-0,091128	-0,091064	-0,090990
11,0	-0,090908	-0,090817	-0,090717	-0,090608	-0,090490	-0,090364	-0,090228	-0,090084	-0,089931	-0,089770
11,1	-0,089599	-0,089420	-0,089233	-0,089037	-0,088832	-0,088619	-0,088397	-0,088167	-0,087929	-0,087682
11,2	-0,087427	-0,087163	-0,086891	-0,086612	-0,086324	-0,086027	-0,085723	-0,085411	-0,085091	-0,084763
11,3	-0,084426	-0,084083	-0,083731	-0,083371	-0,083004	-0,082630	-0,082247	-0,081857	-0,081460	-0,081055
11,4	-0,080643	-0,080223	-0,079796	-0,079362	-0,078921	-0,078473	-0,078017	-0,077555	-0,077086	-0,076609
11,5	-0,076126	-0,075636	-0,075140	-0,074637	-0,074127	-0,073611	-0,073088	-0,072559	-0,072023	-0,071481
11,6	-0,070934	-0,070379	-0,069819	-0,069253	-0,068681	-0,068103	-0,067519	-0,066929	-0,066334	-0,065733
11,7	-0,065127	-0,064515	-0,063898	-0,063275	-0,062647	-0,062014	-0,061376	-0,060733	-0,060084	-0,059431
11,8	-0,058773	-0,058111	-0,057443	-0,056771	-0,056095	-0,055414	-0,054728	-0,054039	-0,053345	-0,052646
11,9	-0,051944	-0,051238	-0,050528	-0,049814	-0,049096	-0,048375	-0,047650	-0,046921	-0,046189	-0,045453

TABLEAU 1 (SUITE)

(sin u)/u

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
12,0	-0,044714	-0,043972	-0,043227	-0,042479	-0,041727	-0,040973	-0,040216	-0,039456	-0,038694	-0,037929
12,1	-0,037161	-0,036391	-0,035618	-0,034844	-0,034067	-0,033288	-0,032506	-0,031723	-0,030938	-0,030152
12,2	-0,029363	-0,028573	-0,027781	-0,026988	-0,026193	-0,025398	-0,024600	-0,023802	-0,023003	-0,022202
12,3	-0,021401	-0,020599	-0,019796	-0,018992	-0,018188	-0,017384	-0,016578	-0,015773	-0,014967	-0,014161
12,4	-0,013355	-0,012549	-0,011743	-0,010937	-0,010131	-0,009326	-0,008521	-0,007716	-0,006912	-0,006109
12,5	-0,005306	-0,004504	-0,003702	-0,002902	-0,002103	-0,001304	-0,000507	0,000289	0,001083	0,001877
12,6	0,002668	0,003459	0,004248	0,005035	0,005820	0,006603	0,007385	0,008164	0,008942	0,009717
12,7	0,010491	0,011262	0,012030	0,012797	0,013560	0,014321	0,015080	0,015836	0,016589	0,017339
12,8	0,018087	0,018831	0,019572	0,020311	0,021046	0,021778	0,022506	0,023231	0,023953	0,024671
12,9	0,025386	0,026097	0,026804	0,027507	0,028207	0,028903	0,029594	0,030282	0,030966	0,031645
13,0	0,032321	0,032992	0,033658	0,034321	0,034978	0,035632	0,036281	0,036925	0,037564	0,038199
13,1	0,038829	0,039454	0,040075	0,040690	0,041300	0,041905	0,042506	0,043101	0,043690	0,044275
13,2	0,044854	0,045428	0,045996	0,046559	0,047117	0,047669	0,048215	0,048756	0,049291	0,049820
13,3	0,050344	0,050861	0,051373	0,051879	0,052379	0,052873	0,053361	0,053843	0,054319	0,054788
13,4	0,055252	0,055709	0,056160	0,056605	0,057043	0,057476	0,057901	0,058321	0,058733	0,059140
13,5	0,059540	0,059933	0,060320	0,060700	0,061073	0,061440	0,061800	0,062154	0,062500	0,062840
13,6	0,063174	0,063500	0,063820	0,064132	0,064438	0,064737	0,065029	0,065314	0,065593	0,065864
13,7	0,066128	0,066385	0,066636	0,066879	0,067115	0,067344	0,067566	0,067781	0,067989	0,068190
13,8	0,068384	0,068570	0,068750	0,068922	0,069087	0,069245	0,069396	0,069540	0,069677	0,069806
13,9	0,069929	0,070044	0,070152	0,070253	0,070346	0,070433	0,070512	0,070584	0,070649	0,070707
14,0	0,070758	0,070801	0,070838	0,070867	0,070889	0,070904	0,070912	0,070913	0,070907	0,070893
14,1	0,070873	0,070846	0,070811	0,070770	0,070721	0,070666	0,070603	0,070534	0,070457	0,070374
14,2	0,070284	0,070186	0,070082	0,069971	0,069854	0,069729	0,069598	0,069460	0,069315	0,069163
14,3	0,069005	0,068840	0,068668	0,068490	0,068305	0,068114	0,067916	0,067712	0,067501	0,067283
14,4	0,067060	0,066829	0,066593	0,066350	0,066101	0,065845	0,065584	0,065316	0,065042	0,064762
14,5	0,064476	0,064183	0,063885	0,063581	0,063271	0,062954	0,062633	0,062305	0,061971	0,061632
14,6	0,061287	0,060936	0,060580	0,060218	0,059851	0,059478	0,059100	0,058717	0,058328	0,057933
14,7	0,057534	0,057129	0,056719	0,056304	0,055884	0,055459	0,055029	0,054594	0,054154	0,053710
14,8	0,053260	0,052806	0,052347	0,051884	0,051416	0,050944	0,050467	0,049985	0,049500	0,049010
14,9	0,048516	0,048017	0,047515	0,047008	0,046497	0,045983	0,045464	0,044942	0,044416	0,043886
15,0	0,043353	0,042815	0,042275	0,041730	0,041183	0,040632	0,040077	0,039520	0,038959	0,038395
15,1	0,037828	0,037257	0,036684	0,036108	0,035529	0,034948	0,034363	0,033776	0,033187	0,032595
15,2	0,032000	0,031403	0,030803	0,030202	0,029598	0,028992	0,028383	0,027773	0,027161	0,026547
15,3	0,025931	0,025313	0,024693	0,024072	0,023450	0,022825	0,022199	0,021572	0,020944	0,020314
15,4	0,019683	0,019051	0,018418	0,017783	0,017148	0,016512	0,015875	0,015237	0,014599	0,013960
15,5	0,013320	0,012680	0,012040	0,011399	0,010758	0,010116	0,009475	0,008833	0,008191	0,007549
15,6	0,006907	0,006266	0,005624	0,004983	0,004342	0,003702	0,003062	0,002422	0,001783	0,001145
15,7	0,000507	-0,000130	-0,000766	-0,001401	-0,002035	-0,002668	-0,003300	-0,003931	-0,004561	-0,005190
15,8	-0,005817	-0,006443	-0,007067	-0,007690	-0,008311	-0,008931	-0,009549	-0,010166	-0,010780	-0,011393
15,9	-0,012004	-0,012613	-0,013219	-0,013824	-0,014427	-0,015027	-0,015625	-0,016221	-0,016814	-0,017405

TABLEAU 1 (SUITE)

(sin u)/u

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
16,0	-0,017994	-0,018580	-0,019163	-0,019744	-0,020322	-0,020898	-0,021470	-0,022040	-0,022607	-0,023170
16,1	-0,023731	-0,024289	-0,024843	-0,025395	-0,025943	-0,026488	-0,027030	-0,027568	-0,028103	-0,028634
16,2	-0,029162	-0,029686	-0,030207	-0,030724	-0,031237	-0,031747	-0,032252	-0,032754	-0,033252	-0,033746
16,3	-0,034236	-0,034722	-0,035204	-0,035682	-0,036156	-0,036626	-0,037091	-0,037552	-0,038009	-0,038461
16,4	-0,038909	-0,039352	-0,039792	-0,040226	-0,040656	-0,041081	-0,041502	-0,041918	-0,042330	-0,042737
16,5	-0,043139	-0,043536	-0,043928	-0,044315	-0,044698	-0,045076	-0,045448	-0,045816	-0,046179	-0,046536
16,6	-0,046889	-0,047236	-0,047578	-0,047915	-0,048247	-0,048574	-0,048895	-0,049212	-0,049522	-0,049828
16,7	-0,050128	-0,050423	-0,050713	-0,050997	-0,051275	-0,051548	-0,051816	-0,052078	-0,052335	-0,052586
16,8	-0,052831	-0,053071	-0,053306	-0,053535	-0,053758	-0,053975	-0,054187	-0,054393	-0,054594	-0,054789
16,9	-0,054978	-0,055161	-0,055339	-0,055511	-0,055677	-0,055837	-0,055992	-0,056141	-0,056284	-0,056421
17,0	-0,056553	-0,056678	-0,056798	-0,056912	-0,057021	-0,057123	-0,057220	-0,057310	-0,057395	-0,057474
17,1	-0,057548	-0,057615	-0,057677	-0,057732	-0,057782	-0,057826	-0,057865	-0,057897	-0,057924	-0,057944
17,2	-0,057959	-0,057968	-0,057972	-0,057969	-0,057961	-0,057947	-0,057927	-0,057902	-0,057870	-0,057833
17,3	-0,057790	-0,057742	-0,057688	-0,057628	-0,057562	-0,057491	-0,057414	-0,057331	-0,057243	-0,057149
17,4	-0,057049	-0,056944	-0,056834	-0,056717	-0,056596	-0,056468	-0,056336	-0,056197	-0,056054	-0,055905
17,5	-0,055750	-0,055590	-0,055425	-0,055254	-0,055078	-0,054897	-0,054710	-0,054518	-0,054321	-0,054119
17,6	-0,053912	-0,053699	-0,053481	-0,053258	-0,053031	-0,052798	-0,052560	-0,052317	-0,052069	-0,051816
17,7	-0,051558	-0,051296	-0,051028	-0,050756	-0,050479	-0,050198	-0,049911	-0,049620	-0,049324	-0,049024
17,8	-0,048719	-0,048410	-0,048096	-0,047778	-0,047455	-0,047128	-0,046796	-0,046461	-0,046121	-0,045776
17,9	-0,045428	-0,045075	-0,044718	-0,044358	-0,043993	-0,043624	-0,043251	-0,042875	-0,042494	-0,042110
18,0	-0,041722	-0,041330	-0,040934	-0,040535	-0,040132	-0,039726	-0,039316	-0,038902	-0,038485	-0,038065
18,1	-0,037642	-0,037215	-0,036785	-0,036351	-0,035915	-0,035475	-0,035033	-0,034587	-0,034139	-0,033687
18,2	-0,033233	-0,032775	-0,032315	-0,031853	-0,031387	-0,030919	-0,030449	-0,029976	-0,029500	-0,029022
18,3	-0,028541	-0,028059	-0,027574	-0,027086	-0,026597	-0,026105	-0,025612	-0,025116	-0,024619	-0,024119
18,4	-0,023618	-0,023114	-0,022610	-0,022103	-0,021594	-0,021085	-0,020573	-0,020060	-0,019546	-0,019030
18,5	-0,018512	-0,017994	-0,017474	-0,016953	-0,016431	-0,015908	-0,015384	-0,014859	-0,014333	-0,013806
18,6	-0,013278	-0,012750	-0,012220	-0,011691	-0,011160	-0,010629	-0,010098	-0,009566	-0,009033	-0,008501
18,7	-0,007968	-0,007435	-0,006901	-0,006368	-0,005834	-0,005301	-0,004767	-0,004234	-0,003701	-0,003168
18,8	-0,002635	-0,002102	-0,001570	-0,001038	-0,000507	0,000024	0,000554	0,001083	0,001612	0,002140
18,9	0,002668	0,003194	0,003720	0,004245	0,004769	0,005292	0,005813	0,006334	0,006853	0,007371
19,0	0,007888	0,008404	0,008918	0,009431	0,009942	0,010452	0,010960	0,011466	0,011971	0,012474
19,1	0,012976	0,013475	0,013973	0,014468	0,014962	0,015454	0,015944	0,016431	0,016917	0,017400
19,2	0,017881	0,018360	0,018836	0,019310	0,019782	0,020251	0,020717	0,021181	0,021643	0,022102
19,3	0,022558	0,023011	0,023462	0,023910	0,024355	0,024797	0,025236	0,025672	0,026105	0,026535
19,4	0,026962	0,027386	0,027807	0,028224	0,028638	0,029049	0,029457	0,029861	0,030262	0,030659
19,5	0,031053	0,031444	0,031831	0,032214	0,032594	0,032970	0,033342	0,033711	0,034076	0,034437
19,6	0,034794	0,035148	0,035497	0,035843	0,036185	0,036522	0,036856	0,037186	0,037512	0,037833
19,7	0,038151	0,038464	0,038774	0,039079	0,039379	0,039676	0,039968	0,040256	0,040540	0,040820
19,8	0,041095	0,041365	0,041632	0,041893	0,042151	0,042404	0,042652	0,042896	0,043135	0,043370
19,9	0,043600	0,043826	0,044047	0,044263	0,044475	0,044682	0,044885	0,045082	0,045275	0,045464

Adapté de L. Levi, *Applied Optics*.

Solutions des problèmes corrigés

Chapitre 2

2.1 $(0,003) (2,54 \times 10^{-2}) / 580 \times 10^{-9} =$ nombre de longueurs d'ondes = 131 ; $c = v\lambda$, $\lambda = c/v = 3 \times 10^8 / 10^{10}$, $\lambda = 3$ cm. Les ondes occupent une longueur de 3,9 m.

2.6 $v = v\lambda = 1498$ m/s = (440 Hz) λ ; $\lambda = 3,40$ m.

2.16 $\psi = A \sin 2\pi (\kappa x - \nu t)$, $\psi_1 = 4 \sin 2\pi (0,2x - 3t)$

(a) $\nu = 3$ (b) $\lambda = 1/0,2$ (c) $\tau = 1/3$

(d) $A = 4$ (e) $v = 15$ (f) x positive

$\psi = A \sin (kx + \omega t)$, $\psi_2 = (1/2,5) \sin (7x + 3,5t)$

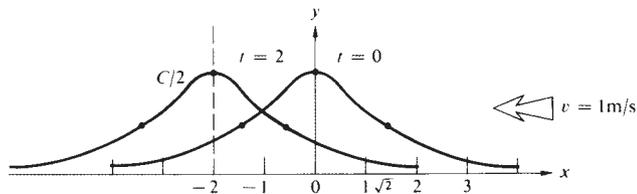
(a) $\nu = 3,5/2\pi$ (b) $\lambda = 2\pi/7$ (c) $\tau = 2\pi/3,5$

(d) $A = 1/2,5$ (e) $v = \frac{1}{2}$ (f) x négative

2.21 $v_y = -\omega A \cos (kx - \omega t + \varepsilon)$, $a_y = -\omega^2 y$. Mouvement harmonique simple car $a_y \propto y$.

2.22 $\tau = 2,2 \times 10^{-15}$ s ; donc $\nu = 1/\tau = 4,5 \times 10^{14}$ Hz ; $v = v\lambda$, 3×10^8 m/s = $(4,5 \times 10^{14}$ Hz) λ ; $\lambda = 6,6 \times 10^{-7}$ m et $k = 2\pi/\lambda = 9,5 \times 10^6$ m $^{-1}$. $\psi(x, t) = (10^3$ V/m) $\cos [9,5 \times 10^6$ m $^{-1} \times (x + 3 \times 10^8$ m/s $t)]$. C'est un cosinus parce que $\cos 0 = 1$.

2.23 $y(x, t) = C/[2 + (x + vt)^2]$.



2.25 Non ; elle n'est pas différentiable deux fois (de manière non triviale) et n'est pas une solution de l'équation d'onde différentielle.

2.27 $\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{dt}$ et en faisant $y = t$, car $\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x} (\pm v) + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$ et le résultat désiré suit immédiatement.

2.28 $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 = k \frac{dx}{dt} - kv$, et cela est nul à condition

que $\frac{dx}{dt} = \pm v$, ce qui est vrai. Pour le cas particulier de l'onde du problème 2.20, $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} (\pm v) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \pi^3 \times 10^6 (\pm v) + \pi^9 \times 10^{14} = 0$ et la vitesse est -3×10^8 m/s.

2.30

$$\psi(z, 0) = A \sin (kz + \varepsilon) ;$$

$$\psi(-\lambda/12, 0) = A \sin (-\pi/6 + \varepsilon) = 0,866$$

$$\psi(\lambda/6, 0) = A \sin (\pi/3 + \varepsilon) = 1/2$$

$$\psi(\lambda/4, 0) = A \sin (\pi/2 + \varepsilon) = 0$$

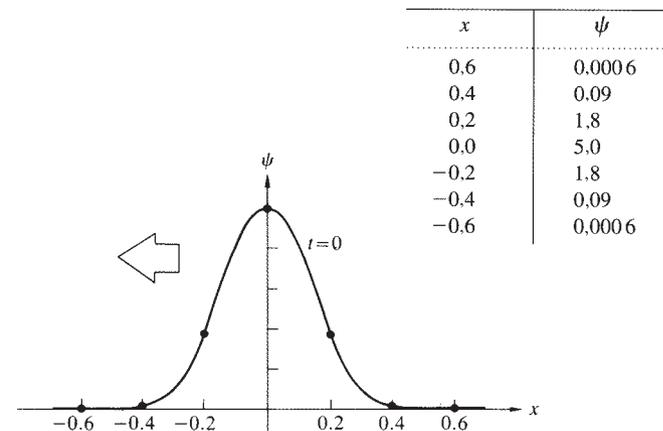
$$A \sin (\pi/2 + \varepsilon) = A (\sin \pi/2 \cos \varepsilon + \cos \pi/2 \sin \varepsilon) \\ = A \cos \varepsilon = 0, \varepsilon = \pi/2$$

$$A \sin (\pi/3 + \pi/2) = A \sin (5\pi/6) = 1/2$$

donc $A = 1$, et, en conséquence, $\psi(z, 0) = \sin (kz + \pi/2)$.

2.31 Les expressions (a) et (b) représentent des ondes car ce sont des fonctions deux fois différentiables, de $(z - vt)$ et $(x + vt)$, respectivement. Ainsi, pour (a), $\psi = a^2(z - bt/a)^2$ et la vitesse de l'onde est b/a dans la direction des z positifs. Pour (b) $\psi = a^2(x + bt/a + c/a)^2$ et la vitesse de l'onde est b/a dans la direction des x négatifs.

2.33 $\psi(x, t) = 5,0 \exp [-a(x + \sqrt{b/at})^2]$, la propagation se fait dans la direction des x négatifs ; $v = \sqrt{b/a} = 0,6$ m/s. $\psi(x, 0) = 5,0 \exp (-25x^2)$.



2.35 30° correspond à $\frac{1}{12}\lambda$ ou $(1/12)3 \times 10^8/6 \times 10^{14} = 42 \text{ nm}$.

2.36

$$\psi = A \sin 2\pi \left(\frac{z}{\lambda} \pm \frac{t}{\tau} \right)$$

$$\psi = 60 \sin 2\pi \left(\frac{z}{400 \times 10^{-9}} - \frac{t}{1,33 \times 10^{-15}} \right)$$

$$\lambda = 400 \text{ nm}$$

$$v = 400 \times 10^{-9} / 1,33 \times 10^{-15} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\nu = (1/1,33) \times 10^{15} \text{ Hz}, \quad \tau = 1,33 \times 10^{-15} \text{ s.}$$

2.39

$$\psi = A \exp i(k_x x + k_y y + k_z z)$$

$$k_x = k\alpha \quad k_y = k\beta \quad k_z = k\gamma$$

$$|\vec{k}| = [(k\alpha)^2 + (k\beta)^2 + (k\gamma)^2]^{1/2} = k[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2]^{1/2}$$

2.41 $\lambda = h/mv = 6,6 \times 10^{-34} / 6(1) = 1,1 \times 10^{-34} \text{ m}$

2.42 On peut construire \vec{k} en formant un vecteur unité dans la direction appropriée et en multipliant celui-ci par k . Le vecteur unité est :

$$[(4-0)\hat{i} + (2-0)\hat{j} + (1-0)\hat{k}] / \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2}$$

$$= (4\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) / \sqrt{21}$$

et $\vec{k} = k(4\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) / \sqrt{21}$.

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

d'où $\psi(x, y, z, t) = A \sin [(4k/\sqrt{21})x + (2k/\sqrt{21})y + (k/\sqrt{21})z - \omega t]$.

2.44 $\psi(\vec{r}_1, t) = \psi[\vec{r}_2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1), t] = \psi(\vec{k} \cdot \vec{r}_1, t)$

$$= \psi[\vec{k} \cdot \vec{r}_2 - \vec{k} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1), t]$$

$$= \psi(\vec{k} \cdot \vec{r}_2, t) = \psi(\vec{r}_2, t)$$

car $\vec{k} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 0$

Chapitre 3

3.1 $E_y = 2 \cos [2\pi \times 10^{14} (t - x/c) + \pi/2]$

$E_y = A \cos [2\pi\nu(t - x/v) + \pi/2]$ d'après l'équation (2.26)

(a) $\nu = 10^{14} \text{ Hz}$, $v = c$, et $\lambda = c/\nu = 3 \times 10^8 / 10^{14} = 3 \times 10^{-6} \text{ m}$, se déplace dans la direction des x positifs, $A = 2 \text{ V/m}$, $\varepsilon = \pi/2$ polarisée linéairement dans la direction y .

(b) $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = \frac{2}{c} \cos [2\pi \times 10^{14}(t - x/c) + \pi/2]$.

3.2 $E_z = 0$, $E_y = E_x = E_0 \sin(kz - \omega t)$ ou cosinus ; $B_z = 0$, $B_y = -B_x = E_y/c$, ou, si l'on préfère,

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\hat{i} + \hat{j}) \sin(kz - \omega t), \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c\sqrt{2}} (\hat{j} - \hat{i}) \sin(kz - \omega t).$$

3.6 Le champ est polarisé linéairement dans la direction y et varie sinusoidalement de zéro pour $z = 0$ à zéro pour $z = z_0$. En utilisant l'équation d'onde,

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\left[-k^2 - \frac{\pi^2}{z_0^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right] E_0 \sin \frac{\pi z}{z_0} \cos(kx - \omega t) = 0$$

et puisque cela est vrai pour tout x , z , et t , chaque terme doit être égal à zéro.

Et, de ce fait $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{c\pi}{\omega z_0} \right)^2}$

De plus, $v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{c\pi}{\omega z_0} \right)^2}}$

3.10 $\langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t') dt'$.

Posons $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t' = x$; alors

$$\langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle = \frac{1}{-\omega T} \int \cos^2 x dx$$

$$= \frac{1}{-\omega T} \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$= -\frac{1}{\omega T} \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_{\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t}^{\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(t+T)}$$

3.17 $\vec{E}_0 = (-E_0/\sqrt{2})\hat{i} + (E_0/\sqrt{2})\hat{j}$; $\vec{k} = (2\pi/\lambda)(\hat{i}/\sqrt{2} + \hat{j}/\sqrt{2})$, d'où $\vec{E} = (1/\sqrt{2})(-10\hat{i} + 10\hat{j}) \cos [(\sqrt{2}\pi/\lambda)(x+y) - \omega t]$ et $I = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2 = 0,13 \text{ W/m}^2$.

3.18

(a) $l = c\Delta t = (3,00 \times 10^8 \text{ m/s})(2,00 \times 10^{-9} \text{ s}) = 0,600 \text{ m}$.

(b) Le volume d'une impulsion est $(0,600 \text{ m})(\pi R^2) = 2,945 \times 10^{-6} \text{ m}^3$; ainsi, $(6,0 \text{ J}) / (2,945 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 2,0 \times 10^6 \text{ J/m}^3$.

3.20 $u = \frac{(\text{puissance})(t)}{\text{volume}} = \frac{(10^{-3} \text{ W})(t)}{(\pi r^2)(ct)} = \frac{10^{-3} \text{ W}}{\pi(10^{-3})^2(3 \times 10^8)}$

$$u = \frac{10^{-5}}{3\pi} \text{ J/m}^3 = 1,06 \times 10^{-6} \text{ J/m}^3$$

$$3.22 \quad h = 6,63 \times 10^{-34}, E = hv$$

$$\frac{I}{hv} = \frac{19,88 \times 10^{-2}}{(6,63 \times 10^{-34})(100 \times 10^6)}$$

$$= 3 \times 10^{24} \text{ photons/m}^2 \text{ s}$$

Tous les photons contenus dans le volume V traversent la surface unité en une seconde,

$$V = (ct)(1 \text{ m}^2) = 3 \times 10^8 \text{ m}^3$$

$$3 \times 10^{24} = V(\text{densité})$$

$$\text{densité} = 10^{16} \text{ photons/m}^3$$

3.24 $P_e = iV = (0,25)(3,0) = 0,75 \text{ W}$. Cela est la puissance électrique dissipée. La puissance lumineuse disponible est $P_l = (0,01)P_e = 75 \times 10^{-4} \text{ W}$.

(a) Flux de photons

$$= P_l/hv = 75 \times 10^{-4} \lambda/hc$$

$$= 75 \times 10^{-4} (550 \times 10^{-9})/(6,63 \times 10^{-34})3 \times 10^8$$

$$= 2,08 \times 10^{16} \text{ photons/s}$$

(b) Il y a $2,08 \times 10^{16}$ photons dans un volume $(3 \times 10^8)(1\text{s})(10^{-3} \text{ m}^2)$;

$$\therefore \frac{2,08 \times 10^{16}}{3 \times 10^5} = \text{photons/m}^3 = 0,69 \times 10^{11}$$

(c) $I = 75 \times 10^{-4} \text{ W}/10 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 7,5 \text{ W/m}^2$

3.26 Imaginons deux cylindres concentriques de rayons r_1 et r_2 entourant l'onde. L'énergie passant par seconde à travers le premier cylindre doit passer à travers le second ; ainsi : $\langle S_1 \rangle 2\pi r_1 = \langle S_2 \rangle 2\pi r_2$, et donc $\langle S \rangle 2\pi r = \text{constante}$ et $\langle S \rangle$ varie de façon inversement proportionnelle à r . Or, comme $\langle S \rangle \propto E_0^2$, E_0 varie comme $\sqrt{1/r}$.

$$3.28 \quad \left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle = \frac{1}{c} \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle$$

$$A = \text{aire.} \quad \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{A} \left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle = \frac{1}{Ac} \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{I}{c}$$

$$3.30 \quad \mathcal{E} = 300 \text{ W}(100 \text{ s}) = 3 \times 10^4 \text{ J}$$

$$p = \mathcal{E}/c = 3 \times 10^4/3 \times 10^8 = 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

3.31

$$(a) \langle \mathcal{P} \rangle = 2\langle S \rangle/c = 2(1,4 \times 10^3 \text{ W/m}^2)/(3 \times 10^8 \text{ m/s}) = 9 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2.$$

(b) S , et donc \mathcal{P} , diminuent proportionnellement avec l'inverse du carré de la distance ; on a $\langle S \rangle = [(0,7 \times 10^9 \text{ m})^{-2}/(1,5 \times 10^{11} \text{ m})^{-2}] \times (1,4 \times 10^3 \text{ W/m}^2) = 6,4 \times 10^7 \text{ W/m}^2$, et $\langle \mathcal{P} \rangle = 0,21 \text{ N/m}^2$.

$$3.34 \quad \langle S \rangle = 1400 \text{ W/m}^2$$

$$\langle \mathcal{P} \rangle = 2(1400 \text{ W/m}^2/3 \times 10^8 \text{ m/s}) = 9,3 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$$

$$\langle F \rangle = A\langle \mathcal{P} \rangle = 2000 \text{ m}^2(9,3 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2) = 1,9 \times 10^{-2} \text{ N}$$

$$3.35 \quad \langle S \rangle = (200 \times 10^3 \text{ W})(500 \times 2 \times 10^{-6} \text{ s})/A(1\text{s})$$

$$\langle F \rangle = A\langle \mathcal{P} \rangle = A\langle S \rangle/c = 6,7 \times 10^{-7} \text{ N}$$

$$3.36 \quad \langle F \rangle = A\langle \mathcal{P} \rangle = A\langle S \rangle/c = \frac{10 \text{ W}}{3 \times 10^8} = 3,3 \times 10^{-8} \text{ N}$$

$$a = 3,3 \times 10^{-8}/100 \text{ kg} = 3,3 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$$

$$v = at = \frac{1}{3} \times 10^{-9}(t) = 10 \text{ m/s}$$

$$t = 3 \times 10^{10} \text{ s} \quad 1 \text{ année} = 3,2 \times 10^7 \text{ s}$$

3.37 \vec{B} entoure \vec{v} en formant des cercles, et \vec{E} est radial ; ainsi $\vec{E} \times \vec{B}$ est tangent à la sphère, et il n'y a aucune énergie se propageant vers l'extérieur.

$$3.42 \quad n = c/v = (2,998 \times 10^8 \text{ m/s})/(1,245 \times 10^8 \text{ m/s}) = 2,41$$

3.47 L'agitation thermique des dipôles moléculaires entraîne une réduction notable pour K_e mais n'a que peu d'effet sur n . Aux fréquences optiques, n est majoritairement dû à la polarisation électronique, les rotations des dipôles moléculaires ayant cessé d'être impliquées à des fréquences bien plus basses.

