Mécanique des solides

Mécanique des solides

I) Cinétique des systèmes matériels :

1 – Centre d'inertie d'un système, référentiel barycentrique :

Dans le cas de solides ou de systèmes matériels, on est amené à définir une masse volumique, une masse surfacique ou encore une masse linéique :

$$m = \iiint_{(V)} \rho(M)\,d\tau \quad ; \quad m = \iint_{(S)} \sigma(M)\,dS \quad ; \quad m = \int_{(C)} \lambda(M)\,d\ell$$

Le centre d'inertie d'un système sera défini par :

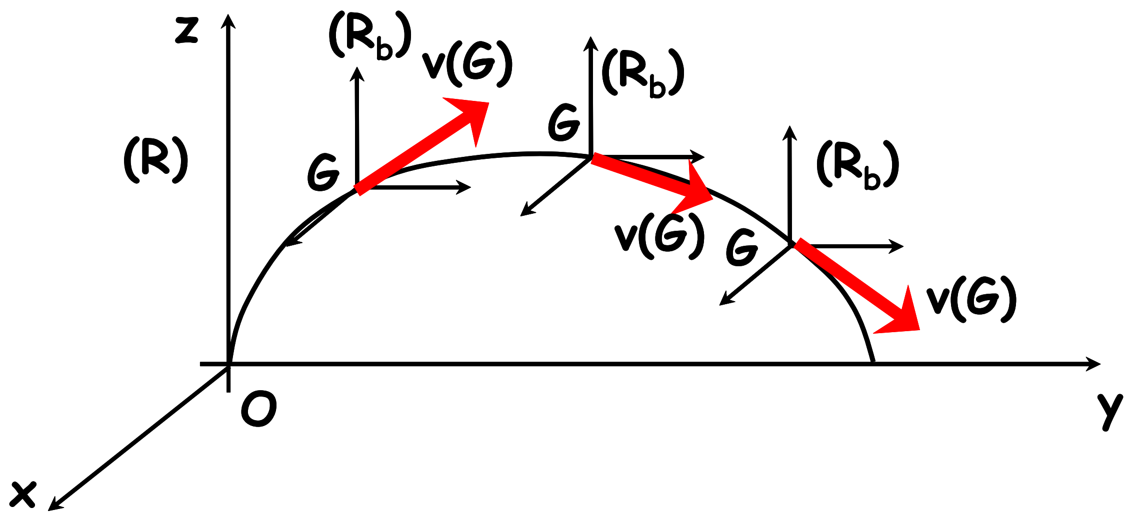
- Distribution discontinue :

- Distribution continue volumique :

Référentiel barycentrique :

Le mouvement du système est étudié dans le référentiel (R).

On appelle *référentiel barycentrique* (R_b) relatif au référentiel (R), le référentiel de centre G et animé d'un mouvement de translation à la vitesse $\vec{v}(G)$ par rapport à (R).



La loi de composition des vitesses s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\vec{v}(M) = \vec{v}_b(M) + \vec{v}(G)}$$

2 – Résultante cinétique et moment cinétique d'un système matériel :

- Résultante cinétique (ou quantité de mouvement totale du système) :

$$\vec{P} = \iiint_{(V)} \rho(M)\vec{v}(M)\, d\tau = m\vec{v}(G)$$

Dans le référentiel barycentrique, la résultante cinétique est évidemment nulle.

- Moment cinétique et énergie cinétique :

Le moment cinétique par rapport à O du système, dans le référentiel (R) est :

$$\vec{L}_O = \iiint_{(V)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho(M)\vec{v}(M)\, d\tau$$

$$\boxed{E_c = \iiint_{(V)} \frac{1}{2}\rho(M)\vec{v}(M)^2\, d\tau}$$

II) Mouvement d'un solide :

1 – Le solide en mécanique :

On appelle « solide » un corps indéformable : la distance entre deux points quelconques d'un solide reste constante au cours du temps.

2 – Eléments cinétiques ; relations typiques pour un solide :

- Rotation d'un solide autour d'un axe fixe :

On considère un solide (S) en rotation autour d'un axe Δ lié au solide et fixe dans (R) (Oxyz).

Très souvent, le référentiel d'étude sera le référentiel barycentrique (R_b) (Gxyz) et les axes (Oz) et (Gz) seront soient confondus soient parallèles à l'axe de rotation Δ.

Le solide est supposé homogène et on notera :

$$m = \iiint_{(V)} \rho(M) d\tau = \iiint_{(V)} dm$$

On pourra ensuite généraliser aux répartitions discrètes, surfaciques ou linéiques.

Moment d'inertie et moment cinétique par rapport à l'axe de rotation :

On définit le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ :

$$\boxed{J_\Delta = \iiint_{(V)} HM^2 dm = \iiint_{(V)} r^2 dm} \quad ; \quad \boxed{L_\Delta = J_\Delta \, \Omega}$$

où r = HM désigne la distance du point M à l'axe de rotation.

J_Δ est une caractéristique du solide et ne dépend que de la répartition des masses dans le solide.

Quelques exemples :

* Tige de longueur 2b, axe passant par son centre : $J_\Delta = \frac{1}{3} m b^2$

* Cerceau de rayon R, axe passant par son centre : $J_\Delta = mR^2$

* Disque ou cylindre plein de rayon R, axe passant par son axe : $J_\Delta = \frac{1}{2} mR^2$

* Sphère creuse de rayon R, axe passant par un diamètre : $J_\Delta = \frac{2}{3} mR^2$

* Sphère pleine de rayon R, axe passant par un diamètre : $J_\Delta = \frac{2}{5} mR^2$

Energie cinétique :

L'énergie cinétique du système dans (R) est :

$$E_c = \iiint_{(V)} \frac{1}{2} dm\, \vec{v}^{\,2}(M) = \iiint_{(V)} \frac{1}{2} dm r^2 \Omega^2$$

Soit :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2}$$

III) Etude dynamique des systèmes matériels :

1 – Modélisation des actions mécaniques :

On s'intéresse aux actions mécaniques extérieures qui agissent sur un système matériel (S), en commençant par quelques exemples classiques.

