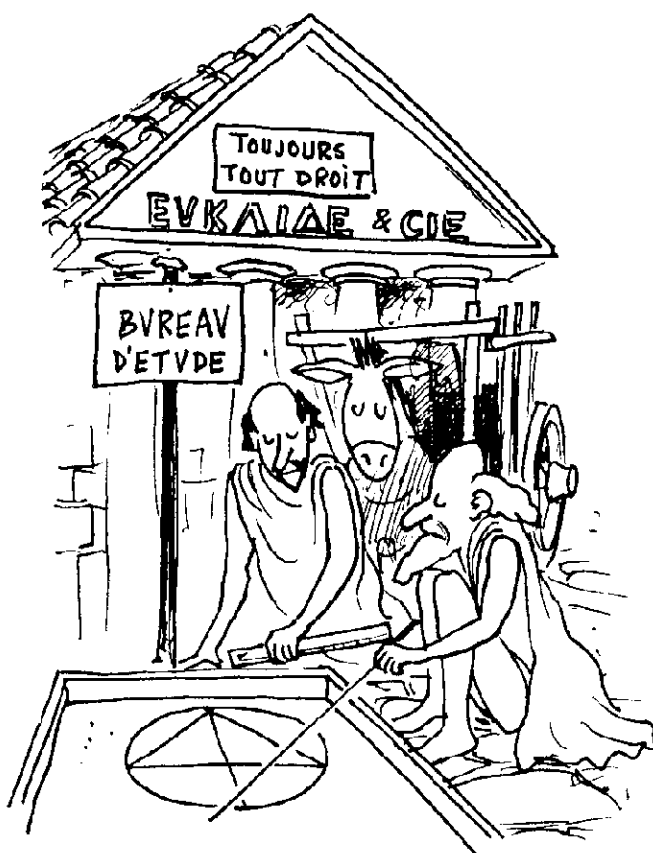


Les Aventures d'Anselme Lanturlu

LE GEOMETRICON

Jean-Pierre Petit

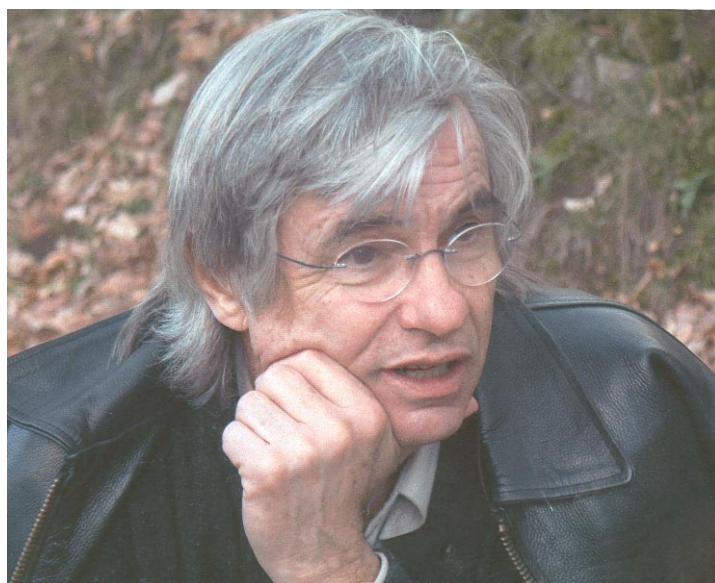


Savoir sans Frontières

Association Loi de 1901

Villa Jean-Christophe, 206 Chemin de la Montagnère, 84120 France

<http://www.savoir-sans-frontieres.com>



Jean-Pierre Petit, Président de l'Association : Ancien Directeur de Recherche au Cnrs, astrophysicien, créateur d'un genre nouveau : la Bande Dessinée Scientifique. En 2005 il a décidé de mettre ses ouvrages au nombre d'une vingtaine, dans le domaine public en les rendant téléchargeables gratuitement à partir de son site. Il a également créé l'association Savoir sans Frontières qui s'est donnée pour but de distribuer gratuitement le savoir, y compris le savoir scientifique et technique à travers le monde. L'association, qui fonctionne grâce à des dons, rétribue des traducteurs à hauteur de 150 euros (en 2006) en prenant à sa charge les frais d'encaissement bancaire. De nombreux traducteurs accroissent chaque jour le nombre d'albums traduits (en 2005 en 18 langues, dont le Laotien et le Rwandais).

Le présent fichier pdf peut être librement dupliqué et reproduit, en tout ou en partie, utilisé par les enseignants dans leurs cours à conditions que ces opérations ne se prêtent pas à des activités lucratives. Il peut être mis dans les bibliothèques municipales, scolaires et universitaires, soit sous forme imprimée, soit dans des réseaux de type Intranet.

L'auteur a entrepris de compléter cette collection par des albums plus simples d'abord (niveau 12 ans). Egalement en cours d'élaboration : des albums « parlants » pour analphabètes et « bilingues » pour apprendre des langues à partir de sa langue d'origine.

L'association recherche sans cesse de nouveaux traducteurs vers des langues qui doivent être leur langue maternelle, possédant les compétences techniques qui les rendent aptes à produire de bonnes traductions des albums abordés.

Les dons (chèque libellés à l'ordre de Savoir sans Frontières) sont également les bienvenus. Les ressources de l'association sont en 2006 principalement affectées aux nouvelles traductions.

AVERTISSEMENT

CECI N'EST NI UN TRAITÉ, NI UN COURS.

C'EST SIMPLEMENT L'HISTOIRE D'ANSELME LANTURLU

ET DE L'UN DE SES VOYAGES,

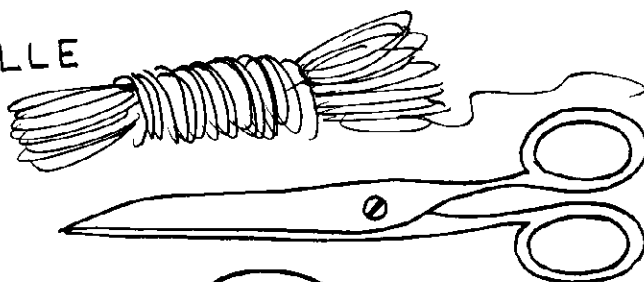
AU PAYS DE LA GÉOMÉTRIE.

A LIRE DE PRÉFÉRENCE AVEC :

* D'ABORD DE L'ASPIRINE



* PUIS DE LA FICELLE

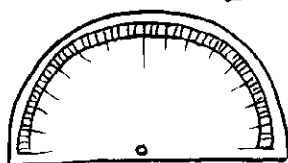


* DES CISEAUX

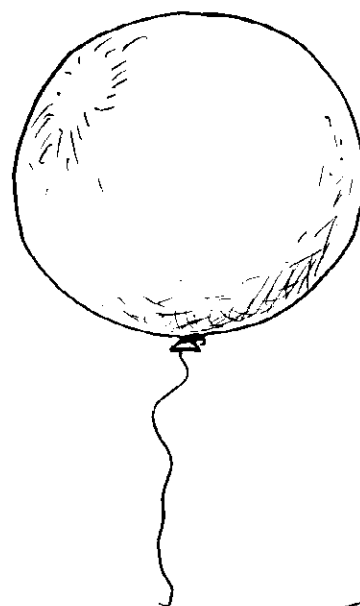
* DU RUBAN ADHÉSIF



* UN RAPPORTEUR



* ET UN JOLI BALLON

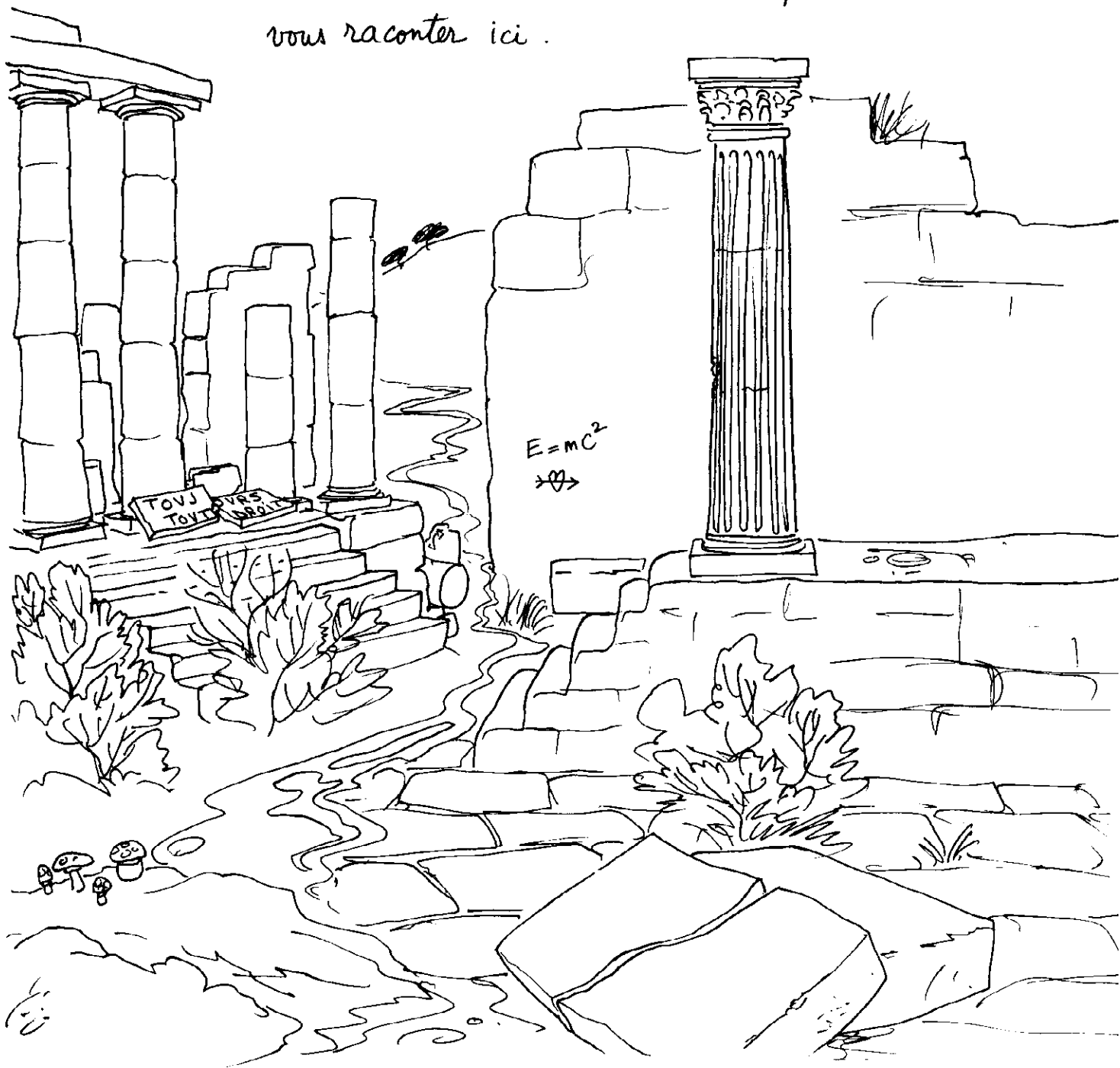


BIEN ROND...

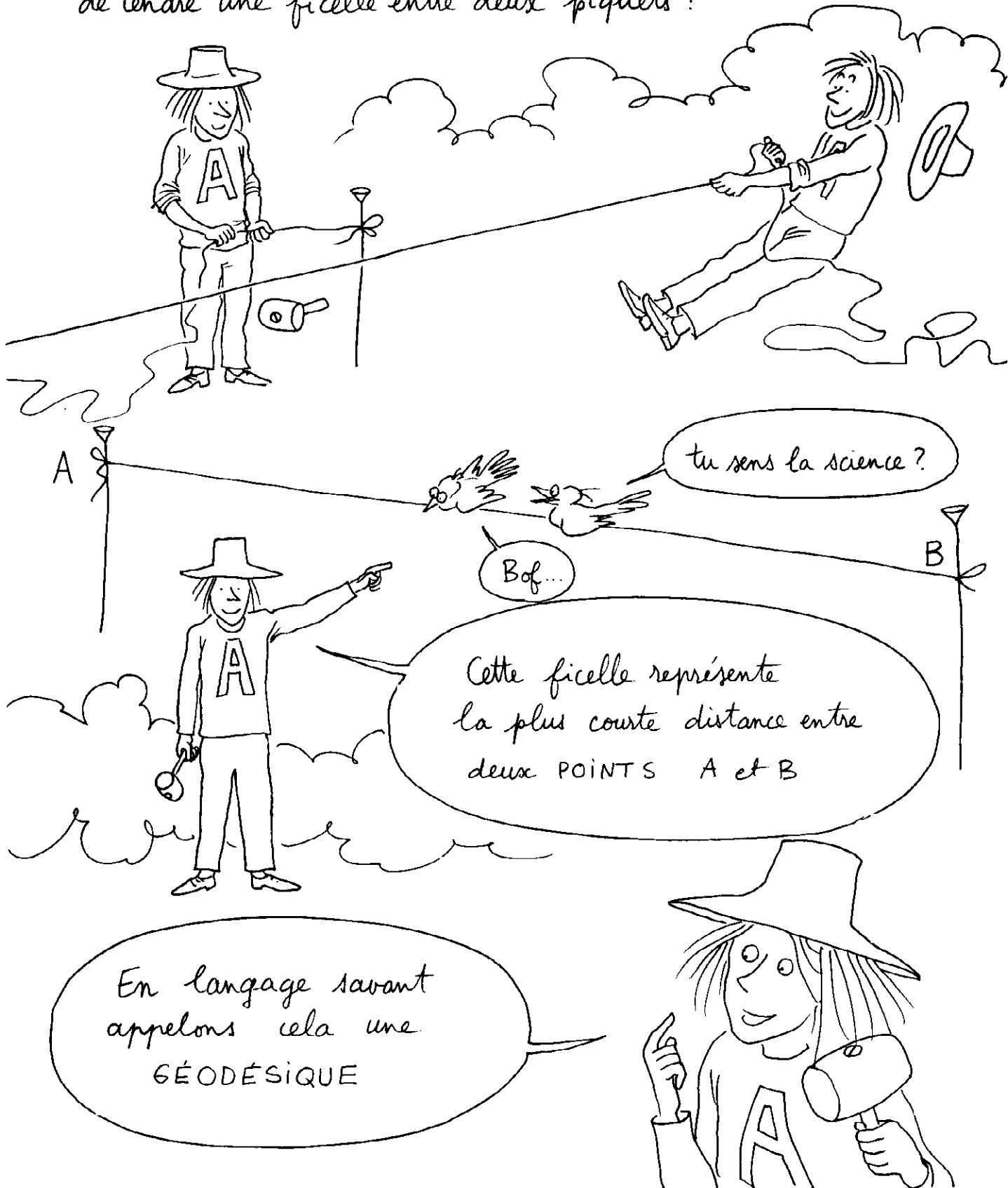
La Société Euclide et C^{ie} naquit à Alexandrie
au troisième siècle avant Jésus-Christ. Pendant deux
mille deux cents ans les affaires prospérèrent. Les produits
étaient appréciés et la clientèle satisfaite et fidèle.



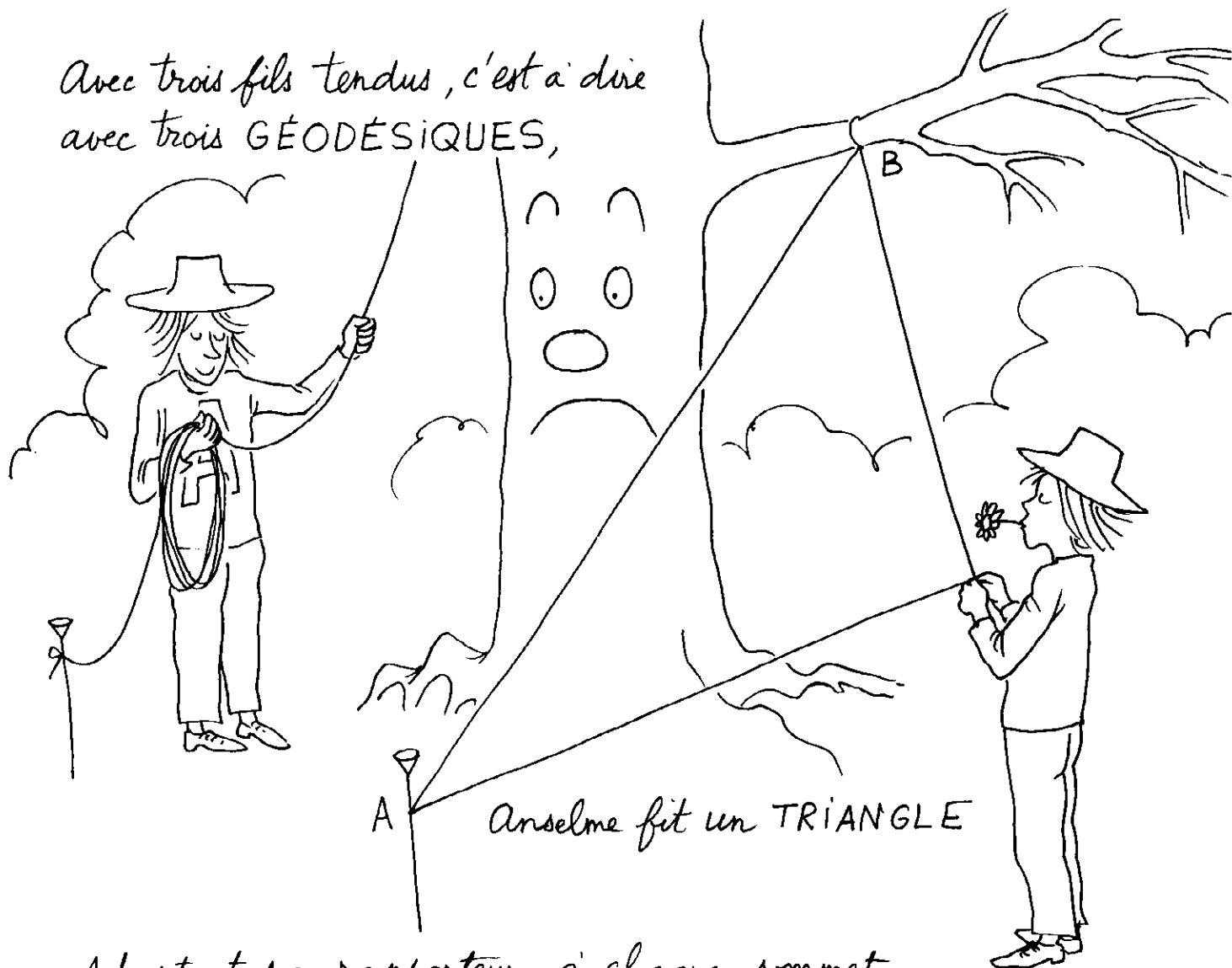
Mais, peu à peu, les goûts des clients changèrent.
Certains, jadis inconditionnels de la marque,
à la suite de curieuses expériences, se demandèrent:
"Euclide, est-ce vraiment, partout et pour tout,
ce qu'il y a de mieux ?"
C'est l'histoire de l'un d'eux que nous allons
vous raconter ici.



PROLOGUE : Un jour, Anselme l'anturle décida de tendre une ficelle entre deux piquets :



Avec trois fils tendus, c'est à dire
avec trois GÉODÉSIQUES,



A Anselme fit un TRIANGLE

Adaptant son rapporteur à chaque sommet
de ce TRIANGLE, il mesura les angles $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$,
et fit leur somme



D'après l'excellent
théorème de la Société
Euclide et C^{ie}, cette
somme vaut 180°
Bon....

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ Eukλιδε}$$

Le monde où vivait Anselme était nébuleuse en diable. On s'y saut mouché avec le nez d'un autre.



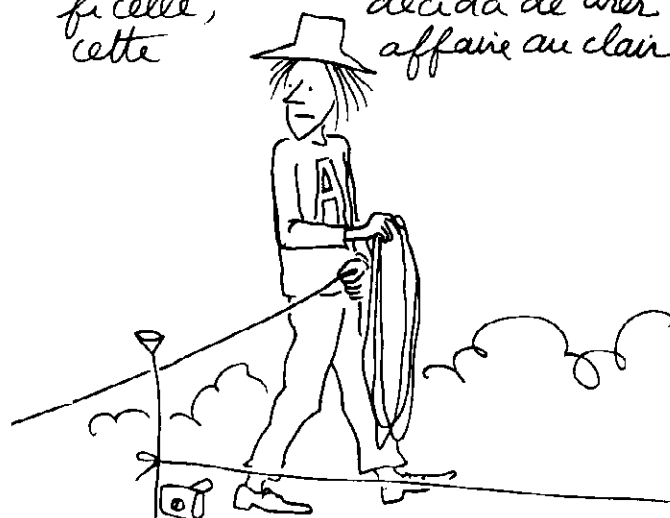
Anselme marcha longtemps,
longtemps...
Derrière lui sa ficelle se déroulait,
si bien tendue, qu'il se moquait bien
des incertitudes de sa marche dans
la brume : il fabriquait une
impeccable GÉODÉSIQUE.

mais, je ne sais si vous l'avez remarqué, il y a des jours où tout semble aller de travers.



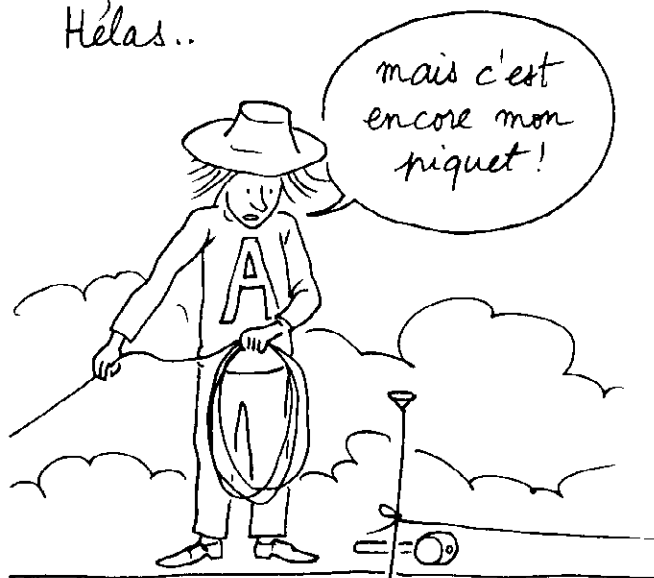
Anselme, qui avait encore de la ficelle, cette
décida de tirer
affaire au clair.

