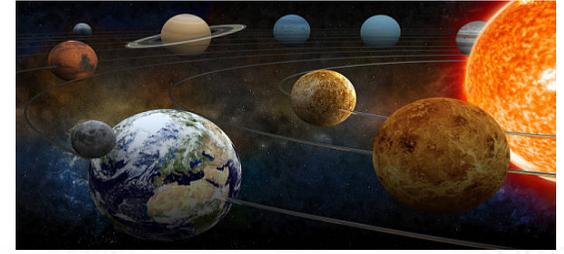




Mécanique du point matériel

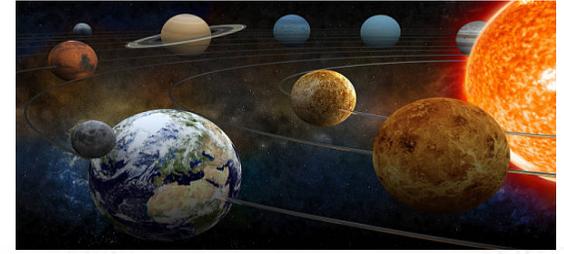


Changements de référentiels Référentiels non galiléens





Mécanique du point matériel



- A -

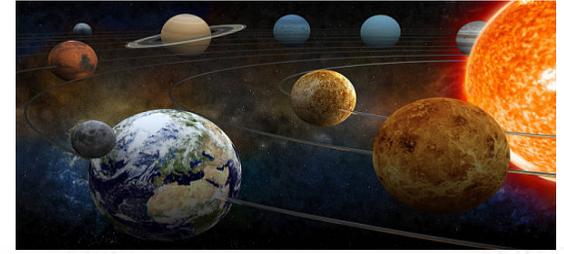
Cinématique

Changements de référentiels





Mécanique du point matériel



➤ I - Relativité du référentiel :

Le mouvement d'un mobile diffère selon le référentiel d'étude (**relativité du mouvement**).

Problématique :

On connaît le mouvement d'un point matériel dans un référentiel (R).

Quelle est la nature de ce mouvement, étudié dans un référentiel (R') en mouvement par rapport à (R) (trajectoire, vitesse et accélération) ?

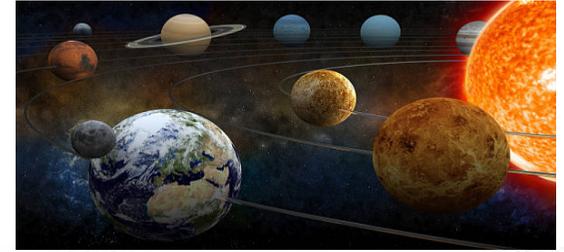
Exemple :

Quelle est l'allure du mouvement de la Lune par rapport au Soleil ?