- ***Le poids d'un système :***

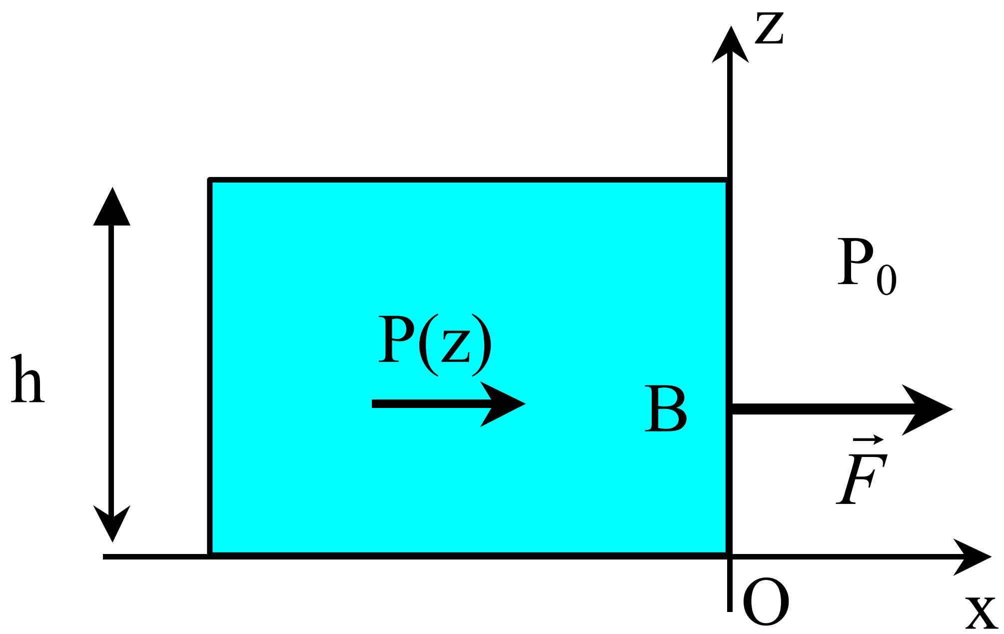
Le poids du système est équivalente à une force unique :

$$\vec{P} = m\vec{g}_0$$

qui s'applique en G.

• ***Les forces de pression sur la paroi d'un récipient :***

On considère un récipient cubique de côté a, contenant une hauteur h d'eau (de masse volumique uniforme ρ).



On va déterminer l'action des forces de pression sur une paroi verticale du récipient.

Le calcul de la résultante des forces de pression est classique :

$$\boxed{\vec{F} = \rho g_0 a \frac{h^2}{2} \vec{u}_x}$$

Le moment en O des forces de pression est :

$$\boxed{\vec{M}_O = \rho g_0 a \frac{h^3}{6} \vec{u}_y}$$

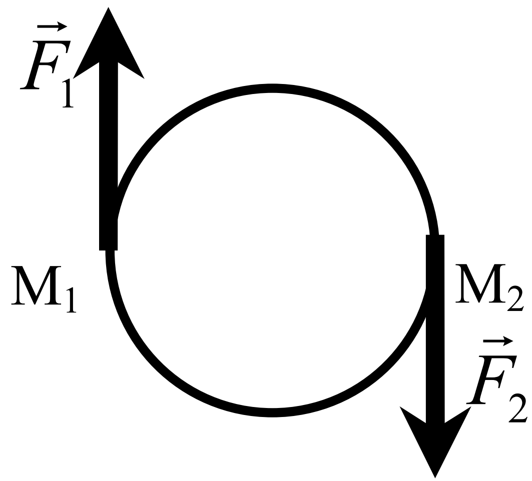
On constate que l'on peut écrire :

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{OB} = \frac{h}{3} \vec{u}_z$$

L'action des forces de pression sur la paroi est donc caractérisée par une force unique $\vec{F}$ passant par le point B.

- ***Couple s'exerçant sur un système en rotation autour d'un axe fixe :***

Un couple est un système de forces dont la résultante est nulle.



Le moment en un point A quelconque est en effet : (avec $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$)

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{F}_2 = \overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{F}_1$$

Il est bien indépendant du point A.

Exemples :

* Forces que l'on exerce quand on tourne la poignée d'une fenêtre

* Action d'un champ électrique sur un dipôle électrique

* Un moteur exerce sur un cylindre extérieur par exemple une action mécanique assimilable à un couple de moment $\vec{C}$ colinéaire à l'axe de rotation commun du moteur et du cylindre.

* Pendule de torsion dont le couple est de la forme $-C\alpha$.

2 – Lois de la dynamique dans un référentiel galiléen :

On considère un système matériel (S) fermé, de masse m et de centre d'inertie G, en mouvement dans un référentiel galiléen (R).

- ***Loi de l'action et de la réaction :***

Cette loi est encore appelée loi des actions réciproques.

On considère deux systèmes (S_1) et (S_2) en interaction dans un référentiel galiléen (par exemple, un livre posé sur une table).

Soient $\vec{F}_{1\to2}$ (resp. $\vec{F}_{2\to1}$) la résultante des forces exercées par le corps 1 sur le corps 2 (resp. la résultante des forces exercées par le corps 2 sur le corps 1).

Soient $\vec{M}_{A,\vec{F}_{1\to2}}$ et $\vec{M}_{A,\vec{F}_{2\to1}}$ les moments correspondants.

La loi de l'action et de la réaction affirme que :

$$\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2} \qquad \text{et} \qquad \vec{M}_{A,\vec{F}_{2\to 1}} = -\vec{M}_{A,\vec{F}_{1\to 2}}$$

- ***Théorème de la résultante cinétique (ou théorème du centre d'inertie, ou théorème de la quantité de mouvement ou 2nde loi de Newton) :***

Dans un référentiel (R) galiléen :

$$\boxed{\frac{d}{dt}(m\vec{v}(G)) = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}(G) = \vec{F}_{ext}}$$

- ***Théorème du moment cinétique en un point fixe :***

On considère un point fixe A du référentiel galiléen (R). Alors :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_{A,\vec{f}_{ext}}}$$

La dérivée du moment cinétique du système par rapport au point fixe A est égal au seul moment en A des forces extérieures au système (celui des forces intérieures est nul).

**** Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe :***

On considère un axe Δ passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$, fixe dans (R).

En projetant le théorème du moment cinétique sur cet axe, on obtient le théorème du moment cinétique par rapport l'axe Δ :

$$\boxed{\frac{dL_\Delta}{dt} = \vec{M}_{A,\vec{f}_{ext}} . \vec{u}_\Delta = M_{\Delta,ext} \qquad (L_\Delta = \vec{L}_A . \vec{u}_\Delta)}$$

Ce théorème sera couramment utilisé dans le paragraphe sur le mouvement d'un solide autour d'un axe fixe.