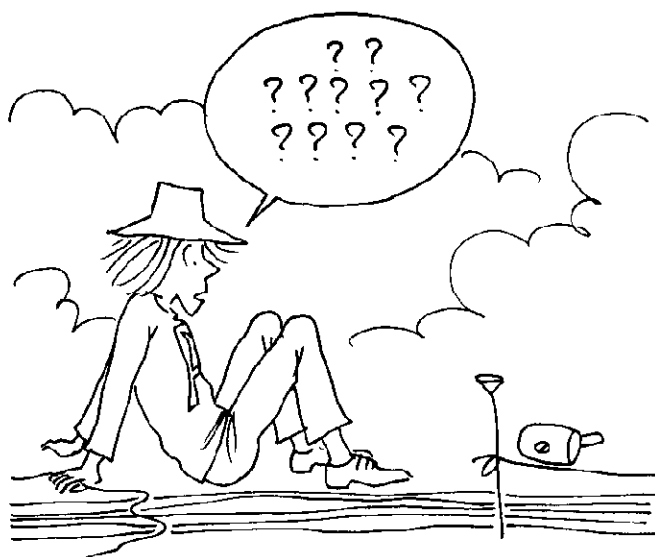
Imperturbable, il continua donc à tendre sa ficelle, et poursuivait, DROIT DEVANT, plein de curiosité.



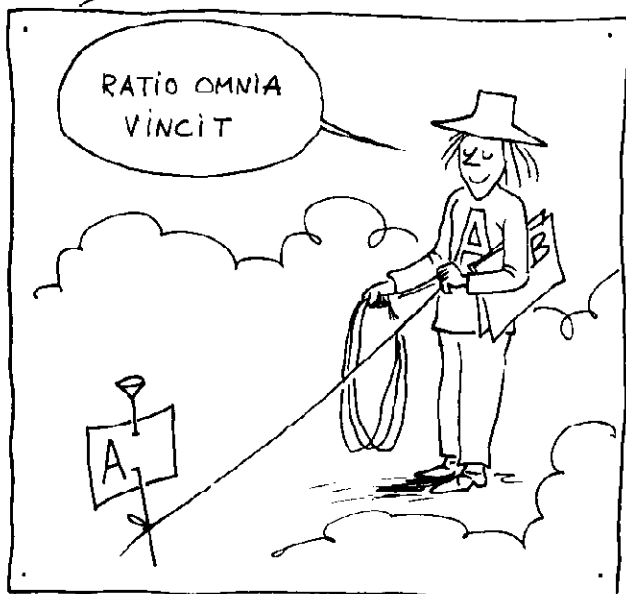
Hélas..

La DROITE d'Anselme se refermait !





Essayons un théorème de chez Euclide. Je vais tirer trois GÉODÉSIQUES d'égale longueur. Cela me donnera un TRIANGLE dont les trois angles doivent avoir chacun 60° ; leur somme faisant 180° . C'est écrit sur la notice.



Après, j'aviserai.



C'est beau la science

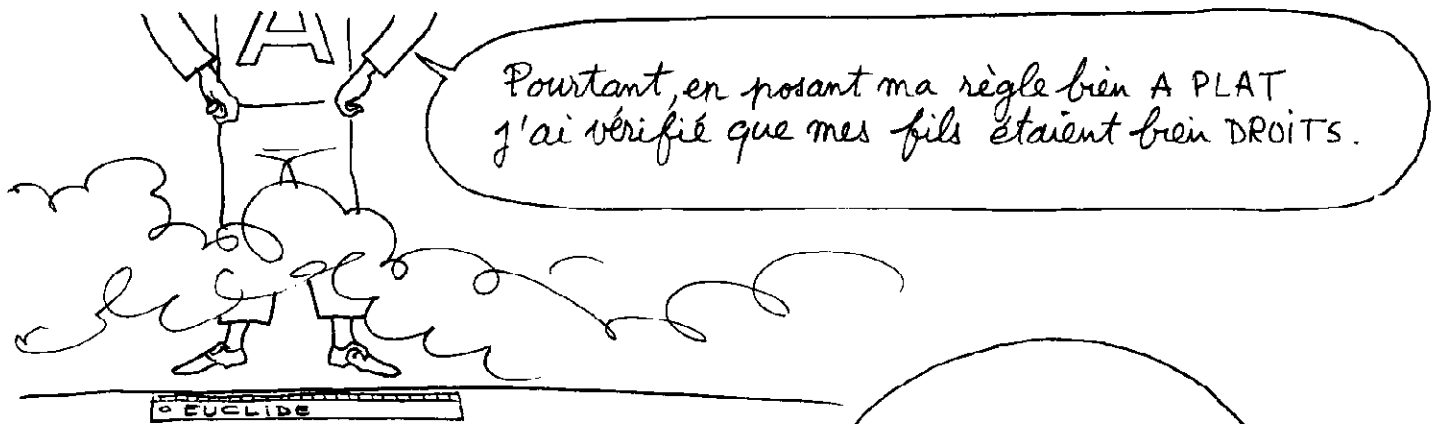
Oh, là là!
Les angles sont bien égaux, mais ils font plus de 60° .

un problème?



leur somme, bien sûr, fait plus de 180° !





allô, la maison Euclide?
Dites, j'ai des ennuis avec
votre matériel.

Une seconde, je vous passe
le service technique.

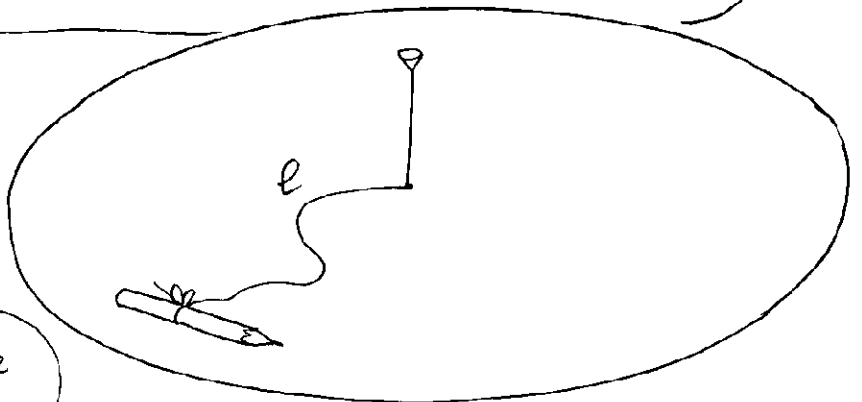


Des ennuis avec nos triangles?
Étonnant. Pourquoi n'essayez-vous pas
nos cercles? Nos clients en sont très contents.

...Un cercle est donc l'ensemble des points
situés à une distance ℓ d'un point fixe.

Et vous dites: périmètre $2\pi\ell$, Aire : $\pi\ell^2$
c'est noté.

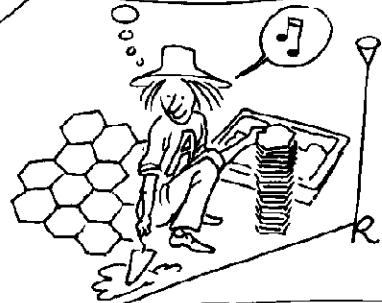
a votre
service



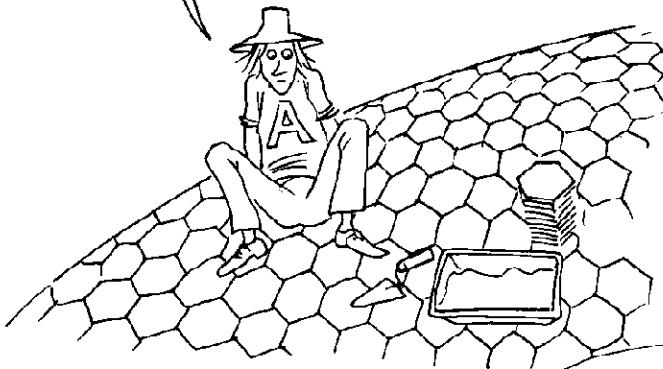
Pour mesurer une AIRE, utilisez le carrelage Euclide. Pour un périmètre, le grillage Euclide est le meilleur matériel sur le marché. La satisfaction de nos clients est notre meilleure publicité.



Aire πl^2



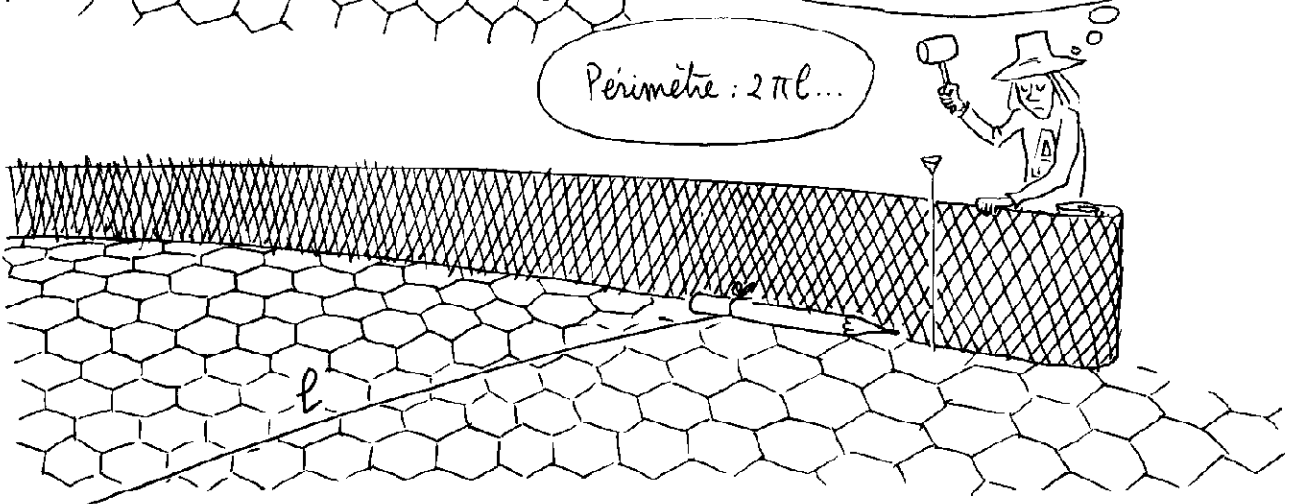
Ça commence bien, j'ai du rab de carrelage !

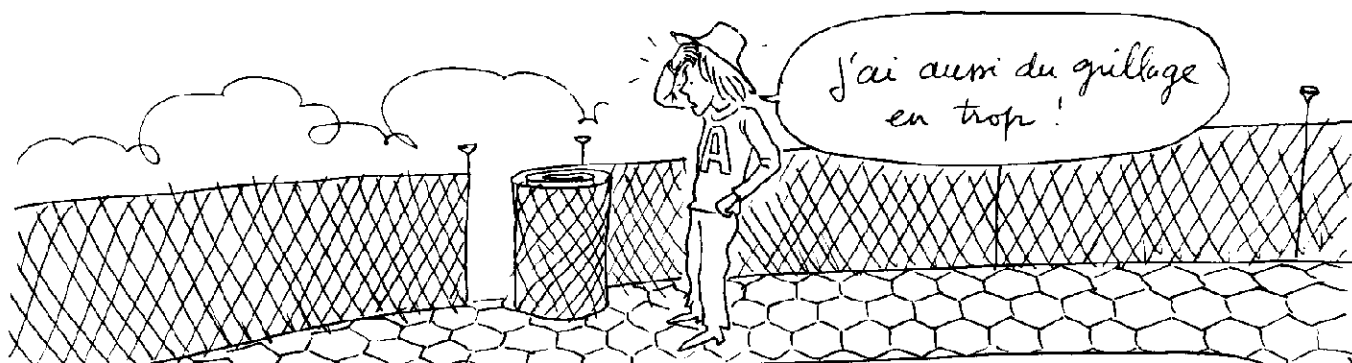


Tout n'est qu'ordre et beauté, luxe, calme et volupté

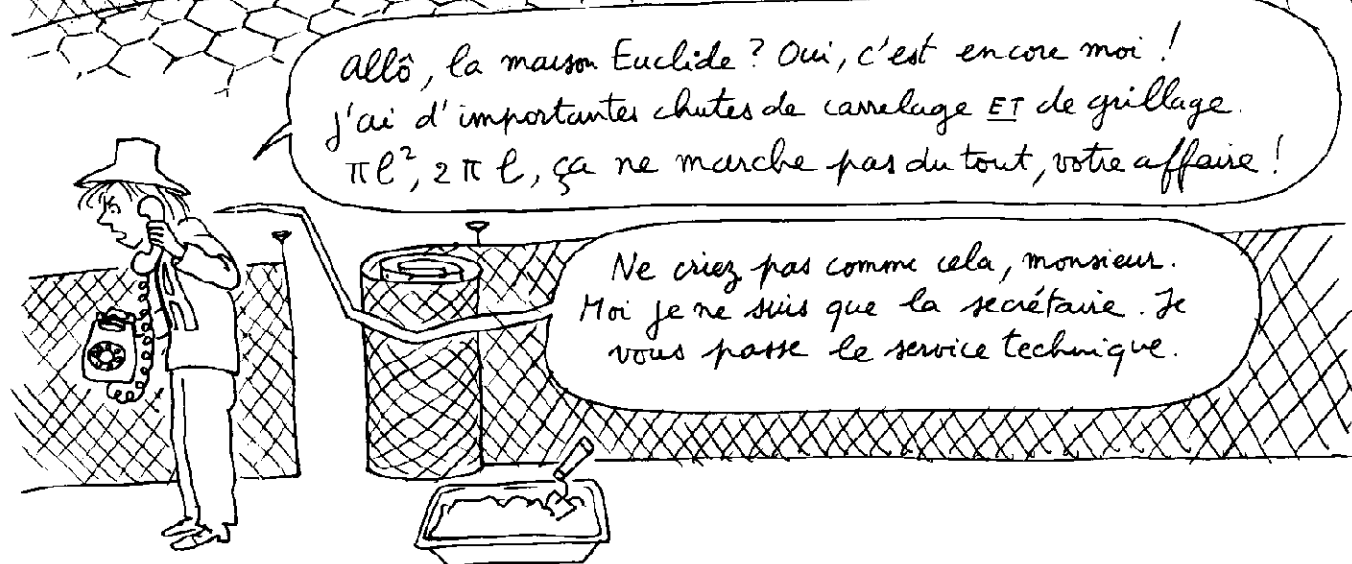
Je vais mesurer le périmètre à l'aide de leur grillage

Périmètre : $2\pi l$...



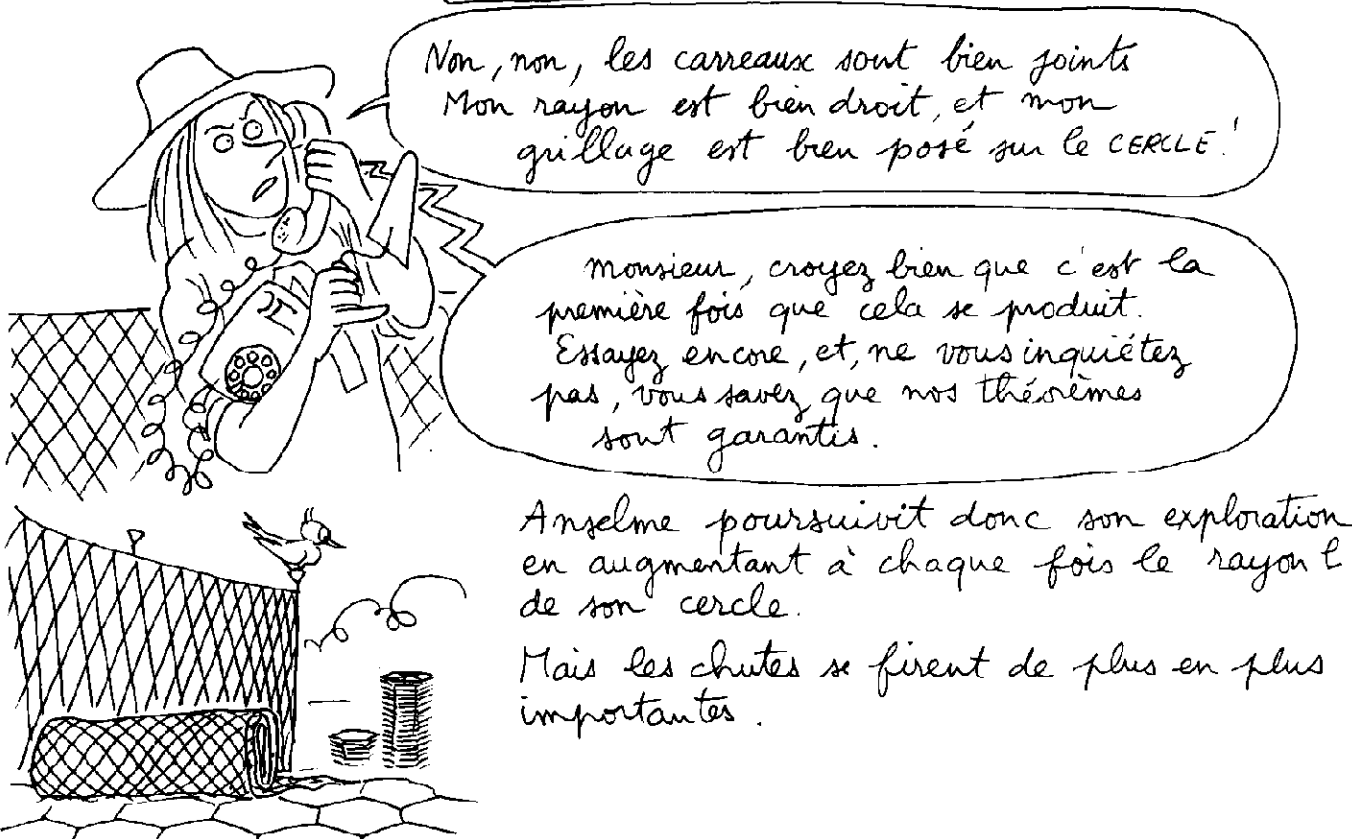


J'ai aussi du guillage en trop !



allô, la maison Euclide ? Oui, c'est encore moi !
J'ai d'importantes chutes de carrelage ET de guillage.
 πl^2 , $2\pi l$, ça ne marche pas du tout, votre affaire !

Ne criez pas comme cela, monsieur.
Moi je ne suis que la secrétaire. Je
vous passe le service technique.



Non, non, les carreaux sont bien joints
Mon rayon est bien droit, et mon
guillage est bien posé sur le CERCLE !

monsieur, croyez bien que c'est la
première fois que cela se produit.
Essayez encore, et, ne vous inquiétez
pas, vous savez que nos théorèmes
sont garantis.

Anselme poursuit donc son exploration
en augmentant à chaque fois le rayon l
de son cercle.

Mais les chutes se firent de plus en plus
importantes.

ça alors, maintenant j'ai plus
de 36% de grillage en trop!
et 19% de carrelage en rab!
et le cercle que je trace est
devenu ... une DROITE!

je rêve,
ou quoi?

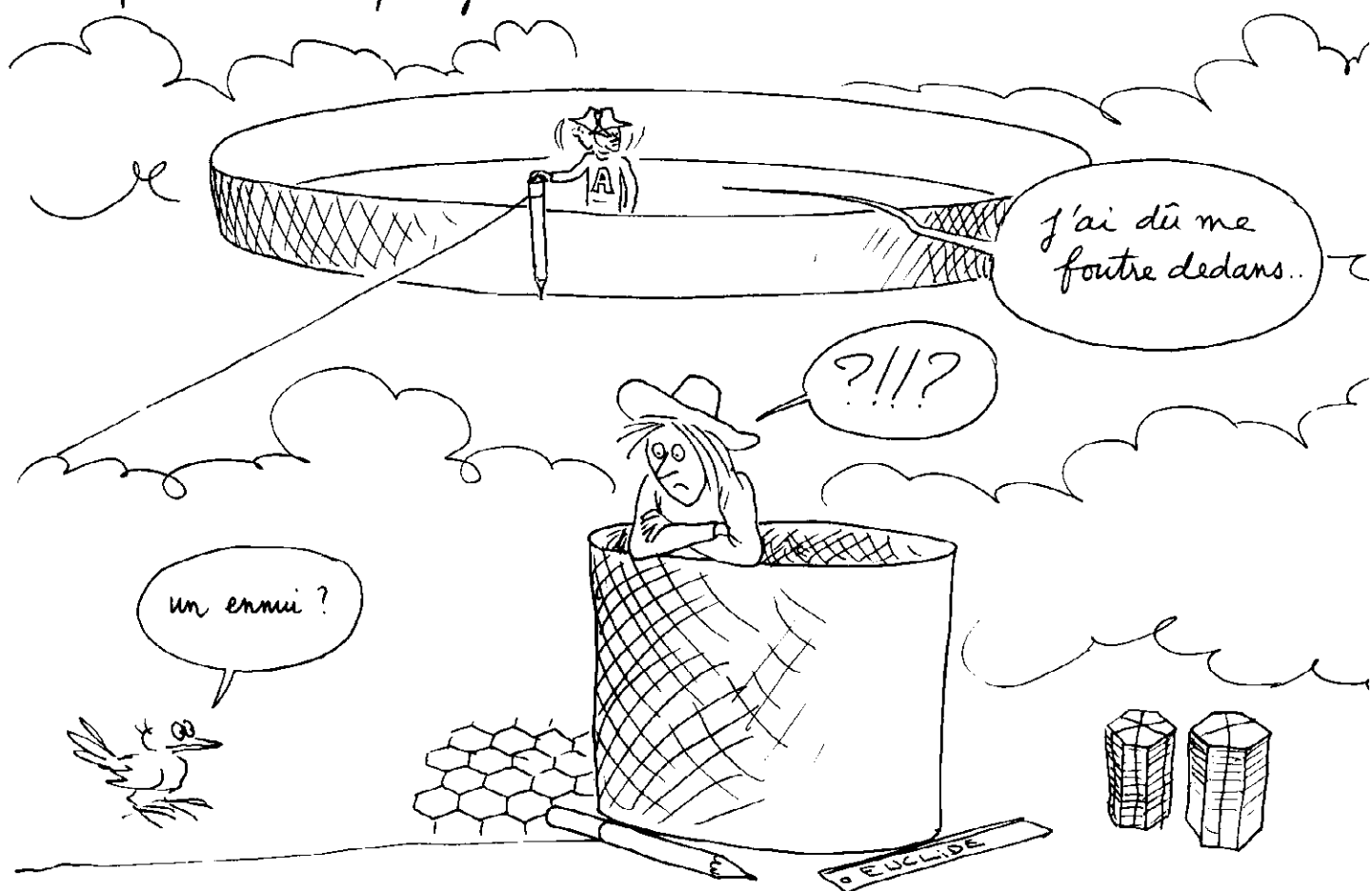
Par l'espace! cette
règle est pourtant
bien DROITE!