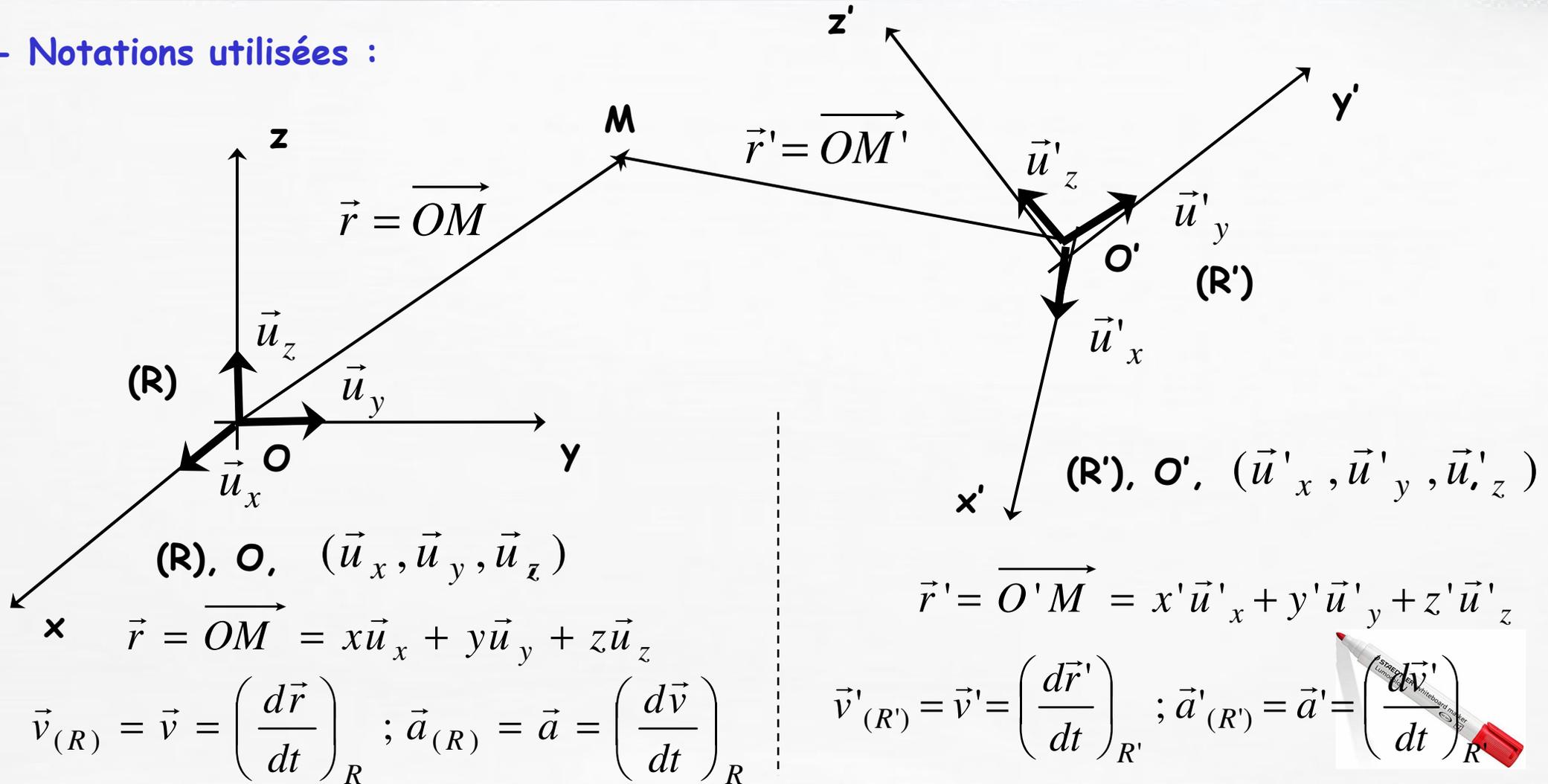




Mécanique du point matériel

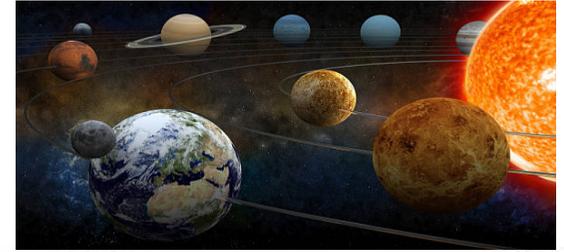


1 - Notations utilisées :





Mécanique du point matériel



2 - Relations entre \mathbf{v} et \mathbf{v}' (composition des vitesses) :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$(\vec{v})_R = \vec{v} = \left(\frac{d \overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d \overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_R + \left(\frac{d \overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_R$$

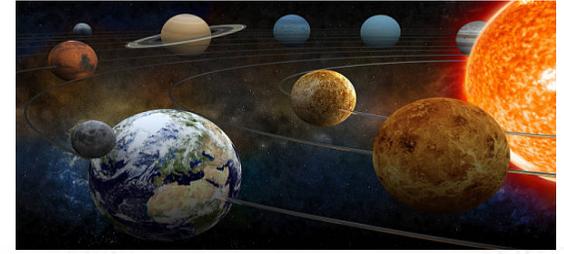
L'indice (R) signifie que la vitesse \mathbf{v} est exprimée par rapport au référentiel (R), pour lequel les vecteurs de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont constants, mais pas les vecteurs $(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$, qui varient au cours du temps. Ainsi :

$$\vec{v} = \left(\frac{d \overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R \quad \text{mais} \quad \left(\frac{d \overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_R \neq \vec{v}' = \left(\frac{d \overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{R'}$$