3 – Lois de la dynamique dans un référentiel non galiléen :

Il faut prendre en compte les forces d'inertie :

$$\boxed{\frac{d}{dt}(m\vec{v}(G)) = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}(G) = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}}$$

Et, en un point fixe du référentiel mobile :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_{A,\vec{f}_{ext}} + \vec{M}_{A,\vec{f}_{ie}} + \vec{M}_{A,\vec{f}_{ic}}}$$

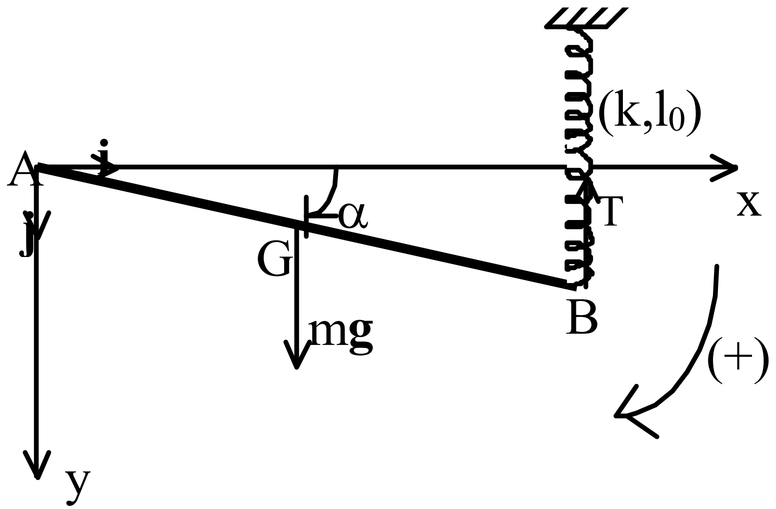
Exercice : mouvement d'une barre autour d'un axe fixe :

Une barre AB, de longueur 2l et de masse m, est mobile autour d'un axe Az horizontal.

Le point B est fixé à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0.

L'autre extrémité du ressort est fixe.

Dans sa position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical.



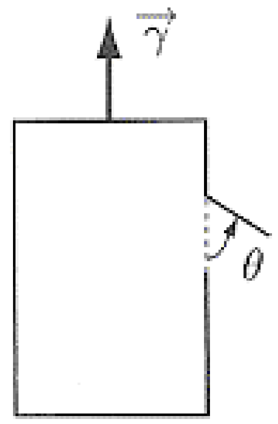
La barre est écartée légèrement de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale.

Déterminer la période des petites oscillations de la barre. On considère que le point B se déplace verticalement.

Fermeture d'une portière de voiture :

Une voiture démarre avec une accélération constante $\vec{\gamma}$, sa portière étant initialement ouverte ($\theta(0) = \frac{\pi}{2}$; voir figure).

La liaison d'axe entre la portière et la voiture est supposée parfaite. La portière est représentée par un rectangle homogène de masse m, de largeur a, de hauteur h. Son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est $J = \frac{1}{3}ma^2$.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
2. Déterminer la vitesse de rotation de la portière au moment où elle se ferme.
3. Déterminer le temps nécessaire à la fermeture de la portière.

IV) Etude énergétique des systèmes matériels :

**** Quelques rappels sur l'étude énergétique du système de deux points matériels :***

Le travail des forces intérieures peut s'écrire :

$$\delta W_{\text{int}} = f_{1\to 2} dr_{12} = f_{1\to 2} d(M_1 M_2)$$

Ce travail, *a priori*, n'est pas nul sauf dans le cas de deux points matériels rigidement liés l'un à l'autre ($d(M_1 M_2) = 0$).

On s'attend alors que ce travail des forces intérieures soit nul pour un solide.

1 – Puissance des actions exercées sur un solide :

En faisant appel à la notion de forces volumiques exercées sur un solide, on peut écrire la puissance des actions (extérieures et intérieures) exercées sur un corps continu :

$$P = \iiint_{(V)} \vec{v}(M).\vec{f}(M)d\tau$$

Pour un solide :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$$

Soit, après calculs :

$$\boxed{P = \vec{v}(A).\vec{F}_{ext} + \vec{M}_{A,ext}.\vec{\Omega}}$$

On remarque que les forces intérieures n'interviennent pas dans cette expression de la puissance reçue par le solide. A sera souvent le centre d'inertie G.

2 – Théorème de l'énergie cinétique (ou de la puissance cinétique) :

Dans la suite, on se place dans un référentiel (R) supposé galiléen.

- Pour un solide :

$$P = \iiint_{(V)} \vec{v}(M).\vec{f}(M)d\tau = \iiint_{(V)} \vec{v}(M).dm\vec{a}(M) = \iiint_{(V)} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}dm\vec{v}(M)^2\right) = \frac{dE_c}{dt}$$

Ainsi, pour un solide :

$$\boxed{P = \vec{v}(G).\vec{F}_{ext} + \vec{M}_{G,ext}.\vec{\Omega} = \frac{dE_c}{dt}}$$

(Théorème de la puissance cinétique)

Rappelons ici que P représente la puissance uniquement des actions extérieures subies par le solide (la puissance des actions intérieures est nulle pour un solide).

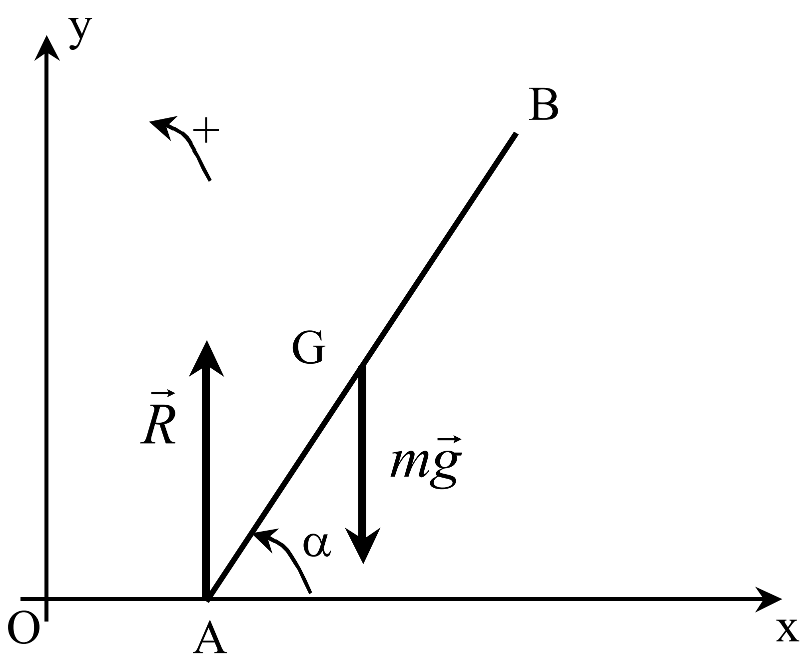
Le théorème de l'énergie cinétique s'en déduit : $\Delta E_c = W_{\vec{f}_{ext}}$