Amselme augmente encore
le rayon l , et cette fois...

La courbure de mon cercle
est passée de l'autre côté

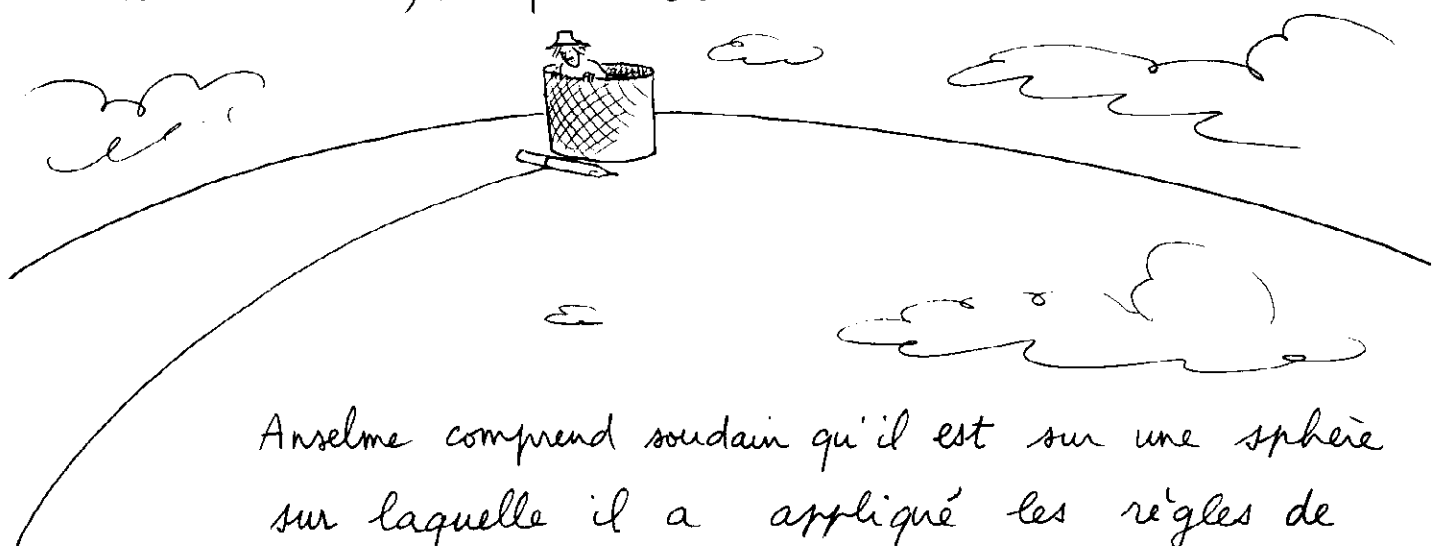
Et maintenant, quand
j'AUGMENTE l , mon
périmètre DIMINUE, c'est
une histoire de fou!

Après un dernier pavage :



QUE S'EST-IL PASSÉ ?

Pour le savoir, dissipons les nuées :



Anselme comprend soudain qu'il est sur une sphère
sur laquelle il a appliqué les règles de
la GÉOMÉTRIE du PLAN

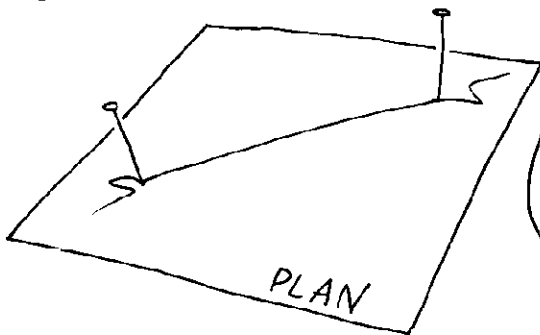


mais comment Anselme s'y est-il pris pour tracer des DROITES sur une sphère ?, ça n'a pas de sens !

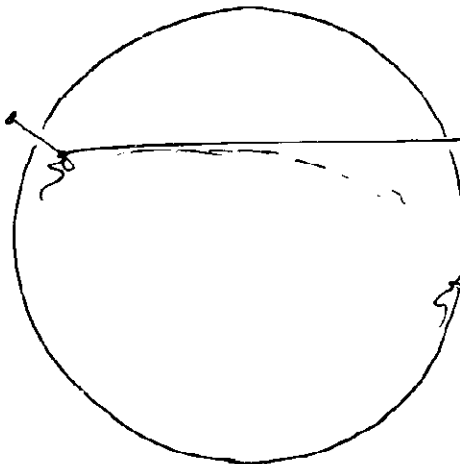
ça doit être un piège !



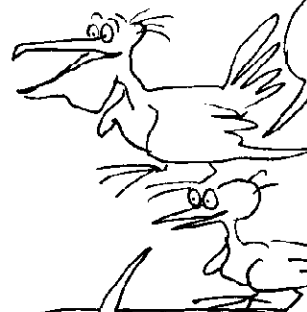
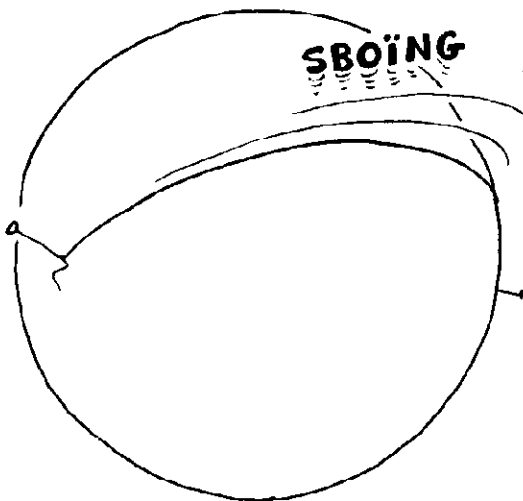
mon cher, qu'est-ce que vous appelez une droite ? Si c'est le plus court chemin d'un point à un autre, alors il y a des DROITES sur une sphère.



La notion de géodésique (ligne de plus court chemin) n'est pas l'exclusivité du PLAN



tendez un élastique entre deux points d'une sphère

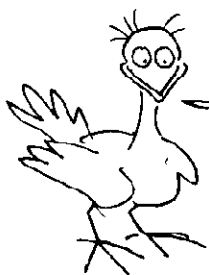


lâchez !

vous obtenez une GÉODÉSIQUE



Bon, toujours est-il que lorsque
Lanturlu trace sa géodésique, elle se REFERME, Alors, sur une sphère,
les géodésiques, ce sont tout simplement des cercles ?



toutes les lignes de plus court chemin, sur
une sphère, sont des portions de courbes géodésiques
fermées, qui sont des cercles tracés sur cette
sphère. Mais pas n'importe lesquels !

!???

Qu'est-ce que c'est que cette histoire?
Vous jouez sur les mots. Vous voulez
dire qu'il existe, sur une sphère, plusieurs espèces
différentes de cercles?!?

Bon sang, je croyais comprendre, et voilà que je ne
comprends plus rien du tout...

Un cercle, c'est l'ensemble des points
situés à une distance constante ℓ d'un
point fixe N , que nous appellerons PÔLE.

mmm...

voici tout un
ensemble de
cercles de même
pôle N , que
nous appellerons
PARALLÈLES.

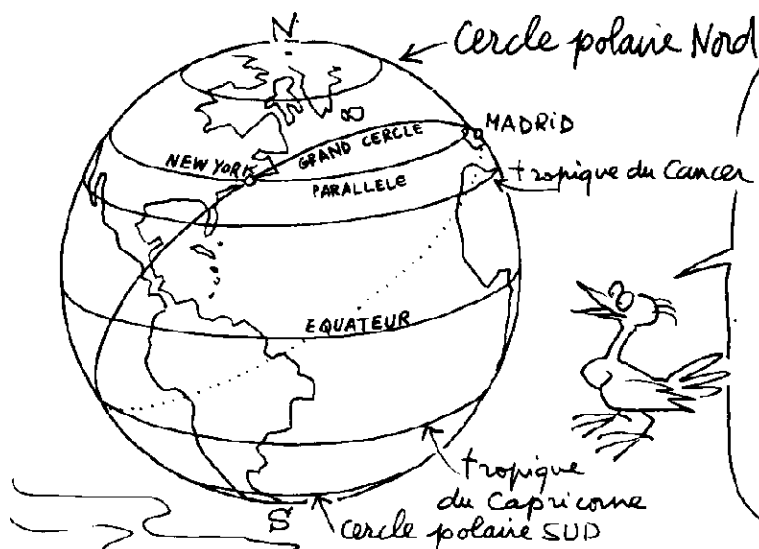
Ces cercles
parallèles
sont aussi les
points à égale
distance ℓ' du point S
"pôle sud", antipode du
"pôle nord" N

Parmi ceux-ci, il en existe un, plus grand
que les autres, qui pourrait servir
d'ÉQUATEUR à la sphère.

Je comprends enfin pourquoi
un cercle, sur une sphère,
a DEUX centres N et S !

Nous appellerons ces "ÉQUATEURS" des GRANDS
CERCLES de la SPHÈRE. Et ce seront précisément
les GÉODÉSQUES.

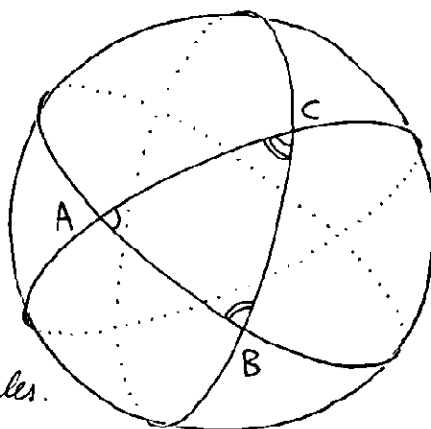
C'est la première fois que je vois une
GÉODÉSIQUE de près... très impressionnant!



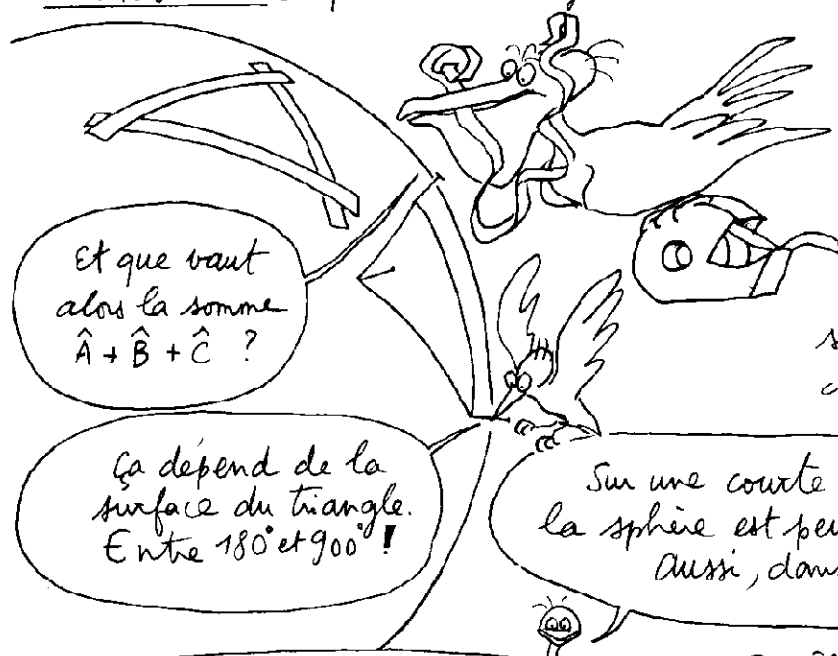
Sur la planète TERRE les cercles polaires, les tropiques, sont des parallèles. Madrid et New-York sont sur le même. Mais il est bien connu que cet arc de parallèle qui les joint n'est pas le plus court chemin. Le plus court chemin, c'est le GRAND CERCLE !



De mon temps on appelait cela l'ORTHODROMIE



Un TRIANGLE sera constitué par trois arcs inévitablement empruntés à trois grands cercles.



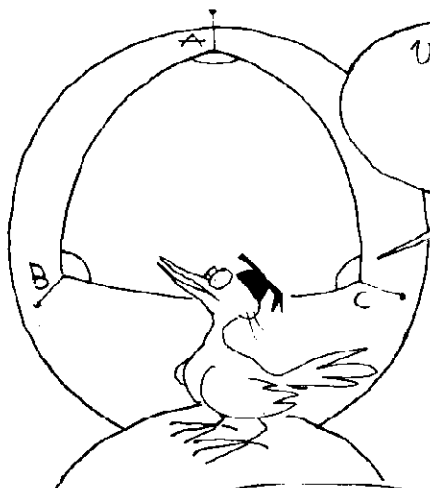
Et que vaut alors la somme $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$?

Ça dépend de la surface du triangle. Entre 180° et 900° !

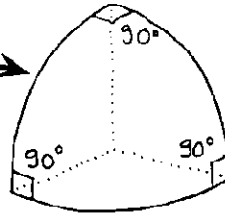
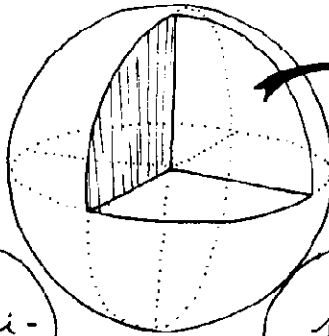
On peut matérialiser ces triangles à l'aide de ruban adhésif ou de fils élastiques et mesurer les angles en plaquant un rapporteur en chaque sommet sur la surface de la sphère

Sur une courte distance, la paroi de la sphère est peu différente d'un PLAN. Aussi, dans ce cas, la somme...

...est très voisine de 180°



Voici un triangle, que l'on pourrait matérialiser par exemple à l'aide de trois brins de fil élastique

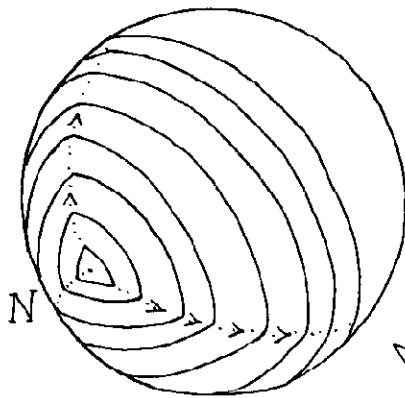
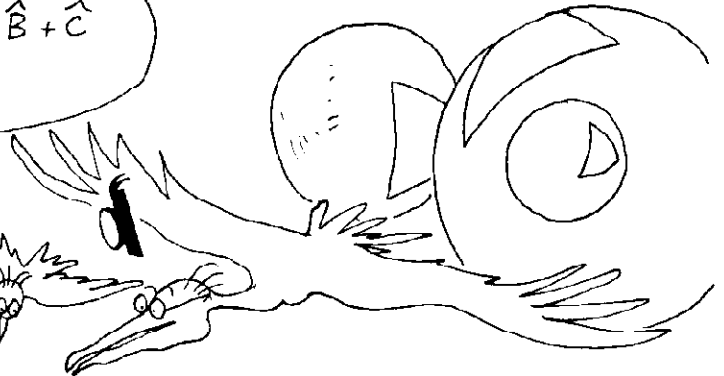


Triangle un peu particulier puisqu'il occupe le huitième de la surface de la sphère.

Triangle qui serait alors tri-rectangle et équilatéral

Et la somme des angles : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ vaut 270°

Et vous n'avez pas tout vu !



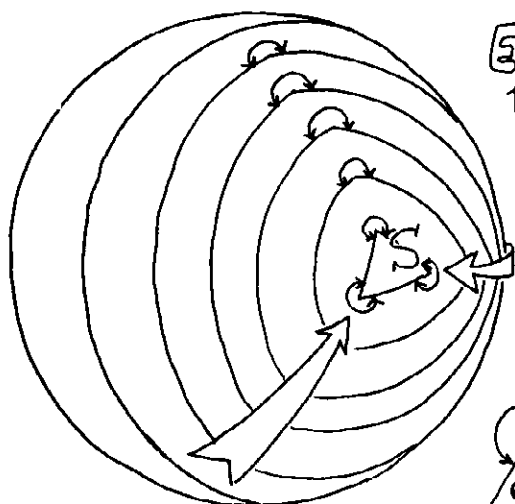
Imaginons maintenant un triangle, toujours constitué de ces brins élastiques, dont nous écartons progressivement les sommets. Les angles en ces sommets vont croître.

Et leur somme fera de même.

180°!

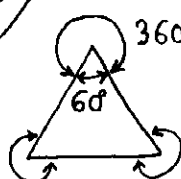


Finalement, on peut s'arranger pour que les trois sommets viennent s'inscrire sur un équateur de la sphère. Les angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont alors PLATS, valent 180° , et leur somme atteint 540° !!!



En prolongeant cette migration des sommets du triangle sur l'autre hémisphère, celui-ci va converger vers le point S, antipodal de N. Si on conserve aux angles aux sommets leur définition de départ, chacun d'eux vaudra alors plus de 180° ! Pour être précis, ils vaudront chacun $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$:

Somme : $300 \times 3 = 900^\circ$

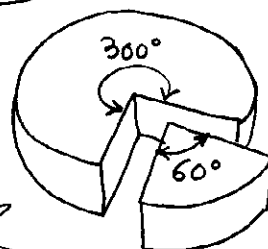


$360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

Hum...

La circonférence complète représente 360°

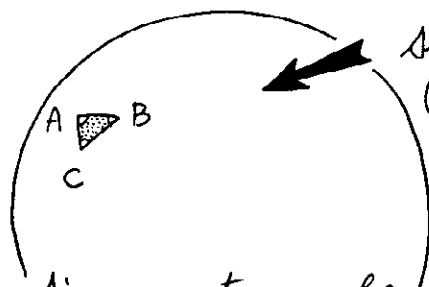
Ainsi, sur la sphère, la somme des angles d'un triangle peut aller de 180° à 900° !



Suivant le théorème de Gauss, la somme des angles d'un triangle tracé sur une sphère vaut :

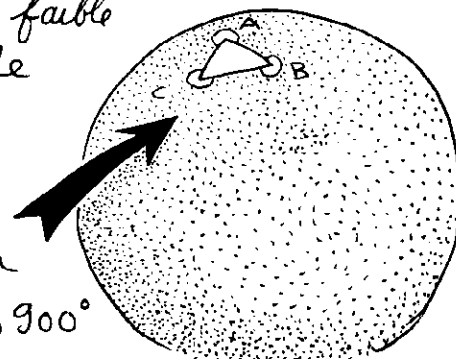
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \left(1 + \frac{A}{3,1416 R^2} \right) \text{ degrés}$$

où R est le rayon de ladite sphère et A l'aire du triangle.

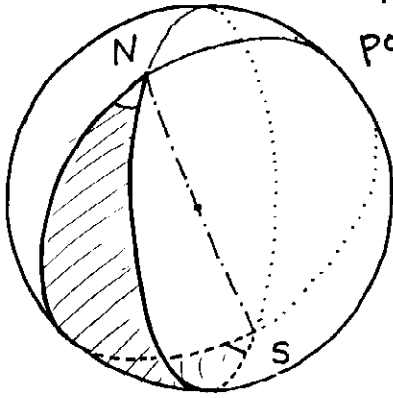


Si le triangle est d'aire faible (par rapport à celle de la sphère), on retrouve Euclide ($\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$)

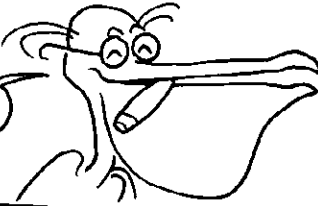
Si, au contraire, le triangle a quasiment la surface de la sphère ($4 \times 3,1416 \times R^2$), on retombe sur les 900°



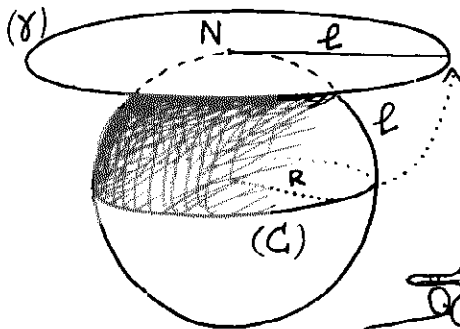
Note de Service: Deux points d'une sphère peuvent être joints par deux Arcs Géodésiques constituant UN grand cercle. Mais si ces points N et S sont ANTIPODAUX, alors par ceux-ci passe une infinité de GÉODÉSQUES !..... Deux de ces "droites de la sphère" définissent un BIANGLE, dont les deux angles et les deux côtés sont égaux. La somme des angles vaut.... n'importe quoi!...



Complètement débile...



la Direction



Tâchons maintenant de comprendre pourquoi, tout à l'heure, Anselme avait trop de carrelage et de grillage



(C) est le cercle qu'il trace et (γ) le cercle qu'il CROIT tracer. Il évalue l'aire à l'aide de la formule de géométrie plane πl^2 ($\pi = 3,1416$). L'aire réelle est la moitié de l'aire de la sphère: $2\pi R^2$. l est le quart du périmètre, soit $\frac{1}{2}\pi R$, et le rapport entre ces deux aires est $\pi^2/8 = 1,233$. Le rapport des périmètres est $2\pi l/2\pi R$, soit $\pi/2 = 1,57$. Maintenant, si vous êtes sceptiques, essayez d'emballer une sphère avec un plan!