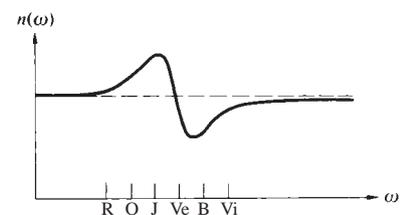
3.48 D'après l'équation (3.70), pour une fréquence de résonance unique, on a :

$$n = \left[1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \right]^{1/2}$$

puisque pour les matériaux de faible densité, $n \approx 1$, le second terme est $\ll 1$, et il suffit de garder uniquement les deux premiers termes dans le développement binomial de n . Ainsi, $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$ et

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

3.50 L'ordre normal du spectre pour un prisme de verre est R, O, J, Ve, B, Vi, le rouge (R) étant le moins dévié et le violet (Vi) étant le plus dévié. Pour un prisme de fuchsine, il y a une bande d'absorption dans le vert, et les indices pour le jaune et pour le bleu, situés de chaque côté du vert (n_J et n_B), sont donc extrêmes, comme à la figure 3.26 ; c'est-à-dire que n_J est le maximum, n_B le minimum, et $n_J > n_O > n_R > n_V > n_B$. Ainsi, le spectre est, dans l'ordre croissant de la déviation, B, Vi, bande noire, R, O, J.



3.52 Dans le visible, $(\omega_0^2 - \omega^2)$ est plus petit pour le verre au plomb que pour la silice fondue. De ce fait, $n(\omega)$ est plus grand pour le premier.

3.54 C_1 est la valeur vers laquelle n tend lorsque λ croît.

3.55 Les valeurs horizontales approchées de $n(\omega)$ dans chaque région située entre les bandes d'absorption augmentent lorsque ω décroît.

Chapitre 4

4.1 $E_{0s} \propto \frac{VE_{0i}}{r} = K \frac{VE_{0i}}{r}$; ainsi $\frac{VK}{r}$ doit être sans unité, et K est donc homogène à une $(\text{longueur})^{-2}$. La seule quantité non prise en compte est λ , et l'on conclut donc que $K = \lambda^{-2}$, et $I_i/I_s \propto K^2 \propto \lambda^{-4}$.

4.4 $x_0(-\omega^2 + \omega_0^2 + i\gamma\omega) = (q_e E_0/m_e)e^{i\alpha} = (q_e E_0/m_e)(\cos \alpha + i \sin \alpha)$; si l'on élève au carré les deux côtés, on obtient : $x_0^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2] = (q_e E_0/m_e)^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$, x_0 suit immédiatement. Comme pour α , il faut diviser les parties imaginaires des deux côtés de la première équation ci-dessus, soit, $x_0\gamma\omega = (q_e E_0/m_e) \sin \alpha$, par les parties réelles, $x_0(\omega_0^2 - \omega^2) = (q_e E_0/m_e) \cos \alpha$ pour obtenir $\alpha = \tan^{-1} [\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)]$. α varie de manière continue de 0 à $\pi/2$ et à π .

4.5 La phase est retardée d'une quantité $(n \Delta y 2\pi/\lambda) - \Delta y 2\pi/\lambda$ ou $(n - 1) \Delta y \omega/c$. Ainsi :

$$E_p = E_0 \exp i\omega[t - (n - 1)\Delta y/c - y/c]$$

ou $E_p = E_0 \exp [-i\omega(n - 1)\Delta y/c] \exp i\omega(t - y/c)$

si $n \approx 1$ ou $\Delta y \ll 1$. Puisque $e^x \approx 1 + x$ pour des petits x ,

$$\exp [-i\omega(n - 1)\Delta y/c] \approx 1 - i\omega(n - 1)\Delta y/c$$

et puisque $\exp(-i\pi/2) = -i$,

$$E_p = E_u + \frac{\omega(n - 1)\Delta y}{c} E_u e^{-i\pi/2}$$

4.9

$$\begin{aligned} n_i \sin \theta_i &= n_t \sin \theta_t \\ \sin 30^\circ &= 1,52 \sin \theta_t \\ \theta_t &= \sin^{-1}(1/3,04) \\ \theta_t &= 19^\circ 13' \end{aligned}$$

4.14 $n_{ti} = \frac{n_t}{n_i} = \frac{c/v_t}{c/v_i} = \frac{v_i}{v_t} = \frac{v\lambda_i}{v\lambda_t} = \frac{\lambda_i}{\lambda_t}$

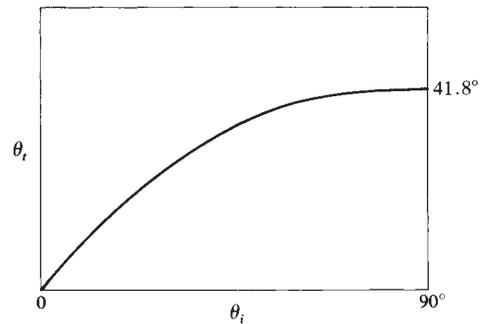
Ainsi, $\lambda_t = 3\lambda_i/4 = 9 \text{ cm}$

$$\sin \theta_t = n_{ti} \sin \theta_i$$

$$\sin^{-1} [\frac{3}{4}(0,707)] = \theta_t = 32^\circ$$

4.18

θ_i (degrés)	θ_t (degrés)
0	0
10	6,7
20	13,3
30	19,6
40	25,2
50	30,7
60	35,1
70	38,6
80	40,6
90	41,8



4.26 Le nombre d'ondes par unité de longueur le long de \overline{AC} sur l'interface est égal à $(\overline{BC}/\lambda_i)/\overline{BC} \sin \theta_i = (\overline{AD}/\lambda_t)(\overline{AD}/\sin \theta_t)$. On retrouve la loi de Snell-Descartes si l'on multiplie les deux côtés de l'égalité par c/v .

4.28 Posons τ le temps que met l'onde pour se déplacer le long d'un rayon de b_1 à b_2 , de a_1 à a_2 , et de a_1 à a_3 . Ainsi, $\overline{a_1 a_2} = \overline{b_1 b_2} = v_i \tau$ et $\overline{a_1 a_3} = v_t \tau$.

$$\sin \theta_i = \overline{b_1 b_2} / \overline{a_1 b_2} = v_i / \overline{a_1 b_2}$$

$$\sin \theta_t = \overline{a_1 a_3} / \overline{a_1 b_2} = v_t / \overline{a_1 b_2}$$

$$\sin \theta_r = \overline{a_1 a_2} / \overline{a_1 b_2} = v_i / \overline{a_1 b_2}$$

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_i}{v_t} = \frac{n_t}{n_i} = n_{ti} \quad \text{and} \quad \theta_i = \theta_r$$

4.29 $n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$

$$n_i(\hat{\mathbf{k}}_i \times \hat{\mathbf{u}}_n) = n_t(\hat{\mathbf{k}}_t \times \hat{\mathbf{u}}_n)$$

où $\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_t$ sont des vecteurs de propagation unité. Ainsi :

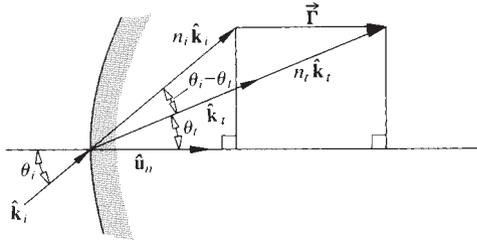
$$n_t(\hat{\mathbf{k}}_t \times \hat{\mathbf{u}}_n) - n_i(\hat{\mathbf{k}}_i \times \hat{\mathbf{u}}_n) = 0$$

$$(n_t \hat{\mathbf{k}}_t - n_i \hat{\mathbf{k}}_i) \times \hat{\mathbf{u}}_n = 0$$

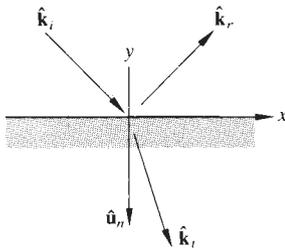
Posons $n_t \hat{\mathbf{k}}_t - n_i \hat{\mathbf{k}}_i = \vec{\Gamma} = \Gamma \hat{\mathbf{u}}_n$

Γ est souvent qualifiée de *constante astigmatique* ; $\vec{\Gamma}$ = la différence entre les projections de $n_i \hat{\mathbf{k}}_i$ et $n_t \hat{\mathbf{k}}_t$ sur $\hat{\mathbf{u}}_n$; en d'autres termes, on prend le produit scalaire $\vec{\Gamma} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n$:

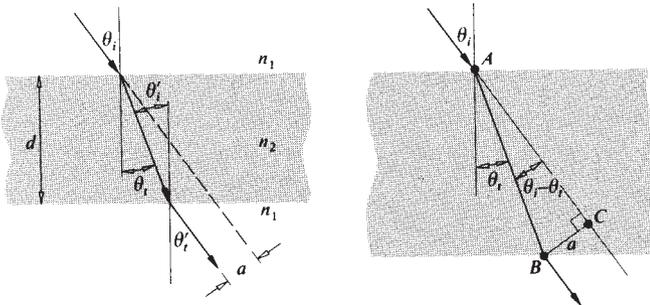
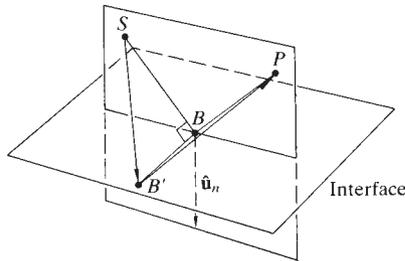
$$\Gamma = n_i \cos \theta_t - n_t \cos \theta_i$$



4.30 Comme $\theta_i = \theta_r$, $\hat{\mathbf{k}}_{ix} = \hat{\mathbf{k}}_{rx}$ et $\hat{\mathbf{k}}_{iy} = -\hat{\mathbf{k}}_{ry}$, et comme $(\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{u}}_n)\hat{\mathbf{u}}_n = \hat{\mathbf{k}}_{iy} \hat{\mathbf{k}}_i - \hat{\mathbf{k}}_r = 2(\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{u}}_n)\hat{\mathbf{u}}_n$.



4.31 Comme $\overline{SB'} > \overline{SB}$ et $\overline{B'P} > \overline{BP}$, le chemin le plus court correspond à B' coïncidant avec B dans le plan d'incidence.



4.34

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad \theta_i = \theta'_i$$

$$n_2 \sin \theta'_i = n_1 \sin \theta'_t$$

$$n_1 \sin \theta_i = n_1 \sin \theta'_t \quad \text{et} \quad \theta_i = \theta'_t$$

$$\cos \theta_t = d/\overline{AB}$$

$$\sin(\theta_i - \theta_t) = a/\overline{AB}$$

$$\sin(\theta_i - \theta_t) = \frac{a}{d} \cos \theta_t$$

$$\frac{d \sin(\theta_i - \theta_t)}{\cos \theta_t} = a$$

4.36 Plutôt que de se propager du point S au point P en ligne droite, le rayon emprunte un chemin qui traverse la lame avec un angle plus aigu. Bien que de la sorte, la longueur de chemin dans l'air augmente légèrement, la diminution du temps de parcours dans la lame compense largement. Dans ce cas, on peut s'attendre à ce que le déplacement a augmente avec n_{21} . Comme n_{21} augmente pour un θ_i donné, θ_t diminue, $(\theta_i - \theta_t)$ croît et, d'après les résultats du problème 4.30, a augmente clairement.

4.37
$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\ell} = - \iint_A \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \quad [3.5]$$

En limite, cela se réduit à $E_{2x}(\overline{BC}) - E_{1x}(\overline{AD}) = 0$, puisque Aire $\rightarrow 0$ et $\partial \vec{\mathbf{B}}/\partial t$ est fini. Ainsi, $E_{2x} = E_{1x}$.

4.38 D'après l'équation (4.40) :

$$r_{\parallel} = \frac{1,52 \cos 30^\circ - \cos 19^\circ 13'}{\cos 19^\circ 13' + 1,52 \cos 30^\circ}$$

où, d'après le problème 4.9 $\theta_t = 19^\circ 13'$. Similairement :

$$t_{\parallel} = \frac{2 \cos 30}{\cos 19^\circ 13' + 1,52 \cos 30^\circ}$$

$$r_{\parallel} = \frac{1,32 - 0,944}{0,944 + 1,32} = 0,165$$

$$t_{\parallel} = \frac{1,732}{0,944 + 1,32} = 0,766$$

4.39 En partant de l'équation (4.34), on divise le numérateur et le dénominateur par n_i et l'on remplace n_{ti} par $\sin \theta_i/\sin \theta_t$ pour obtenir :

$$r_{\perp} = \frac{\sin \theta_t \cos \theta_t - \sin \theta_i \cos \theta_t}{\sin \theta_t \cos \theta_t + \sin \theta_i \cos \theta_t}$$

qui est équivalent à l'équation (4.42). L'équation (4.44) s'obtient exactement de la même manière. Pour trouver r_{\parallel} , on commence de même avec l'équation (4.40) et l'on obtient :

$$r_{\parallel} = \frac{\sin \theta_t \cos \theta_t - \cos \theta_t \sin \theta_t}{\cos \theta_t \sin \theta_t + \sin \theta_t \cos \theta_t}$$

À partir d'ici, on peut prendre plusieurs voies. L'une est de réécrire r_{\parallel} comme :

$$r_{\parallel} = \frac{(\sin \theta_i \cos \theta_t - \sin \theta_t \cos \theta_i)(\cos \theta_i \cos \theta_t - \sin \theta_i \sin \theta_t)}{(\sin \theta_i \cos \theta_t + \sin \theta_t \cos \theta_i)(\cos \theta_i \cos \theta_t + \sin \theta_i \sin \theta_t)}$$

$$\text{et donc } r_{\parallel} = \frac{\sin(\theta_i - \theta_t) \cos(\theta_i + \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

On peut trouver t_{\parallel} , qui a le même dénominateur, de manière similaire.

4.50 $[E_{0r}]_{\perp} + [E_{0r}]_{\perp} = [E_{0r}]_{\perp}$; le champ tangentiel dans le milieu initial est égal à celui du second milieu,

$$[E_{0t}/E_{0i}]_{\perp} - [E_{0r}/E_{0i}]_{\perp} = 1, \quad t_{\perp} - r_{\perp} = 1$$

De manière alternative, d'après les équations (4.42) et (4.44),

$$\frac{+\sin(\theta_i - \theta_t) + 2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\sin \theta_i \cos \theta_t - \cos \theta_i \sin \theta_t + 2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin \theta_i \cos \theta_t + \cos \theta_i \sin \theta_t} = 1$$

4.59 D'après l'équation (4.73), on voit que l'exponentielle sera de la forme $k(x - vt)$, à condition que l'on factorise par k , $\sin \theta_i/n_{ii}$, laissant le second terme de la forme $\omega n_{it}/k$, $\sin \theta_t$, qui doit être $v_i t$. Ainsi, $\omega n_i/(2\pi/\lambda_i)n_i \times \sin \theta_t = v$, et so $v_t = c/n_i \sin \theta_t = v_i/\sin \theta_t$.

4.60 D'après l'équation de définition, $\beta = k_i[(\sin^2 \theta_i/n_{ii}^2) - 1]^{1/2} = 3,702 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$, et puisque $y\beta = 1$, $y = 2,7 \times 10^{-7} \text{ m}$.

4.61 Le faisceau est diffusé par le papier humide et est transmis en grande partie jusqu'à ce que l'angle critique soit atteint ; auquel cas, la lumière est rétroréfléchi vers la source. On a : $\tan \theta_c = (R/2)/d$, et donc, $n_{ii} = 1/n_i = \sin[\tan^{-1}(R/2d)]$.

4.62 $1,00029 \sin 88,7^\circ = n \sin 90^\circ$

$$(1,00029)(0,99974) = n ; \quad n = 1,00003$$

4.64 $\theta_i + \theta_t = 90^\circ$ lorsque $\theta_i = \theta_p$

$$n_i \sin \theta_p = n_t \sin \theta_t = n_t \cos \theta_p$$

$$\tan \theta_p = n_t/n_i = 1,52, \quad \theta_p = 56^\circ 40' \quad [8.25]$$

4.66 $\tan \theta_p = n_t/n_i = n_2/n_1$

$$\tan \theta_p' = n_1/n_2, \quad \tan \theta_p = 1/\tan \theta_p'$$

$$\frac{\sin \theta_p}{\cos \theta_p} = \frac{\cos \theta_p'}{\sin \theta_p'} \therefore \sin \theta_p \sin \theta_p' - \cos \theta_p \cos \theta_p' = 0$$

$$\cos(\theta_p + \theta_p') = 0, \quad \theta_p + \theta_p' = 90^\circ$$

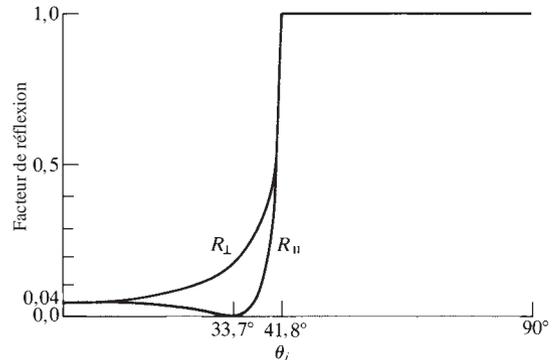
4.67 D'après l'équation (4.92)

$$\tan \gamma_r = r_{\perp}[E_{0r}]_{\perp}/r_{\parallel}[E_{0r}]_{\parallel} = \frac{r_{\perp}}{r_{\parallel}} \tan \gamma_i$$

et d'après les équations (4.42) et (4.43)

$$\tan \gamma_r = -\frac{\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i + \theta_t)} \tan \gamma_i$$

4.69



4.70 $T_{\perp} = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i}\right)^2 t_{\perp}^2$. D'après l'équation (4.44) et la loi de Snell-Descartes,

$$T_{\perp} = \left(\frac{\sin \theta_i \cos \theta_t}{\sin \theta_t \cos \theta_i}\right) \left(\frac{4 \sin^2 \theta_t \cos^2 \theta_i}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}\right) = \frac{\sin 2\theta_t \sin 2\theta_i}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}$$

et similairement pour T_{\parallel} .

4.72

Si Φ_i est le flux de rayonnement incident (ou puissance), et si T est le facteur de transmission de la première interface air-verre, le flux transmis est $T\Phi_i$. D'après l'équation (4.68), à incidence normale, le facteur de transmission entre le verre et l'air est aussi T . Ainsi, un flux $T\Phi_i$ émerge de la première fente, et $\Phi_i T^{2N}$ émerge de la dernière. Puisque $T = 1 - R$, $T_t = (1 - R)^{2N}$ d'après l'équation (4.67).

$$R = (0,5/2,5)^2 = 4\%, \quad T = 96\%$$

$$T_t = (0,96)^6 \approx 78,3\%$$

4.73 $T = \frac{I(y)}{I_0} = e^{-\alpha y}$, $T_1 = e^{-\alpha}$, $T = (T_1)^y$

$$T_t = (1 - R)^{2N}(T_1)^d$$

4.74 A $\theta_i = 0$, $R = R_{\parallel} = R_{\perp} = \left(\frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}\right)^2$ [4.67]

Lorsque $n_{ii} \rightarrow 1$, $n_t \rightarrow n_i$ et clairement, $R \rightarrow 0$.

A $\theta_i = 0$,

$$T = T_{\parallel} = T_{\perp} \frac{4n_t n_i}{(n_t + n_i)^2}$$

et puisque $n_t \rightarrow n_i$, $\lim_{n_t \rightarrow n_i} T = 4n_i^2/(2n_i)^2 = 1$.

D'après le problème 4.61, et le fait que lorsque $n_t \rightarrow n_i$, la loi de Snell-Descartes stipule que $\theta_t \rightarrow \theta_i$, on a :

$$\lim_{n_t \rightarrow n_i} T_{\parallel} = \frac{\sin^2 2\theta_i}{\sin^2 2\theta_i} = 1, \quad \lim_{n_t \rightarrow n_i} T_{\perp} = 1$$

D'après l'équation (4.43) et le fait que $R_{\parallel} = r_{\parallel}^2$ et $\theta_t \rightarrow \theta_i$, $\lim_{n_{ii} \rightarrow 1} R_{\parallel} = 0$.
 Similairement, d'après l'équation (4.42), $\lim_{n_{ii} \rightarrow 1} R_{\perp} = 0$.

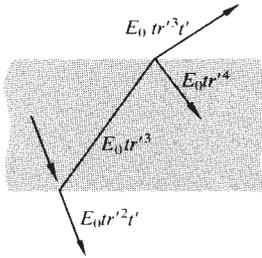
4.76 Pour $\theta_i > \theta_c$, l'équation (4.70) peut être réécrite :

$$r_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - i(\sin^2 \theta_i - n_{ii}^2)^{1/2}}{\cos \theta_i + i(\sin^2 \theta_i - n_{ii}^2)^{1/2}}$$

$$r_{\perp} r_{\perp}^* = \frac{\cos^2 \theta_i + \sin^2 \theta_i - n_{ii}^2}{\cos^2 \theta_i + \sin^2 \theta_i - n_{ii}^2} = 1$$

De même, $r_{\parallel} r_{\parallel}^* = 1$.

4.77



$$t_{\parallel} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$t'_{\parallel} = \frac{2 \sin \theta_1 \cos \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$t_{\parallel} t'_{\parallel} = \frac{\sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2) \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}$$

= T_{\parallel} d'après l'équation (4.98)

De même, $t_{\perp} t'_{\perp} = T_{\perp}$

$$r_{\parallel}^2 = \left[\frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \right]^2 = \left[\frac{-\tan(\theta_2 - \theta_1)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \right]^2$$

$$r_{\parallel}^{\prime 2} = \left[\frac{\tan(\theta_2 - \theta_1)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \right]^2 = r_{\parallel}^2 = R_{\parallel}$$

4.79 D'après l'équation (4.45),

$$t'_{\parallel}(\theta'_p) t_{\parallel}(\theta_p) = \left[\frac{2 \sin \theta_p \cos \theta'_p}{\sin(\theta_p + \theta'_p) \cos(\theta'_p - \theta_p)} \right]$$

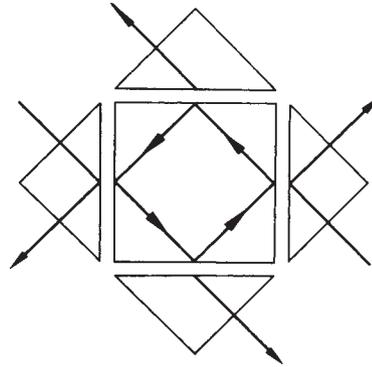
$$\times \left[\frac{2 \sin \theta'_p \cos \theta_p}{\sin(\theta_p + \theta'_p) \cos(\theta_p - \theta'_p)} \right]$$

$$= \frac{\sin 2\theta'_p \sin 2\theta_p}{\cos^2(\theta_p - \theta'_p)} \text{ puisque } \theta_p + \theta'_p = 90^\circ$$

$$= \frac{\sin^2 2\theta_p}{\cos^2(\theta_p - \theta'_p)} \text{ puisque } \sin 2\theta'_p = \sin 2\theta_p$$

$$= \frac{\sin^2 2\theta_p}{\cos^2(2\theta_p - 90^\circ)} = 1$$

4.80 Ce dispositif peut être utilisé pour combiner les deux ondes incidentes selon diverses proportions dans les faisceaux émis. Cela peut être fait en ajustant les séparations. [Pour d'autres remarques supplémentaires, voir H. A. Daw et J. R. Izatt, *J. Opt. Soc. Am.* **55**, 201 (1965).]



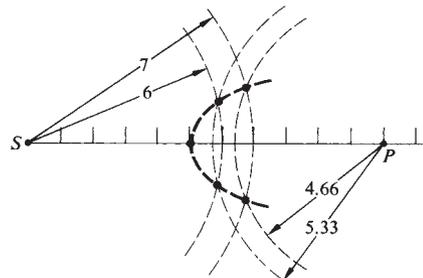
4.81 D'après la figure 4.62, le choix évident est l'argent. On note qu'au voisinage de 300 nm, $n_I \approx n_R \approx 0,6$, auquel cas l'équation (4.83) entraîne $R \approx 0,18$. Juste au-dessus de 300 nm, n_I augmente rapidement, alors que n_R décroît assez fortement, avec le résultat que $R \approx 1$ sur tout le visible et même au-delà.

4.82 La lumière traverse la base du prisme comme une onde évanescente, qui se propage le long de la séparation de couplage ajustable. De l'énergie passe dans le film diélectrique lorsque l'onde évanescente satisfait à certaines conditions. Le film se comporte comme un guide d'onde, qui peut entretenir certaines configurations de vibration caractéristiques, ou modes. Chaque mode est associé à une vitesse et à une polarisation données. L'onde évanescente se couple dans le film lorsqu'elle correspond à la configuration d'un mode.

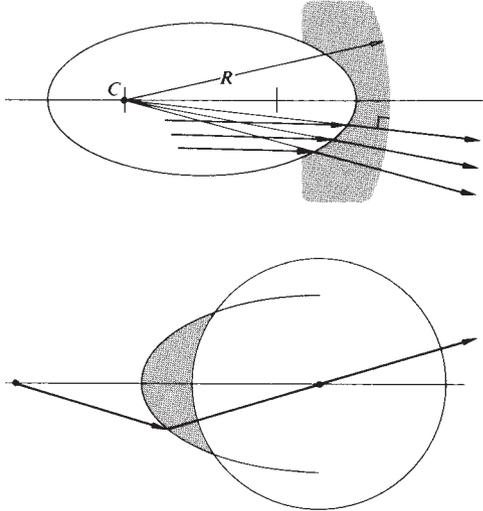
Chapitre 5

5.1 Tous les COs entre S et P doivent être égaux ; Ainsi $\ell_o n_1 + \ell_i n_2 = s_o n_1 + s_i n_2 = \text{constante}$; tracer une perpendiculaire depuis A vers l'axe optique, le point d'intersection est B . $\overline{BP} = s_o + s_i - x$ et le reste se déduit du théorème de Pythagore.