Mécanique du point matériel



En effet, si on explicite :

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R &= \frac{d}{dt} \left(x' \vec{u}'_x + y' \vec{u}'_y + z' \vec{u}'_z \right)_R \\ \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R &= \left(\dot{x}' \vec{u}'_x + \dot{y}' \vec{u}'_y + \dot{z}' \vec{u}'_z \right) + \left(x' \frac{d\vec{u}'_x}{dt} + y' \frac{d\vec{u}'_y}{dt} + z' \frac{d\vec{u}'_z}{dt} \right) \\ \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R &= \vec{v}' + \left(x' \frac{d\vec{u}'_x}{dt} + y' \frac{d\vec{u}'_y}{dt} + z' \frac{d\vec{u}'_z}{dt} \right)\end{aligned}$$

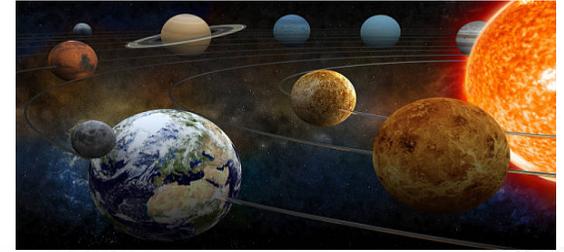
Finalemment :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}'(M) + \vec{v}(O') + \left(x' \frac{d\vec{u}'_x}{dt} + y' \frac{d\vec{u}'_y}{dt} + z' \frac{d\vec{u}'_z}{dt} \right)$$





Mécanique du point matériel



Interprétation :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}'(M) + \vec{v}(O') + \left(x' \frac{d\vec{u}'_x}{dt} + y' \frac{d\vec{u}'_y}{dt} + z' \frac{d\vec{u}'_z}{dt} \right)$$

Vitesse de M
dans (R)

Vitesse de M
dans (R')

Vitesse d'entraînement

$$\vec{v}(M) = \vec{v}'(M) + \vec{v}_e$$

(Loi de composition des vitesses)

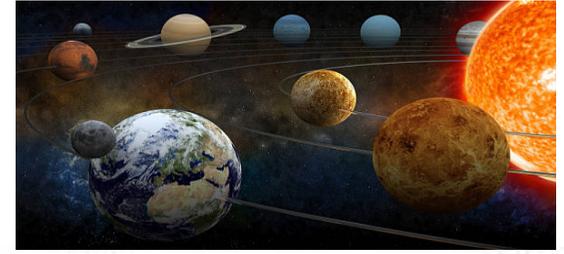
Point coïncident : on appelle point coïncident le point P de (R'), immobile dans ce référentiel, qui coïncide à l'instant t avec le point matériel M.

La **vitesse d'entraînement** v_e est la vitesse du point coïncident dans (R).





Mécanique du point matériel



3 - Relations entre a et a' (composition des accélérations) :

La formule de composition des accélérations dans le cas général est compliquée et hors programme.

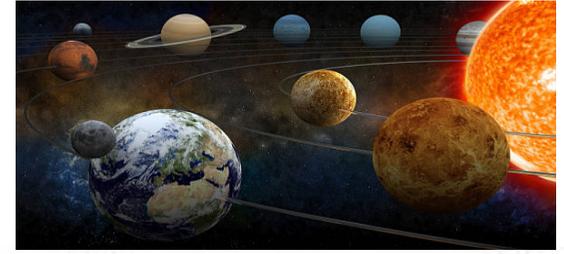
Dans la suite, on se limitera à deux types de mouvements d'entraînement du référentiel (R') par rapport au référentiel (R) :

- * Un mouvement de translation
- * Un mouvement de rotation autour d'un axe fixe





Mécanique du point matériel



➤ II - Référentiels en translation l'un par rapport à l'autre :

Un solide est animé d'un **mouvement de translation** si tous ses points possèdent à tout instant le même vecteur vitesse :

* Exemple de la main.