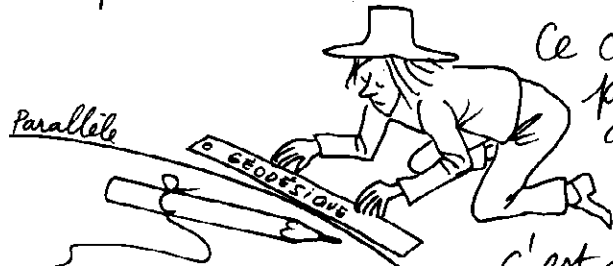
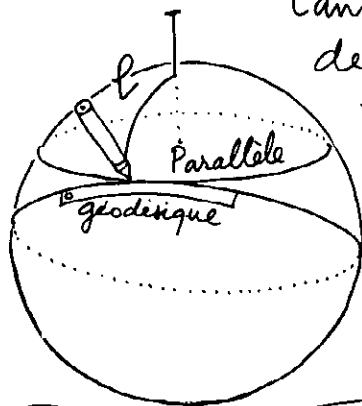


zut!
ça fait
des plis!

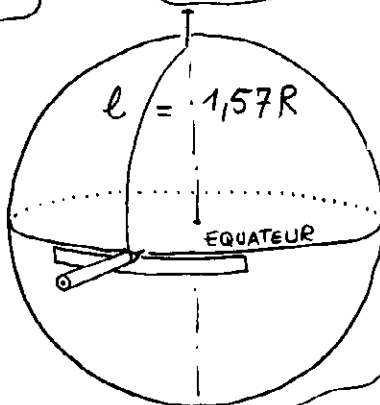
Un plan!
quel plan?!



Tant que l'anturlu n'a pas atteint l'équateur de la sphère, la CONCAVITÉ de son cercle lui paraît normale :



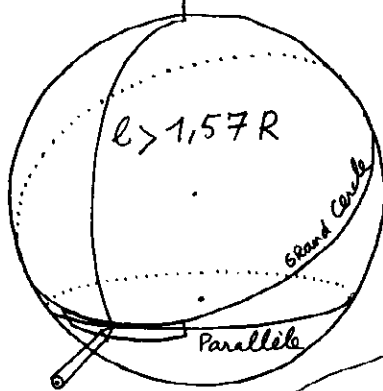
Ce cercle est un parallèle, alors que sa règle suit une GÉODÉSIQUE C'est-à-dire un GRAND CERCLE de la sphère.



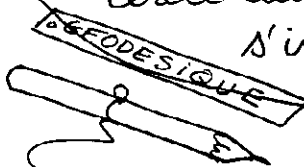
!?



A l'équateur, c'est-à-dire quand $l = \pi/2 R$ le parallèle se confond avec la géodésique et le cercle lui apparaît "DROIT".

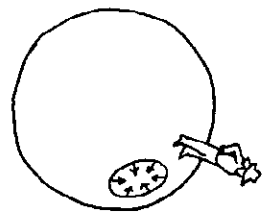
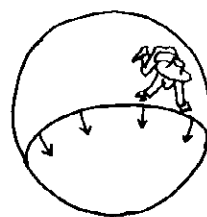
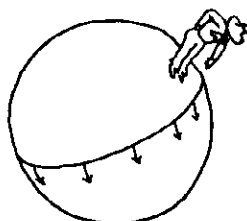
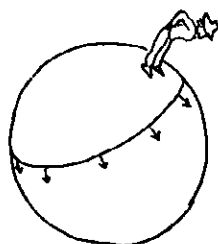


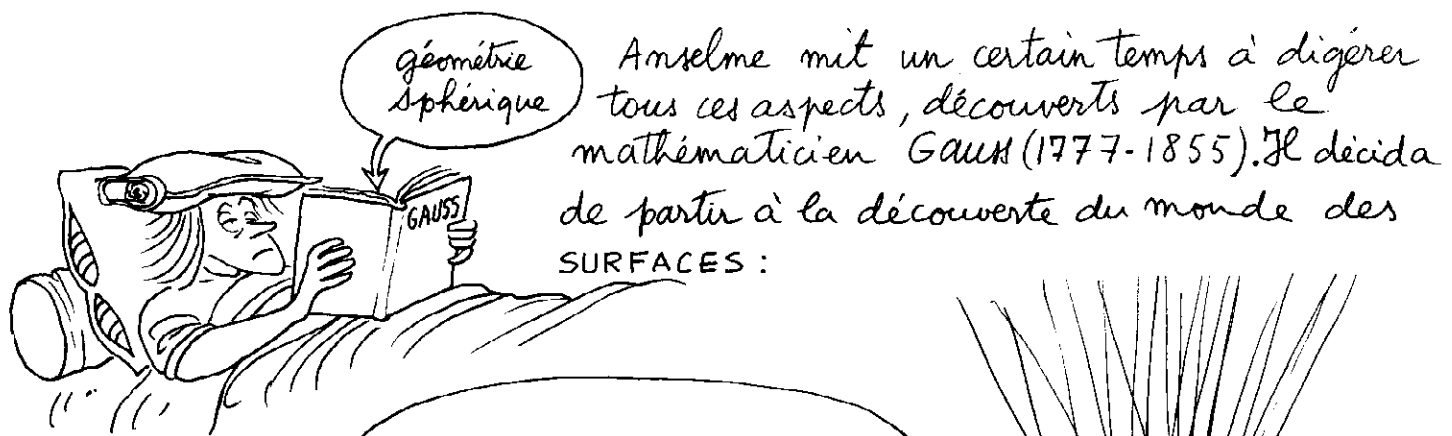
Au delà, la concavité de son cercle lui paraît s'inverser



où suis-je ?

Cette propriété explique comment on peut à volonté "entrer" ou "sortir" d'un cercle, sans le franchir, lorsqu'il est tracé sur une sphère. Il faut imaginer ce cercle comme une bague élastique que l'on ferait glisser sur une boule de billard.





Anselme mit un certain temps à digérer tous ces aspects, découverts par le mathématicien GAUSS (1777-1855). Il décida de partir à la découverte du monde des SURFACES :



Bon, j'ai tout ce qu'il me faut : une règle, un rapporteur, de la ficelle, mon maillet. Allons-y...

Parfois la science amène à prendre des risques.



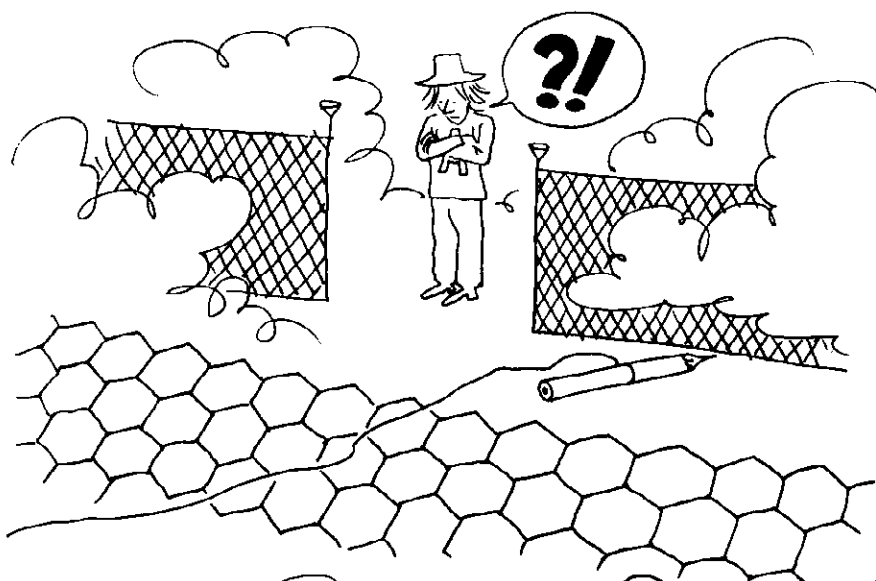
Ayant atterri dans un monde nouveau, Anselme déroule une nouvelle fois une GÉODÉSIQUE, mais, cette fois :



La géodésique ne se referme pas.



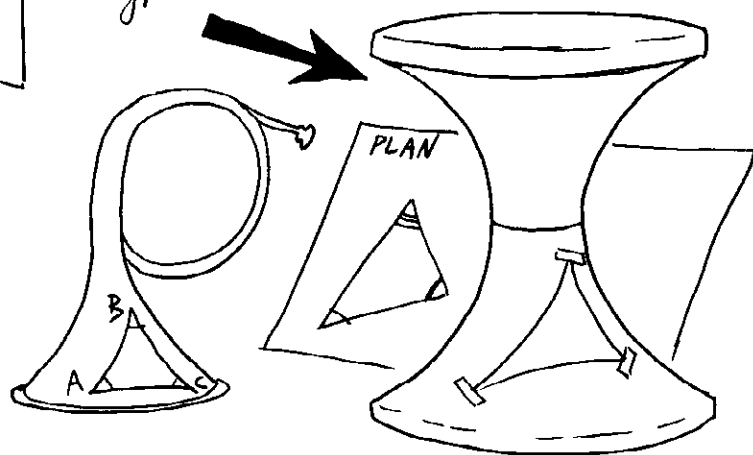
à l'aide de trois fils bien tendus, Anselme construit un triangle, mais la somme des angles aux sommets se révèle, cette fois, inférieure à 180°



Un cercle étant toujours l'ensemble des points situés à une même distance ℓ d'un point fixe, Lanturlu constate que ce cercle, tracé sur cette nouvelle surface, a un périmètre SUPÉRIEUR à $2\pi\ell$, tandis que son aire EXCÈDE $\pi\ell^2$.

Dissipons les nuées :

La surface affecte, cette fois, la forme d'un col de montagne ou d'une selle de cheval. Certains objets de votre vie de tous les jours peuvent également convenir : un cor de chasse ou ce type de tabouret :

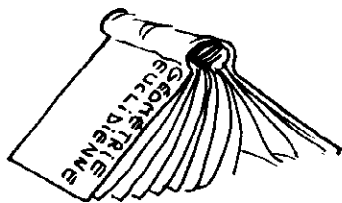


Là, mon cher, je suis largué...

mais non...



Pour avoir le fin mot de l'histoire, tournez la page.



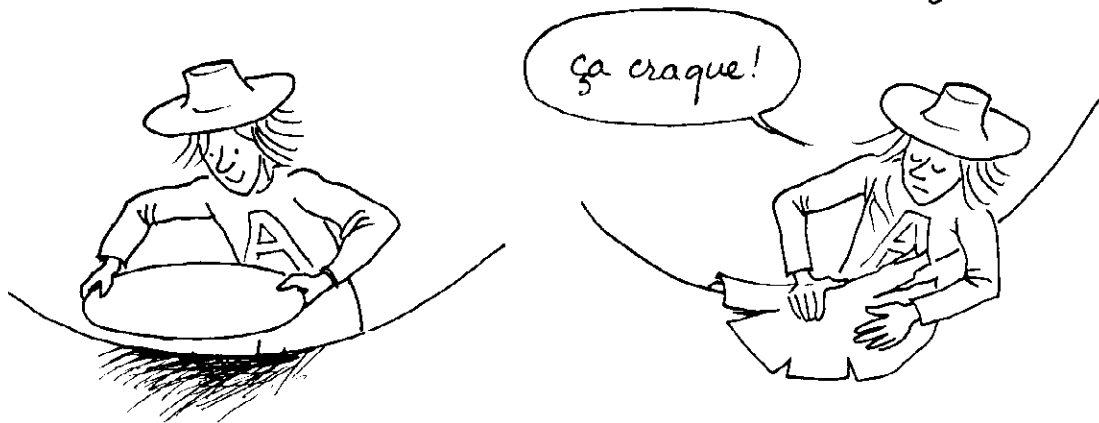
COURBURE:

Une surface courbe est une surface où les théorèmes euclidiens ne marchent pas. La courbure peut être positive ou négative.

Sur une surface à COURBURE POSITIVE, la somme des angles d'un triangle est supérieure à 180° . Si on trace un cercle de rayon l , sa surface est inférieure à πl^2 et son périmètre inférieur à $2\pi l$.

Sur une surface à COURBURE NÉGATIVE la somme des angles d'un triangle est inférieure à 180° . Si on trace un cercle de rayon l , sa surface est supérieure à πl^2 et son périmètre supérieur à $2\pi l$.

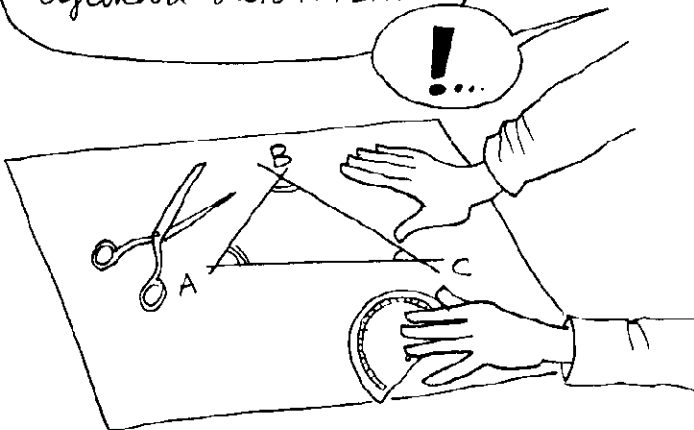
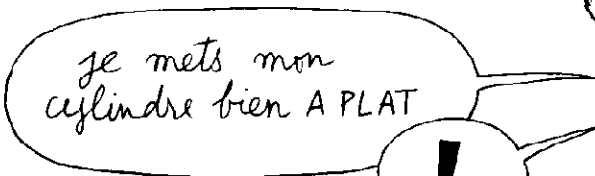
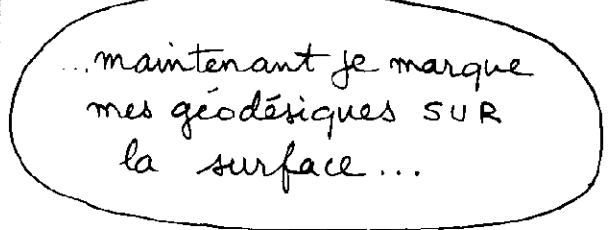
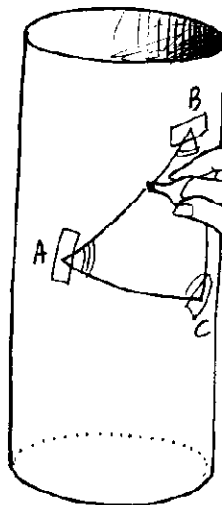
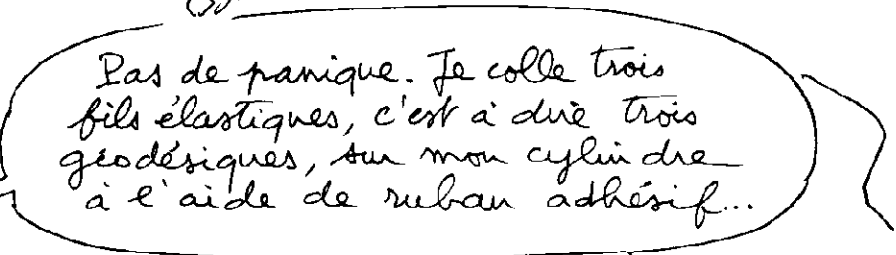
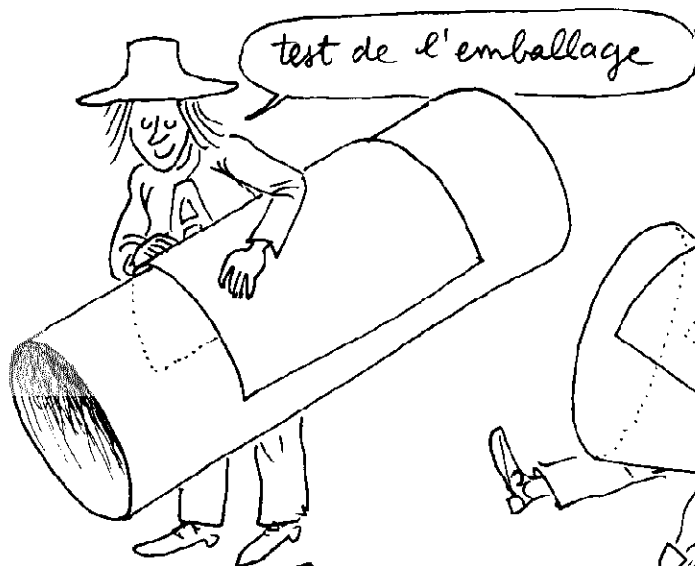
Tout à l'heure, Arnélme avait constaté qu'en tentant de REVÊTIR une sphère, surface à courbure positive, avec un élément plan, des plis apparaissent. Le revêtement d'une surface à courbure négative par un plan est également impossible : des craquements apparaissent. Ce test de l'emballage est le plus simple pour déterminer si la courbure est positive ou négative.



Comme on peut le voir sur la page précédente, les surfaces peuvent présenter des régions à courbure positive, d'autres à courbure négative.

Un cylindre, un cône, ont-ils une courbure ?





Suivant notre définition, les cylindres et les cônes, obéissant à la géométrie EUCLIDIENNE, sont des SURFACES PLANES !!!

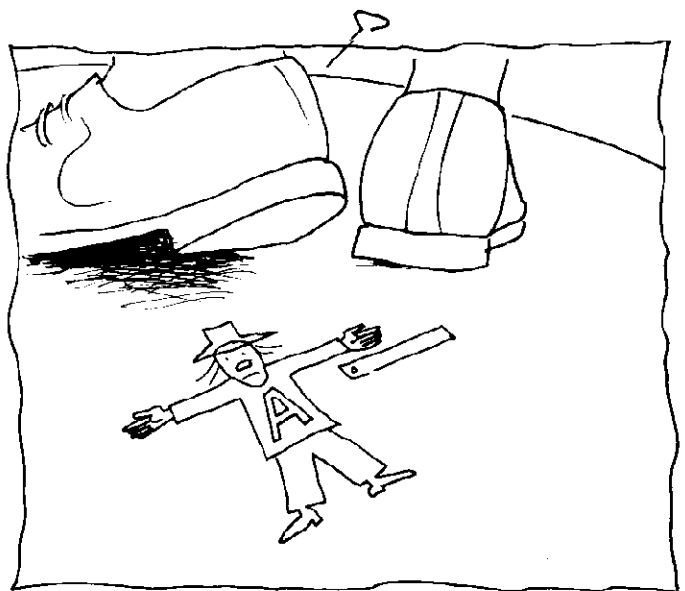


LA NOTION D'ESPACE :

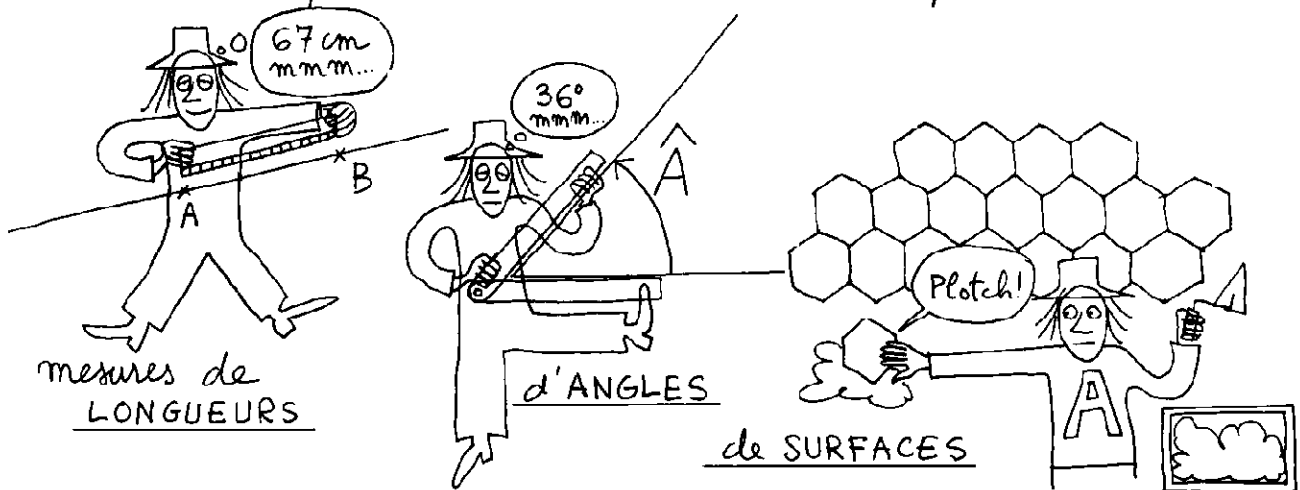


Tout à l'heure, des nuées empêchaient Anselme de voir plus loin que le bout de son nez... ou presque. S'il n'en avait pas été ainsi il aurait pu percevoir la COURBURE de son ESPACE SPHÉRIQUE.

Il y a une autre façon d'empêcher l'anturlu de VOIR cette courbure : c'est de lui faire habiter la surface, de faire en sorte qu'il APPARTIENNE à celle-ci.



On notera que cette situation nouvelle n'empêche nullement les



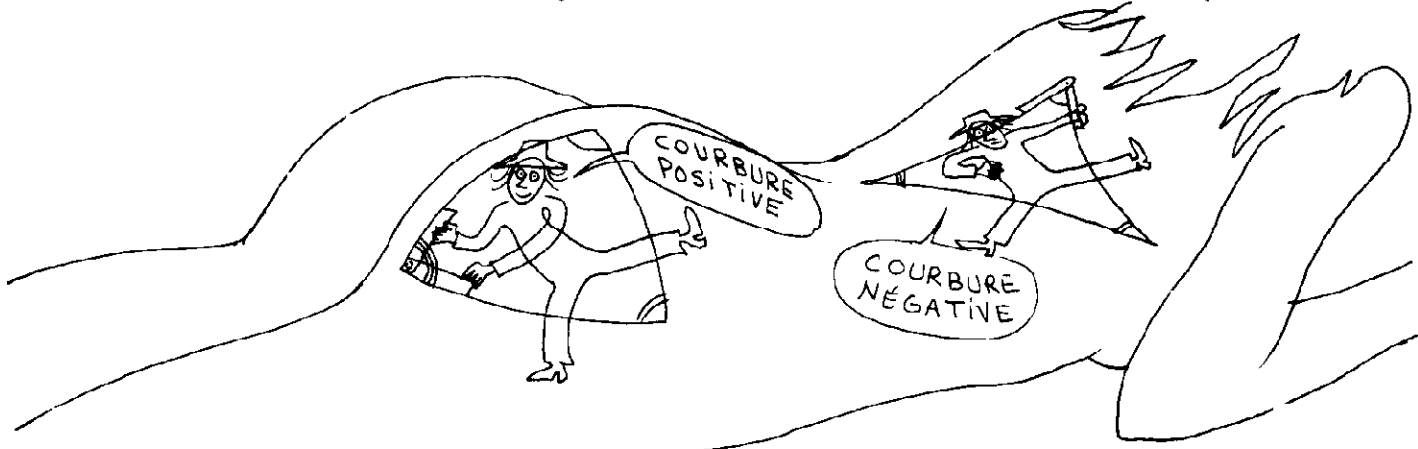
Bien qu'étant confiné DANS la surface, Anselme aurait très bien pu constater la courbure et définir son signe (Positif ou négatif), et même la mesurer, sans pour cela être capable de la VOIR. Si la somme des angles d'un triangle vaut 180° , alors cette surface est PLANE.