5.2 En utilisant $\ell_o n_1 + \ell_i n_2 = \text{constante}$, $\ell_o + \ell_i 3/2 = \text{constante}$, $5 + (6) 3/2 = 14$. Ainsi, $2\ell_o + 3\ell_i = 28$ lorsque $\ell_o = 6$, $\ell_i = 5,3$, $\ell_o = 7$, $\ell_i = 4,66$. On note que les arcs centrés en S et en P doivent se couper pour que les valeurs de ℓ_o et ℓ_i soient physiquement possibles.



5.4 D'après la figure 5.4, une onde plane incidente sur une surface elliptique concave en transmission devient sphérique. Si la seconde surface sphérique possède la même courbure, tous les rayons sont normaux à celle-ci et l'onde émerge sans avoir été modifiée.



5.8 Première surface : $\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$

$$\frac{1}{1,2} + \frac{1,5}{s_i} = \frac{0,5}{0,1}$$

$s_i = 0,36$ m (image réelle à 0,36 m à la droite du premier sommet).
Seconde surface $s_o = 0,20 - 0,36 = -0,16$ m (distance objet virtuelle).

$$\frac{1,5}{-0,16} + \frac{1}{s_i} = \frac{-0,5}{-0,1}, \quad s_i = 0,069$$

L'image finale est réelle ($s_i > 0$), renversée ($M_T < 0$), et à 6,9 cm sur la droite du second sommet.

5.13 D'après l'équation (5.8), $1/8 + 1,5/s_i = 0,5/-20$. À la première surface, $s_i = -10$ cm. Image virtuelle à 10 cm à gauche du premier sommet. À la seconde surface, l'objet est *réel*, à 15 cm du second sommet.

$$1,5/15 + 1/s_i = -0,5/10, \quad s_i = -20/3 = -6,66 \text{ cm}$$

Virtuelle, à la gauche du second sommet.

5.15 $s_o + s_i = s_o s_i / f$ pour réduire $s_o + s_i$,

$$\frac{d}{ds_o} (s_o + s_i) = 0 = 1 + \frac{ds_i}{ds_o}$$

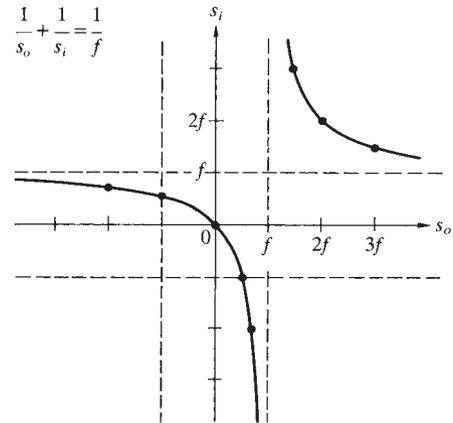
$$\text{ou } \frac{d}{ds_o} \left(\frac{s_o s_i}{f} \right) = \frac{s_i}{f} + \frac{s_o}{f} \frac{ds_i}{ds_o} = 0$$

$$\text{Ainsi } \frac{ds_i}{ds_o} = -1 \quad \text{et} \quad \frac{ds_i}{ds_o} = -\frac{s_i}{s_o}, \quad \therefore s_i = s_o$$

La séparation serait maximale si l'une ou l'autre était ∞ , mais les deux ne peuvent l'être. Ainsi, $s_i = s_o$ est la condition pour un minimum. D'après la relation de Gauss, $s_o = s_i = 2f$.

5.16 $1/5 + 1/s_i = 1/10$, $s_i = -10$ cm virtuelle, $M_T = -s_i/s_o = 10/5 = 2$ redressée. L'image a une hauteur de 4 cm. Ou $-5(x_i) = 100$, $x_i = -20$, $M_T = -x_i/f = 20/10 = 2$.

5.17 $1/s_o + 1/s_i = 1/f$



5.19 $s_i < 0$ car l'image est virtuelle. $1/100 + 1/-50 = 1/f$, $f = -100$ cm. L'image est à 50 cm sur la droite également. $M_T = -s_i/s_o = 50/100 = 0,5$. L'image de la fourmi est réduite de moitié et redressée ($M_T > 0$).

5.21 $1/f = (n_l - 1)[(1/R_1) - (1/R_2)]$

$$= 0,5[(1/\infty) - (1/10)] = -0,5/10$$

$$f = -20 \text{ cm}, \quad \mathcal{D} = 1/f = -1/0,2 = -5 \text{ D}$$

5.24

(a) D'après la relation de conjugaison de Gauss,

$$\frac{1}{15,0 \text{ m}} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{3,00 \text{ m}}$$

et $s_i = +3,75$ m.

(b) Le calcul du grandissement donne :

$$M_T = -\frac{s_i}{s_o} = -\frac{3,75 \text{ m}}{15,0 \text{ m}} = -0,25$$

Comme la distance image est positive, l'image est *réelle*. Comme le grandissement est négatif, l'image est *renversée*, et comme la valeur absolue du grandissement est inférieure à 1, l'image est *réduite*.

(c) D'après la définition du grossissement, il découle que :

$$y_i = M_T y_o = (-0,25)(2,25 \text{ m}) = -0,563 \text{ m}$$

où le signe moins indique que l'image est renversée.

(d) Encore une fois, d'après la formule de Gauss,

$$\frac{1}{17,5 \text{ m}} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{3,00 \text{ m}}$$

et $s_i = +3,62$ m. L'image entière du cheval ne fait donc que 0,13 m de long.

5.28 La première chose à faire est de trouver la distance focale dans l'eau, en utilisant la formule des lunetiers. En prenant le rapport $f_w/f_a = f_w/(10 \text{ cm}) = (n_g - 1)/[(n_g/n_w) - 1] = 0,56/0,17 = 3,24$; $f_w = 32 \text{ cm}$. La formule de Gauss donne la distance image : $1/s_i + 1/100 \text{ cm} = 1/32,4 \text{ cm}$; $s_i = 48 \text{ cm}$.

5.29 Si elle doit être réelle, l'image sera renversée ; le montage doit donc lui-même être renversé, ou il faut autre chose pour retourner l'image ; $M_T = -3 = -s_i/s_o$; $1/s_o + 1/3s_o = 1/0,60 \text{ m}$; $s_o = 0,80 \text{ m}$, d'où $0,80 \text{ m} + 3(0,80 \text{ m}) = 3,2 \text{ m}$.

5.30

$$\frac{1}{f} = (n_{lm} - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\frac{1}{f_w} = \frac{(n_{lm} - 1)}{(n_l - 1)} \frac{1}{f_a} = \frac{1,5/1,33 - 1}{1,5 - 1} \frac{1}{f_a} = \frac{0,125}{0,5} \frac{1}{f_a}$$

$$f_w = 4f_a$$

5.34 $1/f = 1/f_1 + 1/f_2$, $1/50 = 1/f_1 - 1/50$, $f_1 = 25 \text{ cm}$. Si R_{11} et R_{12} , et R_{21} et R_{22} sont les rayons de courbure de la première et de la seconde lentille,

$$1/f_1 = (n_l - 1)(1/R_{11} - 1/R_{12}), \quad 1/25 = 0,5(2/R_{11})$$

$$R_{11} = -R_{12} = -R_{21} = 25 \text{ cm}$$

$$1/f_2 = (n_l - 1)(1/R_{21} - 1/R_{22})$$

$$-1/50 = 0,55[1/(-25) - 1/R_{22}]$$

$$R_{22} = -275 \text{ cm}$$

5.35

$$M_{T_1} = -s_{i1}/s_{o1} = -f_1/(s_{o1} - f_1)$$

$$M_{T_2} = -s_{i2}/s_{o2} = -s_{i2}/(d - s_{i1})$$

$$M_T = f_1 s_{i2}/(s_{o1} - f_1)(d - s_{i1})$$

D'après l'équation (5.30), en substituant pour s_{i1} , on a :

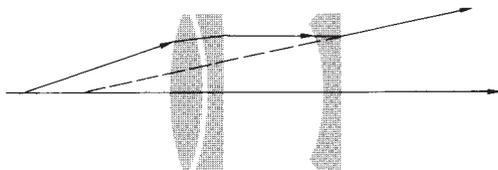
$$M_T = \frac{f_1 s_{i2}}{(s_{o1} - f_1)d - s_{o1} f_1}$$

5.37 Première lentille : $1/s_{i1} = 1/30 - 1/30 = 0$, $s_{i1} = \infty$. Seconde lentille $1/s_{i2} = 1/(-20) - 1/(-\infty)$, l'objet pour la seconde lentille est à droite à l'infini, c'est-à-dire, $s_{o2} = -\infty$. $s_{i2} = -20 \text{ cm}$, virtuelle, 10 cm sur la gauche de la première lentille.

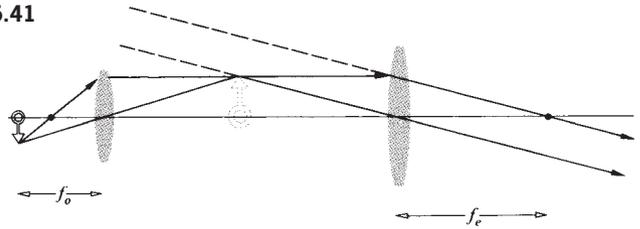
$$M_T = (-\infty/30) (+20/-\infty) = \frac{2}{3}$$

ou, d'après l'équation (5.34)

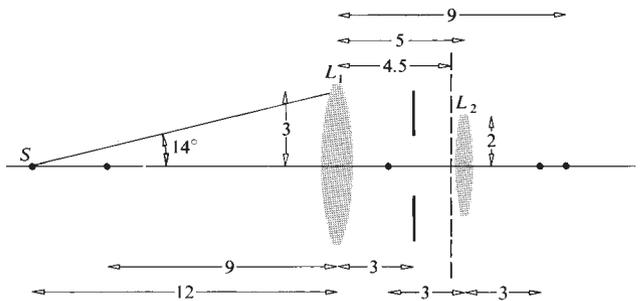
$$M_T = \frac{30(-20)}{10(30 - 30) - 30(30)} = \frac{2}{3}$$



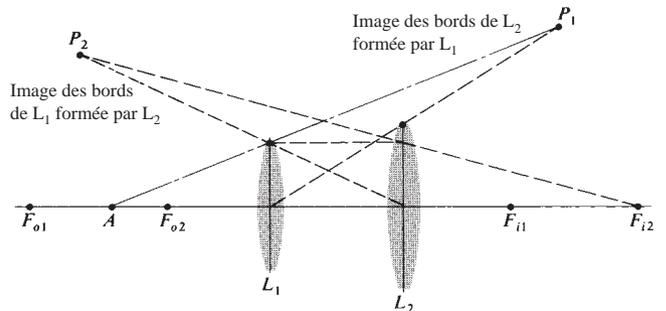
5.41



5.44 L'angle sous-tendu par L_1 en S est $\tan^{-1} 3/12 = 14^\circ$. Pour trouver l'image du diaphragme par L_1 , on utilise l'équation (5.23) : $x_o x_i = f^2$, $(-6)(x_i) = 81$, $x_i = -13,5 \text{ cm}$; ainsi l'image est à 4,5 cm derrière L_1 . Le grandissement est $-x_i/f = 13,5/9 = 1,5$, et l'image (des bords) du trou fait donc $(0,5)(1,5) = 0,75 \text{ cm}$ de rayon. Ainsi, l'angle sous-tendu en S est $\tan^{-1} 0,75/16,5 = 2,6^\circ$. L'image de L_2 par L_1 est obtenue par $(-4)(x_i) = 81$, $x_i = -20,2 \text{ cm}$; en d'autres termes, l'image est à 11,2 cm à la droite de L_1 . $M_T = 20,2/9 = 2,2$; de ce fait, l'image du bord de L_2 est à 4,4 cm au-dessus de l'axe. Ainsi, l'angle qu'elle sous-tend en S est $\tan^{-1} 4,4/(12 + 11,2)$ ou $9,8^\circ$. Par ailleurs, le diaphragme est le diaphragme d'ouverture, et la pupille d'entrée (son image par L_1) a un diamètre de 1,5 cm à 4,5 cm derrière L_1 . L'image du diaphragme par L_2 est la pupille de sortie. Par conséquent, $\frac{1}{2} + 1/s_i = \frac{1}{3}$ et $s_i = -6$; elle est donc à 6 cm devant L_2 . $M_T = \frac{6}{2} = 3$, donc le diamètre de la pupille de sortie est 3 cm.

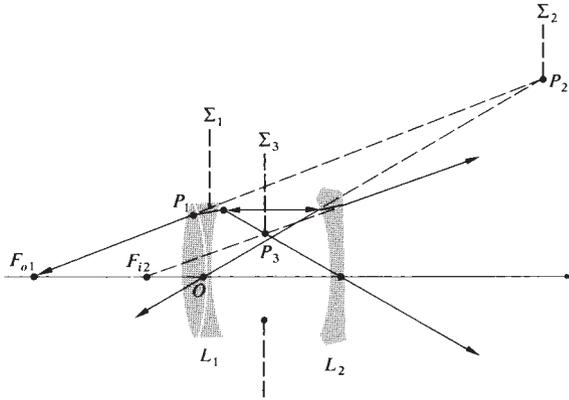


5.45 Les bords de L_1 ou L_2 peuvent être l'un ou l'autre le diaphragme d'ouverture ; ainsi, comme aucune lentille n'est à la gauche de L_1 , c'est sa périphérie ou P_1 qui correspond à la pupille d'entrée. Au-delà (sur la gauche) du point A , L_1 sous-tend l'angle le plus petit et c'est donc la pupille d'entrée ; à proximité (sur la droite de A), P_1 marque les bords de

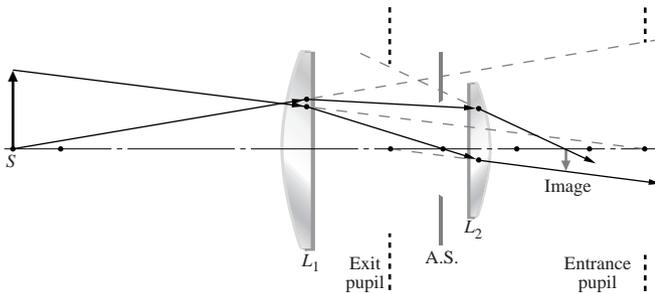


la pupille d'entrée. Pour la première possibilité, P_2 est la pupille de sortie ; et dans le second cas (puisque'il n'y a pas de lentille à la droite de L_2), la pupille de sortie est constituée par les bords mêmes de L_2 .

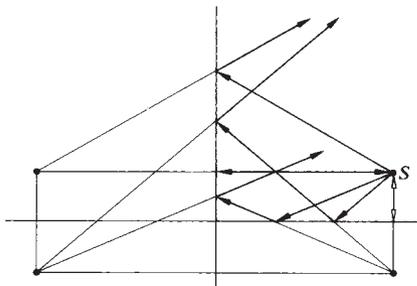
5.46 Le diaphragme d'ouverture peut être constitué des bords de L_1 ou de L_2 . Ainsi, la pupille d'entrée est matérialisée par P_1 ou P_2 . Au-delà de F_{o1} , P_1 sous tend l'angle le plus petit. Ainsi, Σ_1 localise le diaphragme d'ouverture. L'image du diaphragme d'ouverture par les lentilles situées à sa droite (L_2), définit P_3 comme la pupille de sortie.



5.47 Tracer le rayon principal depuis l'extrémité de L_1 de telle manière qu'il passe par le centre de la pupille d'entrée. De là, il passe par le centre du diaphragme d'ouverture, puis est infléchi par L_2 , de façon à se prolonger vers le centre de la pupille de sortie. Un rayon marginal issu de S passe au bord de la pupille d'entrée, puis est infléchi par L_1 de manière à frôler le bord du diaphragme d'ouverture ; il est ensuite infléchi par L_2 de façon à passer par les bords de la pupille de sortie.



5.48



5.49 Non, mais il se pourrait bien qu'elle vous regarde.

5.50 Le miroir est parallèle au plan de la peinture, et l'image de la jeune femme devrait être directement derrière elle et non pas décalée sur la droite.

5.51 $1/s_o + 1/s_i = -2/R$. Let $R \rightarrow \infty$: $1/s_o + 1/s_i = 0$, $s_o = -s_i$, et $M_T = +1$. L'image est virtuelle, de même taille que l'objet et redressée.

5.52 D'après l'équation (5.49), $1/100 + 1/s_i = -2/80$, et donc $s_i = -28,5$ cm. Image virtuelle ($s_i < 0$), redressée ($M_T > 0$), et réduite. (Vérifier à l'aide du tableau 5.5.)

5.55 L'image sur l'écran doit être réelle : s_i est +

$$\frac{1}{25} + \frac{1}{100} = -\frac{2}{R}, \quad \frac{5}{100} = -\frac{2}{R}, \quad R = -40 \text{ cm}$$

5.56 L'image est redressée et réduite. Cela implique (tableau 5.5) un miroir sphérique convexe.

5.59 Pour que l'image soit agrandie et redressée, le miroir doit être concave et l'image virtuelle ; $M_T = 2,0 = s_i/(0,015 \text{ m})$, $s_i = -0,03 \text{ m}$, d'où $1/f = 1/(0,015 \text{ m}) + 1/(-0,03 \text{ m})$; $f = 0,03 \text{ m}$ et $f = -R/2$; $R = -0,06 \text{ m}$.

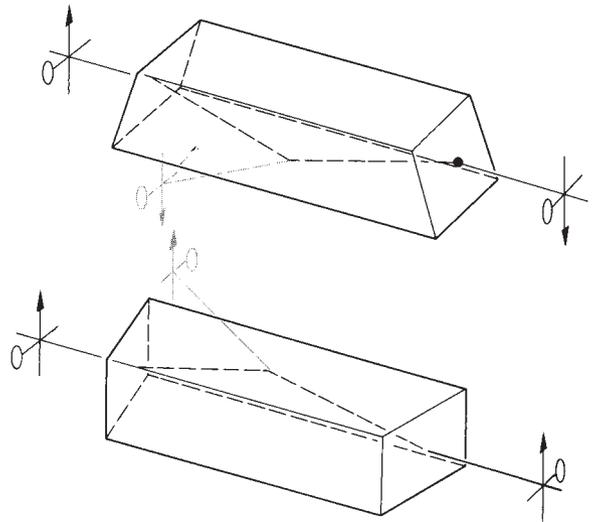
5.60 $M_T = y_i/y_o = -s_i/s_o$, en utilisant l'équation (5.50), $s_i = fs_o/(s_o - f)$, et comme $f = -R/2$, $M_T = -f/(s_o - f) = -(-R/2)/(s_o + R/2) = R/(2s_o + R)$.

5.63 $M_T = -s_i/25 \text{ cm} = -0,064$; $s_i = 1,6 \text{ cm}$. $1/25 \text{ cm} + 1/1,6 \text{ cm} = -2/R$, $R = -3 \text{ cm}$.

5.68 $f = -R/2 = 30 \text{ cm}$, $1/20 + 1/s_i = 1/30$, $1/s_i = 1/30 - 1/20$.
 $s_i = -60 \text{ cm}$, $M_T = -s_i/s_o = 60/20 = 3$

L'image est virtuelle, ($s_i < 0$), redressée ($M_T > 0$), située à 60 cm derrière le miroir, et fait 22,5 cm de haut.

5.70 L'image a subi une rotation de 180° .



5.71 D'après l'équation (5.64)

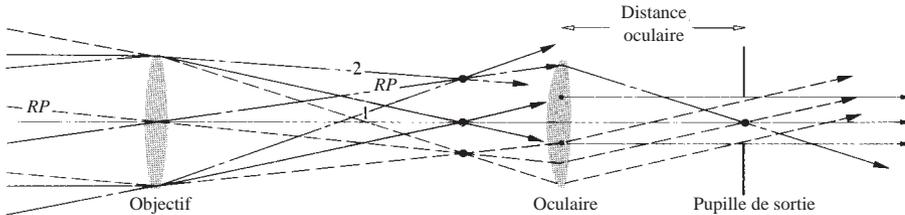
$$ON = (2,624 - 2,310)^{1/2} = 0,550$$

$$\theta_{\max} = \sin^{-1} 0,550 = 33^{\circ}22'$$

L'angle d'acceptance maximal est $2\theta_{\max} = 66^{\circ}44'$. Un rayon à 45° sortirait rapidement de la fibre ; en d'autres termes, la plus grande partie de l'énergie s'échappe de la fibre, même à la première réflexion.

5.72 D'après l'équation (5.65), $\log 0,5 = -0,30 = -\alpha L/10$, et donc $L = 15$ km.

5.73 D'après l'équation (5.64), $ON = 0,232$ et $N_m = 9,2 \times 10^2$.



5.75 $M_T = -f/x_o = -1/x_o \mathcal{D}$. Pour l'œil humain, $\mathcal{D} \approx 58,6$ dioptries.

$$x_o = 230\,000 \times 1,61 = 371 \times 10^3 \text{ km}$$

$$M_T = -1/3,71 \times 10^6 (58,6) = 4,6 \times 10^{-11}$$

$$y_i = 2\,160 \times 1,61 \times 10^3 \times 4,6 \times 10^{-11} = 0,16 \text{ mm}$$

5.77 $1/20 + 1/s_{io} = 1/4$, $s_{io} = 5$ m

$$1/0,3 + 1/s_{ie} = 1/0,6, \quad s_{ie} = -0,6 \text{ m}$$

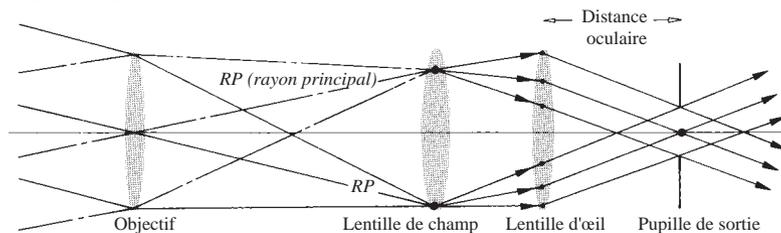
$$M_{To} = -5/10 = -0,5$$

$$M_{Te} = -(-0,6)/0,5 = +1,2$$

$$M_{To} M_{Te} = -0,6$$

5.81 Le rayon 1 de la figure ci-dessus manque l'oculaire, et il y a, par conséquent, une diminution de l'énergie qui arrive au point image correspondant. C'est le vignelage.

5.82 Les rayons qui manquent l'oculaire dans le problème précédent sont conduits à passer à travers la lentille de champ. On note comment la lentille de champ infléchit légèrement les rayons principaux, de manière à ce qu'ils coupent l'axe optique un peu plus près de l'oculaire, ce qui déplace donc la pupille de sortie et raccourcit la distance oculaire. (Pour plus de détails sur ce sujet, voir *Modern Optical Engineering*, de Smith.)



$$5.86 \mathcal{D}_l - \frac{\mathcal{D}_c}{1 + \mathcal{D}_c d} = \frac{3,2\mathcal{D}}{1 + (3,2\mathcal{D})(0,017 \text{ m})} = +3,03\mathcal{D}$$

soit approximativement $+3,0\mathcal{D}$. $f_1 = 0,330$ m, et le *punctum remotum* est donc à $0,330 \text{ m} - 0,017 \text{ m} = 0,313$ m derrière l'œil. Pour la lentille de contact, $f_c = 1/3,2 = 0,313$ m. Ainsi, le *punctum remotum* à $0,31$ m est le même pour les deux, comme il doit effectivement l'être.

5.88

(a) On obtient la distance de l'image intermédiaire en appliquant la formule des lentilles à l'objectif :

$$\frac{1}{27 \text{ mm}} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{25 \text{ mm}}$$

et $s_i = 3,38 \times 10^2$ mm. C'est la distance de l'objectif à l'image intermédiaire, à laquelle il faut ajouter la distance focale de l'oculaire pour obtenir la séparation entre les lentilles : $3,38 \times 10^2 \text{ mm} + 25 \text{ mm} = 3,6 \times 10^2$ mm.

(b) $M_{To} = -s_i/s_o = -3,38 \times 10^2 \text{ mm}/27 \text{ mm} = -12,5\times$, alors que l'oculaire a un grossissement de $d_o \mathcal{D} = (254 \text{ mm})(1/25 \text{ mm}) = 10,2\times$. Ainsi, le grossissement total est $M_T = (-12,5)(10,2) = -1,3 \times 10^2$; le signe moins indique seulement que l'image est renversée.

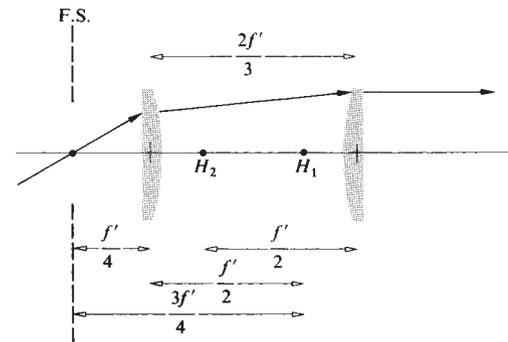
Chapitre 6

6.2 D'après l'équation (6.8),

$$1/f = 1/f' + 1/f' - d/f'f' = 2/f' - 2/3f', \quad f = 3f'/4$$

D'après l'équation (6.9), $\overline{H_1 H_1} = (3f'/4)(2f'/3)/f' = f'/2$

D'après l'équation (6.10), $\overline{H_2 H_2} = -(3f'/4)(2f'/3)/f' = -f'/2$



6.3 D'après l'équation (6.2), $1/f = 0$ lorsque $-(1/R_1 - 1/R_2) = (n_l - 1)d/n_l R_1 R_2$. Ainsi $d = n_l(R_1 - R_2)/(n_l - 1)$.

$$6.4 1/f = 0,5[1/6 - 1/10 + 0,5(3)/1,5(6)10] = 0,5[10/60 - 6/60 + 1/60] ; f = +24$$

$$h_1 = -24(0,5)(3)/10(1,5) = -2,4$$

$$h_2 = -24(0,5)(3)/6(1,5) = -4$$

$$6.6 \quad f = \frac{1}{2}nR/(n-1); \quad h_1 = +R, \quad h_2 = -R$$

$$6.10 \quad f = 29,6 + 0,4 = 30 \text{ cm}; \quad s_o = 49,8 + 0,2 = 50 \text{ cm}; \quad 1/50 + 1/s_i = 1/30 \text{ cm. } s_i = 75 \text{ cm depuis } H_2 \text{ et } 74,6 \text{ cm depuis la face arrière.}$$

6.12 D'après l'équation (6.2),

$$1/f = \frac{1}{2}[(1/4,0) - (1/-15) + \frac{1}{2}(4,0)/(3/2)(4,0)(-15)] \\ = 0,147 \quad \text{et} \quad f = 6,8 \text{ cm.}$$

$$h_1 = -(6,8)\frac{1}{2}(4,0)/(-15)(3/2) = +0,60 \text{ cm, alors que } h_2 = -2,3. \\ \text{Pour trouver l'image, } 1/(100,6) + 1/s_i = 1/(6,8); \quad s_i = 7,3 \text{ cm ou } 5 \text{ cm depuis la face arrière de la lentille.}$$

$$6.18 \quad h_1 = n_{i1}(1 - a_{11})/(-a_{12}) = (\mathcal{D}_2 d_{21}/n_{i1})f \\ = -(n_{i1} - 1)d_{21}f/R_2 n_{i1}$$

D'après l'équation (5.64) où $n_{i1} = n_i$;

$$h_2 = n_{i2}(a_{22} - 1)/(-a_{12}) \\ = -(\mathcal{D}_1 d_{21}/n_{i1})f \text{ d'après l'équation (5.70)} \\ = -(n_{i1} - 1)d_{21}f/R_1 n_{i1}$$

6.19 $\mathcal{A} = \mathcal{R}_2 \mathcal{T}_{21} \mathcal{R}_1$, mais, pour la surface plane,

$$\mathcal{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{D}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et $\mathcal{D}_2 = (n_{i1} - 1)/(-R_2)$ mais $R_2 = \infty$

$$\mathcal{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qui est la matrice unité, d'où $\mathcal{A} = \mathcal{T}_{21} \mathcal{R}_1$.

$$6.20 \quad \mathcal{D}_1 = (1,5 - 1)/0,5 = 1$$

$$\text{et } \mathcal{D}_2 = (1,5 - 1)/(-0,25) = 2$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 - 2(0,3)/1,5 & -1 + 2(1)(0,3)/(1,5 - 2) \\ 0,3/1,5 & -1(0,3)/1,5 + 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0,6 & -2,6 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$$

$$|\mathcal{A}| = 0,6(0,8) - (0,2)(-2,6) = 0,48 + 0,52 = 1$$

6.25 Voir E. Slayter, *Optical Methods in Biology*. $\overline{PC}/\overline{CA} = (n_1/n_2)R/R = n_1/n_2$, alors que $\overline{CA}/\overline{P'C} = n_1/n_2$. Ainsi, les triangles ACP et ACP' sont semblables; et en utilisant la loi des sinus,

$$\frac{\sin \sphericalangle PAC}{\overline{PC}} = \frac{\sin \sphericalangle APC}{\overline{CA}}$$

ou

$$n_2 \sin \sphericalangle PAC = n_1 \sin \sphericalangle APC$$

mais $\theta_i = \sphericalangle PAC$, ainsi $\theta_r = \sphericalangle APC = \sphericalangle P'AC$, et le rayon réfracté semble provenir de P' .