Un 1^er^ exemple : chute d'une tige sur le sol

Une tige AB, homogène, de centre G et de longueur 2b, est posée sur le sol, verticalement sans vitesse initiale. Sous l'action d'un léger déséquilibre, elle tombe.

En supposant que l'extrémité A glisse sans frottements sur le sol, calculer la vitesse v_0 du centre G de la tige quand celle-ci heurte le sol.

Le moment d'inertie de la tige par rapport à sa médiatrice est $J = \frac{1}{3}mb^2$.



3 – Energie potentielle et énergie mécanique d'un système :

L'énergie mécanique E_m d'un système (S) est la somme de son énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle intérieure $E_{p,int}$ et extérieure $E_{p,ext}$:

$$E_m = E_c + E_{p,\mathrm{int}} + E_{p,ext}$$

et le théorème de l'énergie cinétique conduit, pour un système fermé (S) à :

$$dE_m = \delta W_{forces\ ext\ et\ \mathrm{int}\ non\ conservatives} \quad ; \quad \frac{dE_m}{dt} = P_{forces\ ext\ et\ \mathrm{int}\ non\ conservatives}$$

La plupart des actions mécaniques connues sont conservatives (le poids, la force électrique, la force de gravitation, l'action d'un ressort, …).

Parmi les actions mécaniques non conservatives, on peut citer les actions de contact entre solides, la tension d'un fil, les forces de pression, les forces de propulsion, …

Conservation de l'énergie mécanique d'un système fermé, système conservatif :

Si toutes les actions mécaniques dérivent d'une énergie potentielle (extérieure ou intérieure) ou si toutes les actions mécaniques qui ne dérivent par d'une énergie potentielle ne travaillent pas, alors l'énergie mécanique du système se conserve au cours du mouvement.

Le système est dit conservatif.

L'équation :

$$E_m = E_c + E_{p,\mathrm{int}} + E_{p,ext} = cste$$

Est appelée l'intégrale 1$^{\text{ère}}$ du mouvement (relative à l'énergie).

Exercice : la tartine beurrée :

Un toast de longueur 2a est posé sur une table horizontalement, son centre d'inertie décalé de la table d'une distance δ.

Coefficient de frottement f; $J_{Gz} = ma^2 / 3$, $\eta = \delta / a$

a) Au début de la chute il n'y a pas glissement (le justifier), montrer qu'alors :

$$(d\theta / dt)^2 = (6g / a)(\eta / (1 + 3\eta^2)) \sin\theta$$

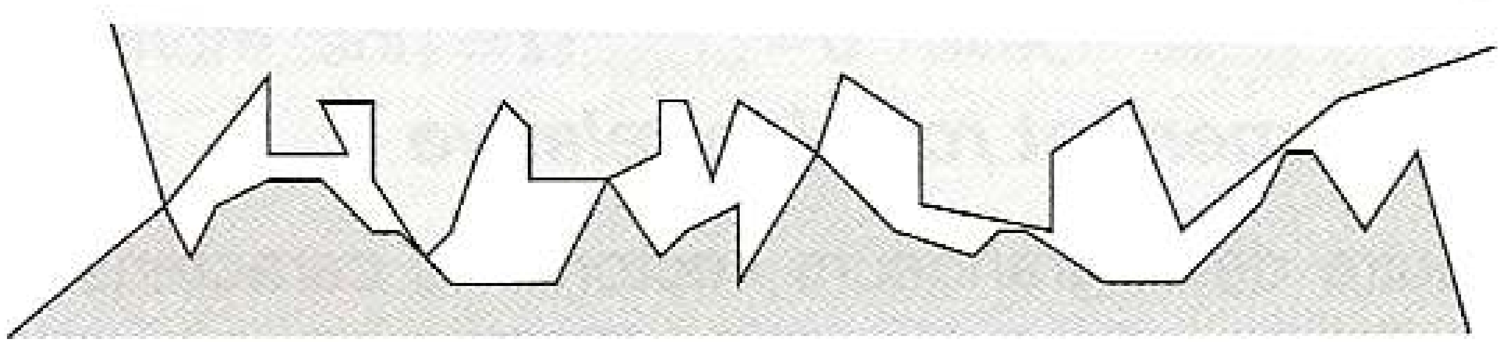
b)En supposant que le toast quitte la table sans avoir glissé pour $\theta = \pi/2$ avec $\delta << a$ déterminer le mouvement ultérieur du toast.

Quel est l'angle limite pour lequel en moins d'un tour, il atterrisse coté pain?

Calculer alors le temps de chute du toast.

On donne : h = 75 cm, 2a = 10 cm, g = 9,8 m/s^2

V) Contact entre deux solides – Lois du frottement :



Quand on approche deux objets, les nuages électroniques des atomes situés aux deux interfaces finissent par être très proches et la répulsion électrostatique entre ces nuages engendre la non-interpénétrabilité entre les solides.

On comprend donc, vu la complexité de la situation, qu'obtenir une loi exacte décrivant les contacts au niveau macroscopique n'est pas aisé.