Si cette somme excède 180° , la courbure est -positive et Anselme peut calculer le rayon de courbure R local à l'aide de la formule : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \left(1 + \frac{A}{3,14 R^2} \right)$ degrés où A est l'aire du triangle

Si cette somme est inférieure à 180° , on peut définir un rayon de courbure R , donné par : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \left(1 - \frac{A}{3,14 R^2} \right)$ mais il n'a plus le sens physique habituel.

On notera qu'un PLAN peut être assimilé à une surface ayant un rayon de courbure R infini.

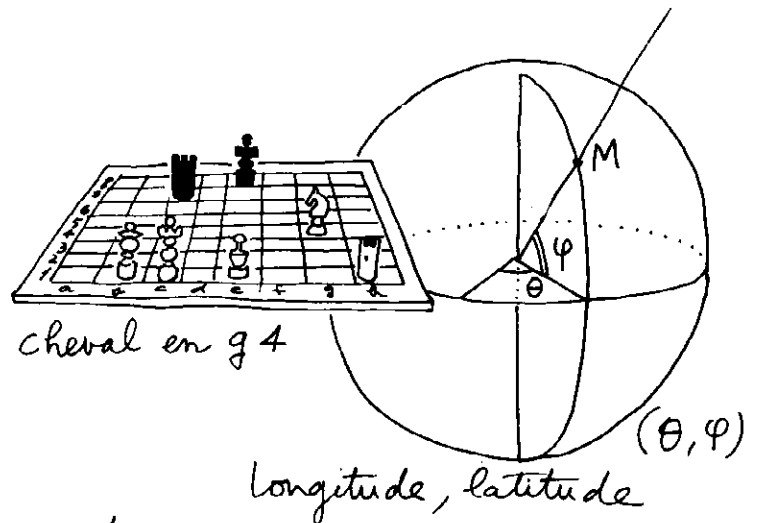
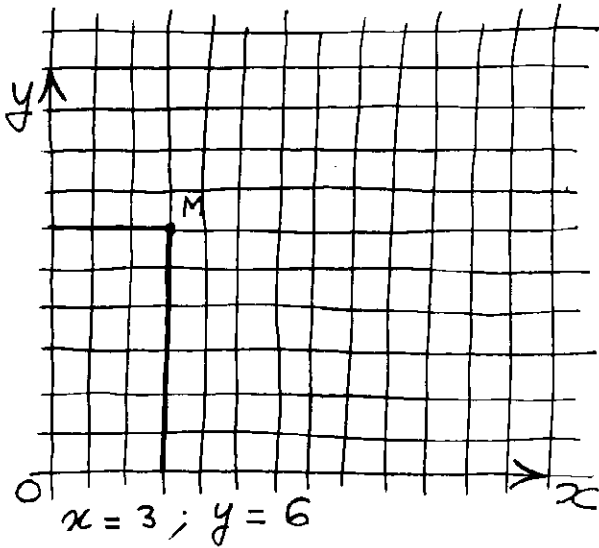
On retrouve alors tous les théorèmes d'Euclide.



LE CONCEPT DE DIMENSION

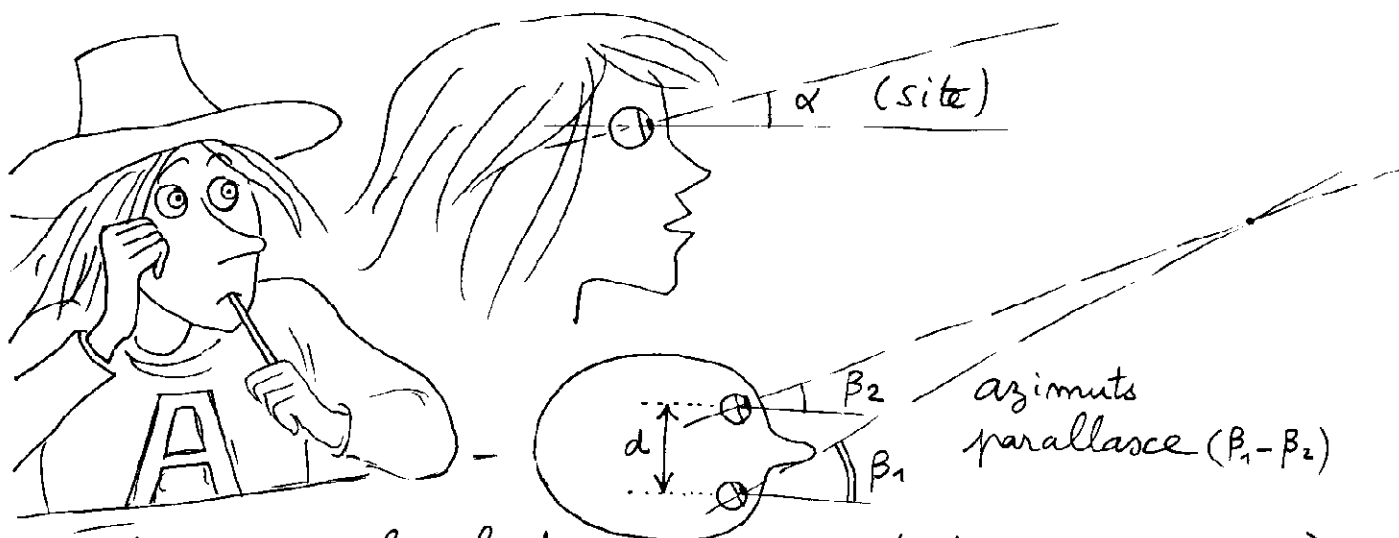
le nombre de dimensions est simplement le nombre de quantités, de coordonnées, qu'il faut se donner, dans un espace quelconque, pour y définir un POINT.

les SURFACES sont des représentations d'espaces à deux dimensions. les quantités servant au repérage peuvent être des longueurs, des nombres, des angles...



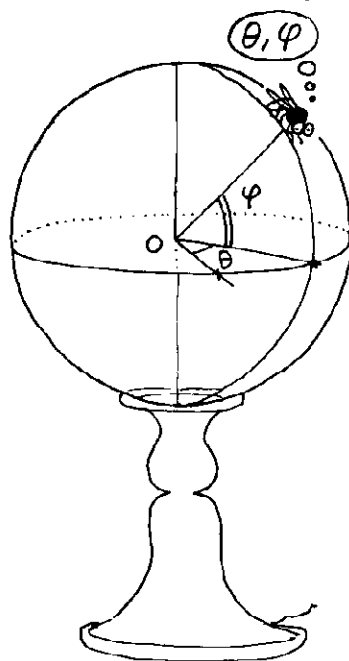
On a coutume de dire que notre espace, si on excepte le temps, a trois dimensions.





Anselme repère les objets par rapport à son corps, à sa boîte crânienne. La position d'un objet ponctuel est connue à l'aide de trois ANGLES: le site et les calages azimutaux de ses deux yeux: β_1 et β_2 . La différence angulaire $\beta_1 - \beta_2$ s'appelle la parallaxe. Dans le cerveau d'Anselme s'effectue un décodage qui transforme cette parallaxe en distance.

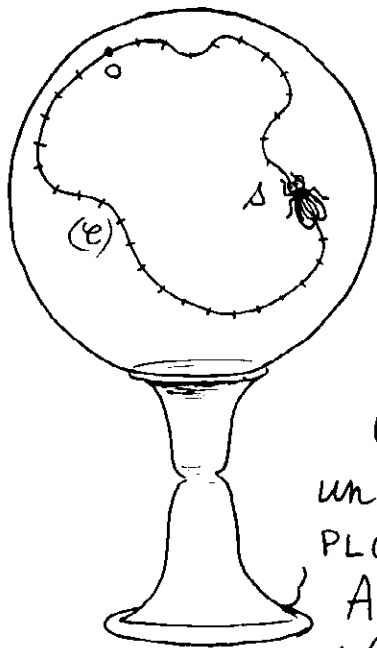
LE PLONGEMENT:



Mais la mouche évolue également sur le globe sphérique de la lampe où sa position, dans cet espace bidimensionnel, peut être repérée à l'aide de deux angles θ et φ (longitude et latitude).

Nous dirons que cet espace à deux dimensions est PLONGÉ dans notre espace à trois dimensions.



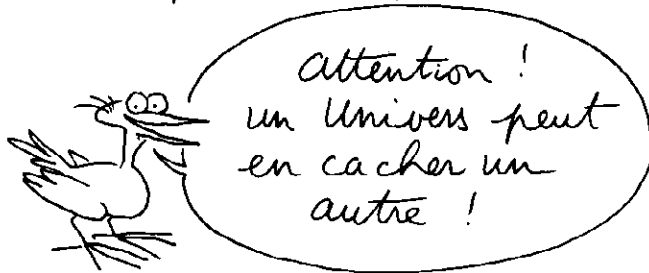


Supposons que la mouche suive une courbe (C) tracée sur la sphère. On pourra repérer sa position à l'aide d'une seule coordonnée (sa distance s à un point origine, comptée algébriquement)

Une courbe est une image d'un espace à UNE dimension.

Cet espace unidimensionnel est plongé dans un espace bidimensionnel (sphère), lui-même PLONGÉ dans un espace tridimensionnel.

Ainsi l'espace où nous évoluons pourrait être plongé dans un espace de dimension supérieure sans que nous puissions en avoir conscience.

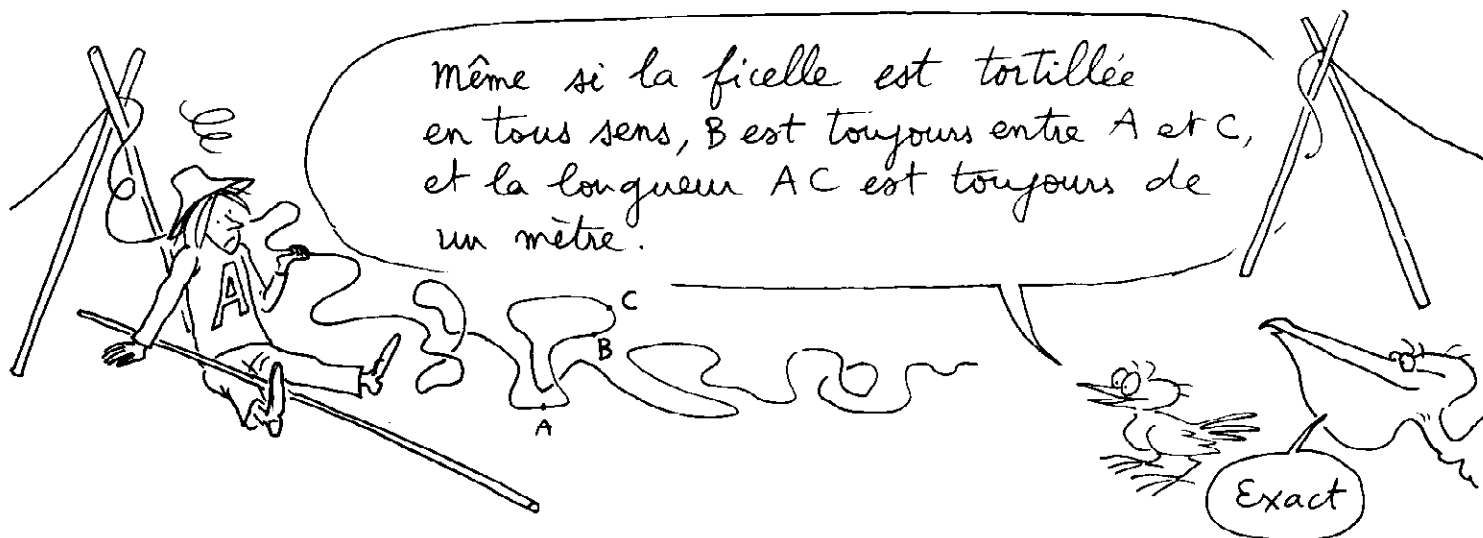


Savez-vous, mon cher, que nous nous définissons dans un espace à une dimension

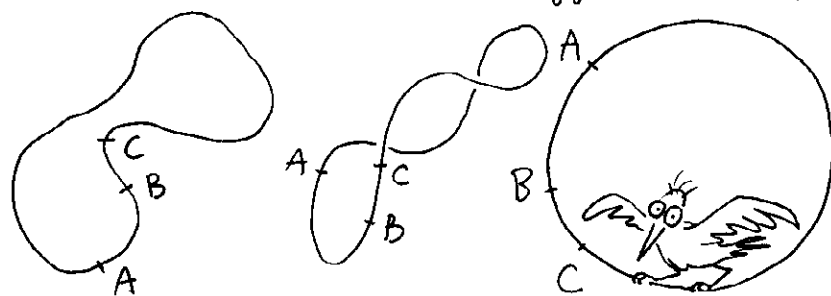
Ouh là là ! moi, les espaces unidimensionnels, j'aime pas ça !

la distance AC est de un mètre

Best entre A et C

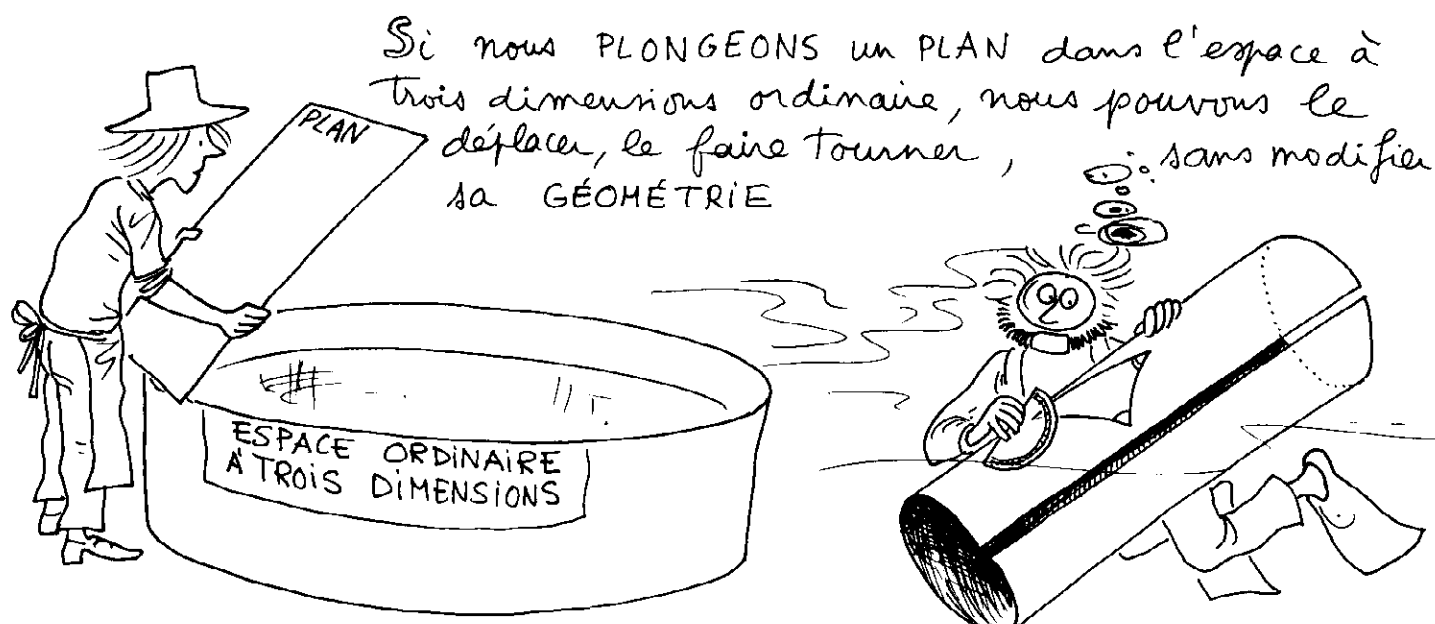


Ceci suggère que certaines propriétés peuvent être indépendantes de la manière dont s'effectue le plongement.



Voici différentes manières de PLONGER une COURBE FERMÉE dans l'espace ordinaire. Cette FERMETURE est une propriété indépendante du plongement.

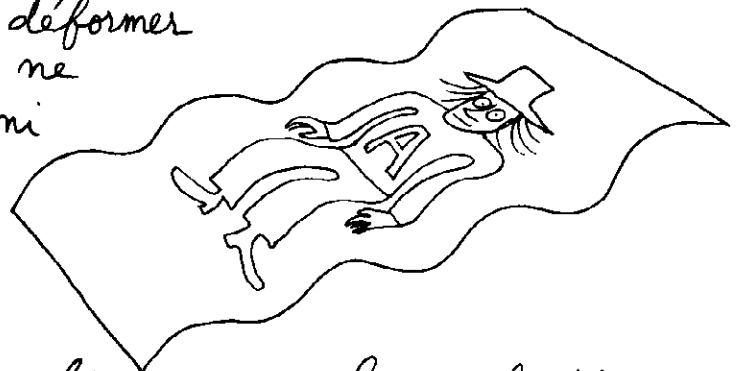
Mais nous nous sommes bien gardés d'étirer ou de contracter la ficelle, afin de ne pas modifier les LONGUEURS entre des points successifs. Nous allons maintenant PLONGER des SURFACES dans l'espace à trois dimensions ordinaire



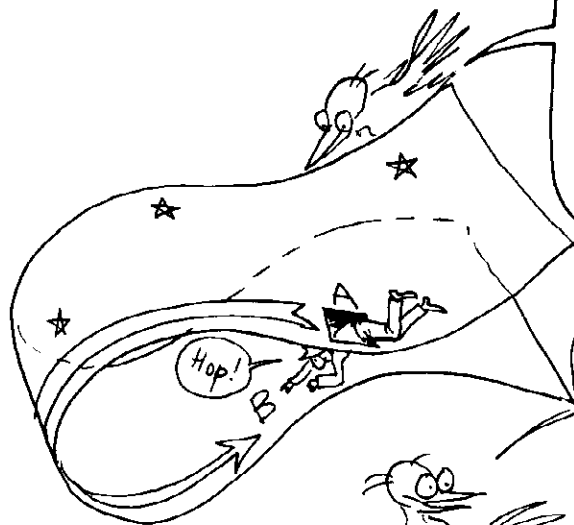
Nous avons vu que le fait de déformer un plan suivant un cylindre ne modifiait ni les géodésiques, ni les angles.

Dans cette optique, une toile ondulée a toujours une géométrie PLANE, EUCLIDIENNE.

Un habitant d'un tel espace bidimensionnel, euclidien, n'aurait aucune conscience des translations, rotations ou ondulations, qui ne seraient que des variations du mode de plongement dans l'espace tridimensionnel.



Semblablement, notre espace tridimensionnel pourrait être lui-même plongé dans un espace ayant un nombre supérieur de dimensions, sans que nous puissions nous en apercevoir. En effet, un tel plongement n'affecterait pas les géodésiques de notre espace, donc notre perception, basée sur la lumière, laquelle suit les géodésiques de l'espace.



On pourrait ainsi envisager, entre deux points, un trajet plus court que le trajet suivi par la lumière.



Eh, dites, vous...

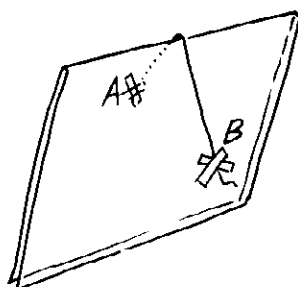
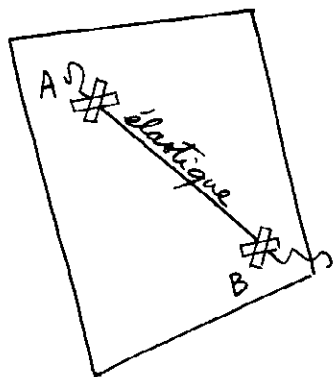
qu'est-ce que tu fais ?

Je vous vois venir !
Vous êtes en train de
m'entraîner vers la science-fiction.

J'explore le fond de ma coquille



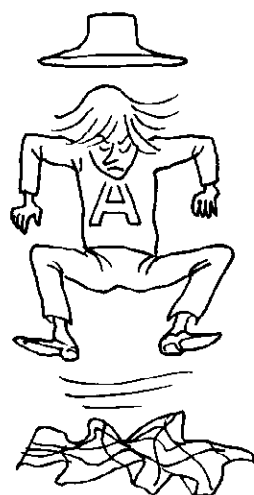
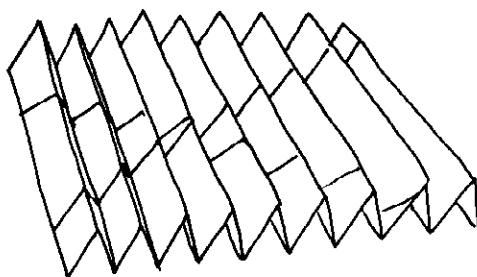
Prenons un élément de plan et plions-le :



la pliure ne change
absolument pas le tracé
de ma géodésique !



Sur une feuille de papier, à l'aide d'une règle, tracez tout un
lot de droites, de géodésiques, puis chiffonnez la feuille.
Vous aurez toujours sous les yeux les géodésiques de la surface,
avec ou sans plis.



mais cette première partie du voyage
n'était que de la roupie de sanzonnet,
puisque la prochaine étape passe par les :





Pour la mesure des surfaces,
cette peinture. Cent grammes
au mètre carré, exactement.