6.26 D'après l'équation (5.6), on pose $\cos \varphi = 1 - \varphi^2/2$; et,

$$\ell_o^{-1} = [R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R) + R(s_o + R)\varphi^2]^{1/2}$$

$$\ell_o^{-1} = [s_o^2 + R(s_o + R)\varphi^2]^{-1/2}$$

$$\ell_i^{-1} = [s_i^2 - R(s_i - R)\varphi^2]^{-1/2}$$

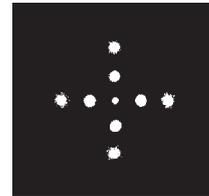
où les deux premiers termes de la série binomiale sont utilisés,

$$\ell_o^{-1} \approx s_o^{-1} - (s_o + R)h^2/2s_o^3R \quad \text{où } \varphi \approx h/R,$$

$$\ell_i^{-1} \approx s_i^{-1} + (s_i - R)h^2/2s_i^3R$$

En remplaçant dans l'équation (5.5), on obtient l'équation (6.40).

6.27



Chapitre 7

$$7.1 \quad E_0^2 = 36 + 64 + 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos \pi/2 = 100, \quad E_0 = 10; \quad \tan \alpha = \frac{8}{6}, \\ \alpha = 53,1^\circ = 0,93 \text{ rad.}$$

$$E = 10 \sin(120\pi t + 0,93)$$

$$7.5 \quad \frac{1 \text{ m}}{500 \text{ nm}} = 0,2 \times 10^7 = 2\,000\,000 \text{ ondes}$$

$$\text{Dans le verre, } \frac{0,05}{\lambda_0/n} = \frac{0,05(1,5)}{500 \text{ nm}} = 1,5 \times 10^5$$

$$\text{dans l'air, } \frac{0,95}{\lambda_0} = 0,19 \times 10^7$$

total : 2 050 000 ondes.

$$OPD = [(1,5)(0,05) + (1)(0,95)] - (1)(1)$$

$$OPD = 1,025 - 1,000 = 0,025 \text{ m}$$

$$\frac{\Lambda}{\lambda_0} = \frac{0,025}{500 \text{ nm}} = 5 \times 10^4 \text{ ondes}$$

$$7.8 \quad E = E_1 + E_2 = E_{01} \{ \sin[\omega t - k(x + \Delta x)] + \sin(\omega t - kx) \}$$

Puisque $\sin \beta + \sin \gamma = 2 \sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma) \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$

$$E = 2E_{01} \cos \frac{k\Delta x}{2} \sin \left[\omega t - k \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right]$$

$$7.9 \quad E = E_0 \text{Re} [e^{i(kx + \omega t)} - e^{i(kx - \omega t)}]$$

$$= E_0 \text{Re} [e^{ikx}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})]$$

$$= E_0 \text{Re} [e^{ikx} 2i \sin \omega t]$$

$$= E_0 \operatorname{Re} [2i \cos kx \sin \omega t - 2 \sin kx \sin \omega t]$$

et $E = -2E_0 \sin kx \sin \omega t$. Onde stationnaire avec nœud à $x = 0$.

7.11
$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

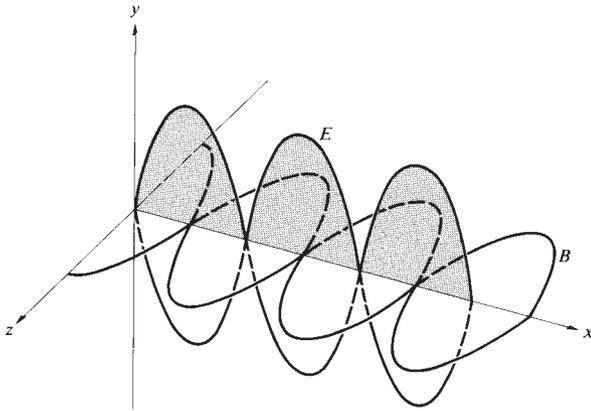
En intégrant, on obtient :

$$B(x, t) = - \int \frac{\partial E}{\partial x} dt = -2E_0 k \cos kx \int \cos \omega t dt$$

$$= -\frac{2E_0 k}{\omega} \cos kx \sin \omega t$$

mais $E_0 k / \omega = E_0 / c = B_0$; ainsi,

$$B(x, t) = -2B_0 \cos kx \sin \omega t$$



7.18 $E = E_0 \cos \omega_c t + E_0 \alpha \cos \omega_m t \cos \omega_c t$

$$= E_0 \cos \omega_c t + \frac{E_0 \alpha}{2} [\cos (\omega_c - \omega_m)t + \cos (\omega_c + \omega_m)t]$$

Gamme audible : $\nu_m = 20 \text{ Hz}$ à $20 \times 10^3 \text{ Hz}$. Fréquence de modulation maximale : $\nu_m(\max) = 20 \times 10^3 \text{ Hz}$.

$$\nu_c - \nu_m(\max) \leq \nu \leq \nu_c + \nu_m(\max)$$

$$\Delta \nu = 2\nu_m(\max) = 40 \times 10^3 \text{ Hz}$$

7.19 $v = \omega/k = ak, \quad v_g = d\omega/dk = 2ak = 2v$

7.22
$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{g/k}$$

$$v_g = v + k \frac{dv}{dk} \quad [7.38]$$

$$\frac{dv}{dk} = -\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{g}{k}} = -\frac{v}{2k}$$

$$v_g = v/2$$

7.24 $v_g = v + k \frac{dv}{dk}$ et $\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\omega} \frac{d\omega}{dk} = v_g \frac{dv}{d\omega}$

Comme $v = c/n$, $\frac{dv}{d\omega} = \frac{dv}{dn} \frac{dn}{d\omega} = -\frac{c}{n^2} \frac{dn}{d\omega}$

$$v_g = v - \frac{v_g c k}{n^2} \frac{dn}{d\omega} = \frac{v}{1 + (ck/n^2)(dn/d\omega)} = \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)}$$

7.30 $\omega \gg \omega_i, \quad n^2 = 1 - \frac{Nq_e^2}{\omega^2 \epsilon_0 m_e} \sum f_i = 1 - \frac{Nq_e^2}{\omega^2 \epsilon_0 m_e}$

En utilisant le développement binomial, on obtient :

$$(1-x)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x \quad \text{pour } x \ll 1$$

$$n = 1 - Nq_e^2/\omega^2 \epsilon_0 m_e, \quad dn/d\omega = Nq_e^2/\epsilon_0 m_e \omega^3$$

$$v_g = \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)}$$

$$= \frac{c}{1 - Nq_e^2/\omega^2 \epsilon_0 m_e + Nq_e^2/\epsilon_0 m_e \omega^2}$$

$$= \frac{c}{1 + Nq_e^2/\epsilon_0 m_e \omega^2}$$

and $v_g < c$,

$$v = c/n = \frac{c}{1 - Nq_e^2/\epsilon_0 m_e \omega^2}$$

Développement binomial :

$$(1-x)^{-1} \approx 1 + x, \quad x \ll 1$$

$$v = c[1 + Nq_e^2/e_0 m_e \omega^2]; \quad vv_g = c^2$$

7.32
$$\int_0^\lambda \sin akx \sin bkx dx$$

$$= \frac{1}{2k} \left[\int_0^\lambda \cos [(a-b)kx] k dx - \int_0^\lambda \cos [(a+b)kx] k dx \right]$$

$$= \frac{1}{2k} \frac{\sin(a-b)kx}{a-b} \Big|_0^\lambda - \frac{1}{2k} \frac{\sin(a+b)kx}{a+b} \Big|_0^\lambda$$

$$= 0 \quad \text{si } a \neq b$$

Si $a = b$

$$\int_0^\lambda \sin^2 akx dx = \frac{1}{2k} \int_0^\lambda (1 + \cos 2akx) k dx = \frac{\lambda}{2}$$

Les autres intégrales sont similaires.

7.33 Fonction paire, donc $B_m = 0$.

$$A_0 = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/a}^{\lambda/a} dx = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{a} + \frac{\lambda}{a} \right) = \frac{4}{a}$$

$$A_m = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/a}^{\lambda/a} (1) \cos mkx \, dx$$

$$A_m = \frac{2}{mK\lambda} \sin mkx \Big|_{-\lambda/a}^{\lambda/a}$$

$$A_m = \frac{2}{m\pi} \sin \frac{m2\pi}{a}$$

7.37

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^a E_0 L \frac{\sin kL/2}{kL/2} \cos kx \, dk \\ &= \frac{E_0 L}{\pi 2} \int_0^b \frac{\sin(kL/2 + kx)}{kL/2} \, dk \\ &\quad + \frac{E_0 L}{\pi 2} \int_0^b \frac{\sin(kL/2 - kx)}{kL/2} \, dk \end{aligned}$$

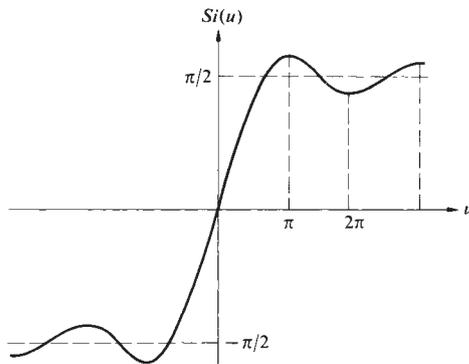
Posons $kL/2 = w$, $(L/2) \, dk = dw$, $kx = wx'$.

$$f'(x) = \frac{E_0}{\pi} \int_0^b \frac{\sin(w + wx')}{w} \, dw + \frac{E_0}{\pi} \int_0^b \frac{\sin(w - wx')}{w} \, dw$$

où $b = aL/2$. Posons $w + wx' = t$, $dw/w = dt/t$. $0 \leq w \leq b$ et $0 \leq t \leq (x' + 1)b$. Posons $w - wx' = -t$ dans l'autre intégrale. $0 \leq w \leq b$ et $0 \leq t \leq (x' - 1)b$.

$$f'(x) = \frac{E_0}{\pi} \int_0^{(x'+1)b} \frac{\sin t}{t} \, dt - \frac{E_0}{\pi} \int_0^{(x'-1)b} \frac{\sin t}{t} \, dt$$

$$f'(x) = \frac{E_0}{\pi} \text{Si}[b(x' + 1)] - \frac{E_0}{\pi} \text{Si}[b(x' - 1)], \quad x' = 2x/L$$



7.38 Par analogie avec l'équation (7.61),

$$A(\omega) = \frac{\Delta t}{2} E_0 \text{sinc}(\omega_p - \omega) \frac{\Delta t}{2}$$

D'après le tableau 1, $\text{sinc}(\pi/2) = 63,7\%$, soit pas tout à fait 50 %,

$$\text{sinc}\left(\frac{\pi}{1,65}\right) = 49,8\%$$

$$\left|(\omega_p - \omega) \frac{\Delta t}{2}\right| < \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad -\frac{\pi}{\Delta t} < (\omega_p - \omega) < \frac{\pi}{\Delta t}$$

Ainsi, les valeurs appréciables de $A(\omega)$ s'étendent sur une gamme $\Delta\omega \sim 2\pi/\Delta t$ et $\Delta\nu \Delta t \sim 1$. Le spectre de puissance est proportionnel à $A^2(\omega)$, et $[\text{sinc}(\pi/2)]^2 = 40,6\%$.

7.39 $\Delta l_c = c \Delta t_c$, $\Delta l_c \approx c/\Delta\nu$. Mais, $\Delta\omega/\Delta k_0 = \bar{\omega}/\bar{k}_0 = c$; ainsi, $|\Delta\nu/\Delta\lambda_0| = \bar{\nu}/\bar{\lambda}_0$,

$$\Delta l_c \approx \frac{c\bar{\lambda}_0}{\Delta\lambda_0\bar{\nu}} \quad \Delta l_c \approx \bar{\lambda}_0^2/\Delta\lambda_0$$

Où avec le principe d'incertitude :

$$\Delta l \approx \frac{h}{\Delta p} \quad \text{où } p = h/\lambda \text{ et } \Delta\lambda_0 \ll \bar{\lambda}_0$$

7.40 $\Delta l_c = c \Delta t_c = 3 \times 10^8 \text{ m/s } 10^{-8} \text{ s} = 3 \text{ m}$

$$\Delta\lambda_0 \sim \bar{\lambda}_0^2/\Delta l_c = (500 \times 10^{-9} \text{ m})^2/3 \text{ m}$$

$$\Delta\lambda_0 \sim 8,3 \times 10^{-14} \text{ m} = 8,3 \times 10^{-5} \text{ nm}$$

$$\Delta\lambda_0/\bar{\lambda}_0 = \Delta\nu/\bar{\nu} = 8,3 \times 10^{-5}/500 = 1,6 \times 10^{-7}$$

$$\approx 1 \text{ partie de } 10^7$$

7.41 $\Delta\nu = 54 \times 10^3 \text{ Hz}$

$$\Delta\nu/\bar{\nu} = \frac{(54 \times 10^3)(10\,600 \times 10^{-9} \text{ m})}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})}$$

$$= 1,91 \times 10^{-9}$$

$$\Delta l_c = c \Delta t_c \approx c/\Delta\nu$$

$$\Delta l_c \approx \frac{(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{(54 \times 10^3 \text{ Hz})} = 5,55 \times 10^3 \text{ m}$$

7.43 $\Delta l_c = c \Delta t_c = 3 \times 10^8 \times 10^{-10} = 3 \times 10^{-2} \text{ m}$

$$\Delta\nu \approx 1/\Delta t_c = 10^{10} \text{ Hz}$$

$$\Delta\lambda_0 \approx \bar{\lambda}_0^2/\Delta l_c \text{ (voir Problème 7.39)}$$

$$= (632,8 \text{ nm})^2/3 \times 10^{-2} \text{ m} = 0,013 \text{ nm}$$

$$\Delta\nu = 10^{15} \text{ Hz}, \Delta l_c = c \times 10^{-15} = 300 \text{ nm}$$

$$\Delta\lambda_0 \approx \bar{\lambda}_0^2/\Delta l_c = 1\,334,78 \text{ nm}$$

Chapitre 8

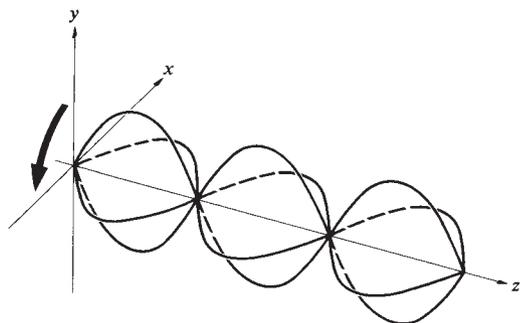
8.1

(a) $\vec{E} = \hat{i}E_0 \cos(kz - \omega t) + \hat{j}E_0 \cos(kz - \omega t + \pi)$. Amplitudes égales, E_y est en retard sur E_x de π . Ainsi, état \mathcal{P} à 135° ou -45° .(b) $\vec{E} = \hat{i}E_0 \cos(kz - \omega t - \pi/2) + \hat{j}E_0 \cos(kz - \omega t + \pi/2)$. Amplitudes égales, E_y est en retard sur E_x de π . De fait, même cas que (a).(c) E_x est en avance sur E_y de $\pi/4$. Elles sont d'amplitudes égales. Ainsi, c'est une ellipse basculée de $+45^\circ$ et elle est gauche.

(d) E_y est en avance sur E_x de $\pi/2$. Elles sont d'amplitudes égales. Ainsi, c'est un état \mathcal{R} .

$$8.2 \quad \vec{E}_x = \hat{i} \cos \omega t, \quad \vec{E}_y = \hat{j} \sin \omega t$$

Onde stationnaire circulaire gauche.



$$8.3 \quad \begin{aligned} \vec{E}_{\mathcal{R}} &= \hat{i} E_0 \cos(kz - \omega t) + \hat{j} E_0 \sin(kz - \omega t) \\ \vec{E}_{\mathcal{F}} &= \hat{i} E'_0 \cos(kz - \omega t) - \hat{j} E'_0 \sin(kz - \omega t) \\ \vec{E} &= \vec{E}_{\mathcal{R}} + \vec{E}_{\mathcal{F}} = \hat{i} (E_0 + E'_0) \cos(kz - \omega t) \\ &\quad + \hat{j} (E_0 - E'_0) \sin(kz - \omega t). \end{aligned}$$

Posons $E_0 + E'_0 = E''_{0x}$ et $E_0 - E'_0 = E''_{0y}$; alors $\vec{E} = \hat{i} E''_{0x} \cos(kz - \omega t) + \hat{j} E''_{0y} \sin(kz - \omega t)$. D'après les équations (8.11) et (8.12), on a clairement une ellipse où $\varepsilon = -\pi/2$ et $\alpha = 0$.

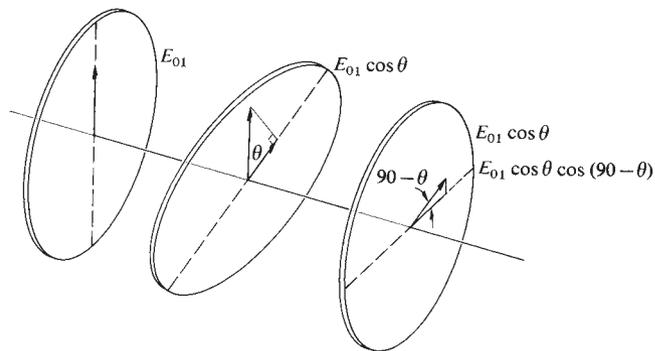
$$8.4 \quad E_{0y} = E_0 \cos 25^\circ; E_{0z} = E_0 \sin 25^\circ; \\ \vec{E}(x, t) = (0,91\hat{j} + 0,42\hat{k}) E_0 \cos(kx - \omega t + \frac{1}{2}\pi)$$

$$8.6 \quad \vec{E} = E_0[\hat{j} \sin(kx - \omega t) - \hat{k} \cos(kx - \omega t)]$$

8.10 En lumière naturelle, chaque filtre laisse passer 32 % du faisceau incident. La moitié de l'éclairement est sous la forme d'un état \mathcal{P} , parallèle à l'axe d'extinction et, effectivement aucune énergie dans cet état de polarisation n'émerge. Ainsi, 64 % de la lumière parallèle à l'axe de transmission est transmise. Dans le présent problème, 32 % I_i pénètre dans le second filtre et 64 % $(32\% I_i) = 21\% I_i$ en ressort.

8.21 D'après la figure, on a :

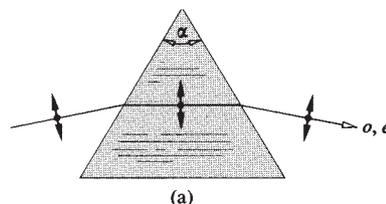
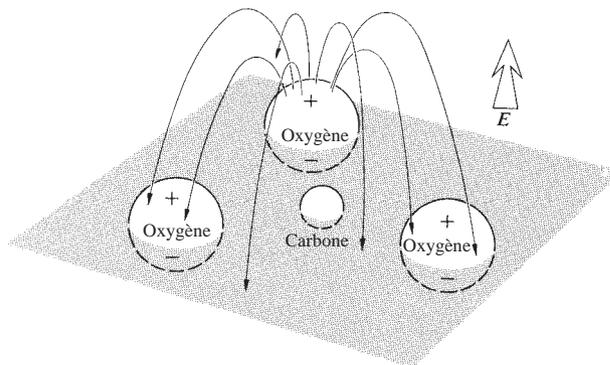
$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} E_{01}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{E_{01}^2}{8} (1 - \cos 2\theta)(1 + \cos 2\theta) \\ &= \frac{E_{01}^2}{8} (1 - \cos^2 2\theta) = \frac{E_{01}^2}{8} [1 - (\frac{1}{2} \cos 4\theta + \frac{1}{2})] \\ &= \frac{E_{01}^2}{16} (1 - \cos 4\theta) = \frac{I_1}{8} (1 - \cos 4\theta) \quad \theta = \omega t \end{aligned}$$

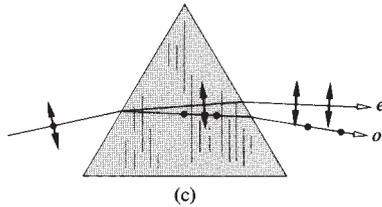
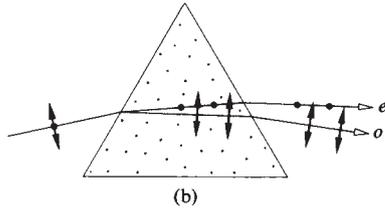


8.22 Non. Le cristal réagit comme s'il était composé de deux spécimens d'orientations opposées en série. Deux cristaux qui seraient orientés de la même façon se comporteraient comme un spécimen épais et séparerait ainsi encore plus les rayons o et e .

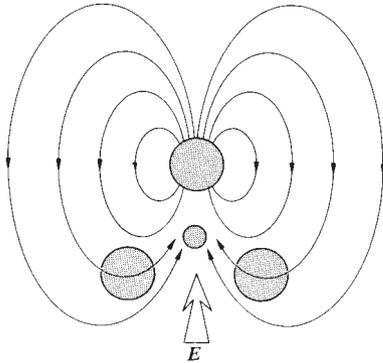
8.24 La lumière diffusée par le papier passe à travers le polaroïd et devient polarisée linéairement. La lumière provenant du polariseur qui est en haut à gauche a son champ \vec{E} parallèle à la section principale (qui est la diagonale entre le second et le quatrième quadrants) et elle est polarisée suivant l'axe extraordinaire du cristal. On notera comment les lettres P et T sont décalées vers le bas, de manière *extraordinaire*. Le polariseur situé en bas à droite laisse passer le rayon o , de telle manière que le C ne soit pas dévié. On notera que l'image ordinaire est proche du coin émoussé.

8.25 (a) et (c) constituent deux aspects du problème précédent. (b) montre une double réfraction parce que l'axe du polaroïd est environ à 45° de la section principale du cristal. Ainsi, les rayons o et e coexistent.





8.26 Lorsque \vec{E} est perpendiculaire au plan du CO_3 , la polarisation est inférieure au cas où il lui est parallèle. Dans le premier cas, le champ de chaque atome d'oxygène polarisé tend à réduire la polarisation de ses voisins. En d'autres termes, le champ induit est, comme le montre la figure, opposé à \vec{E} . Lorsque \vec{E} est dans le plan du carbonate, deux dipôles renforcent le troisième et vice versa. Une polarisabilité réduite entraîne une constante diélectrique et un indice de réfraction plus faibles, et une plus grande vitesse. Ainsi, $v_{\parallel} > v_{\perp}$.



8.34 $n_o = 1,6584$, $n_e = 1,4864$. Loi de Snell-Descartes :

$$\sin \theta_i = n_o \sin \theta_{io} = 0,766$$

$$\sin \theta_i = n_e \sin \theta_{ie} = 0,766$$

$$\sin \theta_{io} \approx 0,463, \quad \theta_{io} \approx 27^{\circ}35'$$

$$\sin \theta_{ie} \approx 0,516, \quad \theta_{ie} \approx 31^{\circ}4'$$

$$\Delta\theta \approx 3^{\circ}29'$$

8.36 Calcite : $n_o > n_e$. On observera deux spectres lorsque (b) ou (c) sont utilisés dans un spectromètre. Les indices sont calculés de manière habituelle, en utilisant :

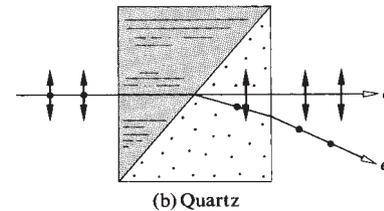
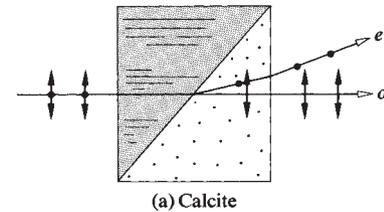
$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \delta_m)}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$$

où δ_m est l'angle de minimum de déviation pour chacun des faisceaux.

8.37 E_x est en avance sur E_y de $\pi/2$. Elles sont initialement en phase et $E_x > E_y$. Ainsi, l'onde a une orientation gauche, et elle est elliptique et horizontale.

$$\mathbf{8.38} \quad \sin \theta_c = \frac{n_{\text{balsam}}}{n_0} = \frac{1,55}{1,658} = 0,935 ; \quad \theta_c \sim 69^{\circ}$$

8.40



(c) L'énergie non désirée sous la forme d'un des états \mathcal{P} peut être éliminée sans problème d'échauffement local.

(d) Le Rochon transmet un faisceau non dévié (le rayon o) qui est donc également achromatique.

$$\mathbf{8.45} \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d \Delta n$$

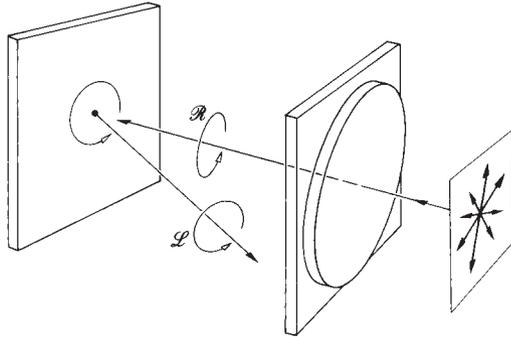
mais $\Delta\varphi = (1/4)(2\pi)$ à cause du décalage des franges. Ainsi, $\Delta\varphi = \pi/2$ et :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi d (0,005)}{589,3 \times 10^{-9}}$$

$$d = \frac{589,3 \times 10^{-9}}{2(10^{-2})} = 2,94 \times 10^{-5} \text{ m}$$

8.46 L'état \mathcal{R} , incident sur le verre, entraîne les électrons sur des orbites circulaires. En retour, ceux-ci réfléchissent de la lumière circulaire dont le champ \vec{E} tourne dans la même direction que le champ

incident. Cependant, la direction de propagation a été inversée en réflexion, de sorte que, même si la lumière incidente est dans l'état \mathcal{R} , la lumière réfléchie a une orientation gauche. Elle est donc complètement absorbée par le polariseur circulaire droit. Cela est illustré dans la figure ci-dessous.



8.47 Oui. Si les amplitudes des états \mathcal{P} sont différentes. Le faisceau transmis, dans une pile de lames polarisantes, en particulier pour une petite pile.

8.49 Placer le matériau photoélastique entre deux polariseurs circulaires avec deux lames à retard en face (comme à la figure 8.51). Sous éclairage polarisé circulairement, aucune orientation des axes de contrainte n'est favorisée par rapport aux autres et ils sont tous indiscernables. Seule la biréfringence aura un effet, et les isochromatiques seront visibles. Si les deux polariseurs sont différents, l'un étant un \mathcal{R} , l'autre étant un \mathcal{L} , les régions où Δn est tel que $\Delta\varphi = \pi$ apparaîtront brillantes. S'ils sont identiques, ces régions apparaîtront sombres.