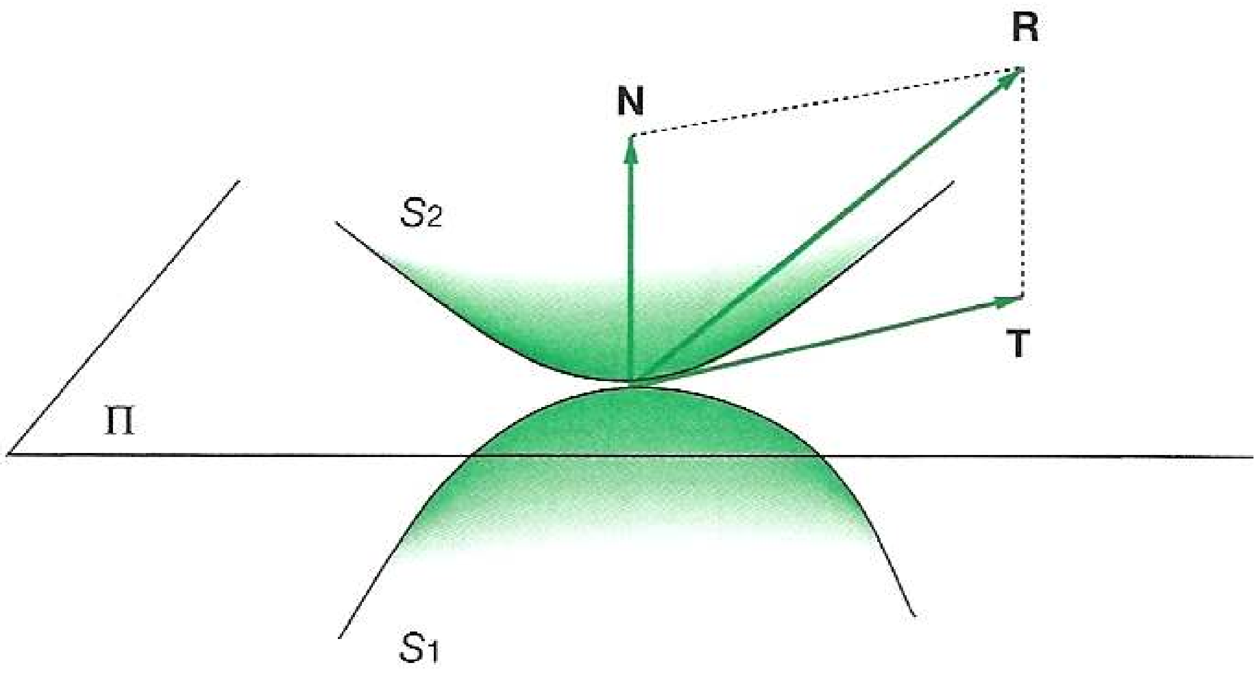
1 – Actions mécaniques de contact :

- Définition des composantes normale et tangentielle de la résultante des actions mécaniques de contact :

On note $\vec{R}$ la résultante des actions de contact du solide (1) sur le solide (2).

Elle se décompose selon :

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$$



- Lois de Coulomb

Au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, Coulomb a énoncé les lois approchées suivantes, valables pour le frottement de glissement entre deux solides en contact ponctuel (on considérera dans la suite que ces lois restent valables même si le contact n'est pas rigoureusement ponctuel) :

Soient deux solides (S_1) et (S_2) en contact ponctuel. On note $\vec{v}_g$ la vitesse de glissement de (S_2) par rapport à (S_1).

- Si $\vec{v}_g \neq \vec{0}$ (il y a glissement), la force de frottement de glissement vérifie :

$$\vec{T} \mathbin{//} \vec{v}_g \qquad ; \qquad \vec{T}.\vec{v}_g < 0 \qquad ; \qquad \left\|\vec{T}\right\| = f\left\|\vec{N}\right\|$$

où f est appelé coefficient de frottement de glissement.

- Si $\vec{v}_g = \vec{0}$ (il n'y a pas glissement), alors : $\left\|\vec{T}\right\| \leq f\left\|\vec{N}\right\|$

Quelques exemples de coefficients de frottement :

Nature du contact	Coefficient de frottement f
bois sur bois	0,30 à 0,50
acier sur acier (à sec)	0,15 à 0,20
acier sur caoutchouc	0,25 à 0,45
pneu sur route sèche	0,7
pneu sur route mouillée	0,1
métal sur glace	0,02

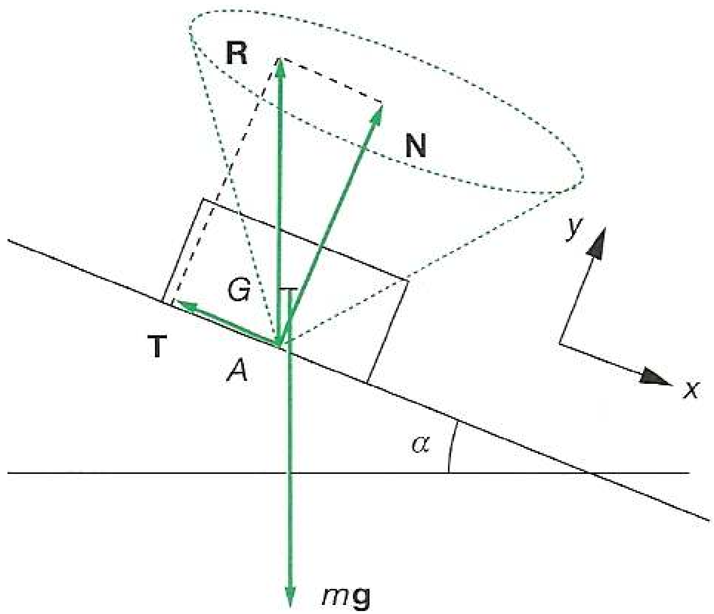
- Cône de frottement :

On considère un solide immobile sur un sol incliné.

Le solide reste t'il immobile ou commence t'il à glisser ?