Pour la mesure des volumes,
emplissez ceux-ci de gaz. Vous
lisez directement la valeur
sur le débitmètre du SPATIOTEST

ingénieurs

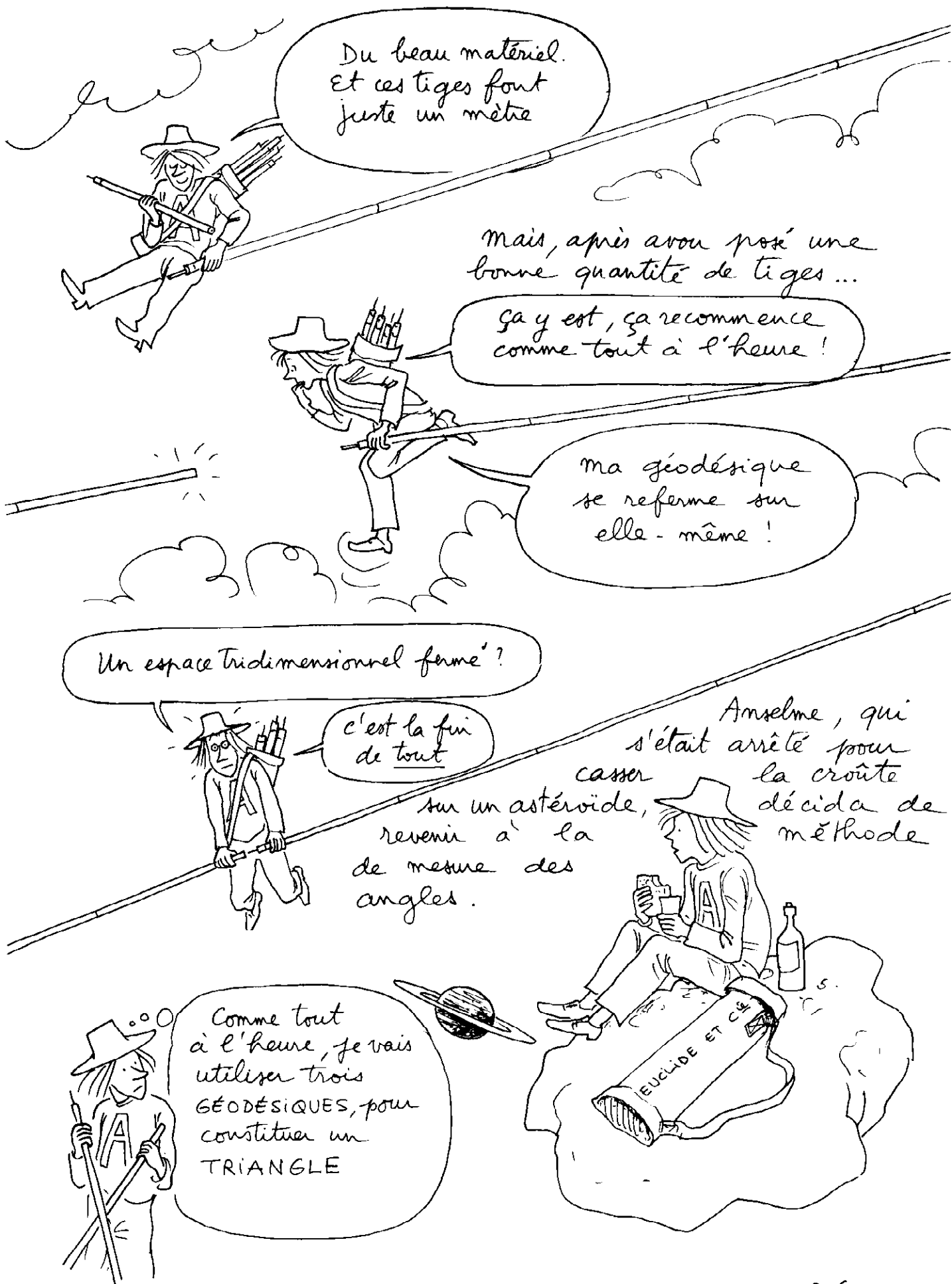
Et rappelez-vous : surface de
la sphère : $4\pi r^2$, volume : $\frac{4}{3}\pi r^3$

entendu

EUCLIDE &

quel
métier !

Anselme a atterri, cette fois,
dans un espace tridimensionnel
et nous allons le suivre
dans son exploration



Du beau matériel.
Et ces tiges font
juste un mètre

mais, après avoir posé une
bonne quantité de tiges...

ça y est, ça recommence
comme tout à l'heure !

ma géodésique
se referme sur
elle-même !

Un espace tridimensionnel fermé' ?

c'est la fin
de tout

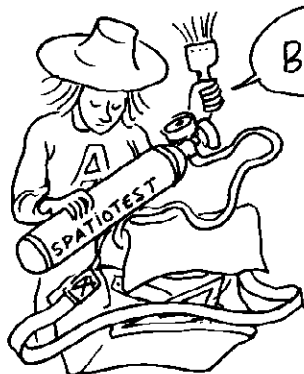
sur un astéroïde,
revenir à la
de mesure des
angles.

Anselme, qui
s'était arrêté pour
casser la croûte
décida de
méthode

Comme tout
à l'heure, je vais
utiliser trois
GÉODÉSIQUES, pour
constituer un
TRIANGLE



Mes géodésiques sont convenablement emboîtées, et pourtant la somme de mes trois angles est supérieure à 180° !!!



Bon...

FSCHHHHHHHH



Je vais en fabriquer une et je mesurerai son volume et sa surface

Une sphère de rayon l est l'ensemble des points situés à une distance l d'un point fixe, que j'appellerai N

La surface est inférieure à $4\pi l^2$

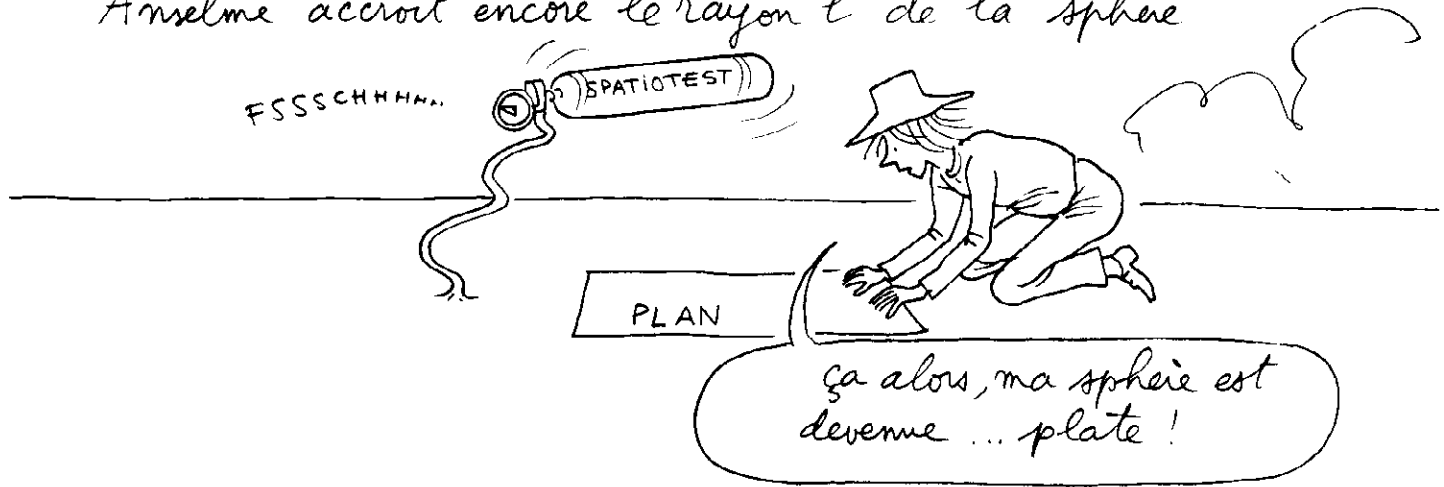


Voilà déjà le volume qui est inférieur à $\frac{4}{3}\pi l^3$!

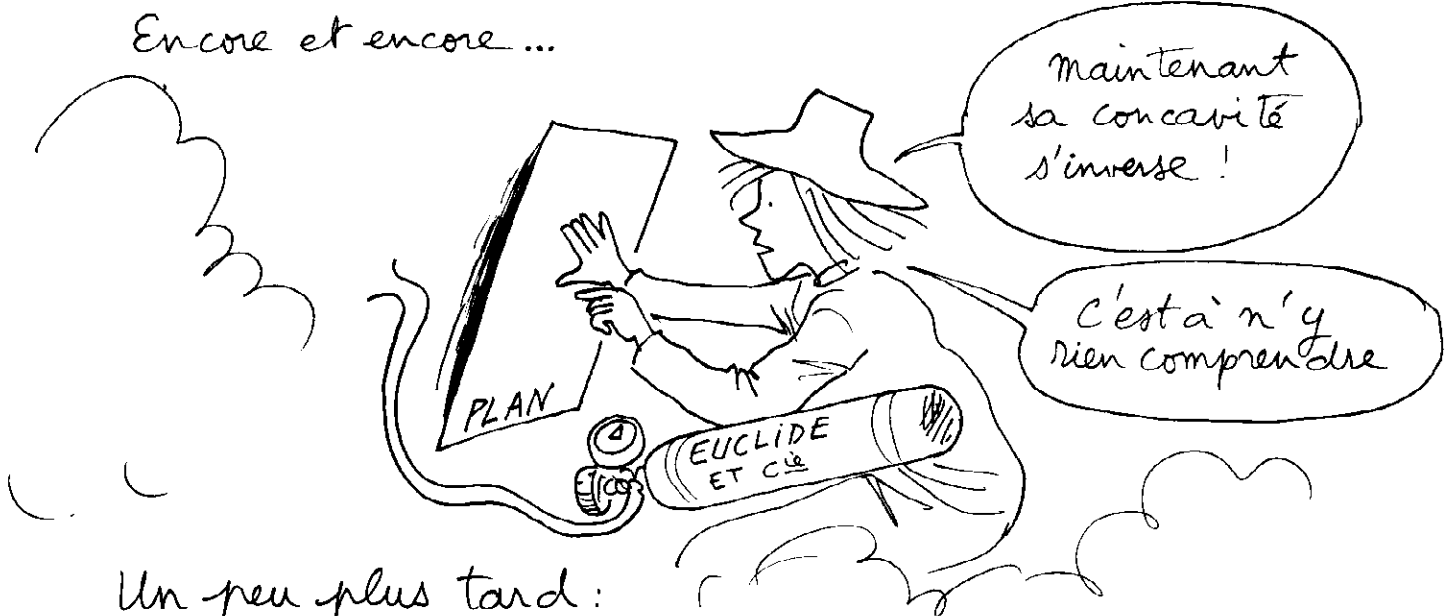


Je me suis encore fait avoir

Anselme accroît encore le rayon l de la sphère

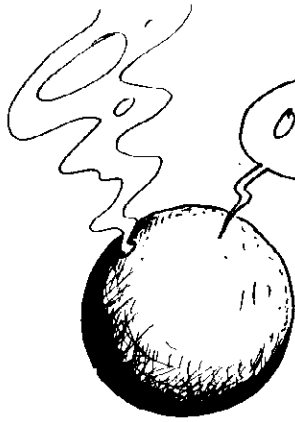


Encore et encore ...



Un peu plus tard :





Ainsi, en gonflant un ballon tout bête dans un espace à trois dimensions, l'anturhu a fini par se retrouver... DEDANS!

S'il n'avait pas coupé la bouteille à temps, il aurait péri écrasé, tout comme il avait fini par se retrouver emprisonné par sa clôture, page 13.

Avec la meilleure volonté du monde, on ne peut plus maintenant VISUALISER la COURBURE de cet espace tridimensionnel. Ses géodésiques se referment et son volume ne représente qu'un nombre FINI de mètres cubes, de même que la surface de notre planète, surface fermée, n'offre qu'un nombre FINI de mètres carrés.

La somme des angles d'un triangle, de cet espace à trois dimensions, est supérieure à 180° . Pour "VOIR" sa courbure, il faudrait être capable de percevoir dans quatre dimensions.



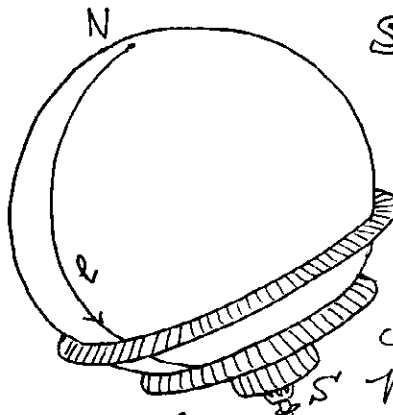
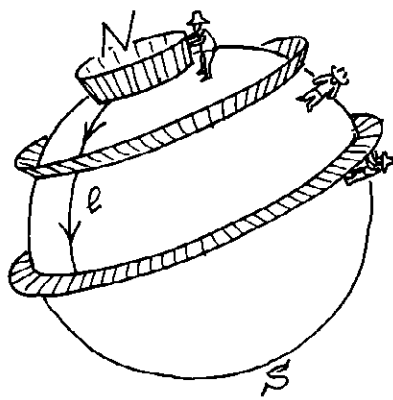
On peut toujours se dire que notre UNIVERS à trois dimensions est une HYPERSURFACE, plongée dans un espace à quatre dimensions, lui-même peut-être hypersurface plongée dans un espace à cinq dimensions, etc... Mais, de nos jours, il n'est pas de bon ton de dire de telles choses.

avec des idées pareilles, où va-t-on? je vous le demande?

Ce qui existe c'est ce que je PERÇOIS!

Le reste, c'est de la métaphysique!





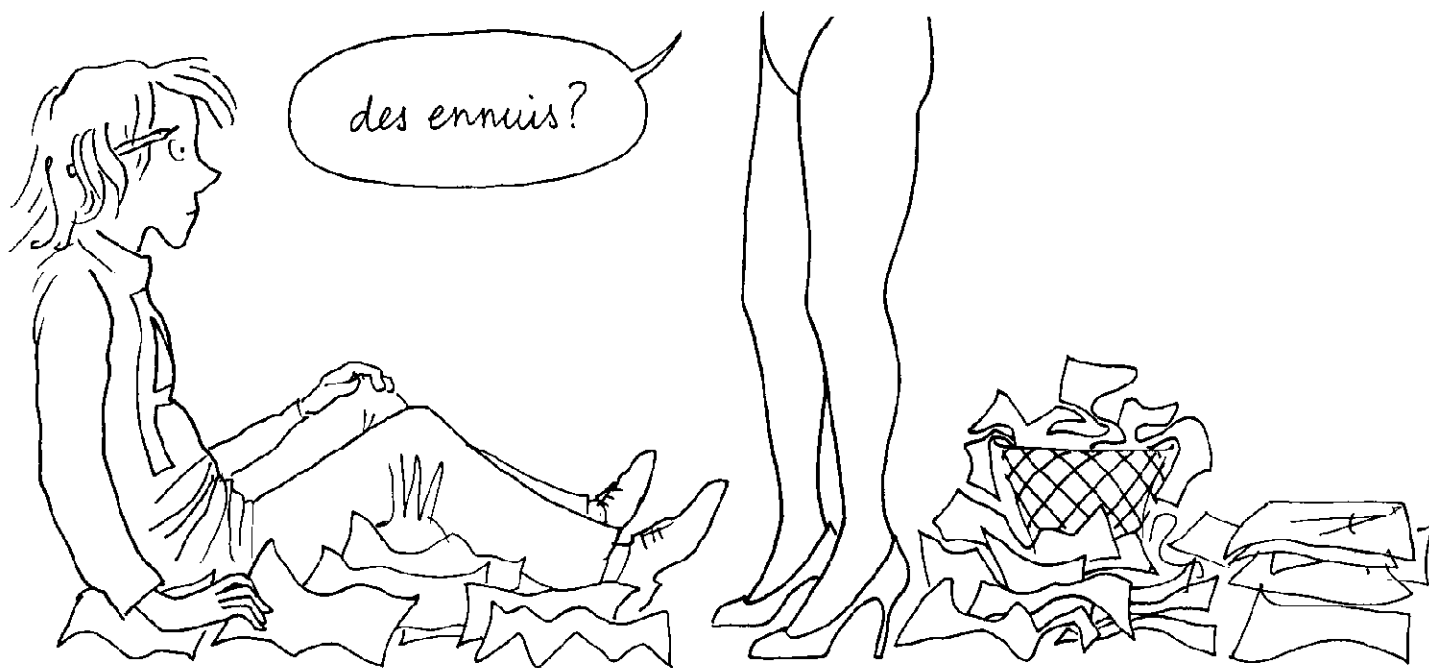
Sur sa sphère, en agrandissant le rayon r de son domaine, l'antenne avait fini par se retrouver aux antipodes S du point N , centre de son cercle, et étouffé par sa propre clôture.

Dans l'espace tridimensionnel à courbure positive, même chose. Dans cet espace tridimensionnel qu'est la sphère, Anselme rencontrait l'EQUATEUR quand il avait enclos la moitié de la surface disponible. L'EQUATEUR de l'espace tridimensionnel HYPERSPHÉRIQUE existe aussi. Anselme y parvient lorsque son ballon occupe la moitié du volume disponible. Sur la sphère, le cercle équateur lui apparaissait comme une DROITE. De même, dans l'espace hypersphérique, le "ballon équateur" aura pour lui l'apparence d'un PLAN.

Au-delà de l'équateur la CONCAVITÉ du ballon s'inverse et il vient automatiquement se centrer sur le point antipodal S du point N , centre du ballon.

Sur une sphère, tout point possédait un antipode. Il en est de même pour un espace hypersphérique à trois dimensions bien que cela soit un peu difficile à comprendre





des ennuis?

C'est à dire, euh... tout se mélange un peu dans ma tête.



Je m'appelle Sophie. les courbures en tous genres c'est mon rayon.

La navigation dans les hypersphères, ça surprend toujours un peu au début. Il faut éviter de se bloquer. On s'y fait petit à petit.

mouh...

j'ai un peu perdu le fil...



Si je dessine un cercle sur un PLAN, on est bien d'accord que c'est une représentation d'un espace à une dimension, fermé, PLONGÉ dans un espace à deux dimensions: le PLAN

Et le centre du cercle N'EST PAS sur le cercle

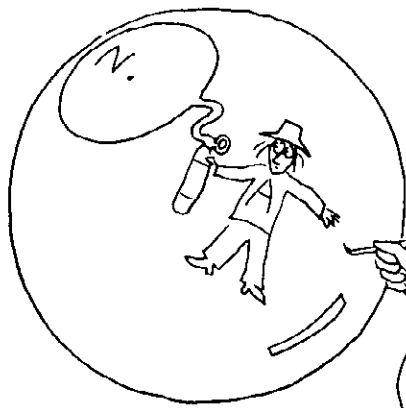


Une sphère représente un espace fermé à DEUX dimensions, PLONGÉ dans un espace à trois. Le centre de cette sphère N'EST PAS non plus sur la sphère. Il est dans l'espace à trois dimensions.



Le centre d'un espace hypersphérique à trois dimensions pourrait se situer dans un espace à quatre, en supposant qu'il y soit PLONGÉ. Et ainsi de suite...

Ainsi le centre d'un espace hypersphérique à quatre dimensions serait dans un espace à cinq, etc...



tiens, te revoilà, dans ton monde à deux dimensions, plaqué dessus, comme une petite décalcomanie.



Et tu commences à gonfler ton cercle, qui n'est qu'une sphère à une dimension



Dans un espace à deux dimensions, une frontière délimite une surface. Alors que, dans un espace à trois dimensions, elle délimite un volume.

Là, c'est quand j'arrive à la moitié de cet espace sphérique.

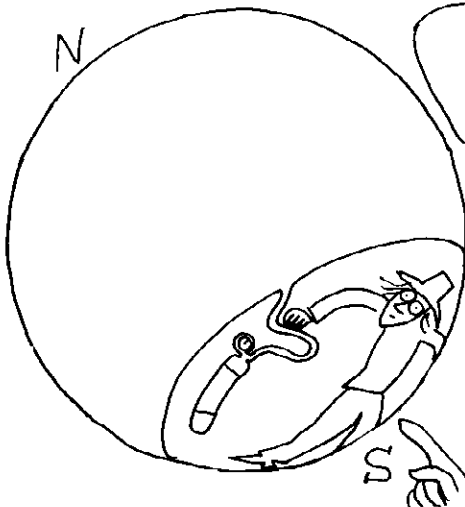


Dans un espace à 4 dimensions, une frontière aurait trois dimensions, et délimiterait un hypervolume à quatre dimensions.

ça y est il recommence !



filous !



Regarde, ici, ton cercle, qui est un "ballon à une dimension", commence à contenir plus de la moitié de l'espace disponible. Il commence à se refermer sur toi, en convergeant vers le point antipodal S.



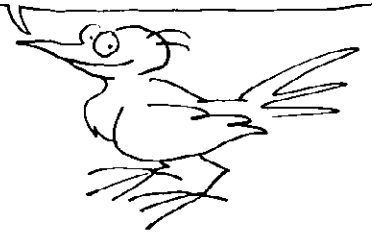


De même, dans mon espace courbe à trois dimensions, lorsque j'injecte plus de la moitié du volume total, le ballon se referme sur moi, en convergeant vers le point antipodal



J'ai compris !

Car la sphère, dans cet espace tridimensionnel courbe, a évidemment deux centres, qui sont antipodaux.



?!/?



Enfin, je ne sais pas exactement ce que j'ai compris, mais j'ai l'impression d'avoir compris quelque chose



quelle angoisse !