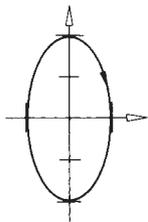
8.51 $V_{\lambda/2} = \lambda_0/2n_0^3 r_{63}$ [8.44]
 $= 550 \times 10^{-9}/2(1,58)^3 5,5 \times 10^{-12}$
 $= 10^5/2(3,94) = 12,7 \text{ kV}$

8.53 $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* = 0$, $\vec{E}_2 = \begin{bmatrix} e_{21} \\ e_{22} \end{bmatrix}$

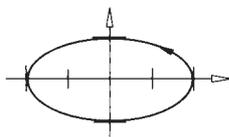
$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* = (1)(e_{21})^* + (-2i)(e_{22})^* = 0$

$\vec{E}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix}$

\vec{E}_1 est :



\vec{E}_2 est :



8.61

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.63

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

8.64

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8.66

$$\begin{bmatrix} te^{i\varphi} & 0 \\ 0 & te^{i\varphi} \end{bmatrix}$$

où un incrément de phase de φ est introduit dans les deux composantes du fait de la traversée de la lame.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8.67

$$\begin{bmatrix} r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8.68

$$V = \frac{I_p}{I_p + I_u} = \frac{(\mathcal{S}_1^2 + \mathcal{S}_2^2 + \mathcal{S}_3^2)^{1/2}}{\mathcal{S}_0}$$

$$I_p = (\mathcal{S}_1^2 + \mathcal{S}_2^2 + \mathcal{S}_3^2)^{1/2}; \quad I - I_p = I_u$$

$$\mathcal{S}_0 - (\mathcal{S}_1^2 + \mathcal{S}_2^2 + \mathcal{S}_3^2)^{1/2} = I_u$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$5 - (0 + 0 + 1)^{1/2} = I_u$$

8.70

$$(a) \quad \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \alpha \sin \theta \\ \cos \alpha \sin \alpha \cos \theta + \sin^2 \alpha \sin \theta \end{bmatrix} = \cos(\theta - \alpha) \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

(b) Le faisceau émergent est polarisé selon un angle α par rapport à l'horizontale et son amplitude est réduite d'un facteur $\cos(\theta - \alpha)$. C'est exactement ce qu'un polariseur linéaire idéal ferait si son axe de transmission était décalé de α par rapport à l'horizontale (se rappeler la loi de Malus).

(c) (Par exemple). Construire la matrice de Jones pour des polariseurs croisés. Considérer le second polariseur comme faisant un angle $\alpha - 90^\circ$ de manière à pouvoir remplacer $\cos \alpha$ par $\sin \alpha$ et $\sin \alpha$ par $-\cos \alpha$. La matrice de Jones pour la combinaison est alors :

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{la matrice nulle !})$$

Chapitre 9

$$9.1 \quad \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{E}}_1 e^{-i\omega t} + \vec{\mathbf{E}}_1^* e^{i\omega t}) \cdot \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{E}}_2 e^{-i\omega t} + \vec{\mathbf{E}}_2^* e^{i\omega t}),$$

où $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$.

$$\vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 = \frac{1}{4}(\vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 e^{-2i\omega t} + \vec{\mathbf{E}}_1^* \cdot \vec{\mathbf{E}}_2^* e^{2i\omega t} + \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2^* + \vec{\mathbf{E}}_1^* \cdot \vec{\mathbf{E}}_2)$$

Les deux derniers termes sont indépendants du temps, et :

$$\langle \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 e^{-2i\omega t} \rangle \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \langle \vec{\mathbf{E}}_1^* \cdot \vec{\mathbf{E}}_2^* e^{2i\omega t} \rangle \rightarrow 0$$

du fait du coefficient $1/T\omega$. Ainsi,

$$I_{12} = 2\langle \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2 \rangle = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{\mathbf{E}}_2^* + \vec{\mathbf{E}}_1^* \cdot \vec{\mathbf{E}}_2)$$

9.2 La plus grande valeur de $(r_1 - r_2)$ est égal à a . Donc, si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\delta = k(r_1 - r_2)$ varie de 0 à ka . Si $a \gg \lambda$, $\cos \delta$ et par conséquent I_{12} auront de nombreux maxima et minima, et dont la moyenne sera nulle sur une grande région de l'espace. En revanche, si $a \ll \lambda$, δ varie très peu, de 0 à $ka \ll 2\pi$. De ce fait, la moyenne de I_{12} n'est plus nulle, et d'après l'équation (9.17), I dévie peu de $4I_0$. Les deux sources se comportent effectivement comme une source unique de « vigueur » (en amplitude) deux fois plus élevée que la source originale.

9.4 Une ampoule placée en S produirait des franges. On peut l'imaginer comme étant constituée d'un grand nombre de sources ponctuelles incohérentes. Chacune d'elles créerait une figure indépendante, et ces figures se superposeraient. Des ampoules placées en S_1 et S_2 seraient incohérentes et ne produiraient pas de franges détectables.

9.7

(a) $(r_1 - r_2) = \pm \frac{1}{2}\lambda$, d'où $a \sin \theta_1 = \pm \frac{1}{2}\lambda$ et $\theta_1 \approx \pm \frac{1}{2}\lambda/a = \pm \frac{1}{2}(632,8 \times 10^{-9} \text{ m})/(0,200 \times 10^{-3} \text{ m}) = \pm 1,58 \times 10^{-3} \text{ rad}$, ou puisque $y_1 = s\theta_1 = (1,00 \text{ m})(\pm 1,58 \times 10^{-3} \text{ rad}) = \pm 1,58 \text{ mm}$.

(b) $y_5 = s5\lambda/a = (1,00 \text{ m})5(632,8 \times 10^{-9})/(0,200 \times 10^{-3} \text{ m}) = 1,582 \times 10^{-2} \text{ m}$.

(c) Puisque les franges varient en cosinus carré, et que la réponse de (a) a une largeur d'une moitié de frange, la réponse à (b) est 10 fois plus large.

9.15 $r_2^2 = a^2 + r_1^2 - 2ar_1 \cos(90 - \theta)$. La contribution à $\cos \delta/2$ provenant du troisième terme du développement de Maclaurin sera négligeable si :

$$\frac{k}{2} \left(\frac{a^2}{2r_1} \cos^2 \theta \right) \ll \pi/2$$

donc, $r_1 \gg a^2/\lambda$.

9.16 $E = \frac{1}{2}mv^2$; $v = 0,42 \times 10^6$ m/s
 $\lambda = h/mv = 1,73 \times 10^{-9}$; $\Delta y = s\lambda/a = 3,46$ mm

9.22 $\Delta y = s\lambda_0/2d\alpha(n - n')$

9.23 $\Delta y = (s/a)\lambda$, $a = 10^{-2}$ cm, $a/2 = 5 \times 10^{-3}$ cm

9.24 $\delta = k(r_1 - r_2) + \pi$ (miroir de Lloyd)
 $\delta = k\{a/2 \sin \alpha - [\sin(90 - 2\alpha)]a/2 \sin \alpha\} + \pi$
 $\delta = ka(1 - \cos 2\alpha)/2 \sin \alpha + \pi$

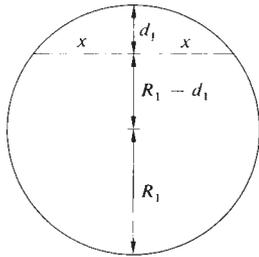
le maximum est obtenu pour :

$\delta = 2\pi$ lorsque $\sin \alpha (\lambda/a) = (1 - \cos 2\alpha) = 2 \sin^2 \alpha$

Premier maximum : $\alpha = \sin^{-1}(\lambda/2a)$.

9.26 Ici, $1,00 < 1,34 > 1,00$, d'où, d'après l'équation (9.36) avec $m = 0$, $d = (0 + \frac{1}{2})(633 \text{ nm})/2(1,34) = 118$ nm.

9.29 Équation (9.37) : $m = 2n_f d/\lambda_0 = 10000$. C'est un minimum, donc une région sombre centrale.



9.30 Les franges constituent généralement des séries de fines bandes dentelées, qui sont fixes par rapport au verre.

9.31 $x^2 = d_1[(R_1 - d_1) + R_1] = 2R_1d_1 - d_1^2$
 De même, $x^2 = 2R_2d_2 - d_2^2$

$$d = d_1 - d_2 = \frac{x^2}{2} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right], \quad d = m \frac{\lambda_f}{2}$$

Lorsque $R_2 \rightarrow \infty$, x_m approche l'équation (9.43).

9.33 $\Delta x = \lambda_f/2\alpha$, $\alpha = \lambda_0/2n_f \Delta x$
 $\alpha = 5 \times 10^{-5}$ rad = 10,2 secondes

9.35 Un déplacement de $\lambda/2$ fait défiler une paire de franges, de ce fait, $92 \lambda/2 = 2,53 \times 10^{-5}$ m et $\lambda = 550$ nm.

9.39 $E_t^2 = E_i E_i^* = E_0^2 (tt')^2 / (1 - r^2 e^{-i\delta})(1 - r^2 e^{+i\delta})$
 $I_t = I_i (tt')^2 / (1 - r^2 e^{-i\delta} - r^2 e^{i\delta} + r^4)$

9.40 (a) $R = 0,80 \therefore F = 4R/(1 - R)^2 = 80$
 (b) $\gamma = 4 \sin^{-1} 1/\sqrt{F} = 0,448$

(c) $\mathcal{F} = 2\pi/0,448$

(d) $C = 1 + F$

9.41
$$\frac{2}{1 + F(\Delta\delta/4)^2} = 0,81 \left[1 + \frac{1}{1 + F(\Delta\delta/2)^2} \right]$$

$F^2(\Delta\delta)^4 - 15,5F(\Delta\delta)^2 - 30 = 0$

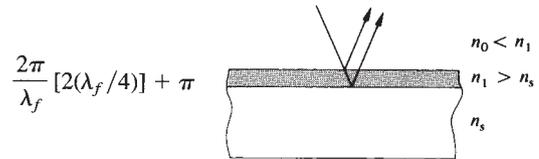
9.42 $I = I_{\max} \cos^2 \delta/2$

$I = I_{\max}/2$ lorsque $\delta = \pi/2 \therefore \gamma = \pi$

La séparation entre maxima est 2π

$\mathcal{F} = 2\pi/\gamma = 2$

9.44 À proximité de l'incidence normale, ($\theta_i \approx 0$). La figure 4.23e indique que le déphasage relatif entre des faisceaux intérieurement et extérieurement réfléchis est π rad. Cela signifie une différence de phase relative totale de :



ou 2π . Les ondes sont en phase et interfèrent constructivement.

9.45 $n_0 = 1$ $n_s = n_g$ $n_1 = \sqrt{n_g}$
 $\sqrt{1,54} = 1,24$

$d = \frac{1}{4}\lambda_f = \frac{1}{4} \frac{\lambda_0}{n_1} = \frac{1}{4} \frac{540}{1,24}$ nm

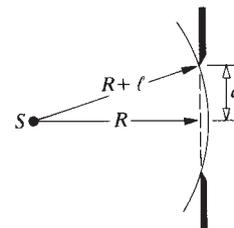
Aucun déphasage relatif entre deux ondes.

9.46 L'onde réfractée va traverser le film deux fois, et il n'y aura aucun déphasage relatif en réflexion. De ce fait :

$d = \lambda_0/4n_f = (550 \text{ nm})/4(1,38) = 99,6$ nm

Chapitre 10

10.1 $(R + \ell)^2 = R^2 + a^2$; donc $R = (a^2 - \ell^2)/2\ell \approx a^2/2\ell$, $\ell R = a^2/2$, donc, pour $\lambda \gg \ell$, $\lambda R \gg a^2/2 \therefore R = (1 \times 10^{-3})^2/2\ell = 10$ m.



$$10.2 \quad E_0/2 = R \sin(\delta/2)$$

$$E = 2R \sin(N\delta/2) \quad \text{longueur de corde}$$

$$E = [E_0 \sin(N\delta/2)]/\sin(\delta/2)$$

$$I = E^2$$

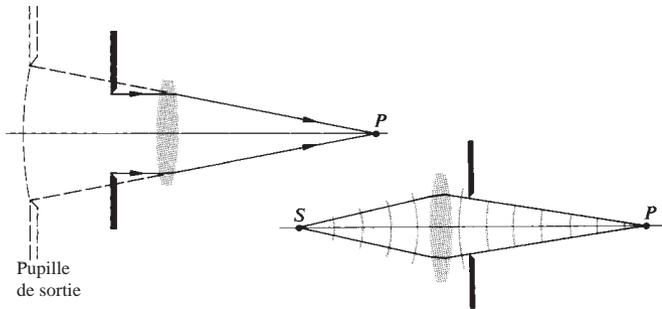
$$10.4 \quad d \sin \theta_m = m\lambda, \quad \theta = N\delta/2 = \pi$$

$$7 \sin \theta = (1) (0,21) \quad \delta = 2\pi/N = kd \sin \theta$$

$$\sin \theta = 0,03 \quad \sin \theta = 0,0009$$

$$\theta = 1,7^\circ \quad \theta = 3 \text{ min.}$$

10.5 L'onde sphérique convergente dans le plan image est diffractée par la pupille de sortie.



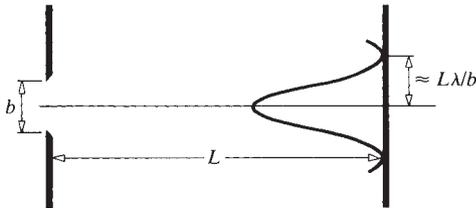
$$10.6 \quad \beta = \pm\pi$$

$$\sin \theta = \pm\lambda/b$$

$$\theta \approx \pm\lambda/b$$

$$L\theta \approx \pm L\lambda/b$$

$$L\theta \approx \pm f_2 \lambda/b.$$



$$10.9 \quad \lambda = (20 \text{ cm}) \sin 36,87^\circ = 12 \text{ cm}$$

$$10.10 \quad \alpha = \frac{ka}{2} \sin \theta, \quad \beta = \frac{kb}{2} \sin \theta$$

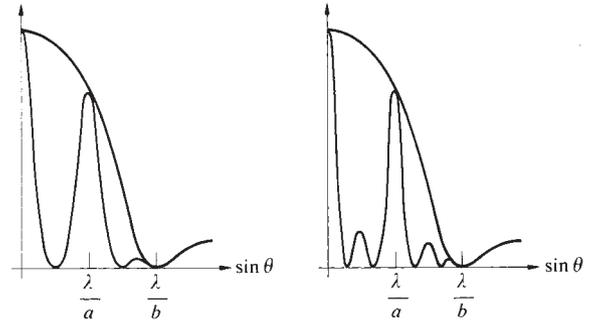
$$a = mb, \quad \alpha = m\beta, \quad \alpha = m2\pi$$

$$N = \text{nombre de franges} = a/\pi = m2\pi/\pi = 2m$$

$$10.12 \quad \alpha = 3\pi/2N = \pi/2 \quad [10.34]$$

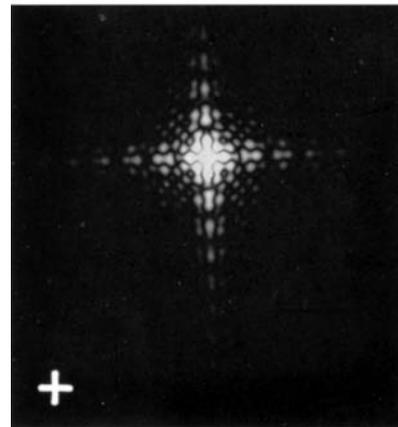
$$I(\theta) = \frac{I(0)}{N^2} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad \text{d'après l'équation (10.35)}$$

$$\text{et } I/I(0) \approx \frac{1}{9}.$$



10.15 Si l'ouverture a un axe de symétrie, la figure de diffraction aura un axe de symétrie parallèle au précédent. De plus, la figure aura un autre axe de symétrie perpendiculaire à l'axe de symétrie de l'ouverture. Cela découle du fait que les figures de Fraunhofer possèdent un centre de symétrie.

10.16



10.17 Trois fentes courtes parallèles entre elles.

10.18 Deux fentes courtes parallèles l'une à l'autre.

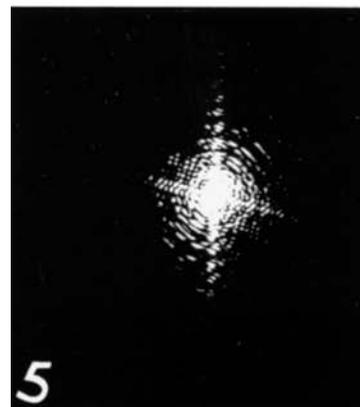
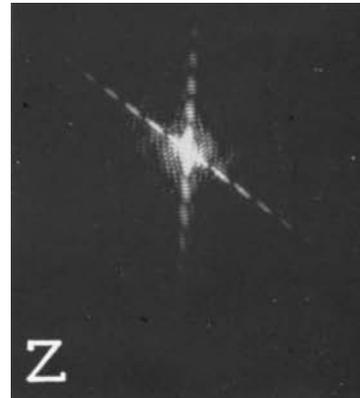
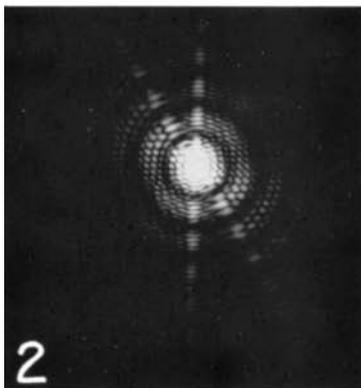
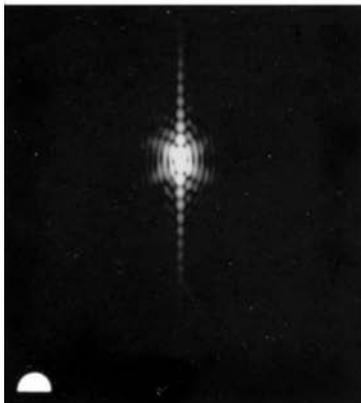
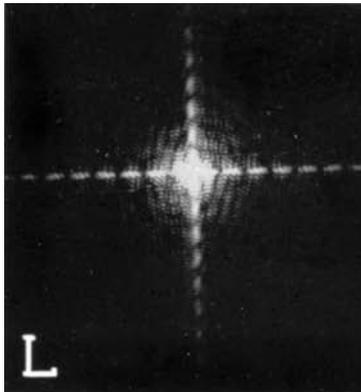
10.19 Une ouverture en triangle équilatéral.

10.20 Une ouverture en croix.

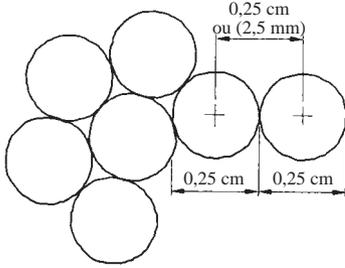
10.21 Le champ E d'une ouverture rectangulaire.

10.23 D'après l'équation (10.58), $q_1 \approx 1.22(f/D)\lambda \approx \lambda$.

10.24



10.27 1 millième. $2,5 \text{ m} \approx 100 \times 2,5 \text{ cm}$ (voir la figure à la p. 679).



10.32 D'après l'équation (10.32), où $a = 1/(1\ 000 \text{ traits par cm}) = 0,001 \text{ cm}$ par ligne (centre à centre), $\sin \theta_m = 1(650 \times 10^{-9} \text{ m}) / (0,001 \times 10^{-2} \text{ m}) = 6,5 \times 10^{-2}$ et $\theta_1 = 3,73^\circ$.

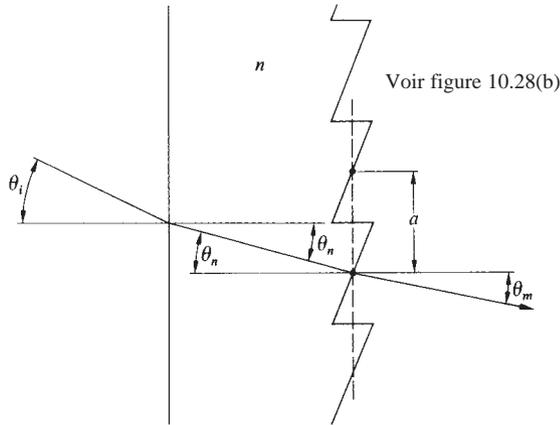
10.35 La plus grande valeur de m dans l'équation (10.32) est obtenue lorsque la fonction sinus est égale à 1, ce qui maximise la partie gauche de l'équation ; on a alors, $m = a/\lambda = (1/10 \times 10^5) / (3,0 \times 10^8 \text{ m/s} \div 4,0 \times 10^{14} \text{ Hz}) = 1,3$, et seul le spectre de premier ordre est visible.

10.37 $\sin \theta_i = n \sin \theta_n$

Différence de chemin optique = $m\lambda$

$$a \sin \theta_m - na \sin \theta_n = m\lambda$$

$$a(\sin \theta_m - \sin \theta_i) = m\lambda$$



10.38 $\mathcal{R} = mN = 10^6$, $N = 78 \times 10^3$

$$\therefore m = 10^6 / 78 \times 10^3$$

$$\Delta\lambda_{\text{fsr}} = \lambda/m = 500 \text{ nm} / (10^6 / 78 \times 10^3) = 39 \text{ nm}$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{F}m = \mathcal{F} \frac{2n_f d}{\lambda} = 10^6 \quad [9.76]$$

$$\Delta\lambda_{\text{fsr}} = \lambda^2 / 2n_f d = 0,0125 \text{ nm} \quad [9.78]$$

10.39 $\mathcal{R} = \lambda/\Delta\lambda = 5\ 892,9/5,9 = 999$

$$N = \mathcal{R}/m = 333$$

10.41 $y = L\lambda/d$

$$d = 12 \times 10^{-6} / 12 \times 10^{-2} = 10^{-4} \text{ m}$$

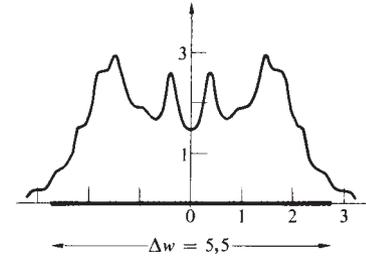
$$\begin{aligned} \mathbf{10.43} \quad A &= 2\pi\rho^2 \int_0^\varphi \sin \varphi \, d\varphi = 2\pi\rho^2(1 - \cos \varphi) \\ \cos \varphi &= [\rho^2 + (\rho + r_0)^2 - r_l^2] / 2\rho(\rho + r_0) \\ r_l &= r_0 + l\lambda/2 \end{aligned}$$

Surface des l premières zones :

$$A = 2\pi\rho^2 - \pi\rho(2\rho^2 + 2\rho r_0 - l\lambda r_0 - l^2\lambda^2/4) / (\rho + r_0)$$

$$A_l = A - A_{l-1} = \frac{\lambda\pi\rho}{\rho + r_0} \left[r_0 + \frac{(2l-1)\lambda}{4} \right]$$

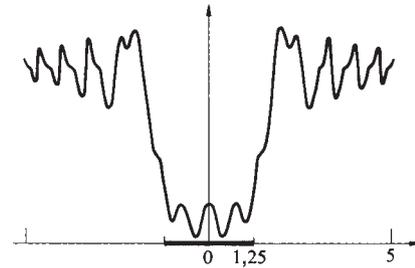
10.45



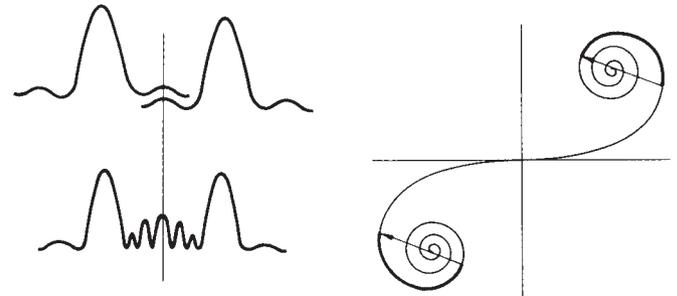
$$\begin{aligned} \mathbf{10.46} \quad I &= \frac{I_0}{2} \{ [\frac{1}{2} - \mathcal{C}(v_1)]^2 + [\frac{1}{2} - \mathcal{S}(v_1)]^2 \} \\ I &= \frac{I_0}{2} \left(\frac{1}{\pi v_1} \right)^2 \left[\sin^2 \left(\frac{\pi v_1^2}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi v_1^2}{2} \right) \right] \\ I &= \frac{I_0}{2} \left(\frac{1}{\pi v_1} \right)^2 \end{aligned}$$

10.47 On observe des franges, à la fois dans les régions brillantes et sombres [(voir M. P. Givens et W. L. Goffe, *Am. J. Phys.* **34**, 248 (1966)).

10.48 $u = y[2/\lambda r_0]^{1/2}$; $\Delta u = \Delta y \times 10^3 = 2,5$



10.49



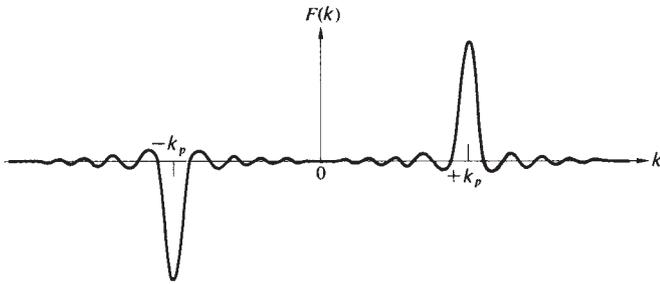
Chapitre 11

11.1 $E_0 \sin k_p x = E_0(e^{ik_p x} - e^{-ik_p x})/2i$

$$F(k) = \frac{E_0}{2i} \left[\int_{-L}^{+L} e^{i(k+k_p)x} dx - \int_{-L}^{+L} e^{i(k-k_p)x} dx \right]$$

$$F(k) = -\frac{iE_0 \sin(k+k_p)L}{(k+k_p)} + \frac{iE_0 \sin(k-k_p)L}{(k-k_p)}$$

$$F(k) = iE_0 L [\text{sinc}(k-k_p)L - \text{sinc}(k+k_p)L]$$

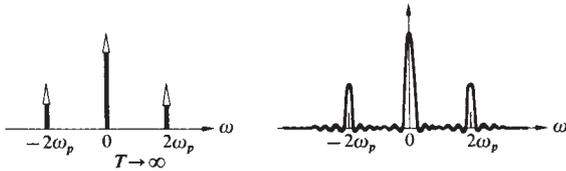


11.3 $\cos^2 \omega_p t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_p t = \frac{1}{2} + \frac{e^{2i\omega_p t} + e^{-2i\omega_p t}}{4}$

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-T}^{+T} e^{i\omega t} dt + \frac{1}{4} \int_{-T}^{+T} e^{i(\omega+2\omega_p)t} dt + \frac{1}{4} \int_{-T}^{+T} e^{i(\omega-2\omega_p)t} dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega} \sin \omega T + \frac{1}{2(\omega+2\omega_p)} \sin(\omega+2\omega_p)T + \frac{1}{2(\omega-2\omega_p)} \sin(\omega-2\omega_p)T$$

$$F(\omega) = T \text{sinc } \omega T + \frac{T}{2} \text{sinc}(\omega+2\omega_p)T + \frac{T}{2} \text{sinc}(\omega-2\omega_p)T$$



11.6 $\mathcal{F}\{af(x) + bh(x)\} = aF(k) + bH(k)$

11.8 $F(k) = L \text{sinc}^2 kL/2$ at $k = 0$, $F(0) = L$, et $F(\pm 2\pi/L) = 0$.