* Exemple de la grande roue (**translation circulaire**) et du référentiel géocentrique (transparent suivant)

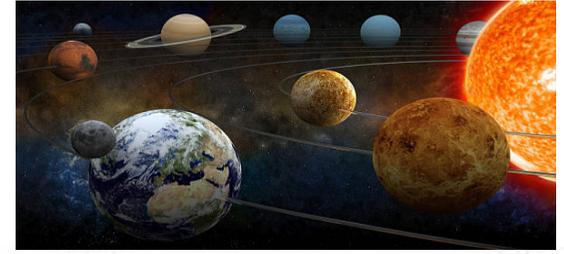
Les vecteurs de base du référentiel (R') gardent donc une direction constante ; par conséquent :

$$\left(\frac{d\vec{u}'_x}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{u}'_y}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{u}'_z}{dt} \right)_R = \vec{0}$$





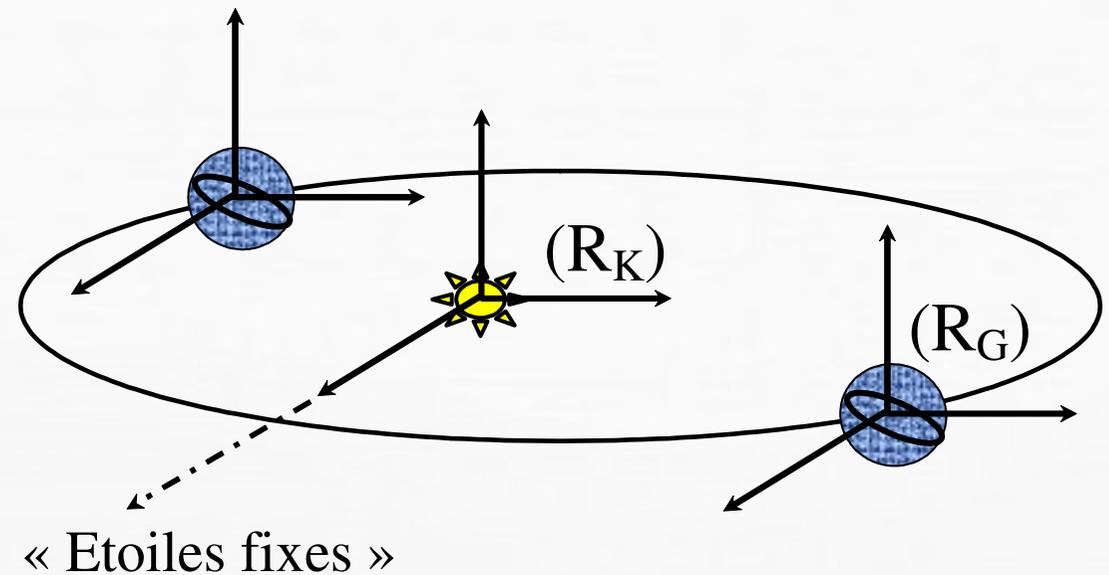
Mécanique du point matériel



Référentiel géocentrique :

*** Origine : le centre d'inertie de la Terre

*** Trois axes dirigés vers trois étoiles lointaines « fixes »

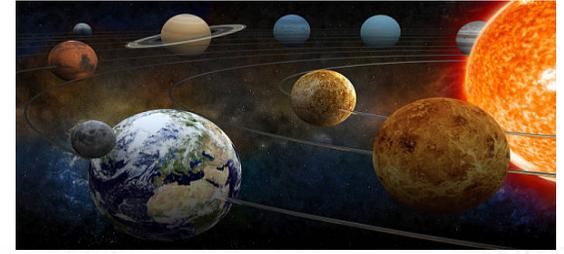


(R_G) a un mouvement de translation quasi-circulaire par rapport à (R_K) .





Mécanique du point matériel



Loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}'(M) + \vec{v}(O')$$

La vitesse d'entraînement est égale à la vitesse de O' dans (R) .

C'est la vitesse de translation de (R') par rapport à (R) .

Loi de composition des accélérations :

$$\vec{a}(M) = \vec{a}'(M) + \vec{a}(O')$$

L'accélération d'entraînement est égale à l'accélération de O' dans (R) .

C'est l'accélération de translation de (R') par rapport à (R) .