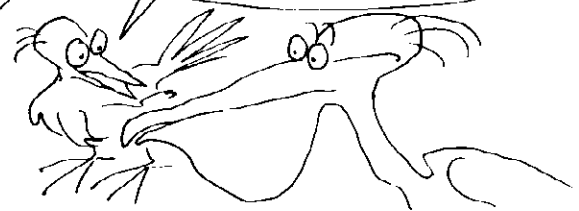


Mais non, Anselme, quand il y a plus de trois dimensions, **COMPRENDRE C'EST EXTRAPOLER**

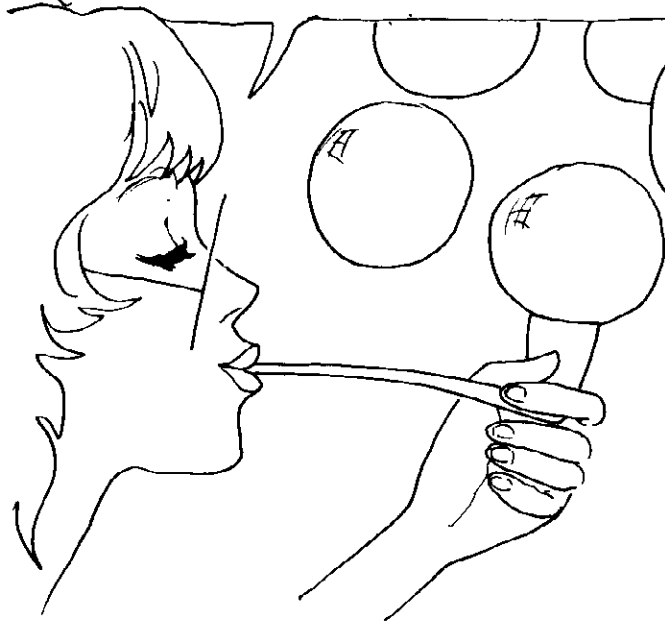


J'extrapole sans le savoir

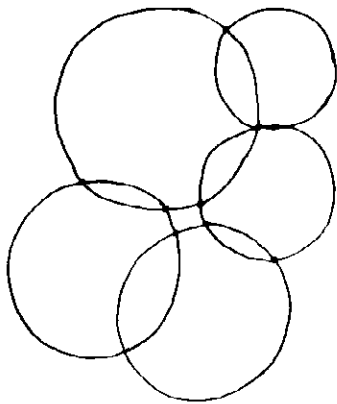
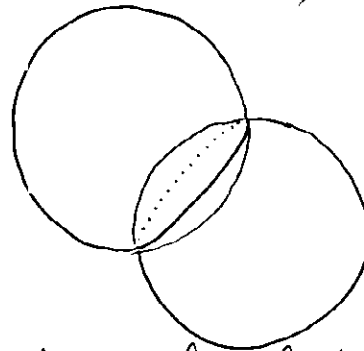
Le dessin, c'est vous qui allez le faire... dans votre tête !



Maintenant, je prends un espace à trois dimensions où je place des sphères à deux dimensions, des tas de petits univers bidimensionnels.



Ces univers peuvent s'interpénétrer. Leurs points communs se répartissent suivant des cercles, objets à une dimension.



De même, des cercles, objets à une dimension, placés sur une feuille de papier (2 dimensions) se couperaient suivant des POINTS. (On a coutume de dire que le POINT a la dimension zéro.)



Une sphère pourra alors être considérée comme l'intersection de deux "bulles" tridimensionnelles, évoluant dans un espace à quatre.

Et ainsi de suite : un espace tridimensionnel courbe, hypersphérique, pourra lui-même être considéré comme l'intersection de deux bulles de savon à quatre dimensions, évoluant dans un espace à cinq.

Anselme et Sophie, après avoir connu les vertiges de l'extrapolation, reprennent l'exploration de nouveaux mondes tridimensionnels.

les mathématiques ne sont plus ce qu'elles étaient

Tu vois, ça c'est un ruban adhésif tridimensionnel, pour les géodésiques. La partie collante est au bout... évidemment.

Dis donc, dans cet espace, les géodésiques n'ont pas l'air de se refermer. Et maintenant quand je gonfle le ballon du SPATIOTEST, le volume débité est supérieur à $\frac{4}{3}\pi l^3$, tandis que la surface est supérieure à $4\pi l^2$. Quant à la somme des angles d'un triangle, elle est cette fois inférieure à 180°

Rappelle-toi page 23, tu es à nouveau dans un espace à courbure NÉGATIVE.

RÉSUMÉ :



Dans les espaces à trois dimensions, beaucoup de choses peuvent arriver, tu sais. C'est comme pour les surfaces, qui sont, elles, des espaces à deux dimensions. Ainsi, si la somme des angles d'un TRIANGLE, dans un espace à trois dimensions, est supérieure à 180° , nous dirons que la courbure est positive. En y formant une sphère de rayon l , tu trouveras par le SPATIOTEST un volume inférieur à $\frac{4}{3}\pi l^3$ et une surface inférieure à $4\pi l^2$. Cet espace, dit HYPERSPHÉRIQUE, se refermera sur lui-même. Si la somme des angles d'un triangle, dans un espace tridimensionnel, est inférieure à 180° , alors la courbure sera négative. Le volume d'une sphère de rayon l sera supérieur à $\frac{4}{3}\pi l^3$ et sa surface supérieure à $4\pi l^2$. Cet espace aura une extension infinie.



mais si la somme des angles vaut 180° , alors l'espace est bêtement euclidien.

tout ça pour en arriver là!..

Le

IL FAUT QU'UN ESPACE SOIT OUVERT OU FERMÉ !...

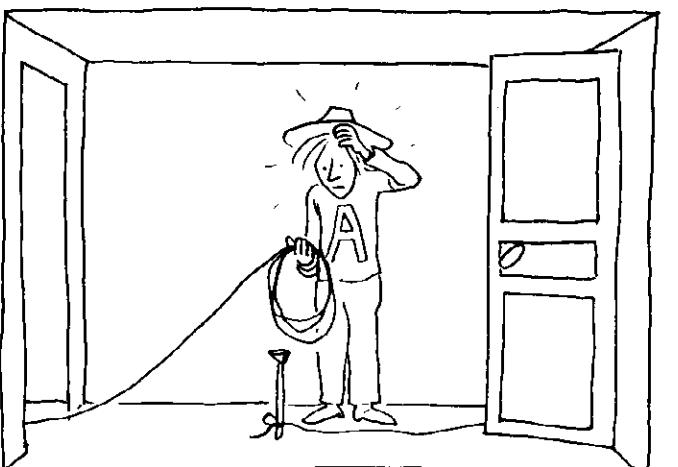
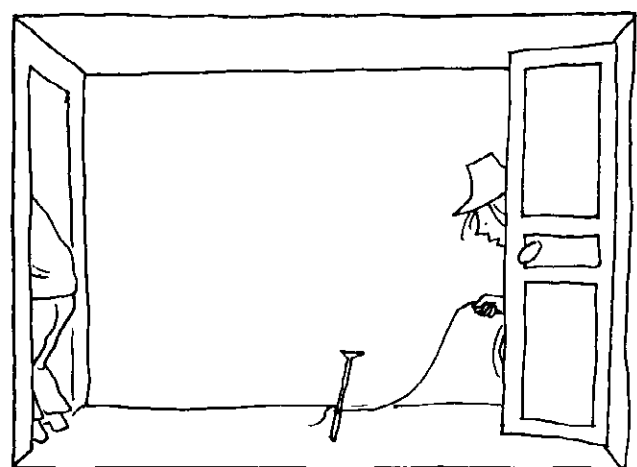
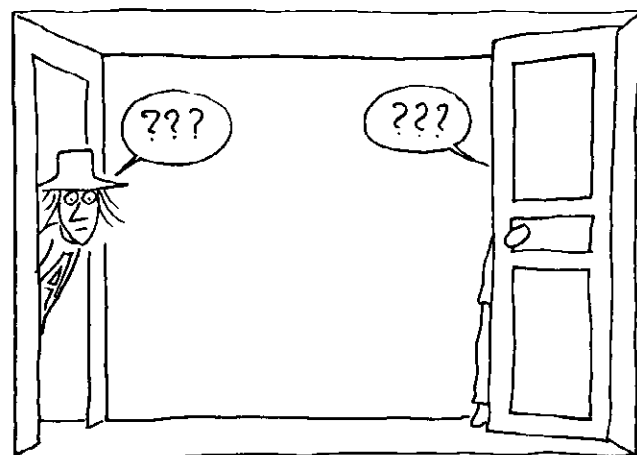
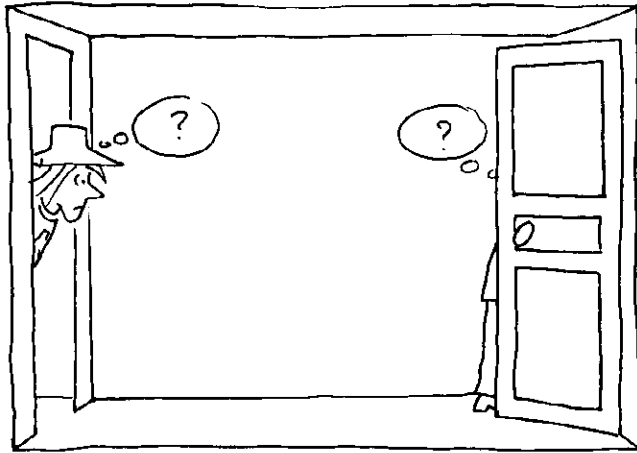
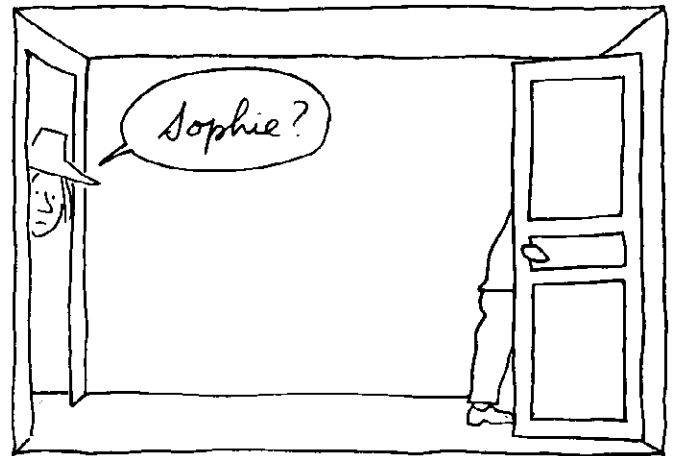
Je crois que j'ai tout
compris maintenant :
Quand l'espace a une courbure
positive, il se referme
sur lui-même

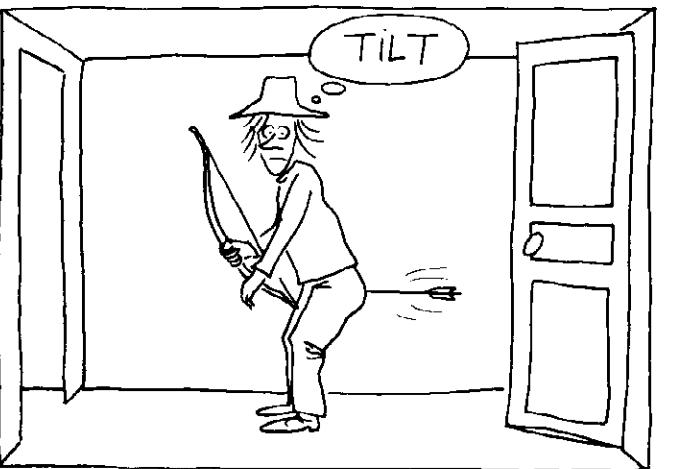
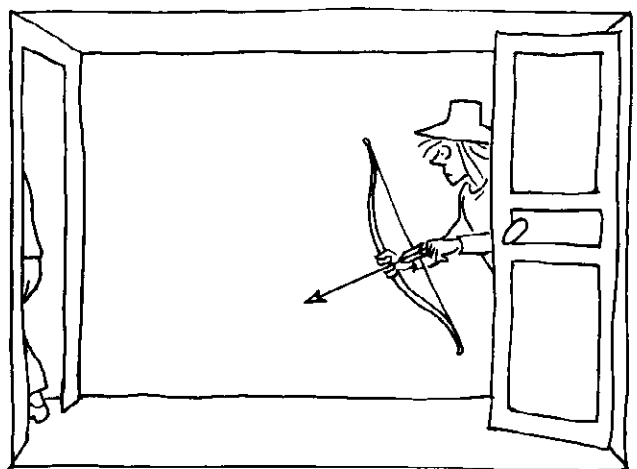
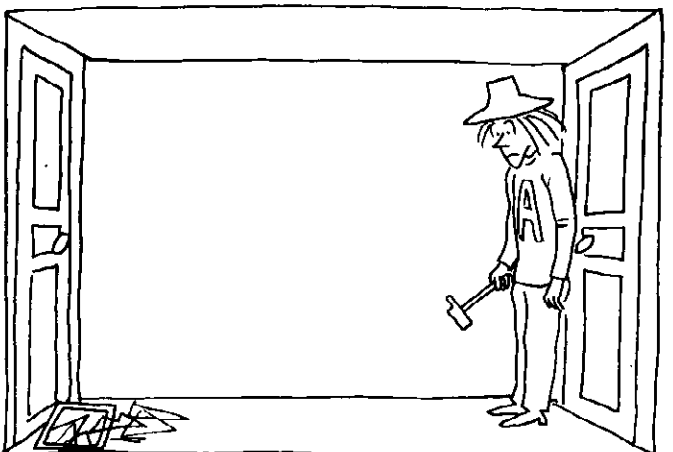
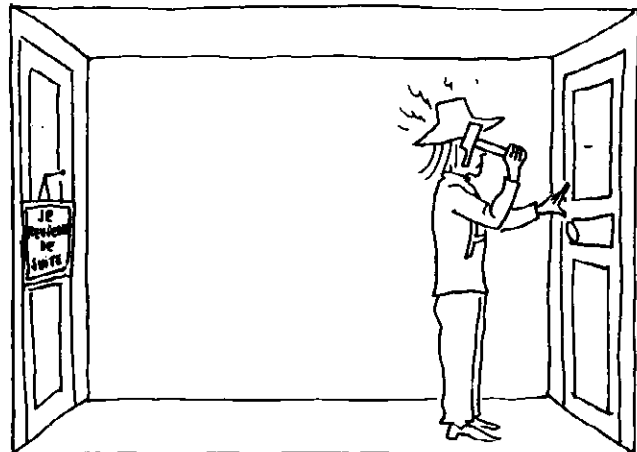
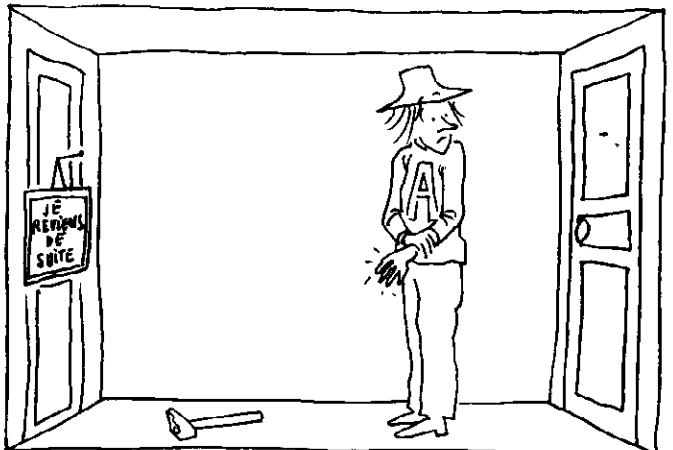
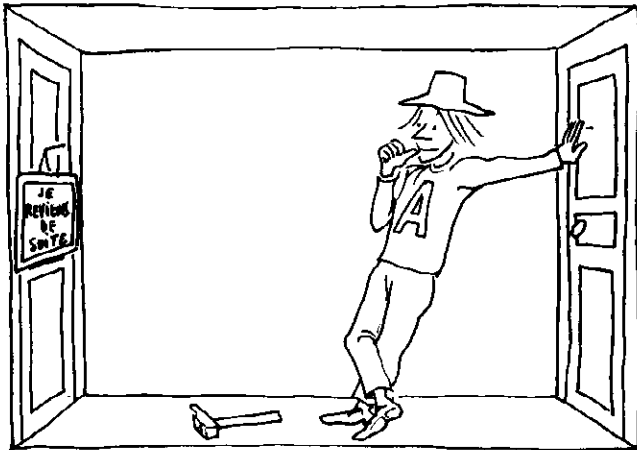
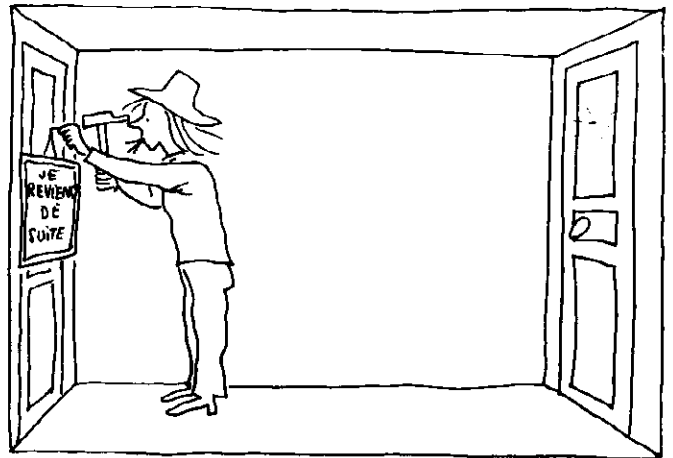
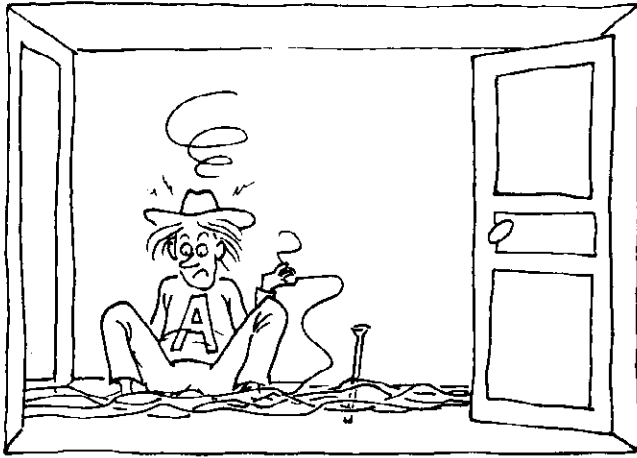
Quand la courbure est
négative, ou que l'espace
est euclidien, l'espace ne
se referme pas, il est
INFINI



Non, le monde de
la géométrie est plus
riche que tu ne le
crois, Anselme !







Eh oui, l'anturle avait été
projeté dans un espace cylindrique
à trois dimensions.

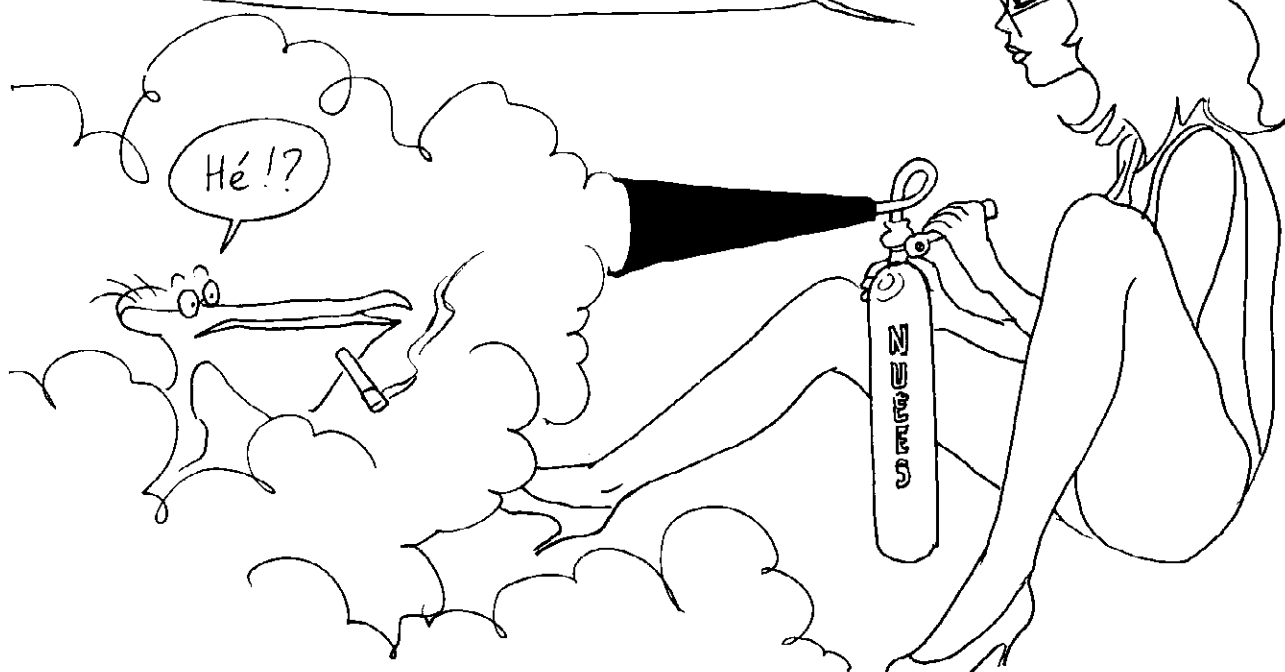
Bien qu'euclydien, sans courbure,
(la somme des angles d'un triangle
y est égale à 180°) ce monde se
referme sur lui-même.



Bon, admettons...
Mondes sphériques,
hyperboliques,
cylindriques. On a
fait le tour, non ?

vous croyez ?

Effectuons un petit retour dans
le bidimensionnel.



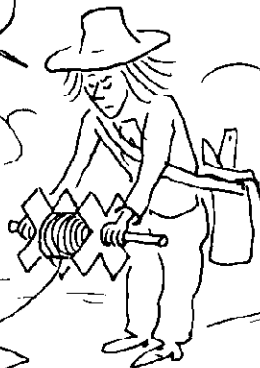
SANS DESSUS DESSOUS :



cher Anselme,
Voici un escargot apprivoisé. En lui
bandant les yeux, tu feras en sorte qu'il
n'aille ni à droite, ni à gauche. Et ainsi
il te tracera une parfaite GÉODÉSIQUE.
A très bientôt

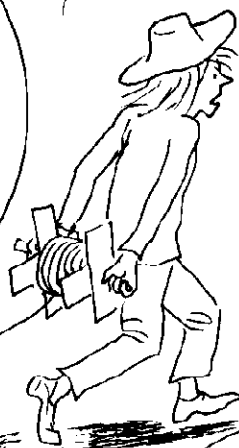
Sophie

allons-y

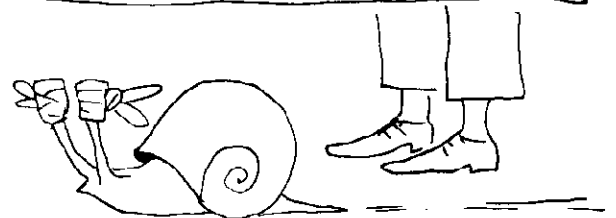


POINT DE
DÉPART DE
LA
GÉODÉSIQUE

mais... où est
passé cet animal?!