11.15 $\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x)h(X-x) dx$

$$= - \int_{x'=+\infty}^{x'=-\infty} f(X-x')h(x') dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x')f(X-x') dx'$$

où $x' = X - x$, $dx = -dx'$.

$$f \otimes h = h \otimes f$$

ou

$$\mathcal{F}\{f \otimes h\} = \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{h\} = \mathcal{F}\{h\} \cdot \mathcal{F}\{f\} = \mathcal{F}\{h \otimes f\}.$$

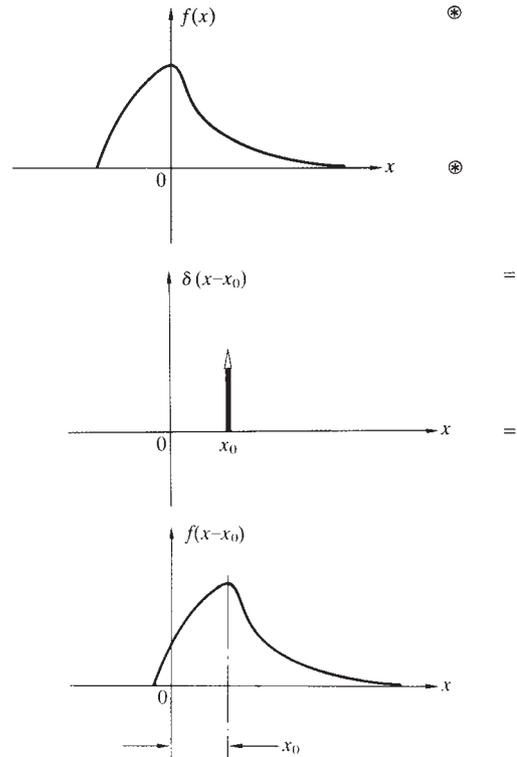
11.17 Un point sur le bord de $f(x, y)$, par exemple, à $(x = d, y = 0)$, est étalé sous la forme d'un carré de 2ℓ de côté, centré sur $X = d$. Ainsi, il ne s'étend pas plus loin que $X = d + \ell$, et la convolution doit donc être nulle à $X = d + \ell$ et au-delà.

11.19 $f(x - x_0) \otimes h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x_0)h(X - x) dx$,

et en posant $x - x_0 = \alpha$, cela devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)h(X - \alpha - x_0) d\alpha = g(X - x_0)$$

11.21



11.24 On voit que $f(x)$ est la convolution d'une fonction rectange avec deux fonctions δ et d'après le théorème de convolution :

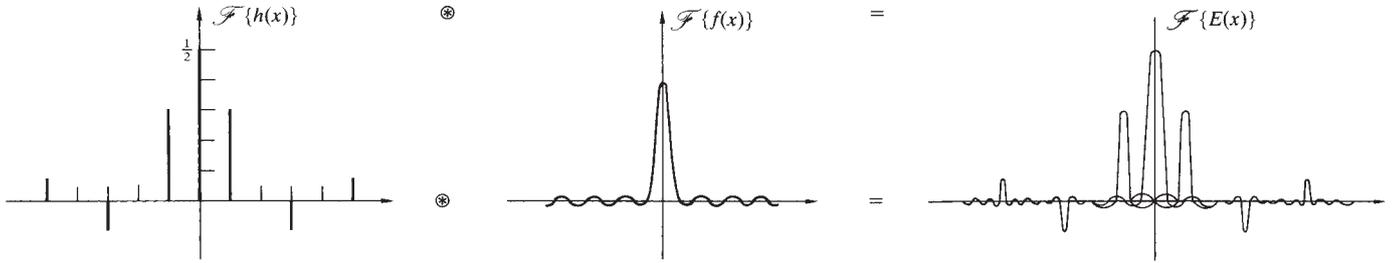
$$F(k) = \mathcal{F}\{\text{rect}(x) \otimes [\delta(x - a) + \delta(x + a)]\}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{F}\{\text{rect}(x)\} \cdot \mathcal{F}\{\delta(x-a) + \delta(x+a)\} \\
&= a \text{sinc } \frac{1}{2}ka \cdot (e^{ika} + e^{-ika}) \\
&= a \text{sinc } \left(\frac{1}{2}ka\right) \cdot 2 \cos ka
\end{aligned}$$

11.25 $f(x) \otimes h(x)$

$$\begin{aligned}
&= [\delta(x+3) + \delta(x-2) + \delta(x-5)] \otimes h(x) \\
&= h(x+3) + h(x-2) + h(x-5)
\end{aligned}$$

11.28



11.29 $\mathcal{A}(y, z) = \mathcal{A}(-y, -z)$

$$E(Y, Z, t) \propto \iint \mathcal{A}(y, z) e^{i(k_y y + k_z z)} dy dz$$

Changer Y en $-Y$, Z en $-Z$, y en $-y$, z en $-z$, alors k_y va à $-k_y$ et k_z à $-k_z$.

$$\begin{aligned}
E(-Y, -Z) &\propto \iint \mathcal{A}(-y, -z) e^{i(k_y y + k_z z)} dy dz \\
\therefore E(-Y, -Z) &= E(Y, Z)
\end{aligned}$$

11.30 D'après l'équation (11.63),

$$E(Y, Z) = \iint \mathcal{A}(y, z) e^{ik(Yy + Zz)/R} dy dz$$

$$E'(Y, Z) = \iint \mathcal{A}(\alpha y, \beta z) e^{ik(Yy + Zz)/R} dy dz$$

on pose ensuite $y' = \alpha y$ et $z' = \beta z$:

$$E'(Y, Z) = \frac{1}{\alpha\beta} \iint \mathcal{A}(y', z') e^{ik[(Y/\alpha)y' + (Z/\beta)z']} dy' dz'$$

ou

$$E'(Y, Z) = \frac{1}{\alpha\beta} E(Y/\alpha, Z/\beta)$$

11.31

$$\begin{aligned}
C_{ff} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} A \sin(\omega t + \varepsilon) A \sin(\omega t - \omega\tau + \varepsilon) dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int \left[\frac{1}{2} \cos(\omega\tau) - \frac{1}{2} \cos(2\omega t - \omega\tau + 2\varepsilon) \right] dt
\end{aligned}$$

puisque $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Ainsi,

$$C_{ff} = \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau)$$

$$\begin{aligned}
11.32 \quad E(k_z) &= \int_{-b/2}^{+b/2} \mathcal{A}_0 \cos(\pi z/b) e^{ik_z z} dz \\
&= \mathcal{A}_0 \int \cos \frac{\pi z}{b} \cos k_z z dz + i \mathcal{A}_0 \int \cos \frac{\pi z}{b} \sin k_z z dz \\
E(k_z) &= \mathcal{A}_0 \cos \frac{bk_z}{2} \left[\frac{1}{\left(\frac{\pi}{b} - k_z\right)} + \frac{1}{\left(\frac{\pi}{b} + k_z\right)} \right]
\end{aligned}$$

Chapitre 12

12.1 À basse pression, l'intensité de la lampe est faible, la largeur de bande fine, et la longueur de cohérence grande. Il en résulte que les franges présentent initialement un fort contraste, mais qu'elles sont très peu visibles. À mesure que la pression augmente, la longueur de cohérence et le contraste diminuent et les franges finissent par disparaître entièrement.

12.4 Chaque fonction sinus du signal produit une autocorrélation sinusoidale avec ses propres longueur d'onde et amplitude. Toutes ces autocorrélations sont en phase pour un retard nul correspondant à $\tau = 0$. Au-delà de cette origine, les cosinus sont très vite en opposition de phase, produisant un amas confus où les interférences destructives prédominent (le même type de chose arrive lorsque, par exemple, une impulsion carrée est synthétisée en sinusoides : en tout point situé au-delà de l'impulsion, les contributions s'annulent). À mesure que le nombre de composantes augmente et que le signal devient plus complexe, proche d'un bruit aléatoire, l'autocorrélation diminue, pour devenir finalement un pic δ à $\tau = 0$.

12.6 L'éclairement en Σ_0 provenant d'un point source est :

$$4I_0 \cos^2(\delta/2) = 2I_0(1 + \cos \delta)$$

Pour un élément différentiel de source de largeur dy au point S' , situé à la distance y de l'axe, la différence de chemin optique jusqu'à P du plan d'observation Y via les deux fentes, s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Lambda &= (\overline{S'S_1} + \overline{S_1P}) - (\overline{S'S_2} + \overline{S_2P}) \\
&= (\overline{S'S_1} - \overline{S'S_2}) + (\overline{S_1P} - \overline{S_2P})
\end{aligned}$$

$$= ay/l + aY/s \text{ d'après le paragraphe 9.3.}$$

La contribution de dy à l'éclairement est alors :

$$\begin{aligned}
 dI &\propto (1 + \cos k\Lambda) dy \\
 I &\propto \int_{-b/2}^{+b/2} (1 + \cos k\Lambda) dy \\
 I &\propto b + \frac{d}{ka} \left[\sin\left(\frac{aY}{s} + \frac{ab}{2l}\right) - \sin\left(\frac{aY}{s} - \frac{ab}{2l}\right) \right] \\
 I &\propto b + \frac{d}{ka} [\sin(kaY/s) \cos(kab/2l) \\
 &\quad + \cos(kaY/s) \sin(kab/2l) \\
 &\quad - \sin(kaY/s) \cos(kab/2l) \\
 &\quad + \cos(kaY/s) \sin(kab/2l)] \\
 I &\propto b + \frac{ld}{ka} \sin(kab/2l) \cos(kaY/s)
 \end{aligned}$$

12.7

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &= \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \\
 I_{\max} &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \tilde{\gamma}_{12} \\
 I_{\min} &= I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \tilde{\gamma}_{12} \\
 \mathcal{V} &= \frac{4\sqrt{I_1 I_2} \tilde{\gamma}_{12}}{2(I_1 + I_2)}
 \end{aligned}$$

12.8 Lorsque :

$$S''S_1O' - S'S_1O' = \lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \dots$$

l'éclairement dû à S' est donné par :

$$I' = 4I_0 \cos^2(\delta'/2) = 2I_0(1 + \cos \delta')$$

et l'éclairement dû à S'' est :

$$\begin{aligned}
 I'' &= 4I_0 \cos^2(\delta''/2) = 4I_0 \cos^2(\delta' + \pi)/2 \\
 &= 2I_0(1 - \cos \delta')
 \end{aligned}$$

De ce fait, $I' + I'' = 4I_0$.

12.10 $\theta = \frac{1^\circ}{2} = 0,0087 \text{ rad}$

$$h = 0,32\bar{\lambda}_0/\theta \text{ using } \bar{\lambda}_0 = 550 \text{ nm}$$

$$h = 0,32(550 \text{ nm})/0,0087$$

$$h = 2 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

12.11 $I_1(t) = \Delta I_1(t) + \langle I_1 \rangle$

d'où,

$$\langle I_1(t + \tau)I_2(t) \rangle = \langle [I_1 + \Delta I_1(t + \tau)][I_2 + \Delta I_2(t)] \rangle$$

puisque $\langle I_1 \rangle$ est indépendant du temps.

$$\langle I_1(t + \tau)I_2(t) \rangle = \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle + \langle \Delta I_1(t + \tau) \Delta I_2(t) \rangle$$

en rappelant que $\langle \Delta I_1(t) \rangle = 0$. L'équation (12.34) suit par comparaison avec l'équation (12.32).

12.13 D'après l'équation (12.22), $\mathcal{V} = 2\sqrt{(10I)I}/(10I + I) = 2\sqrt{10}/11 = 0,57$.

12.15 En utilisant le théorème de Zernike-van Cittert, on peut trouver $\tilde{\gamma}_{12}(0)$ à partir de la figure de diffraction sur les ouvertures, et cela conduit à la visibilité dans le plan d'observation : $\mathcal{V} = |\tilde{\gamma}_{12}(0)| = |\text{sinc } \beta|$. D'après le tableau 1, $\sin u/u = 0,85$ lorsque $u = 0,97$, d'où $\pi b y / l \lambda = 0,97$, et si $y = \overline{P_1 P_2} = 0,50 \text{ mm}$, alors $b = 0,97(l\lambda/\pi y) = 0,97(1,5 \text{ m})(500 \times 10^{-9} \text{ m})/\pi(0,50 \times 10^{-3} \text{ m}) = 0,46 \text{ mm}$.

12.18 D'après le théorème de Zernike-van Cittert, on obtient le degré de cohérence par transformée de Fourier de la fonction source en luminance, qui est elle-même une série de fonctions δ correspondant à un réseau de diffraction d'espacement a , où $a \sin \theta_m = m\lambda$. La fonction de cohérence est, par conséquent, une série de fonctions δ . De ce fait, si l'on veut maximiser \mathcal{V} , la distance $\overline{P_1 P_2}$, et la séparation des fentes d , doivent correspondre à la localisation de la frange de diffraction de premier ordre de la source. On a : $a\theta_1 \approx \lambda$, et donc $d \approx l\theta_1 \approx \lambda l/a = (500 \times 10^{-9} \text{ m})(2,0 \text{ m})/(500 \times 10^{-6} \text{ m}) = 2,0 \text{ mm}$.

Chapitre 13

13.2 $P/A = \epsilon\sigma(T^4 - T_e^4) = (0,97)(5,6703 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4) \times (306^4 - 293^4) = I = 76,9 \text{ W/m}^2$. $P = 108 \text{ W}$.

13.3 $I_e = \sigma T^4$

$$(22,8 \text{ W cm}^2)(10^4 \text{ cm}^2/\text{m}^2) = (5,7 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4})T^4$$

$$T = \left[\frac{22,8 \times 10^4}{5,7 \times 10^{-8}} \right]^{1/4} = 1,414 \times 10^3 = 1414 \text{ K}$$

13.4 $T_2^4/T_1^4 = P_2/P_1 = 16 \times 10^{12}/16 \times 10^8 = 1,0 \times 10^4$

13.12 $\lambda(\text{min}) = 300 \text{ nm}$

$$\begin{aligned}
 hv &= hc/\lambda \\
 &= \frac{(6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{300 \times 10^{-9} \text{ m}}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{E} = 6,63 \times 10^{-19} \text{ J} = 4,14 \text{ eV}$$

13.14 $Nhv = (1,4 \times 10^3 \text{ W/m}^2)(1 \text{ m}^2)(1 \text{ s})$

$$N = \frac{1,4 \times 10^3(700 \times 10^{-9})}{(6,63 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)} = \frac{980 \times 10^{20}}{19,89}$$

$$N = 49,4 \times 10^{20}$$

13.15 Il faut trouver le nombre d'atomes présents. $pV = nRT$; $n = 4,47 \times 10^{-7} \text{ mol}$; il y a donc $2,69 \times 10^{17}$ atomes et $2,67 \times 10^{15}$ sont excités, le flux photonique est $2,67 \times 10^{15}/\tau = 1,92 \times 10^{23}$ photons par seconde.

13.18 $hv/k_B T = 0,774$ et $\frac{1}{e^{0,774} - 1} = 0,86$; à température élevée, le rapport est substantiel et les deux modes d'émission sont comparables.

13.23 Le flux photonique doit être égal à $P/h\nu = 3 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$.

$$13.27 \quad I = \frac{1}{2} v \epsilon E_0^2 = \frac{n}{2} \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} E_0^2, \text{ où } \mu \approx \mu_0$$

$$E_0^2 = 2(\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} I/n \quad (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} = 376,730 \Omega$$

$$E_0 = 27,4 (I/n)^{1/2}$$

13.29

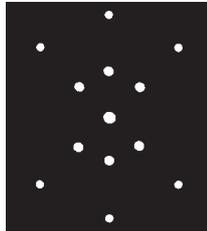


Figure de diffraction

13.30

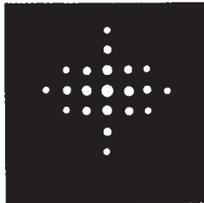


Figure de diffraction



Filtre

13.31

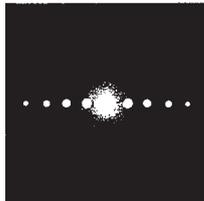
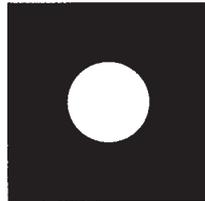
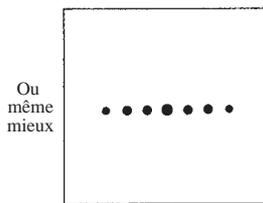


Figure de diffraction



Filtre



Filtre

13.33



Filtres

13.34 D'après la géométrie, $f_i \theta = f_i \Phi$; $k_O = k \sin \theta$ et $k_I = k \sin \Phi$, d'où $\sin \theta \approx \theta \approx k_O \lambda / 2\pi$ et $\sin \Phi \approx \Phi \approx k_I \lambda / 2\pi$, donc $\theta / \Phi = k_O / k_I$ et $k_I = k_O (\Phi / \theta) = k_O (f_i / f_i)$. Lorsque $f_i > f_i$, l'image sera agrandie par rapport à l'objet ; les périodes spatiales de l'image seront également plus grandes, et ses fréquences spatiales plus petites que celles de l'objet.

13.35 $a = (1/50) \text{ cm}$: $a \sin \theta = m\lambda$, $\sin \theta \approx \theta$, d'où $\theta = (5000 \text{ m}) \lambda$, et la distance entre les ordres dans le plan de transformation est $f\theta = 5000 \lambda f = 2,7 \text{ mm}$.

13.37 Chaque point de la figure de diffraction correspond à une seule fréquence spatiale, et si l'on considère l'onde diffractée comme étant constituée d'ondes planes, elle correspond également à une direction d'onde plane unique. De telles ondes, par elles-mêmes, ne transportent pas d'information sur la périodicité de l'objet et produisent une image plus ou moins uniforme. La périodicité de la source est visible sur l'image lorsque les ondes planes constituantes interfèrent.

13.39 Les amplitudes relatives de champ sont 1,00, 0,60, et 0,60 ; ainsi, $E \propto 1 + 0,60 \cos(+ky') + 0,60 \cos(-ky') = 1 + 1,2 \cos ky'$. C'est un cosinus qui oscille de part et d'autre d'une ligne horizontale d'ordonnée 1,0. Il varie de +2,2 à -0,2. Le carré de cette expression correspond à l'éclairement, constitué par une série de pics élevés, de hauteur relative égale à $(2,2)^2$, entre lesquels se trouvent des pics moins élevés, de hauteur $(0,2)^2$; on notera les similitudes avec la figure 11.32.

13.40 $a \sin \theta = \lambda$, ici $f\theta = 50\lambda f = 0,20 \text{ cm}$; d'où $\lambda = 0,20/50 (100) = 400 \text{ nm}$. Le grandissement est 1,0 lorsque les focales sont égales ; de ce fait, l'espacement est encore de 50 fils/cm.

13.44 Le mouvement inhérent du milieu entraîne une disparition du speckle.

Bibliographie

- ANDREWS, C. L., *Optics of the Electromagnetic Spectrum*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1960.
- ANTONELLI, CHRISTIAN, FISCHER, GILES, JAMES, and STONER, *Waves and Optics Simulations*, Wiley, New York, 1995.
- BACHOR, Hans-A., *A Guide to Experiments in Quantum Optics*, Wiley-VCH, Weinheim, 1998.
- BAKER, B. B. and E. J. COPSON, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle*, Oxford University Press, London, 1969.
- BALDWIN, G. C., *An Introduction to Nonlinear Optics*, Plenum Press, New York, 1969.
- BARBER, N. F., *Experimental Correlograms and Fourier Transforms*, Pergamon, Oxford, 1961.
- BARNOSKI, M., *Fundamentals of Optical Fiber Communications*, Academic Press, New York, 1976.
- BARTON, A. W., *A Textbook on Light*, Longmans, Green, London, 1939.
- BEARD, D. B. and G. B. BEARD, *Quantum Mechanics with Applications*, Allyn and Bacon, Boston, 1970.
- BEESELEY, M., *Lasers and Their Applications*, Taylor and Francis, New York, 1976.
- BERAN, M. J. and G. B. PARRENT, JR., *Theory of Partial Coherence*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.
- BLAKER, J. W. and W. M. ROSENBLUM, *Optics*, Macmillan, New York, 1993.
- BLOEMBERGEN, N., *Nonlinear Optics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1991.
- BLOOM, A. L., *Gas Lasers*, Wiley, New York, 1968.
- BLOSS, D., *An Introduction to the Methods of Optical Crystallography*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961.
- BOHREN, C. F. and D. R. HUFFMAN, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, Wiley, New York, 1983.
- BORN, M. and E. WOLF, *Principles of Optics*, Pergamon, Oxford, 1970.
- BOROWITZ, S., *Fundamentals of Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1967.
- BRADDICK, H., *Vibrations, Waves, and Diffraction*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- BROUWER, W., *Matrix Methods in Optical Instrument Design*, Benjamin, New York, 1964.
- BROWN, E. B., *Modern Optics*, Reinhold, New York, 1965.
- BUCK, J. A., *Optical Fibers*, Wiley, New York, 1995.
- BUTCHER, P. N. and D. COTTER, *The Elements of Nonlinear Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- CAJORI, F., *A History of Physics*, Macmillan, New York, 1899.
- CATHEY, W., *Optical Information Processing and Holography*, Wiley, New York, 1974.
- CHANG, W. S. C., *Principles of Quantum Electronics, Lasers: Theory and Applications*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
- COHEN-TANNOUDJI, C., DUPONT-ROC, J. and G. GRYNBERG, *Photons and Atoms*, Wiley, New York, 1989.
- COLLIER, R., C. BURCKHARDT, and L. LIN, *Optical Holography*, Academic Press, New York, 1971.
- CONRADY, A. E., *Applied Optics and Optical Design*, Dover Publications, New York, 1929.
- COOK, A. H., *Interference of Electromagnetic Waves*, Clarendon Press, Oxford, 1971.
- COSSLETT, V. E., *Modern Microscopy*, Cornell University Press, Ithaca, New York, 1966.
- COULSON, C. A., *Waves*, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1949.
- COX, A., *Optics*, The Focal Press, London, 1961.
- COWLEY, J. M., *Diffraction Physics*, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- CRAWFORD, F. S., JR., *Waves*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- DAVIS, C. C., *Lasers and Electro-Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- DAVIS, H. F., *Introduction to Vector Analysis*, Allyn and Bacon, Boston, 1961.
- DAVIS, S. P., *Diffraction Grating Spectrographs*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970.
- DENISYUK, Y., *Fundamentals of Holography*, Mir Publishers, Moscow, 1984.

- DEVELIS, J. B. and G. O. REYNOLDS, *Theory and Applications of Holography*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967.
- DIRAC, P. A. M., *Quantum Mechanics*, Oxford University Press, London, 1958.
- DITCHBURN, R. W., *Light*, Wiley, New York, 1963.
- DITTEON, R., *Modern Geometrical Optics*, Wiley, New York, 1998.
- DODD, J. N., *Atoms and Light: Interactions*, Plenum Press, New York, 1991.
- DRUDE, P., *The Theory of Optics*, Longmans, Green, London, 1939.
- ELMORE, W. and M. HEALD, *The Physics of Waves*, McGraw-Hill, New York, 1969.
- FEYNMAN, R. P., *QED*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1985.
- FLÜGGE, J., ed., *Die wissenschaftliche und angewandte Photographie; Band 1, Das photographische Objektiv*, Springer-Verlag, Wien, 1955.
- Fowles, G., *Introduction to Modern Optics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.
- FRANÇON, M., *Diffraction: Coherence in Optics*, Pergamon Press, Oxford, 1966.
- FRANÇON, M., *Modern Applications of Physical Optics*, Wiley, Interscience, New York, 1963.
- FRANÇON, M., *Optical Interferometry*, Academic Press, New York, 1966.
- FRANÇON, M., *Optical Image Formation and Processing*, Academic Press, New York, 1979.
- FRANÇON, M., N. KRAUZMAN, J. P. MATHIEU, and M. MAY, *Experiments in Physical Optics*, Gordon and Breach, New York, 1970.
- FRANK, N. H., *Introduction to Electricity and Optics*, McGraw-Hill, New York, 1950.
- FREEMAN, M. H., *Optics*, Butterworths, London, 1990.
- FRENCH, A. P., *Special Relativity*, Norton, New York, 1968.
- FRENCH, A. P., *Vibrations and Waves*, Norton, New York, 1971.
- FROOME, K. D. and L. ESSEN, *The Velocity of Light and Radio Waves*, Academic Press, London, 1969.
- FRY, G. A., *Geometrical Optics*, Chilton, Philadelphia, 1969.
- GARBUNY, M., *Optical Physics*, Academic Press, New York, 1965.
- GASKILL, J., *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics*, Wiley, New York, 1978.
- GHATAK, A. K., *An Introduction to Modern Optics*, McGraw-Hill, New York, 1971.
- GHATAK, A. and K. THYAGARAJAN, *Contemporary Optics*, Plenum Press, New York, 1978.
- GOLDIN, E., *Waves and Photons, An Introduction to Quantum Theory*, Wiley, New York, 1982.
- GOLDWASSER, E. L., *Optics, Waves, Atoms, and Nuclei: An Introduction*, Benjamin, New York, 1965.
- GOODMAN, J. W., *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- GRAHAM SMITH, F. and T. A. KING, *Optics and Photonics: An Introduction*, Wiley, New York, 2000.
- Greenler, R., *Rainbows, Halos, and Glories*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- GUENTHER, R. D., *Modern Optics*, Wiley, New York, 1990.
- HARDY, A. C. and F. H. PERRIN, *The Principles of Optics*, McGraw-Hill, New York, 1932.
- Hariharan, P., *Basics of Interferometry*, Academic Press, New York, 1992.
- HARVEY, A. F., *Coherent Light*, Wiley, London, 1970.
- HEAVENS, O. S., *Optical Properties of Thin Solid Films*, Dover Publications, New York, 1955.
- HECHT, E., *Optics: Schaum's Outline Series*, McGraw-Hill, New York, 1975.
- HECHT, J., *Understanding Fiber Optics, 4th ed.*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.
- HERMANN, A., *The Genesis of Quantum Theory (1899–1913)*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1971.
- HOUSTON, R. A., *A Treatise On Light*, Longmans, Green, London, 1938.
- HUARD, S., *Polarization of Light*, Wiley, New York, 1997.
- HUNSPERGER, R., *Integrated Optics: Theory and Technology*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- HUYGENS, C., *Treatise on Light*, Dover Publications, New York, 1962 (1690).
- IGA, K., *Fundamentals of Laser Optics*, Plenum Press, New York, 1994.
- IZUKA, K., *Engineering Optics*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- INGARD, K. U., *Fundamentals of Waves and Oscillations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- JACKSON, J. D., *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, 1962.
- JENKINS, F. A. and H. E. WHITE, *Fundamentals of Optics*, McGraw-Hill, New York, 1957.
- JENNISON, R. C., *Fourier Transforms and Convolutions for the Experimentalist*, Pergamon, Oxford, 1961.
- JOHNSON, B. K., *Optics and Optical Instruments*, Dover Publications, New York, 1947.
- JONES, B., et al., *Images and Information*, The Open University Press, Milton Keynes, Great Britain, 1978.
- KAFRI, O. and I. GLATT, *The Physics of Moiré Metrology*, Wiley, New York, 1990.
- KARIM, M. A., *Electro-Optical Devices and Systems*, PWS-Kent, Boston, 1990.
- KEISER, G., *Optical Fiber Communications*, McGraw-Hill, New York, 1991.
- KITCHIN, C. R., *Telescopes and Techniques*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- KLAUDER, J. and E. SUDARSHAN, *Fundamentals of Quantum Optics*, Benjamin, New York, 1968.
- KLEIN, M. V., *Optics*, Wiley, New York, 1970.
- KREYSZIG, E., *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley, New York, 1967.