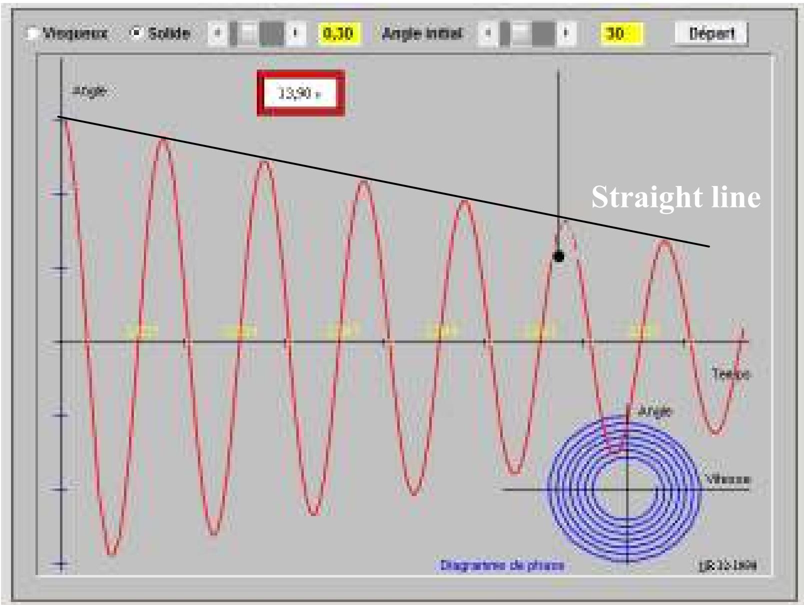
$$\tan\alpha \leq f = \tan\varphi \qquad ou \qquad \alpha \leq \varphi = \arctan f$$

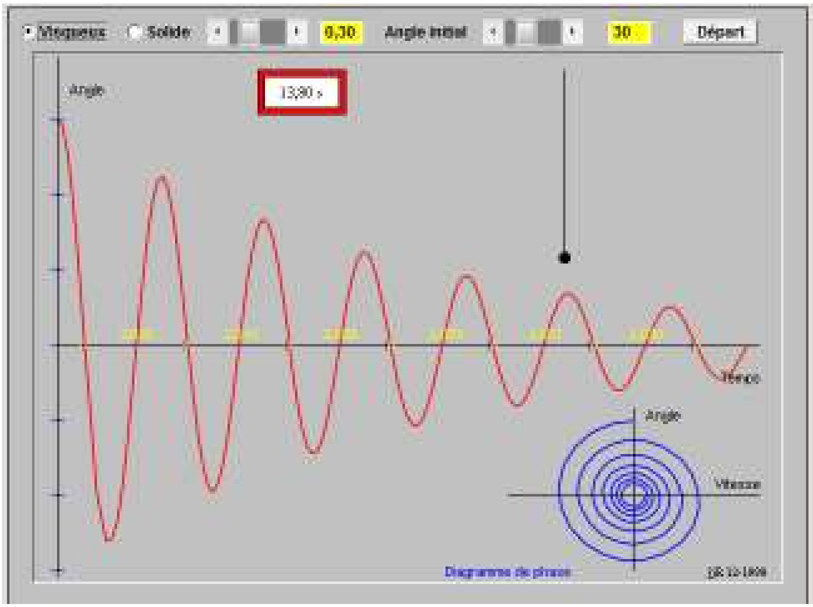
L'interprétation géométrique est que la résultante $\vec{R}$ doit se trouver dans le cône d'axe $\vec{N}$ et de demi-angle au sommet $\varphi = \arctan f$. Ce cône est appelé cône de frottement.



Exemple (Comparaison frottements solide / fluide) : (Solid or Coulomb friction vs viscous damping)

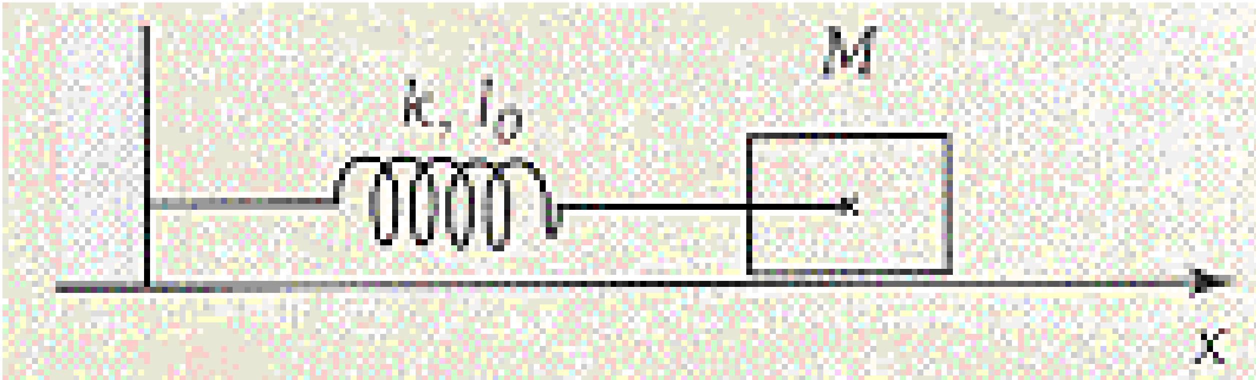
JJR/Mécanique/Oscillateurs/Pendule amorti





A cube (mass M) can slide on an horizontal area with a solid-friction coefficient f.

At t = 0 : the spring's length is $\ell_0 + A$ (A > 0) and the velocity equals zero.



* What is the condition for the cube to be set to motion ?

* If the cube is set to motion, describe the motion and give x(t) until the cube stops.

* What is the new condition for the cube to be set to motion again ?

* Supposing there are plenty of oscillations, what is the x(t) plot's enveloppe ? Compare with the viscous damping.

The mass is moving if :

$$A > \frac{fmg}{k}$$

$$0 < t < \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\Omega}\left(\Omega = \sqrt{\frac{k}{M}}\right) : \qquad \boxed{x(t) = \left(A - \frac{fmg}{k}\right)\cos(\Omega t) + \frac{fmg}{k}}$$

For t = T / 2 :

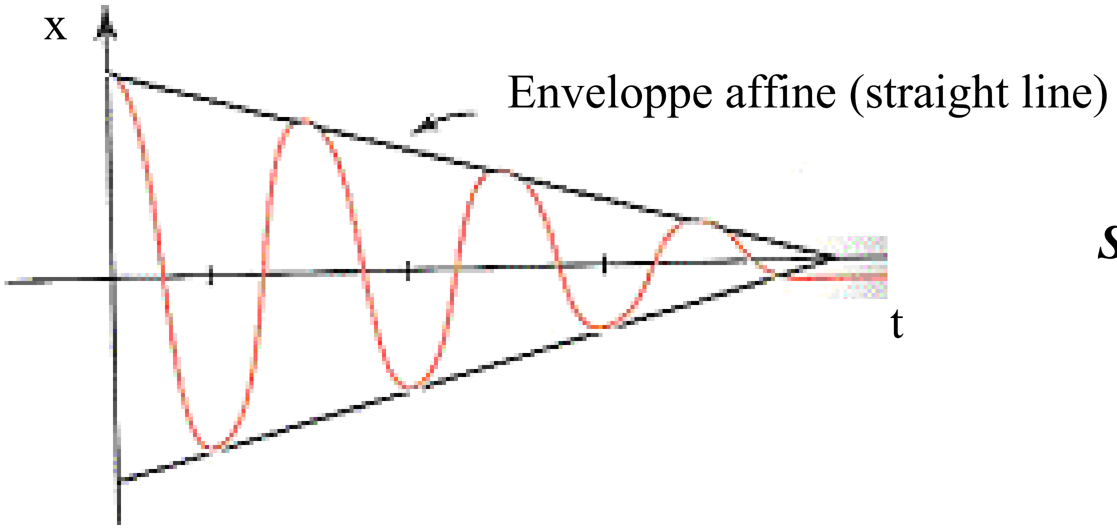
$$x(\frac{T}{2}) = -A + 2\frac{fmg}{k}$$