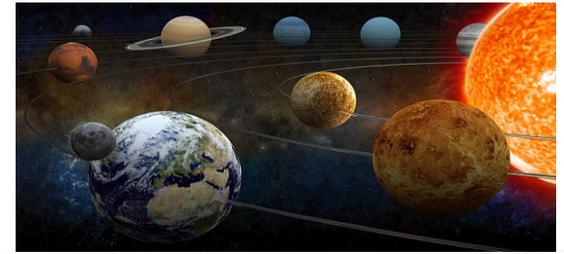
Pour une translation uniforme :

$$\vec{a}(M) = \vec{a}'(M)$$





Mécanique du point matériel



III - Référentiels en rotation l'un par rapport à l'autre :

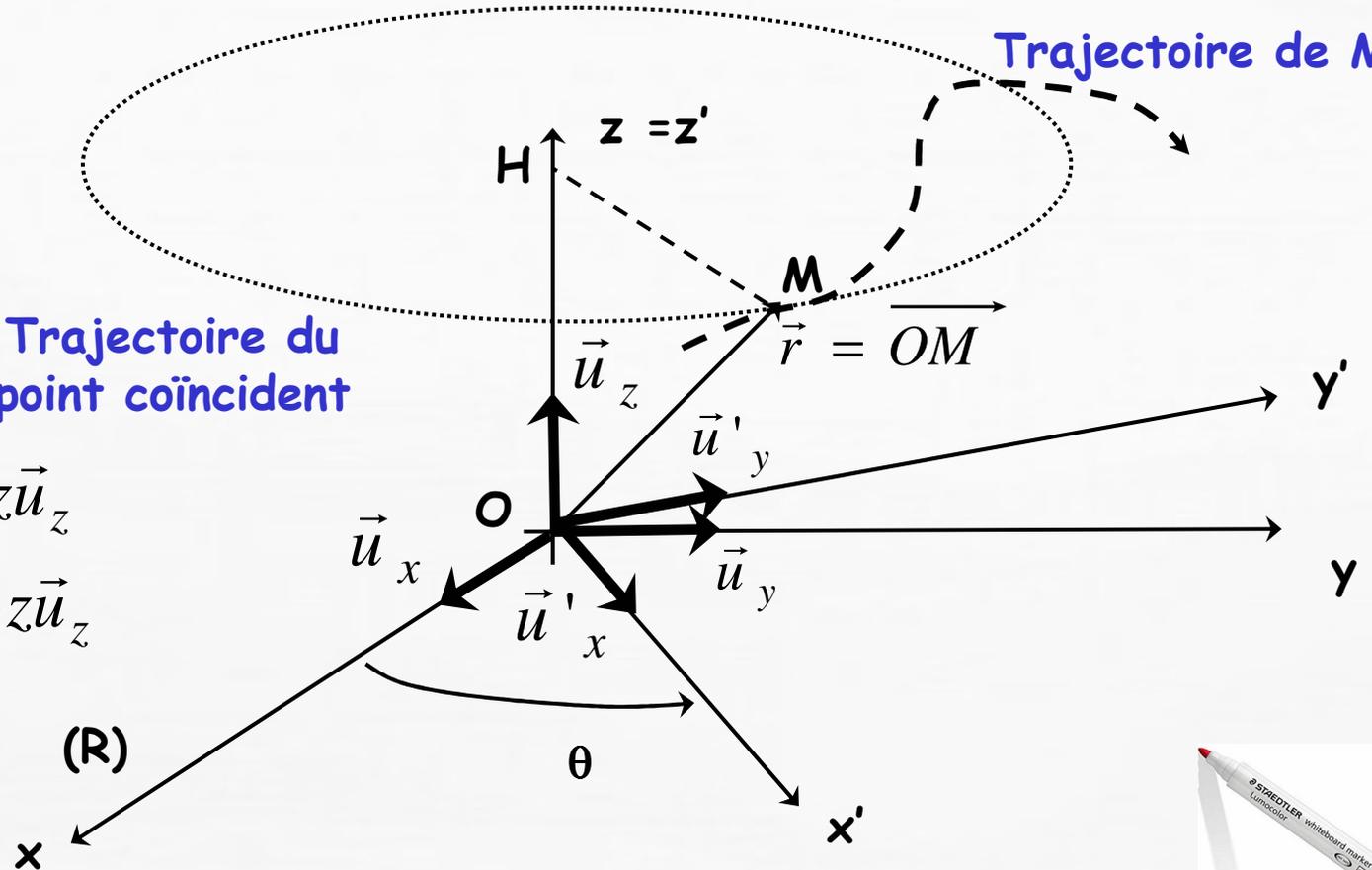
1 - Notations :