- Kuehni, R. G., *Color*, Wiley, New York, 1997.
- LENGYEL, B. A., *Lasers, Generation of Light by Stimulated Emission*, Wiley, New York, 1962.
- LENGYEL, B. A., *Introduction to Laser Physics*, Wiley, New York, 1966.
- LEVI, L., *Applied Optics*, Wiley, New York, 1968.
- LEVINSON, M. D. and S. S. KANO, *Introduction to Nonlinear Laser Spectroscopy*, Academic Press, New York, 1988.
- LIPSON, S. G. and LIPSON, H. and D. S. TANNHAUSER, *Optical Physics*, Cambridge University Press, London, (3rd Ed.), 1995.
- LONGHURST, R. S., *Geometrical and Physical Optics*, Wiley, New York, 1967.
- Loudon, R., *The Quantum Theory of Light*, Clarendon Press, Oxford, 1986.
- MACH, E., *The Principles of Physical Optics, An Historical and Philosophical Treatment*, Dover Publications, New York, 1926.
- MAGIE, W. F., *A Source Book in Physics*, McGraw-Hill, New York, 1935.
- MAIN, I. G., *Vibrations and Waves in Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, (3rd Ed.), 1993.
- MALACARA, D., *Optical Shoptesting*, Wiley, New York, 1978.
- MANDEL, L. and E. WOLF, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- MARION, J. and M. HEALD, *Classical Electromagnetic Radiation*, Academic Press, New York, 1980.
- MARTIN, L. C. and W. T. WELFORD, *Technical Optics*, Sir Isaac Pitman & Sons, Ltd., London, 1966.
- MATVEEV, A. N., *Optics*, Mir Publishers, Moscow, 1988.
- MEYER, C. F., *The Diffraction of Light, X-rays and Material Particles*, University of Chicago Press, Chicago, 1934.
- MEYER-ARENDT, J. R., *Introduction to Classical and Modern Optics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1972.
- MEYSTRE, P. and M. SARGENT III, *Elements of Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- MICKELSON, A. A., *Light Waves and Their Uses*, University of Chicago Press, Chicago, 1902.
- MICKELSON, A. A., *Studies in Optics*, University of Chicago Press, Chicago, 1927.
- MICKELSON, A. R., *Physical Optics*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1992.
- MIDWINTER, J., *Optical Fibers for Transmission*, Wiley, New York, 1979.
- Military Standardization Handbook—Optical Design*, MIL-HDBK-141, 5 October 1962.
- MILONNI, P. W. and J. H. EBERLY, *Lasers*, Wiley, New York, 1988.
- MINNAERT, M., *The Nature of Light and Colour in the Open Air*, Dover Publications, New York, 1954.
- MÖLLER, K. D., *Optics*, Wiley, New York, 1988.
- MORGAN, J., *Introduction to Geometrical and Physical Optics*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- MURDEN, J., *Beginner's Guide to Astronomical Telescope Making*, Pelham Books Ltd., London, 1975.
- NEWELL, A. C. and J. V. MOLONEY, *Nonlinear Optics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1992.
- NEWTON, I., *Optiks*, Dover Publications, New York, 1952 (1704).
- NOAKES, G. R., *A Text-Book of Light*, Macmillan, London, 1944.
- NUSSBAUM, A., *Geometric Optics: An Introduction*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.
- NUSSBAUM, A. and R. PHILLIPS, *Contemporary Optics for Scientists and Engineers*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1976.
- OKOSHI, T., *Optical Fibers*, Academic Press, New York, 1982.
- O'NEILL, E. L., *Introduction to Statistical Optics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963.
- O'SHEA, D., W. CALLEN, and W. RHODES, *Introduction to Lasers and Their Applications*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1977.
- O'SHEA, D. C., *Elements of Modern Optical Design*, Wiley, New York, 1985.
- PALMER, C. H., *Optics, Experiments and Demonstrations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, Md., 1962.
- PAPOULIS, A., *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw-Hill, New York, 1962.
- PAPOULIS, A., *Systems and Transforms with Applications in Optics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- PEARSON, J. M., *A Theory of Waves*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- PERSONICK, S. D., *Optical Fiber Transmission Systems*, Plenum Press, New York, 1981.
- PLANCK, M. and M. MASIVUS, *The Theory of Heat Radiation*, Blakiston, Philadelphia, 1914.
- PRESTON, K., *Coherent Optical Computers*, McGraw-Hill, New York, 1972.
- ROBERTSON, E. R. and J. M. HARVEY, eds., *The Engineering Uses of Holography*, Cambridge University Press, London, 1970.
- ROBERTSON, J. K., *Introduction to Optics Geometrical and Physical*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1957.
- RONCHI, V., *The Nature of Light*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1971.
- ROSSI, B., *Optics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.
- RUECHARDT, E., *Light Visible and Invisible*, University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1958.
- SAFFORD, E. L. JR. and J. A. McCANN, *Fiberoptics and Lasers*, TAB Books, Blue Ridge Summit, PA, 1988.
- SALEH, B. E. A. and M. C. TEICH, *Fundamentals of Photonics*, Wiley, New York, 1991.
- SANDBANK, C. P., *Optical Fibre Communication Systems*, Wiley, New York, 1980.
- SANDERS, J. H., *The Velocity of Light*, Pergamon, Oxford, 1965.
- SARGENT, M., M. SCULLY, and W. LAMB, *Laser Physics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.
- SCHAWLOW, A. L., intr., *Lasers and Light; Readings from Scientific American*, Freeman, San Francisco, 1969.
- SCHRÖDINGER, E. C., *Science Theory and Man*, Dover Publications, New York, 1957.
- SCHROEDER, D. J., *Astronomical Optics*, Academic Press, New York, 1987.

- SEARS, F. W., *Optics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1949.
- SHAMOS, M. H., ed., *Great Experiments in Physics*, Holt, New York, 1959.
- SHANNON, R. R., *The Art and Science of Optical Design*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- SHURCLIFF, W. A., *Polarized Light: Production and Use*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1962.
- SHURCLIFF, W. A. and S. S. BALLARD, *Polarized Light*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1964.
- SILVAST, W. T., *Laser Fundamentals*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- SILVERMAN, M. P., *Waves and Grains*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1998.
- SIMMONS, J. and M. GUTTMANN, *States, Waves and Photons: A Modern Introduction to Light*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1970.
- SINCLAIR, D. C. and W. E. BELL, *Gas Laser Technology*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.
- SLAYTER, E. M., *Optical Methods in Biology*, Wiley, New York, 1970.
- SMITH, F. and J. THOMSON, *Optics*, Wiley, New York, 1971.
- SMITH, G. and D. A. ATCHISON, *The Eye and Visual Optical Instruments*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- SMITH, H. M., *Principles of Holography*, Wiley, New York, 1969.
- SMITH, W. J., *Modern Optical Engineering*, McGraw-Hill, New York (2nd ed.), 1990.
- Société Française de Physique, ed., *Polarization, Matter and Radiation. Jubilee Volume in Honor of Alfred Kastler*, Presses Universitaires de France, Paris, 1969.
- SOMMERFELD, A., *Optics*, Academic Press, New York, 1964.
- SOUTHALL, J. P. C., *Mirrors, Prisms and Lenses*, Macmillan, New York, 1933.
- SOUTHALL, J. P. C., *Introduction to Physiological Optics*, Dover Publications, New York, 1937.
- STARK, H., *Applications of Optical Fourier Transforms*, Academic Press, New York, 1982.
- STEWART, E., *Fourier Optics: An Introduction*, Wiley, New York (2nd ed.), 1987.
- STONE, J. M., *Radiation and Optics*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- STROKE, G. W., *An Introduction to Coherent Optics and Holography*, Academic Press, New York, 1969.
- STRONG, J., *Concepts of Classical Optics*, Freeman, San Francisco, 1958.
- SUITER, H. R., *Star Testing Astronomical Telescopes*, Willmann-Bell, Richmond, Va., 1999.
- SVELTO, O., *Principles of Lasers*, Plenum Press, New York, 1977.
- SYMON, K. R., *Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960.
- TARASOV, L. V., *Laser Age in Optics*, Mir Publishers, Moscow, 1981.
- TOLANSKY, S., *An Introduction to Interferometry*, Longmans, Green, London, 1955.
- TOLANSKY, S., *Curiosities of Light Rays and Light Waves*, American Elsevier, New York, 1965.
- TOLANSKY, S., *Multiple-Beam Interferometry of Surfaces and Films*, Oxford University Press, London, 1948.
- TOLANSKY, S., *Revolution in Optics*, Penguin Books, Baltimore, Md., 1968.
- TOWNE, D. H., *Wave Phenomena*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967.
- TROUP, G., *Optical Coherence Theory*, Methuen, London, 1967.
- VALASEK, J., *Optics, Theoretical and Experimental*, Wiley, New York, 1949.
- VAN ALBADA, L. E. W., *Graphical Design of Optical Systems*, Sir Isaac Pitman & Sons, London, 1955.
- VAN de HULST, H. C., *Light Scattering by Small Particles*, Dover Publications, New York, 1981.
- VAN HEEL, A. C. S., ed., *Advanced Optical Techniques*, American Elsevier, New York, 1967.
- VAN HEEL, A. C. S. and C. H. F. VELZEL, *What Is Light?*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- VASICEK, A., *Optics of Thin Films*, North-Holland, Amsterdam, 1960.
- WAGNER, A. F., *Experimental Optics*, Wiley, New York, 1929.
- WALDRON, R., *Waves and Oscillations*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1964.
- WEBB, R. H., *Elementary Wave Optics*, Academic Press, New York, 1969.
- WILLIAMS, W. E., *Applications of Interferometry*, Methuen, London, 1941.
- WILLIAMSON, S. and H. CUMMINS, *Light and Color in Nature and Art*, Wiley, New York, 1983.
- WILSON, R. G., *Fourier Series and Optical Transform Techniques in Contemporary Optics*, Wiley, New York, 1995.
- WOLF, E., ed., *Progress in Optics*, North-Holland, Amsterdam.
- WOLF, H. F., ed., *Handbook of Fiber Optics: Theory and Applications*, Garland STPM Press, 1979.
- WOOD, R. W., *Physical Optics*, Dover Publications, New York, 1934.
- WRIGHT, D., *The Measurement of Color*, Van Nostrand, New York, 1971.
- YARIV, A., *Quantum Electronics*, Wiley, New York, 1967.
- YOUNG, H. D., *Fundamentals of Optics and Modern Physics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- YOUNG, M., *Optics and Lasers*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- Zajonc, A., *Catching the Light*, Oxford University Press, New York, 1993.
- ZIMMER, H., *Geometrical Optics*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

Index

A

Abbe, Ernst, 226, 626
Aberration, 159, 257, 266
 astigmatisme, 235, 237, 267, 275-277
 chromatique, 3, 222, 266, 281, 513, 620
 axiale, 281, 286
 latérale, 282, 286
coma, 235, 237, 267, 271-275
courbure de champ, 267, 277-279
de Seidel, 267
monochromatique, 266
primaire, 267
sphérique, 212, 235, 238, 267-271, 618
 longitudinale, 268
 transverse, 269
stellaire, 6
Absorption, 602
 bande d', 78, 135, 312
 dissipative, 72
 sélective, 73, 139, 346
 stimulée, 603
Accommodation, 214-215
 punctum proximum, 214, 216, 218, 219, 221
 punctum remotum, 216
Activité optique, 374, 379
Adaptation d'indice, 659
Agitation thermique, 70, 74
Aimant, 41
Aire de cohérence, 591
Airy
 anneaux d', 487, 488
 disque d', 235, 239, 240, 485
 distribution d', 178
 figure d', 486, 626
 fonction d'éclairement d', 436, 549
 tache d', 178, 235, 237, 240, 488
Airy, Sir George Biddell, 7, 219, 485
Alcalin, 135
Amétropie
 astigmatisme, 216
 hypermétropie, 216
 myopie, 216
Ampère, André Marie, 45
Amplificateur à fibres dopées à l'erbium, 206
Amplification paramétrique, 661
Amplitude, 16
Amplitude de probabilité, 143, 144, 177
 quantique, 145
 semi-classique, 143
Analyseur, 346
 axe d'extinction, 347
 axe de transmission, 347
Analyseur de front d'onde, 240
 Hartmann, 240
Andromède, galaxie d', 49
Angle
 azimutal, 152

 critique, 122, 127, 129, 198, 203
 d'acceptance, 203
 d'incidence, 104, 106, 142
 d'incidence principal, 136
 de blaze γ , 495
 de Brewster, 121, 122, 362
 de polarisation, 152, 362
 de réflexion, 105, 106
Angström ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$), 16
Anneau d'Einstein, 245
Anneaux de Newton, 422
Antenne radiative, 465
Apodisation, 559-560
Approximation de Fraunhofer, 469, 470, 475
Arago, Dominique François Jean, 5, 364, 374, 408, 511
Arecibo, observatoire d', 270
Argand, diagramme d', 23, 24
Argument, 23
Aristophane, 1, 166
Aristote, 226
Armstrong, E. H., 637
Astigmatisme, 219. Voir Œil : astigmatisme
Autocollimation, 497
Autocorrélation $c_{ff}(\tau)$, 563-567
Autofocalisation, 662

B

Bacon, Roger, 2, 215
Barkla, Charles Glover, 362
Bartholin, Erasme, 353
Basov, Nikolai Gennadievich, 597
Battement, 309
Bennett, William Ralph, Jr., 612
Bessel
 équation de, 33
Beth, Richard A., 345
Biot, Jean-Baptiste, 374, 511
Biprisme de Fresnel, 415
Bird, George R., 347
Biréfringence, 346, 351, 356
Bobine
 primaire, 41
 secondaire, 41
Bohr, Niels Henrik David, 9
Born, Max, 144
Bose, Satyendranath, 56, 601
Boson, 57
Bradley, James, 6
Brewster, Sir David, 362, 380
Bunsen, Robert Wilhelm, 9

C

Calcite, 351
Caméra Schmidt, 279
Carbonate de calcium (CaCO_3). Voir Calcite
Cataracte. Voir Œil : cataracte
Cauchy, Augustin Louis, 91

Cavité

 confocale, 266
 optique, 266
 résonante, 266, 306, 606
 stable, 266
Cellule de Kerr, 383
Cellule de Pockels, 384
Cellule nématique, 385, 387
Cellule photoélectrique, 53
Centre de courbure, 159
Cercle comatique, 272
Cercle de moindre diffusion, 269, 276, 281
Champ
 de radiation, 65
 électrique, 40
 électromagnétique, 48
 magnétique, 40
Charge
 électrique, 40
 libre, 63
 liée, 69
 magnétique, 45
 oscillante, 68
 stationnaire, 63
Chemin optique (OPL), 113, 157, 177, 238, 287
 différence de (OPD), 297
 stationnaire, 116-117
Chemin spatial minimum, 112
Christiansen, W. N., 467
Cittert, Pieter Hendrik van, 577
Clivage
 géométrie du, 352
 plans de, 352
Coddington
 loupe de, 222
Coefficient d'absorption linéique, 134
Coefficient d'atténuation α , 136
Coefficient d'atténuation linéique, 134
Coefficient de finesse, 436
Coefficients d'Einstein, 597, 602-605
Cohérence, 373
 longitudinale, 577
 partielle, 577
 spatiale, 406, 577
 temporelle, 406, 577, 588
Coloration
 additive, 140
 soustractive, 140
Coma
 sagittale, 272
 tangentielle, 272
Commutateur optique, 185
Compensateur, 370
 de Babinet, 370
 de Soleil, 371
Compton, A. H., 130
Condition de Fraunhofer, 468

- Condition de Petzval, 278
 Condition des sinus, 274
 Conditions à l'interface, 118
 Conditions aux limites, 302
 Conducteur
 parfait, 132
 Conductivité σ , 132, 136
 Congruence normale, 112
 Conjugaison de phase, 242
 Connes, Pierre, 441
 Constante d'amortissement τ^{-1} ou γ , 562
 Constante de Kerr, 383
 Constante de Planck, 8, 56, 601
 Constante de temps τ , 562
 Constante de variation d'indice, 288
 Constante de Verdet, 381
 Constante diélectrique (K_E), 44, 102
 externe, 102-103
 interne, 102-103
 Constringence. Voir Nombre d'Abbe
 Continuité du front d'onde, 110, 148
 Contraste. Voir Modulation
 Contraste de phase, 634, 637
 Convolution, 549, 550, 552, 553, 555, 558
 Coordonnées
 cylindriques, 33
 polaires, 31
 sphériques, 31
 Cornu, Marie Alfred, 517
 Corps noir, 55, 598
 courbes de radiation du, 600
 rayonnement du, 55, 597, 600
 Corrélation optique, 566
 Corrélogramme, 566
 Couche mince, 9
 Couleur interférentielle, 373
 Couleurs
 complémentaires, 139
 primaires, 138
 saturées, 139
 Courbe de résonance. Voir Profil lorentzien
 Courbe de vibration, 506, 512
 Cristal
 biréfringent, 356
 centre de symétrie ou centre d'inversion, 659
 d'halogène, 653
 de niobate de lithium, 654
 de quartz, 658
 dichroïque, 348
 ferroélectrique, 653
 KDP, 660
 liquide, 385
 photoréfractif, 654
 piézoélectrique, 658
 YIG, 382
 Critère de Sparrow, 489, 491
 Crown
 prisme, 76
 verre, 76
 Cuve à vagues, 463
 Cyclotron, 63
D
 D'Alembert, Le Rond Jean, 14
 Darwin, Charles, 597
 De Broglie, Louis, 55
 De Cues, Nicolas, 215
 De Fermat, Pierre, 3
 De Maupertuis, Pierre, 117
 De Vinci, Léonard, 2, 226
 Degré de cohérence, 330, 587, 588
 spatiale, 589
 temporelle, 588
 Della Porta, Gian Battista (Giovanni), 2, 226
 Delta de Kronecker, 318
 Denisjuk, Yuri Nikolayvitch, 653
 Densité d'énergie, 52
 Densité de courant, 46
 Densité de courant de déplacement, 47
 Densité de flux, 55
 Densité de probabilité, 143, 144
 Densité spectrale de flux, 598. Voir Spectre en puissance
 Descartes, René, 2, 108, 146, 158, 212
 Déviation angulaire, 195
 Dextrogyre, 374
 Diaphragme
 d'ouverture A.S., 178
 de champ F.S., 179
 Dichroïsme, 347. Voir Absorption : sélective
 Diélectrique
 homogène, 71
 isotrope, 71
 polaire, 74
 transparent, 71
 Différence de marche, 369
 Différence de potentiel, 42
 Diffraction, 3, 239, 459
 de Fraunhofer ou en champ lointain, 414, 464, 465, 537, 556-558, 560
 de Fresnel ou en champ proche, 276, 459, 464, 520
 de rayons X, 502
 figure de, 459, 463
 gravitationnelle, 245
 par des fentes multiples, 476
 par une fente, 469
 par une fente double, 474
 par une ouverture, 461
 par une ouverture circulaire, 482
 réseau de, 493
 Diffuseur, 95
 Diffusion, 93
 Brillouin, 243, 310
 de Mie, 99
 de Rayleigh, 94
 élastique, 73
 latérale, 95
 non résonante, 72
 Raman spontanée, 621
 Raman stimulée, 622, 623
 Rayleigh, 242, 621
 Diode électroluminescente, 209
 Dioptre
 axe optique, 160
 convention de signe, 170
 distance image, 160
 distance objet, 160
 rayon de courbure, 160
 sommet, 160
 sphérique, 160, 163
 Directeur, 385
 Dispersion, 72, 73, 194, 346
 angulaire, 497
 anormale, 78, 312
 équation de, 76, 134-136
 intermodale, 207, 209
 normale, 78, 312
 rotatoire, 377
 spectrale ou chromatique, 209
 Distance de Rayleigh, 612
 Distance focale, 258
 effective f , 176
 image f_i , 161
 objet f_o , 161
 primaire, 513
 tirage optique image (b.f.l.), 175, 257
 tirage optique objet (f.f.l.), 175, 257
 Distorsion, 267, 279-281
 en barillet ou en tonneau, 279
 en coussinet, 279
 Distribution de Boltzmann, 597
 Distribution de Bose-Einstein, 57
 Distribution de Poisson, 60
 Dollond, John, 4, 283
 Donders, Franz, 219
 Doublet
 achromatique, 176, 282-286
 Doubleur de fréquence, 10
 Drude, Paul Karl Ludwig, 134, 307
 Dupin, C., 112
 Durée de cohérence, 588
 Durée de vie de l'état d'excitation τ , 604
 DWDM, Dense Wavelength Division Multiplexing. Voir Multiplexage dense en longueurs d'onde

- E**
Éclairement, 54, 180
Éclairement photonique, 58
Écran à cristaux liquides, 386-388
EDFA, Erbium Doped Fiber Amplifier. Voir Amplificateur à fibres dopées à l'erbium
EDQ. Voir Électrodynamique quantique (QED)
Effet Cotton-Mouton, 382
Effet Voigt, 382
Effet Compton, 56, 62
Effet de mirage, 115
Effet Doppler, 71, 310, 563
Effet Faraday, 380
Effet Kerr, 383, 657
Effet photoélectrique, 56
Effet Raman
 spontané, 620-621
 stimulé, 621-623
Effet tunnel, 132
Effet Zeeman, 309
Einstein, Albert, 7, 244, 601
Élargissement Doppler, 563
Élargissement Lorentz, 562
Électrodynamique quantique (QED), 88, 144-146, 177, 460
Électron
 de conduction, 134
 de valence, 69
 libre, 132, 135
 lié, 135
 périphérique, 67
 pi, 140
Élément optique holographique, 656-657
Émission
 Raman, 617
 spontanée, 603
 stimulée, 597, 603
Émissivité totale (ϵ), 599
Empilement quart d'onde, 445
Émulsion, 653
Équation aux valeurs propres, 266
Équation d'un oscillateur amorti, 147
Équation de Cauchy, 92
Équation de Helmholtz, 528
Équation de Maxwell, 47, 133
Équation des lentilles minces, 163, 164
Équation du transfert, 261
Étalon, 437
État
 excité, 69
 fondamental, 69
 métastable, 606
Éther, 3
Euclide, 1
Euler
 formule d', 23
 théorème d', 538
Euler, Leonhard, 4
Exitance, 55
Exitance spectrique, 601. Voir Densité spectrale de flux
Expérience de Young, 476
Exposition multiple, 32
F
Fabry, Charles, 437
Fabry-Pérot
 cavité, 446, 661
 étalon, 437, 495, 607
 filtre, 446
 interféromètre, 498
 spectroscopie, 439-441
Fabulite (SrTiO₃), 91
Facteur
 d'absorption, 438, 597
 de réflexion, 438
 de réflexion en amplitude, 120, 123, 365
 de réflexion R , 125
 de transmission en amplitude, 120
 de transmission T , 126
Facteur d'obliquité, 472, 481, 502, 529
Facteur de mérite, 569
Faisceau de Bessel, 491, 492
Faisceau de pompe, 661
Faraday, Michael, 6, 40, 380
Feedback optique, 607
Fenêtre de Brewster, 609, 613
Fermion, 57
Feynman, Richard Phillips, 117, 177. Voir Électrodynamique quantique (QED)
Fibre optique, 9, 201
 à gradient d'indice, 207
 à saut d'indice, 207
 cœur, 203, 209
 gaine, 203
 monomode, 206, 209
 multimode, 207
 répéteur, 206
 soliton, 206
 taux d'atténuation, 206
Figures de Purkinje, 214
Filtrage spatial, 9, 630, 633
Filtre
 coloré, 141
 contrôlable électriquement, 387
 interférentiel ou Fabry-Pérot, 446
 passe-bas, 446
 passe-haut, 446
Finesse, 439
Fizeau, Armand Hippolyte Louis, 5, 49, 590
Fluorescence, 620
Fluorine (CaF₂), 286
Flux d'énergie électromagnétique, 52
Flux du champ électrique, 43
Flux du champ magnétique, 42
Flux énergétique, 54, 58
Flux photonique, 58
Focale. Voir Distance focale
Fonction cylindre, 541
Fonction d'autocohérence, 589
fonction d'ouverture, 542, 557
Fonction de Bessel, 485, 541, 582, 583, 591
Fonction de cohérence mutuelle, 586
Fonction de probabilité gaussienne, 539
Fonction de transfert de modulation (FTM), 569
Fonction de transfert de phase (FTP), 571
Fonction de transfert optique (FTO), 570
Fonction delta de Dirac, 414, 542
Fonction ligne, 567
Fonction peigne. Voir Pic de Dirac
Fonction triangle, 542
Fonction zéta de Riemann, 663
Fonctionnelle, 543
Fond noir, 639
Fontana, Francisco, 2
Force électromotrice induite, 41
Force magnétique, 41
Forces de jauge, 88
Formule de diffraction de Fresnel-Kirchhoff, 529
Formule de Parseval, 561-562
Formule de Rayleigh-Jeans, 600
Formule des lunetiers, 164
Foucault, Jean Bernard Léon, 5
Fourier
 analyse de, 318, 537
 composante de, 320
 intégrale de, 325, 538, 540
 plan de ($\Sigma\tau$), 625
 série de, 318, 540
 spectre de, 627
 théorème de, 317
 transformée de, 538, 623
 transformée discrète, 330
 transformée inverse, 538
 transformées en cosinus et sinus, 325, 537
Fourier, Baron de, Jean-Baptiste Joseph, 317
Foyer, 155, 159
 image F_i , 161, 190, 257
 objet F_o , 161, 190, 257
 sagittal, 276
 tangential ou méridien, 276
Frange
 d'égale épaisseur, 419-423
 d'égale inclinaison, 417-419, 426
 de coin d'air, 422
 de Fizeau, 420, 426
 de Haidinger, 419
 de Pohl, 428
 localisée, 430
 non localisée, 430
 réelle, 428, 430
 virtuelle, 430