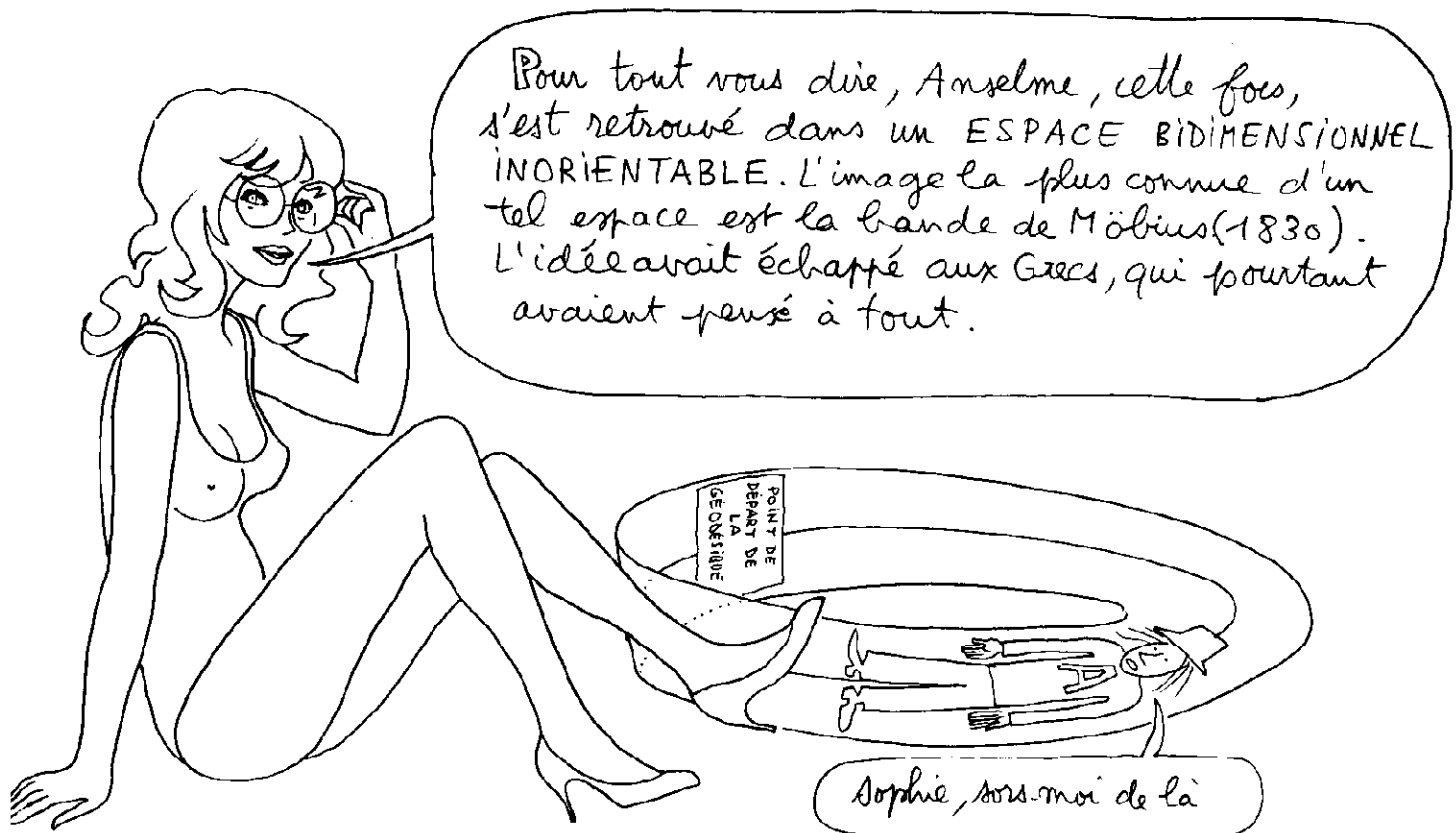


Au pied!

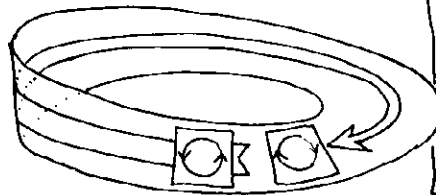
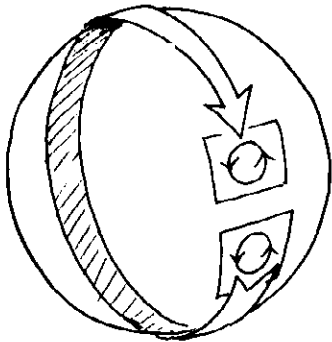


Au fait, aller tout
droit ou suivre le
plus court chemin entre
deux points, c'est pareil



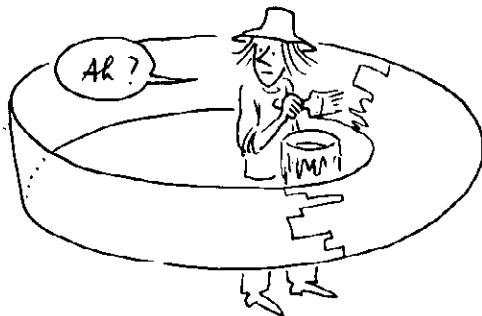


Traçons un cercle sur une surface, et fléchons-le arbitrairement.
 Imaginons que ce cercle soit une petite décalcomanie que nous pouvons faire glisser à volonté sur cette surface.
 Si le cercle se retrouve identique à lui-même, nous dirons que cette surface est ORIENTABLE (c'est le cas de la sphère, du cylindre, du plan, etc...). Mais si cette décalcomanie glisse sur un ruban de Möbius, il en va tout autrement :



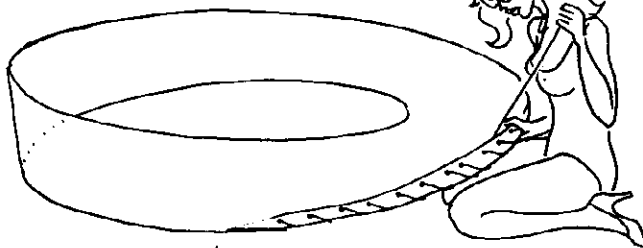
A chaque fois qu'il fait le tour de cet univers à deux dimensions, le cercle change d'orientation

Essayez, vous verrez!



Corrélativement, on ne peut pas peindre une bande de Möbius de deux couleurs différentes : elle n'a qu'un seul côté, elle est UNILATÈRE

Elle n'a qu'un seul BORD :



On peut l'ourler en une seule fois!



L'opération se solde par un échec car cette bande...

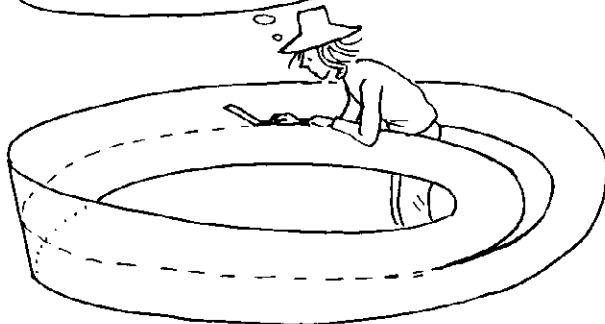
HMMM!!!



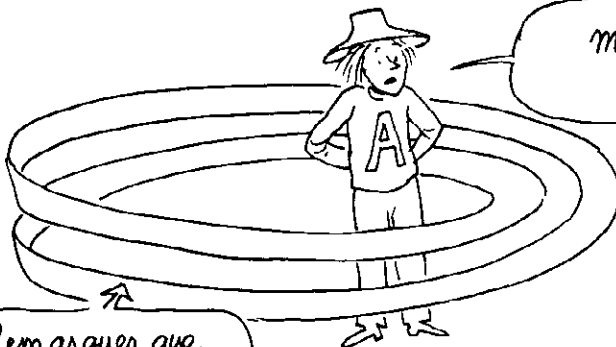
misère...



essayons de la
couper en deux



plus facile à dire qu'à faire
Anselme, mon ami.

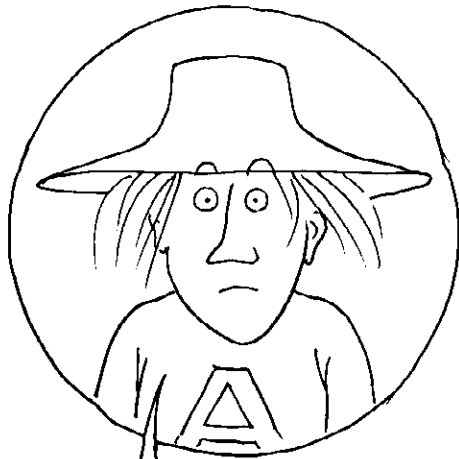
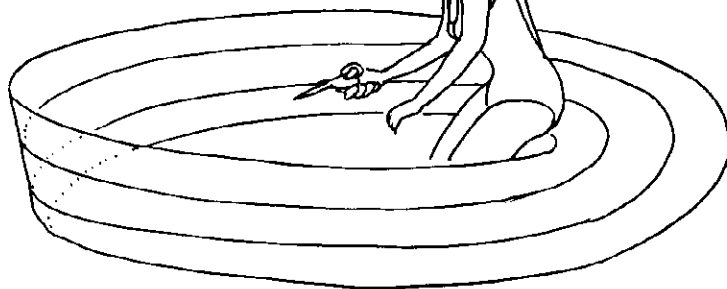


mais comment faut-il faire pour
la couper en deux ?

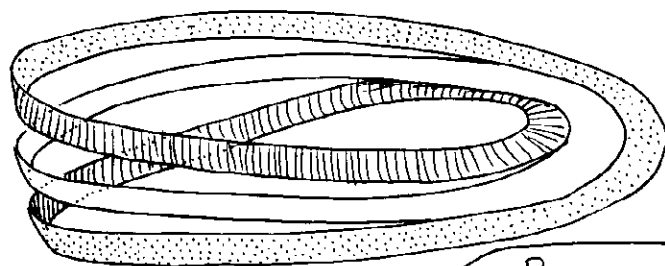
Remarquez que,
dans l'opération,
le machin est
devenu bilatère



C'est très simple
tu la coupes
en trois !



je me sens tout
désorienté



Remarquez
qu'il y a maintenant un machin
unilatère (blanc) et un machin
bilatère (grisé) de longueur
double du premier.

Après cette promenade sur la bande de Möbius, revenons dans les espaces euclidiens (sans courbure) à trois dimensions :

L'orientation de l'espace :



Lorsque je me regarde dans une glace, ma main gauche devient ma main droite, mais pourquoi est-ce que ma tête ne s'échange pas avec mes pieds?...

Comment d'ailleurs être sûr qu'on est le bon ?



La DROITE ?
c'est l'opposée
de la GAUCHE, et vice-versa

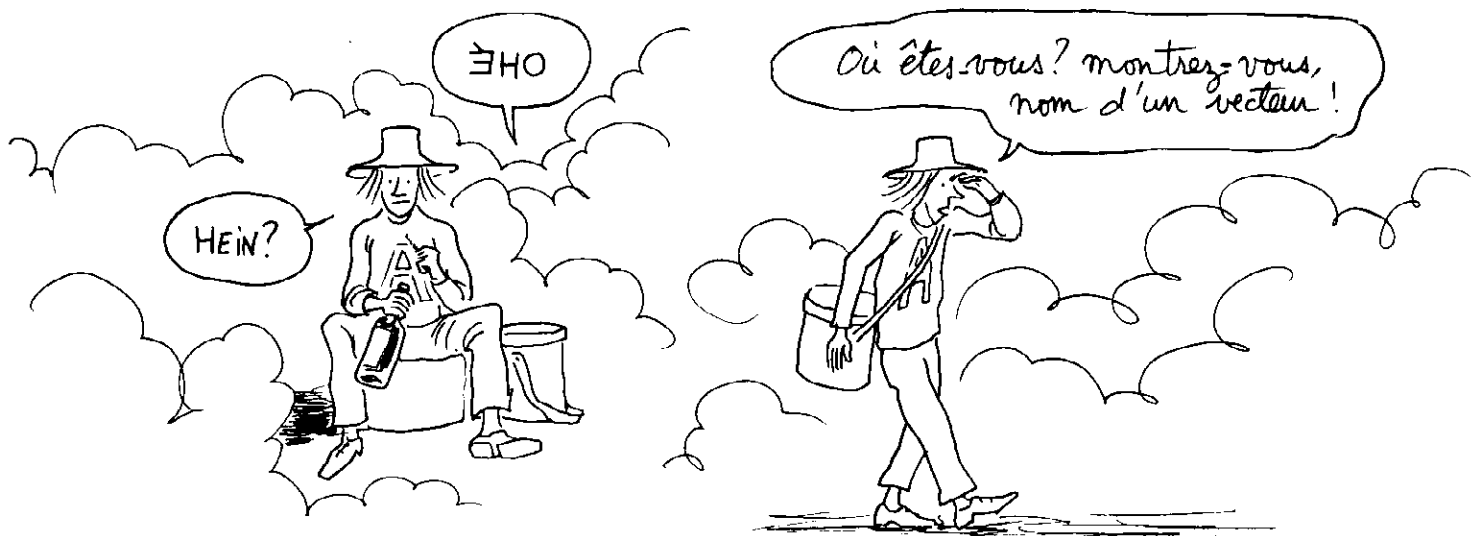
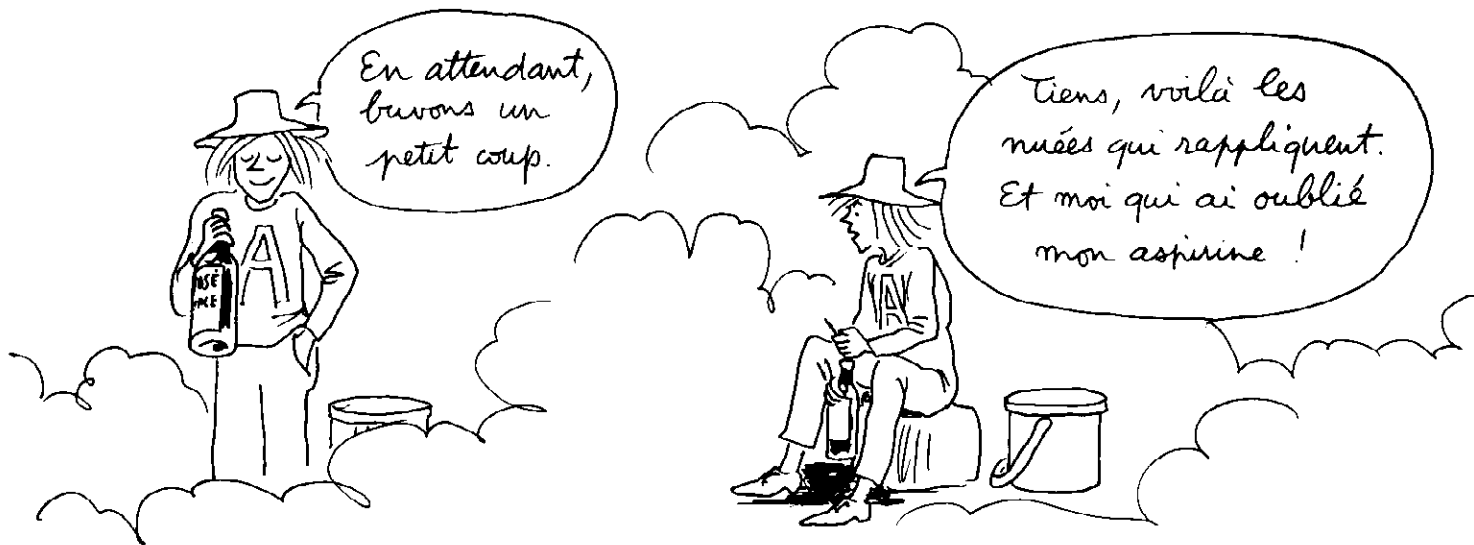
C'est affaire de bon sens



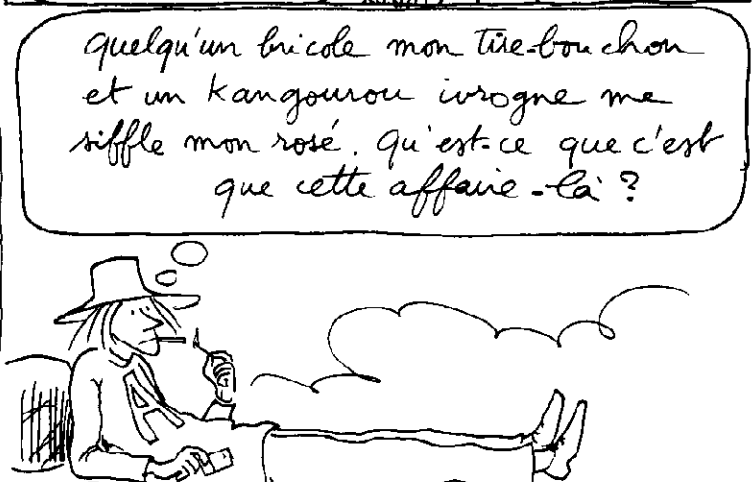
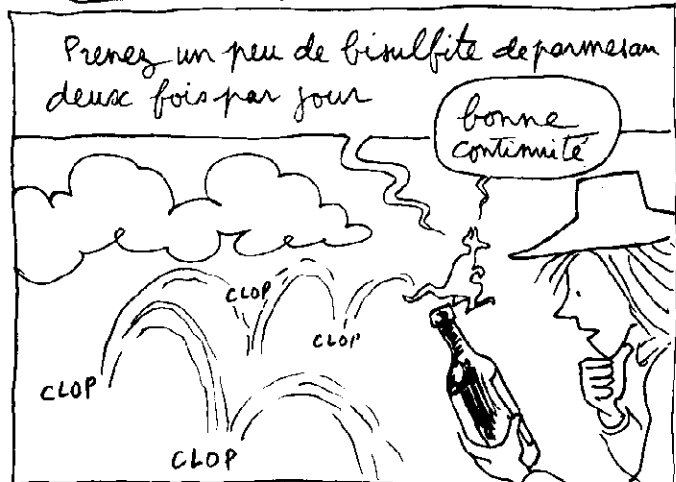
allô, allô, comment pouvez-vous être sûr que votre coquille s'enroule dans le bon sens ?

c'te malice, si elle n'était pas comme ça, elle serait à l'envers !

Accompagnons l'anturle dans son exploration d'un nouveau monde tridimensionnel euclidien (sans courbure) -

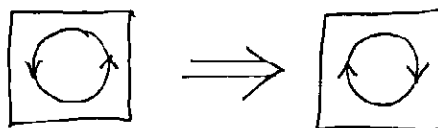




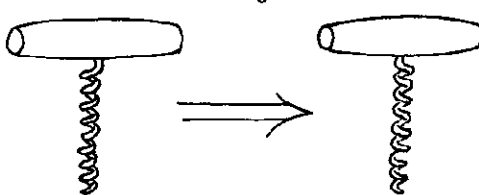




La bande de Möbius (espace inorientable à deux dimensions) a donc un équivalent tridimensionnel. Sur la bande de Möbius, lorsque le cercle décalcomanie faisait le "tour" de cet espace euclidien, son orientation changeait :

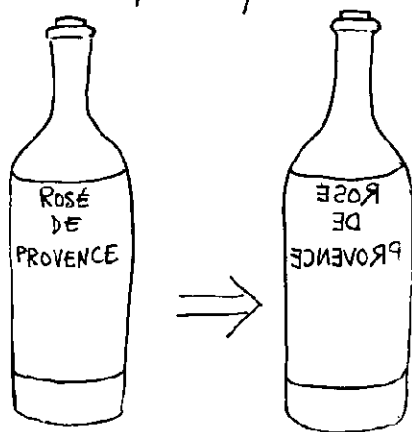


Voir page 54



On remarquera que ces objets sont "en miroir".

Le tire-bouchon, ou Anselme lui-même, peuvent être considérés comme des "décalcomanies à trois dimensions". A chaque fois qu'un objet fait le "tour" de cet espace tridimensionnel, son orientation s'inverse. Comme nous sommes censés avoir accompagné Lanturku dans son périple circumspatial, il est normal que nous retrouvions, avec lui, la bouteille "en miroir" et le tire-bouchon vissant dans un sens inhabituel. Un second "tour" de cet univers nous redonnerait la vision initiale des choses (à condition que nous laissions les objets à leur place).



Anselme et le kangourou (de l'espèce des antipodiens) habitent le même espace, mais ils diffèrent en ce sens que ce qui est "à l'endroit pour le kangourou" est "à l'envers pour Lanturku", et vice-versa.

EPILOGUE:

Tout va de travers. Il n'y a plus
ni droite, ni gauche, ni envers
ni endroit. Vers où cela mène-t-il ? et
quel chemin suivre ?



Il faut suivre les géodésiques,
Anselme, les géodésiques
de ta vie.



On ne me fera jamais
croire, à moi, que l'univers
est aussi bicornu. Ce
sont des délires de
mathématicien.



C'est de la
bande dessinée !

Pourquoi se préoccuper
de tout cela, puisqu'il est
évident que l'espace
EST euclidien (*)



(*) Propos tenus en 1830 par Ostrogradsky,
professeur titulaire de la chaire de mathématiques
à Petrograd, après lecture des travaux
de Riemann et Lobatchevsky.

Admettons que l'Univers ne
ressemble pas à ce qu'il est.
Vous imaginez tout cela,
enseigné dans les écoles ?!!

quel
désastre!

Et puis, ce qui compte,
finalement, c'est la vie. Et,
pour la vie de tous les jours, vous
commencez avec moi que...

mais, qu'y-a-t-il
derrière tout cela?

la PHYSIQUE,
mon chéri...



je VEUX tirer cela au clair!

En avant
pour le CONCRET

Y-a quelqu'un?