$$If \;\; A > 3\frac{fmg}{k} :$$

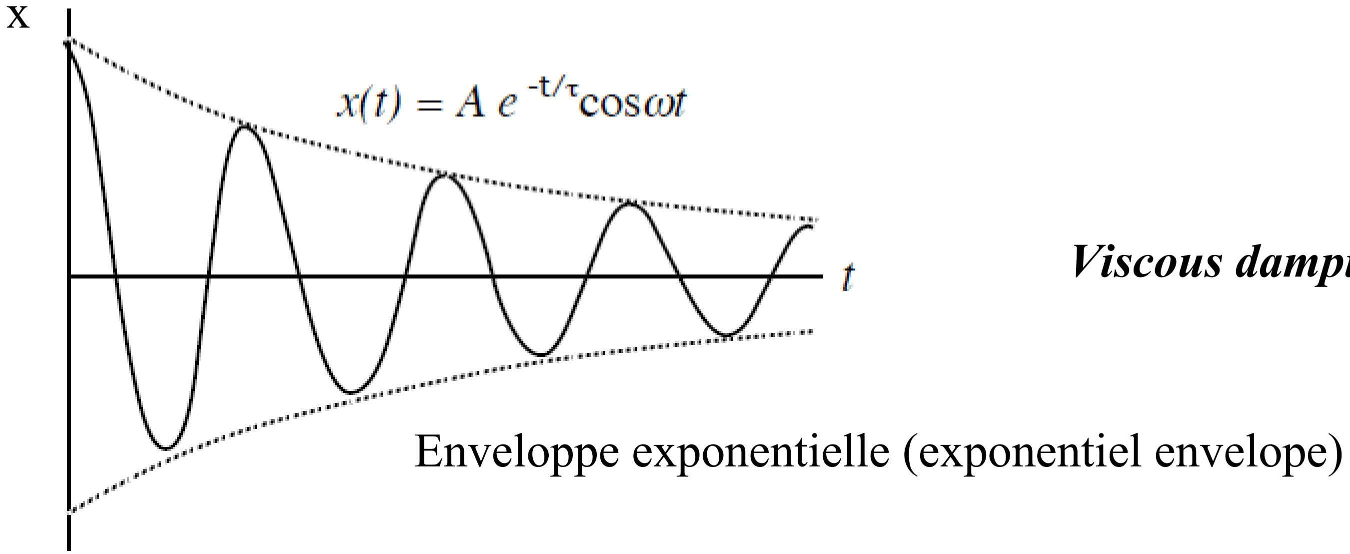
$$\frac{T}{2} < t < T \;\; : \qquad \boxed{x(t) = \left(A - 3\frac{fmg}{k}\right)\cos(\Omega t) - \frac{fmg}{k}}$$

For t = T :

$$x(T) = A - 4\frac{fmg}{k}$$



Solid or Coulomb friction

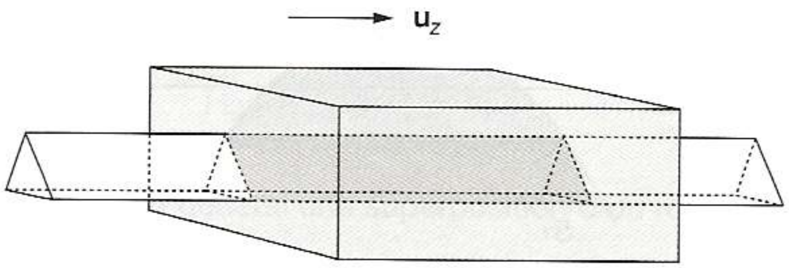


Viscous damping

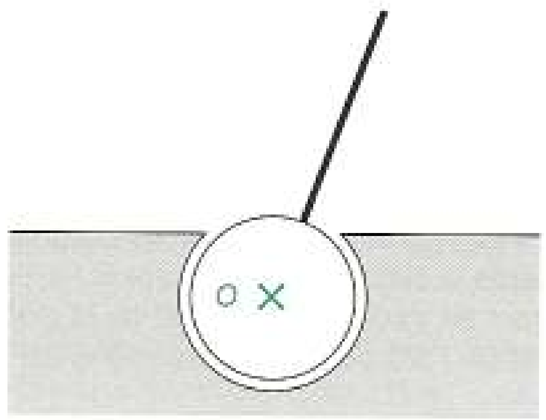
VI) Rotation d'un solide autour d'un axe fixe :

1 – Description de quelques liaisons classiques entre deux solides :

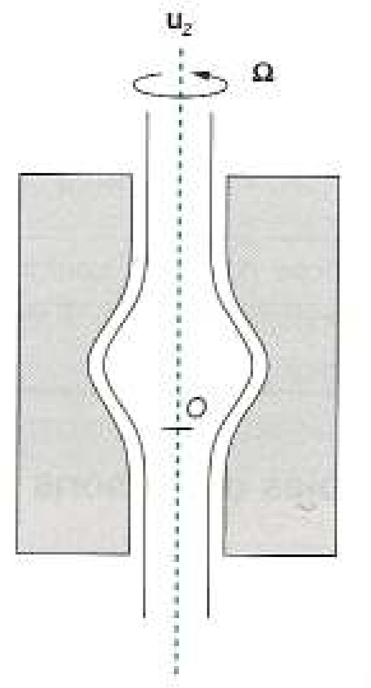
- Liaison glissière ou liaison prismatique :



- Liaison rotule ou liaison sphérique :



- Liaison pivot (ou liaison rotoïde) :