- Franken, Peter A., 658
 Fraunhofer, Joseph, 9
 Fréquence
 - angulaire de la modulation, 308
 - angulaire moyenne, 308
 - de battement angulaire, 308
 - de coupure, 569
 - spatiale, 321, 623
 - spatiale angulaire, 321
 Fréquence de plasma, 135
 Fréquence de résonance, 70, 134
 Fréquence excitatrice, 94
 Fréquence naturelle, 74
 Fréquence temporelle, 17
 Fresnel
 - équations de, 120, 121, 364
 - intégrale de, 515
 - zone de, 503, 506
 - vecteur de, 25
 Fresnel, Augustin Jean, 4, 362, 408, 462, 511
 Fried, David, 239
 Front d'onde, 28, 105, 112, 165, 238
 - propagation, 503
 - reconstruction du, 643
 FTM, 572
 FTO non normalisée, 571
 FTO normalisée, 572
 FTP, 572
- G**
- Gabor, Dennis, 640, 643
 Gain minimal, 610
 Galilée, 2, 230, 233
 Galvanomètre, 41
 Gamme. Voir Intervalle spectral libre
 Gauss
 - approximation de, 168
 - conditions de, 161, 168, 188
 - fonction de, 13
 - optique de, 161, 179
 Gauss, Karl Friedrich, 43
 Gay-Lussac, Joseph Louis, 511
 Génération
 - de second harmonique, 658, 660
 - de troisième harmonique, 659
 Grandissement
 - angulaire, 221
 - longitudinal M_L , 172, 173
 - transversal ou latéral M_T , 170, 173, 259
 Granularité. Voir Speckle
 Gregory, James, 234, 271, 498
 Grimaldi, Francesco Maria, 3, 409, 459
 GRIN. Voir Lentille : GRIN
 Grossissement, 221
 - commercial, 222
 Gyroscope laser, 451
- H**
- Haidinger, Wilhelm Karl, 419
 Hall, Chester Moor, 4, 283
 Hamilton, Sir William Rowan, 117, 310
 Hanbury-Brown, R., 592
 Harmonique fondamentale, 321
 Harrison, George R., 497, 498
 Héron d'Alexandrie, 1, 112
 Herriott, Donald Richard, 612
 Herschel, Sir John Frederick William, 82, 234, 375
 Hertz, Heinrich Rudolf, 6, 79, 306, 462
 Hologramme, 640, 641
 - de Fourier, 651
 - de volume, 653
 - par réflexion, 649
 - par transmission, 649
 Holographie, 494, 639-657
 - à rayons X, 86
 - par réflexion, 654
 Hooke, Robert, 3, 422
 Horloge atomique, 71
 Hull, Gordon Ferrie, 62
 Huygens, Christiaan, 3, 110, 269
 Hypermétropie, 218-219. Voir Œil : hypermétropie
 - correction, 218
- I**
- Image, 155
 - limitée par la diffraction, 155
 - parfaite, 155
 - réelle, 159
 - virtuelle, 159
 Implant intraoculaire, 216
 Impulsion optique femtoseconde, 618-619
 Impulsion- δ , 549
 Incidence
 - normale, 105
 - rasante, 105
 Inclinaison. Voir Facteur d'obliquité
 Indice de réfraction, 78, 108, 284
 - absolu, 71
 - de groupe, 312
 - relatif, 109
 Induction magnétique, 40
 Inégalité de Cauchy-Schwarz, 587
 Infrarouge, région, 82
 Intercorrélation $c_{\beta\beta}(\tau)$, 563-567
 Interférence, 459
 - calcite, 5
 - constructive, 95, 298, 404
 - destructive, 95, 298, 404
 - franges d', 405
 - principe d', 5
 - terme d', 297
 Interféromètre
 - à corrélation d'intensité, 592
 - à deux ondes, 495
 - à division d'amplitude, 416-430
 - à division de front d'onde, 409-416
 - à micro-ondes, 413
 - de Jamin, 457
 - de Mach-Zehnder, 427
 - de Michelson, 423, 424, 588
 - de Sagnac, 428, 451
 - de Twyman-Green, 450
 - en réflexion, 423-430
 - radar, 452-454
 - stellaire, 590
 Interférométrie
 - acoustique, 655
 - holographique, 654-655
 Intervalle spectral libre, 441, 498
 Invariance par inversion du temps, 141
 Inversion chirale, 184
 Inversion de population, 605
 Io, éclipses de, 4
- J**
- J.W. Strutt. Voir Rayleigh, Lord
 Janssen, Zacharias, 2, 224, 230
 Jeans, Sir James, 600
 Jodrell Bank, observatoire de, 489
 Jones, Robert Clark, 390
 Jumelle, 233
- K**
- KDP, cristal non linéaire, 110
 Keller, Joseph Bishop, 531
 Kepler, Johannes, 2, 61, 158, 212, 226
 Kératomètre, 252
 Kerr, John, 383
 Kirchhoff, Gustav Robert, 9, 461, 597
 Klingenshierna, Samuel, 4
 Kohlrausch, Rudolph, 49
 Kottler, Friedrich, 531
- L**
- Labeyrie, A. E., 654
 Lagrange, Joseph Louis, 117
 Lame
 - demi-onde, 367-368
 - onde, 367
 - quart d'onde, 368-369
 Lame compensatrice, 423
 Lame d'ordre zéro composé, 370
 Lame de phase, 637
 - variable à cristaux liquides, 386
 Lame dépolie, 448
 Land, Edwin Herbert, 349
 Laplace, Pierre Simon, Marquis de, 511
 Largeur de bande, 441
 - en fréquences angulaires, 327
 Largeur de raie naturelle, 328
 Largeur naturelle, 562

- Laser, 597
 à électron libre, 63, 617
 à gaz, 615
 à liquide, 617
 à rayons X, 617
 à semi-conducteur, 206, 616
 à solide, 614
 à trois niveaux, 607
 à vapeur, 617
 chimique, 617
 CO₂, 83
 de couplage, 315
 diode, 616
 divergence d'un faisceau, 612
 dopé au néodyme, 86
 faisceau gaussien, 611-612
 He-Ne, 277, 466, 579, 612
 Nd:YAG, 614
 Nova, 660
 Q-switching, 611
 rubis, 606
 verre-néodyme, 660
 Laue, diffraction, 502
 Laue, Max von, 500
 Lebedev, Pyotr Nikolaievich, 62
 LED, Light Emitting Diode. Voir Diode électroluminescente
 Leith, Emmett N., 643
 Lentille, 79, 156-178
 à rayons X, 86
 analyse matricielle, 262-265
 asphérique, 9, 159, 244, 269
 bi-asphérique, 288
 cambrure, 258
 centre optique, 166
 composée, 163
 concave, 158
 convention de signe, 170
 convergente, 158, 168
 convexe, 158
 de champ, 254
 de transformation, 624
 divergente, 158, 168
 ellipsoïdale, 158
 épaisse, 163, 257, 259
 gravitationnelle, 244
 GRIN, 287
 hyperbolique, 158
 mince, 2, 160, 163, 162-178, 216, 258, 265
 plan focal, 166
 plan focal image, 166
 plan focal objet, 167
 plan méridien, 275
 plan sagittal, 275
 plans principaux, 168, 257
 points cardinaux, 258, 263
 points nodaux, 257
 points principaux, 257
 simple, 163
 sphérique, 164
 sphéro-cylindrique, 219
 torique, 219
 Lévitiation optique, 63
 Lévitiation ultrasonique, 306
 Lévogyre, 375
 Liant, 137
 Lignes de champ, 41, 64
 Limite de résolution, 440, 488, 497, 567, 569
 Limité par la diffraction, 235
 Lippershey, Hans, 2, 230
 Lippmann, Gabriel, 653
 Littrow, montage en autocollimation, 496
 Loi
 de la réflexion, 105
 de la réfraction, 108, 113, 261
 de la réfraction généralisée, 2
 Loi d'Ampère, 45, 46, 47
 Loi d'induction, 42
 Loi de Bragg, 501, 653
 Loi de Brewster, 362, 365
 Loi de Coulomb, 44
 Loi de Gauss, 43, 44, 64
 Loi de Malus, 347, 382
 Loi de Newton, seconde, 61
 Loi de Snell-Descartes, 108, 109, 111, 113, 114, 119, 142, 148, 149, 161, 195, 261, 267
 Loi de Stefan-Boltzmann, 598-600
 Loi des circuits, 45
 Loi du déplacement de Wien, 600
 Loi du rayonnement de Kirchhoff, 598
 Loi du rayonnement de Planck, 600
 Lois de Fresnel-Arago, 408
 Longues-vues. Voir Lunette
 Longueur d'onde dans le vide (λ_0), 110
 Longueur de cohérence, 328, 406, 588, 659
 Lorentz, Hendrik Antoon, 7, 73, 134
 Loupe, 219, 220
 Lumière
 blanche, 84
 chaotique, 59
 cohérente, 59, 60
 incandescente, 84
 naturelle, 344, 389
 subluminale, 315-316
 superluminale, 313-315
 visible, 83
 Luminance, 560, 571
 Luminophore, 138
 Lunette, 230
 afocale, 231
 astronomique, 230-233
 de Galilée, 2, 233
 de Kepler, 2, 230
 terrestre, 232
- M**
 Mach, Ernst, 601
 Maey, Eugen, 531
 Maggi, Gian Antonio, 531
 Maiman, Théodore Harold, 597, 606
 Malus, Louis Étienne, 5, 112, 347, 362
 Maréchal, A., 634
 Maser, 597
 Matrice
 de Jones, 392
 de Mueller, 392
 de réfraction, 262
 de transfert, 262
 Maxwell, James Clerk, 6, 49, 79, 461
 Méthode
 de Jones, 393
 de Mueller, 393
 Mica, 99, 368
 Michelson, Albert Abraham, 7, 313, 579, 590
 Micro-onde, 80
 Microlithographie, 657
 Micromètre ($1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{m}$), 16
 Microscope, 224-226, 230
 à immersion, 225, 269
 à rayons X, 86
 longueur de tube, 224
 Mie, Gustave, 99
 Milieu
 actif, 606
 anisotrope, 112
 de transmission, 109
 diélectrique, 146
 incident, 109
 inhomogène, 113
 isotrope, 105, 125
 optiquement dense, 97
 Mire de résolution, 567
 Mire de Ronchi. Voir Mire de résolution
 Miroir, 182-193
 analyse matricielle, 265-266
 asphérique, 188
 concave, 186
 convention de signe, 192
 convexe, 186
 dichroïque, 441
 elliptique, 188
 formule des, 189
 froid, 441
 hyperbolique, 188
 parabolique, 188
 paraboloïdal, 187
 plan, 183, 266
 sphérique, 266
 Miroir de Lloyd, 415
 Miroir double de Fresnel, 414
 Miyamoto, Kenro, 531
 Modes
 longitudinaux, 607

- transversaux, 608
- Modulateur
 acousto-optique, 10
 d'éclairage, 386
 de phase, 386
 électro-optique, 10
 holographie, 10
- Modulation, 569, 579
- Module, 23
- Module Costar, 270
- MOEMS (Micro-OptoElectroMechanical Systems), 185, 209
- Molécule polaire, 73
- Moment angulaire intrinsèque. Voir Spin
- Moment d'un dipôle μ , 68
- Moment dipolaire
 électrique, 378
 magnétique, 378
- Mont Palomar, observatoire du, 238, 489
- Mont Wilson, observatoire du, 591
- Morley, Edwards Williams, 7
- Mueller, Hans, 393
- Multiplexage dense en longueurs d'onde, 207
- Myopie, 216-218. Voir Œil : myopie
 correction, 217
- N**
- Nanomètre ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$), 16
- Nébuleuse du Crabe, 67
- Newton, Isaac, 3, 196, 234, 239, 283, 422, 447
- Ng, Won K., 621
- Nichols, Ernest Fox, 62
- Nicol, William, 357
- Niepce, Joseph Nicéphore, 226
- Nœud, 303, 306
- Nombre d'Abbe, 283, 284
- Nombre d'onde, 17
- Nombre d'ouverture, 181, 204
- Nombre de propagation
 de la modulation, 308
 moyen, 308
- Noyau ferromagnétique, 41
- Nuage électronique, 69
- O**
- Objectif, 224
 anastigmat, 279
 aviogon, 229
 biotar, 229
 correcteur de champ, 278
 fish-eye, 228
 grand angle, 228
 orthomètre de Zeiss, 229
 petzval, 229
 sonnar, 279
 tessar, 229, 264
 triplet de Cooke, 229
 vitesse, 182
- Objet, 155
- Oculaire, 222-224, 230
 cercle, 223, 231
 convergent, 2
 d'Erflé, 224, 233
 de Huygens, 223, 286
 de Kellner, 223, 232
 de Plössl, 224
 de Ramsden, 223, 291
 divergent, 2
 orthoscopique, 224
 symétrique, 224
- Œil, 211-215
 accommodation, 212, 214
 amétrope, 216
 astigmatisme, 219
 bâtonnet, 205, 211, 213
 cataracte, 216
 choroïde, 213
 cône, 205, 211, 213
 cornée, 150, 212
 cristallin, 212
 emmétrope, 216
 fovéa, 214, 231
 humeur aqueuse, 212
 humeur vitrée, 213
 hypermétropie, 218
 iris, 212
 muscles ciliaires, 214
 myopie, 216
 ommatidie, 211
 point aveugle, 214
 point jaune ou macula, 214
 pupille, 180, 212, 600
 rétine, 53, 211, 213
 rhabdome, 211
 sclérotique, 212
 vergence, 216
- Onde
 aberration d'une, 268
 AM, 69
 circulaire, 21
 conjuguée, 243
 continue, 612
 cylindrique, 33, 413
 dans un métal, 133
 de diffraction par les bords, 530
 de polarisation, 658
 de reconstruction, 647
 de référence ou de fond, 641
 de signal, 661
 de sol, 69
 de surface, 130
 directe ou d'ordre zéro, 635
 électromagnétique, 6, 48-51
 équation différentielle, 14
 évanescence, 130, 131
 extraordinaire, 659
- figure d', 268
 fonction d', 13
 gaussienne, 36
 gravitationnelle, 336
 guide d', 202
 harmonique, 16, 18
 idler, 661
 incidente, 134
 inhomogène, 28
 longitudinale, 12
 longueur d' (λ), 16
 monochromatique, 18
 ordinaire, 659
 plane, 26, 510
 porteuse, 310
 primaire, 99
 profil, 13
 progressive, 11, 16, 19, 36, 52
 propagative, 303
 quasi monochromatique, 18
 radio, 79
 réelle, 143
 secondaire, 99
 sphérique, 30, 55, 507-510
 stationnaire, 79, 303
 transmise, 99, 107, 134
 transversale, 12, 34
 ultrasonique, 306
 vecteur d', 28
- Ondelette secondaire, 95
- Opérateur laplacien, 30
- OPL. Voir Chemin optique
- Optique adaptative, 239, 241
- Optique capillaire, 209-210
- Ordinateur optique cohérent, 628, 634
- Oscillateur. Voir Antenne radiative
- Oscillateur forcé, 75
- Oscillateur paramétrique optique, 661
- Ouverture diffractante, 464, 465, 488
- Ouverture numérique (ON), 204, 226
- Ouverture relative, 181
- Ovale cartésien, 246
- P**
- Paquet d'onde, 311, 315, 326, 554-556
- Paramètre de Fried, 240
- Paramètres de Stokes, 388, 389, 393
- Parrish, Maxfield, Jr, 347
- Pas. Voir Période : spatiale
- Pasteur, Louis, 377
- Pauli, Wolfgang, 9
- Peau. Voir Profondeur de pénétration
- Peinture
 blanche, 137
 colorée, 137
- Période
 spatiale, 16, 321, 623
 temporelle, 16

- Perméabilité
magnétique du vide μ_0 , 46
relative K_M , 46
- Permittivité
absolue ϵ , 44
du vide ϵ_0 , 44
électrique du vide, 44
relative K_E , 44, 74
- Pérot, Alfred, 437
- Petzval, Josef Max, 229, 277
- Petzval, surface de (SP), 277
- Phase, 16, 19
différence de, 22
vitesse, 20
vitesse de rotation, 20
- Phaseur, 25, 96, 146, 300, 461, 506
- Phosphorescence, 620
- Photoélasticité, 380
- Photon, 8, 55
virtuel, 88
vitesse c , 99
- Pic de Dirac, 545
- Pitch, 288
- Plan d'incidence, 105, 108
- Plan de vibration, 339
- Planck, Max Karl Ernst Ludwig, 8, 55, 600, 601
- Plans unitaires. Voir Lentille : plans principaux
- Plaque photosensible, 53
- Pline, 1
- Pockels, Friedrich Carl Alwin, 384
- Pohl, Robert Wichard, 512
- Poincaré, Jules Henri, 7
- Point
conjugué, 155
focal, 159
image virtuel, 162
objet virtuel, 162
- Point de Poisson, 511
- Poisson, Siméon Denis, 511
- Polarisation, 4, 50, 74, 373
atomique, 74
circulaire, 341
degré de, 365, 390
électrique, 73, 658
électronique, 74, 77
elliptique, 342
état de, 343
ionique, 74, 77
linéaire ou plane, 339
- Polariseur, 124, 346
à « pile de glaces » ou à empilement de lames, 364
axe de transmission, 346
circulaire, 371
de Glan-Foucault, 357
de Glan-Thompson, 358
de Rochon, 396
dichroïque, 348
- Polaroïd
H-sheet, 349
HR-sheet, 350
J-sheet, 349
K-sheet, 350
vectographe, 350
- Pompage optique, 606
- Population des niveaux d'énergie, 602
- Population relative, 602
- Pouvoir
de résolution, 226, 440, 498
dispersif, 283
émisif ϵ_λ , 597
rotatoire. Voir Activité optique
séparateur, 234, 237, 489
- Poynting, John Henry, 52
- Pression atmosphérique, 62
- Pression de radiation, 61, 62, 71, 90
- Principe d'exclusion de Pauli, 57
- Principe d'incertitude d'Heisenberg, 328
- Principe de Babinet, 526
- Principe de Fermat, 112, 113, 114, 144, 160, 161, 177, 186, 275
- Principe de Huygens, 107, 110, 460-462
- Principe de moindre action, 117
- Principe de superposition, 21, 295, 401
- Principe du retour inverse de la lumière, 117, 158, 467
- Principe du temps minimal, 3, 112
- Principe variationnel, 112
- Prisme, 193-201, 497
à angle droit, 199
à déviation constante, 197
achromatique, 198
angle au sommet, 195
d'Amici, 199
de Dove, 199
de Lemman-Springer, 200
de Nicol, 357
de Pellin-Broca, 197
de Porro, 199, 233
de Wollaston, 358, 371
dispersif, 76, 195
en coin de cube, 200
minimum de déviation δ_m , 196
penta, 200
redresseur, 233
réflecteur, 198
rhomboïdal, 200
- Probabilité
d'absorption stimulée, 604
d'émission stimulée, 604
- Probabilité de transition, 77
- Profil gaussien, 563
- Profil lorentzien, 562
- Profondeur de pénétration, 134
- Prokhorov, Alexander Mikhailovich, 597
- Propagateur, 586
- Propagation
milieu de, 6
- Ptolémée, Claude, 1
- Puissance intrinsèque. Voir Vergence
- Puissance optique, 54, 58
- Pulsation, 17
- Pupille
d'entrée, 179, 180
de sortie, 179
- Q**
- Quanta, 39
- Quantité de mouvement, 61
- Quartz, 99
- Quasar, 67
- R**
- Radar, 105
- Radiotélescope, 270
interférométrique, 467
- Raie spectrale, 328
- Raies d'émission, 84
- Raies de Fraunhofer, 283
- Raman, Sir Chandrasekhara Vankata, 620
- Raman, spectroscopie, 620
- Rayleigh
critère de, 488, 491, 497
distance de, 491
- Rayleigh, Lord, 94, 268, 495, 514, 600
- Rayon, 105-106, 112
collimaté, 168
de champ, 272
émergent, 269
extraordinaire, 353
gamma, 86
incident, 105, 269
marche d'un, 261
marginal, 180, 269
méridien, 260
méridional, 202
non méridien, 261
ordinaire, 353
principal, 179, 275
réfléchi, 105
sagittal, 275
tracé de, 260
X, 86, 130
- Rayonnement
électromagnétique, 63
synchrotron, 65-67
terahertz, 82
thermique, 84
- Rayonnement cosmique du fond de l'Univers, 602
- Rayons paraxiaux, 161
- Rectification optique, 658

- Reflex
 appareil photo, 186, 227
 Réflexion, 22, 93, 102, 125, 126, 128, 137, 346
 diffuse, 106
 évanescence, 151
 externe, 122, 127
 interne, 122, 127
 spéculaire, 105, 106, 495, 501
 sur un métal, 136-137
 totale « externe », 130
 totale interne, 128, 129, 151, 370
 totale interne frustrée (RTIF), 132
 Réfraction, 22, 93, 107
 Refroidissement
 laser, 71
 optique, 71
 Région
 isochromatique, 380
 isoclinique, 380
 isoplanétique, 240, 241
 paraxiale, 161, 188, 257, 267
 Règle de la main droite, 48
 Règle du travail, 46
 Reintzer, Friedrich, 385
 Relation d'Abbe. Voir Condition des sinus
 Relation de conjugaison de Gauss, 165
 Relation de conjugaison de grandissement de Newton, 170
 Relation de conjugaison de Newton, 169, 258
 Relation de conjugaison des lentilles simples, 165
 Relation de dispersion, 311
 Relation de Maxwell, 72
 Relation générale des interférences, 587
 Relations de Stokes, 142
 Réponse impulsionnelle spatiale (RIS), 548
 Réseau. Voir Diffraction
 blazé, 495
 d'amplitude en transmission, 493
 de phase bidimensionnel, 499
 de phase en réflexion, 494
 de phase en transmission, 493
 équation de, 495, 497, 500
 finesse, 498
 spectroscopie par, 495-498
 tridimensionnel, 500
 zoné, 512, 513, 641
 zoné à inversion de phase, 514
 Réseaux de diffraction
 pour rayons X, 86
 Résolution. Voir Pouvoir séparateur
 Résonateur
 confocal, 610
 facteur de qualité Q du, 610
 hémisphérique ou hémiconcentrique, 610
 Retardateur, 366, 369-370, 386
 Rhomboèdre
 de Fresnel, 370
 de Mooney, 370
 Rittenhouse, David, 493, 499
 Ritter, Johann Wilhelm, 85
 Römer, Ole Christensen, 4, 353
 Röntgen, Wilhelm Conrad, 86
 RTIF. Voir Réflexion totale interne frustrée
 Rubinowicz, Adalbert, 531
S
 Saut quantique, 70
 Schawlow, Arthur Leonard, 597, 606
 Scheiner, Christophe, 212
 Schlieren, 640, 641
 Schlieren, méthode. Voir Strioscopie
 Schmidt, Bernhard, 238
 Schrödinger
 équation de, 39
 fonction d'onde de, 144
 Schrödinger, Erwin C., 39
 Schwartz, Laurent, 543
 Schwarz, Hermann, 149
 Seidel, aberrations de. Voir Aberration : de Seidel
 Sénèque, 1
 Séparateur, 132
 Sinus cardinal (sinc), 54
 SLR : Single Lens Reflex. Voir Reflex
 Smekal, Adolf, 620
 Smith, Robert, 168
 Smith, T., 261
 Smoluchowski, M., 94
 Snell, Willebrord, 2, 108
 Sodium, raie double, 9
 Sommerfeld, Arnold Johannes Wilhelm, 462, 531
 Sonde Mariner IV, 136
 Sonde Viking, 62
 Source
 chaotique, 60
 cohérente, 60
 étendue, 426
 force de la, 32
 isotrope, 30
 thermique, 60
 Sparrow, C., 489
 Spath d'Islande, 353
 Speckle
 effet de, 619-620
 figure de, 619
 Spectre
 d'émission, 9
 de fréquences spatiales, 324
 de la phase, 538
 de puissance, 327, 332
 en amplitude, 538
 en puissance, 562, 565
 secondaire, 286
 solaire, 9
 Spectromètre, 497
 Spectroscopie, 9
 Spin, 57, 345
 Spirale de Cornu, 300, 517, 520
 Stabilité de fréquence, 329
 Statistique classique de Maxwell-Boltzmann, 57
 Statistique quantique
 Bose-Einstein, 57
 Fermi-Dirac, 57
 Stefan, Josef, 598
 Sténopé, 226, 227
 Stokes, George Gabriel, 141, 310, 388, 620
 Strioscopie, 639
 Stroke, George W., 497
 Susceptibilité
 électrique, 658
 Système binaire, 233
 Système optique, 155
 contrôle, 450
 Système orthoscopique, 281
 Système stigmatique, 155
T
 Taux de transition, 604
 Taylor, H. Dennis, 272
 Télescope, 230, 233-235
 à réflexion, 3
 Cassegrain, 188, 234, 235, 237
 catadioptrique, 237-238
 Gregory, 188, 234, 235
 Hale, 234
 IR, 83
 Mont Palomar, 182
 Newton, 234
 Ritchey-Chrétien, 235
 Schmidt, 237, 238
 spatial Hubble, 188, 235, 236, 237, 245, 269
 terrestre, 237
 Temps de cohérence, 328, 373
 Tension principale, 380
 Théorème d'échantillonnage, 560-561
 Théorème d'extinction de Ewald-Oseen, 102
 Théorème de convolution, 551-554, 555, 558
 Théorème de Green, 528
 Théorème de l'intégrale de Kirchhoff, 528
 Théorème de Malus et Dupin, 112
 Théorème de van Cittert-Zernike, 582, 589
 Théorème de Wiener-Khinchine (ou de Wiener-Kintchine), 563, 657
 Théorie
 de la relativité générale, 244
 de la relativité restreinte, 7, 62
 Théorie corpusculaire, 3

Théorie de Abbe, 625-628
 Théorie de la diffusion, 94
 Théorie du premier ordre, 161, 257, 267
 Théorie du troisième ordre, 161, 267
 Théorie ondulatoire, 4
 Théorie paraxiale, 191, 257
 Théorie quantique des champs, 87
 Thermographie, 83
 Toepler, August, 639
 Tourmaline, 348, 357
 Townes, Charles Hard, 597
 Train d'ondes, 70
 Transformée de Fourier, 589
 Transition
 anti-Stokes, 621
 ascendante, 604
 descendante, 604
 Stokes, 620
 Transmission, 93, 125-127, 128
 Transparence électromagnétiquement induite
 (TEI), 315
 Tube à décharge gazeuse, 84
 Tube photomultiplicateur, 58
 Twiss, R. Q., 592
 Tyndall, John, 99, 201, 598

U

Upatnieks, Juris, 643

V

Vecteur de Jones, 390, 392
 Vecteur de Poynting, 52, 155, 355, 605
 Vecteur de Stokes, 390, 393
 Vent solaire, 62
 Ventre, 303, 306
 Verdet, Emile, 577
 Vergence, 215
 Verre optique, 285
 Vignelage, 180, 181
 Vigueur, 468, 557
 Visibilité, 588
 Visibilité 9, 579
 Vision
 entoptique, 213
 stéréoscopique, 233
 Vitesse
 de groupe, 310, 311
 de phase, 311
 Vitesse de la lumière, 49
 Von Fraunhofer, Joseph, 493
 Von Seidel, Ludwig, 267

W

Waist, 611
 diamètre de, 490
 Weber, Wilhem, 49
 Wedgwood, Thomas, 598
 Wheatstone, Charles, 5
 Wien, Otto Fritz Franz, 600
 Wiener, Otto, 306
 Wolf, Emil, 531
 Wollaston, William Hyde, 9, 215, 273
 Wolter, Hans, 254
 Wood, Robert Williams, 314, 495, 514
 Woodbury, Eric J., 621

Y

Young, expérience de, 409, 558, 578, 580,
 585, 586
 Young, Thomas, 4, 138, 146, 409, 531

Z

Zeiss, Carl, 226, 626
 Zernike, Fritz, 577, 634, 637, 640

Optique

Ce livre traite de l'ensemble de l'optique, depuis les connaissances fondamentales (optique géométrique, optique physique, ondes, etc.) jusqu'aux domaines les plus pointus et les plus récents (optique de Fourier, laser, optique non linéaire, holographie, etc.).

Si les notions et formules indispensables à la résolution de problèmes types sont abordées de manière classique, l'originalité et la force du cours d'Eugene Hecht réside dans le fait qu'il présente l'optique en favorisant une compréhension qualitative des phénomènes et en faisant appel au « sens physique » du lecteur.

Très didactique, ce manuel de référence se distingue en outre par son souci de clarté et de synthèse, par ses très nombreuses illustrations, et par ses exercices d'application variés, qui permettent au lecteur d'évaluer sa compréhension du sujet et apportent des compléments pertinents.

Ce livre constitue un ouvrage d'initiation ou d'approfondissement, parfaitement adapté aux étudiants scientifiques des premier et deuxième cycles universitaires, ainsi qu'à ceux des écoles d'ingénieurs.

« Voici, à coup sûr, un ouvrage monumental. »
Pierre Léna, de l'Académie des sciences

PEARSON

Pearson Education France
47 bis, rue des Vinaigriers,
75010 Paris
Tél. : 01 72 74 90 00
Fax : 01 42 05 22 17
www.pearson.fr

Eugene Hecht est professeur de physique à Adelphi University, à New York. Scientifique américain unanimement reconnu pour sa communication claire et synthétique, il est l'auteur de plusieurs ouvrages de science de référence, traduits dans de nombreuses langues à travers le monde.

Traduction **Sébastien Matte la Faveur**, **Jean-Philippe Quiviger** et **Laurent Sans** (anciens élèves de l'École Supérieure d'Optique à Orsay).

Validation technique **Jean-Louis Meyzonnette** (professeur à l'Institut d'Optique/École Supérieure d'Optique à Orsay).

ISBN : 978-2-7440-4129-7