(Rotation autour d'un axe fixe, noté Oz)

Trajectoire du point coïncident

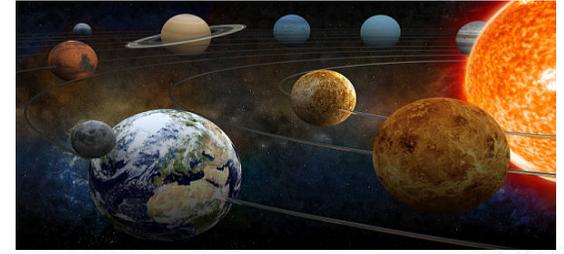
Trajectoire de M

$$\begin{aligned} \vec{r} = \overrightarrow{OM} &= x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \\ &= x'\vec{u}'_x + y'\vec{u}'_y + z\vec{u}_z \end{aligned}$$





Mécanique du point matériel



On note : $\theta = (\vec{u}_x, \vec{u}'_x)$; $\omega = \dot{\theta}$ et $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$

$\vec{\omega}$ est appelé **vecteur vitesse angulaire** de rotation du référentiel (R') par rapport au référentiel (R).

On peut rappeler que (voir cours de cinématique) :

$$\left(\frac{d\vec{u}'_x}{dt} \right)_R = \dot{\theta} \vec{u}'_y = \omega \vec{u}'_y \quad ; \quad \left(\frac{d\vec{u}'_y}{dt} \right)_R = -\dot{\theta} \vec{u}'_x = -\omega \vec{u}'_x$$

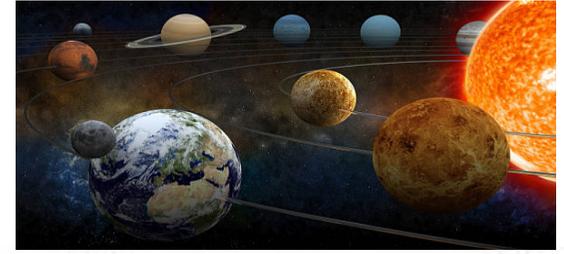
2 - Loi de composition des vecteurs vitesse :

$$\vec{v} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R = \frac{d}{dt} (x' \vec{u}'_x + y' \vec{u}'_y + z' \vec{u}'_z)_R = \vec{v}' + x' \frac{d\vec{u}'_x}{dt} + y' \frac{d\vec{u}'_y}{dt}$$





Mécanique du point matériel



Soit :
$$\vec{v} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R = \vec{v}' + (x' \dot{\theta} \vec{u}'_y - y' \dot{\theta} \vec{u}'_x)$$

Or :

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \dot{\theta} \vec{u}_z \wedge (x' \vec{u}'_x + y' \vec{u}'_y + z \vec{u}_z) = (x' \dot{\theta} \vec{u}'_y - y' \dot{\theta} \vec{u}'_x)$$

D'où la loi de composition des vecteurs vitesse :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{v}' + \vec{v}_e$$

avec

$$\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

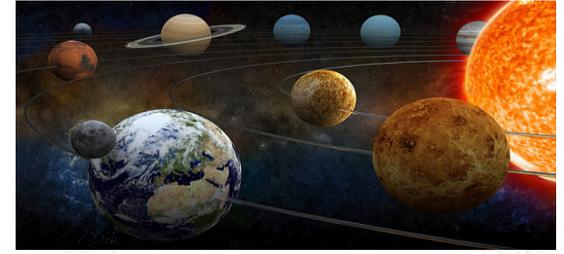
Remarque : $\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HM}$

La vitesse d'entraînement est la vitesse d'un point immobile de (R') et qui a donc un simple mouvement de rotation autour de l'axe (Oz) (cercle de centre H et de rayon HP, où P = M est le point coïncident, confondu avec M à l'instant t).