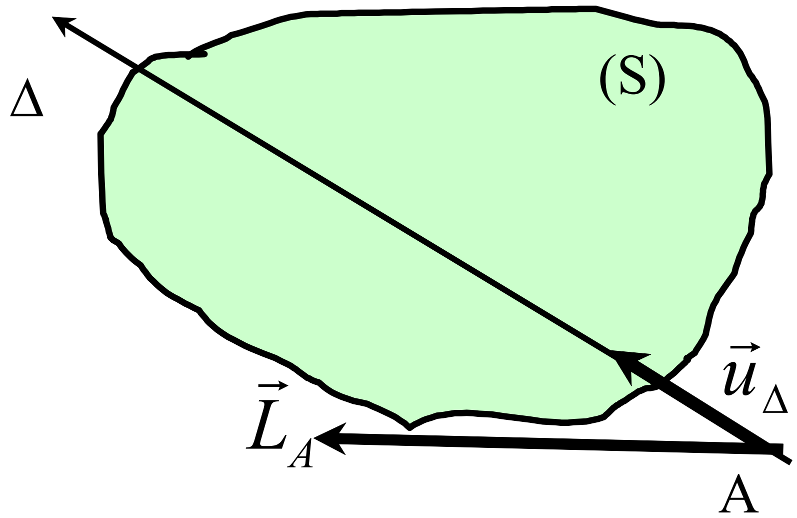
2 – Liaisons parfaites :

Par définition, une liaison parfaite entre deux solides est telle que la puissance totale entre ces deux solides est nulle.

3 – Etude du mouvement de rotation (liaison pivot) :

Rappel : (théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe)

On considère un axe Δ passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$, fixe dans (R).



En projetant le théorème du moment cinétique sur cet axe, on obtient le théorème du moment cinétique par rapport l'axe Δ :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \vec{M}_{A,\vec{f}_{ext}} . \vec{u}_\Delta = M_{\Delta,ext} \qquad (L_\Delta = \vec{L}_A . \vec{u}_\Delta)$$

Ce théorème sera couramment utilisé dans l'étude du mouvement d'un solide autour d'un axe fixe, en utilisant :

$$L_\Delta = J_\Delta \omega$$

où ω désigne la vitesse angulaire du solide, portée par l'axe Δ.

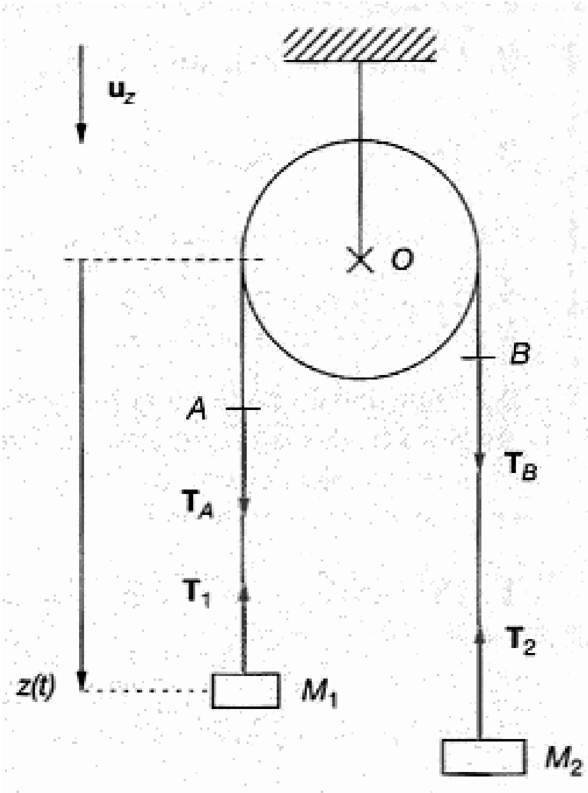
Finalement (théorème « scalaire » du moment cinétique pour un solide en rotation autour de l'axe de rotation Δ) :

$$J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = L_\Delta \qquad (L_\Delta = \vec{L}_A . \vec{u}_\Delta)$$

4 – Exemples :

- Machine d'Atwood :

Une poulie sans masse est attachée au plafond par une tige. Cette poulie tourne sans frottement autour de son axe. Un fil inextensible et souple, de masse négligeable, attaché à ses deux bouts à deux masses m_1 et m_2 coulisse sans glisser sur cette poulie.

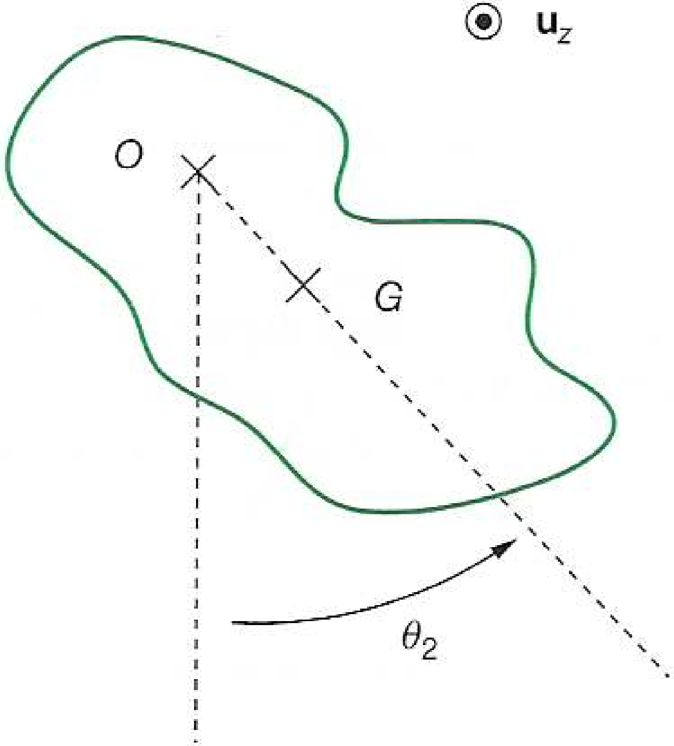


1) Montrer que la poulie transmet les tensions, c'est-à-dire que les tensions du fil de chaque côté de la poulie sont identiques.

2) Montrer que la tension est la même tout au long de la corde libre.

3) En déduire les accélérations des deux masses.

- Le pendule pesant :



* Equation de la dynamique :

* Approche énergétique :