Mécanique du point matériel



Remarque : (dérivation et changement de référentiel)

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} \quad \text{soit} \quad \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

On peut généraliser cette formule au cas d'un vecteur \vec{A} quelconque :

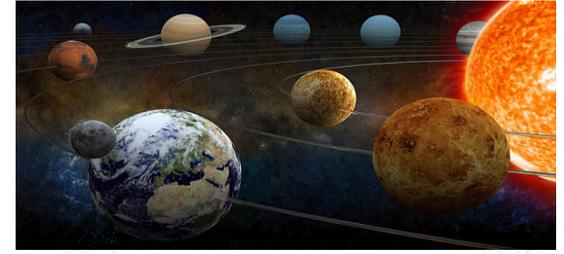
$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \vec{A}$$

C'est cette relation qui va être utilisée pour déterminer la loi de composition des vecteurs accélération.





Mécanique du point matériel



3 - Loi de composition des vecteurs accélération :

En utilisant la relation précédente :

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

Puis :

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left(\vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} \right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} \right)$$

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{R'} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{R'} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} \right)$$

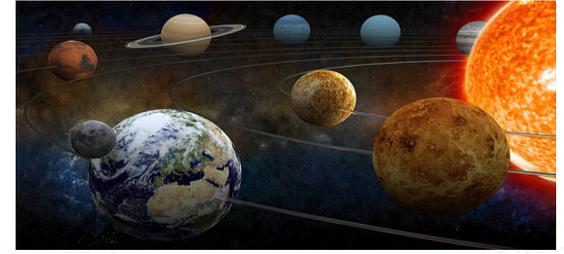
Soit :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} \right) \right) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$





Mécanique du point matériel



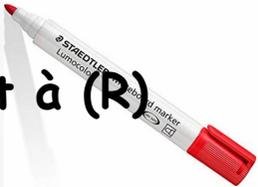
$$\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \right)}_{\substack{\text{Accélération d'entraînement} \\ \text{de } M \\ \text{(celle du point coïncident)}}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'}_{\substack{\text{Accélération de} \\ \text{Coriolis de } M}}$$

Accélération de M dans (R) Accélération de M dans (R')

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

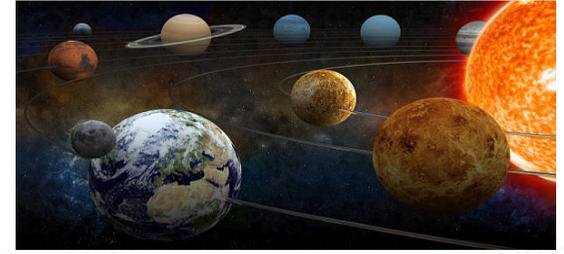
L'accélération de Coriolis est nulle si le point M est au repos dans (R').

Cette relation se généralise à un mouvement d'entraînement de (R') par rapport à (R) quelconque.





Mécanique du point matériel



Cas d'une rotation uniforme ($\omega = \text{cste}$) :

$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$$

Rappel mathématique :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

Par conséquent :

$$\vec{a}_e = (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{OM}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{OM} = (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{OM}) \vec{\omega} - \omega^2 \overrightarrow{OM}$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oz) :

$$\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{OM} = \omega OH$$

$$\text{D'où : } \vec{a}_e = (\omega \cdot OH) \vec{\omega} - \omega^2 \overrightarrow{OM} = \omega^2 (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OM}) = \omega^2 (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{MO}) = \omega^2 \overrightarrow{MH}$$

Enfinement :

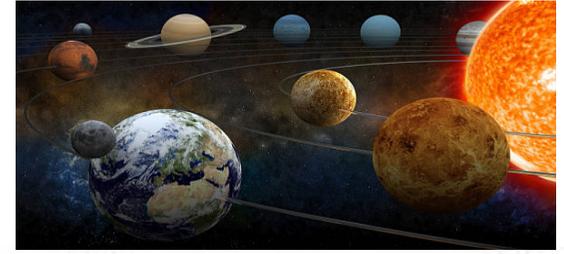
$$\vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

On retrouve l'expression de l'accélération pour un mouvement circulaire uniforme.





Mécanique du point matériel



- B -

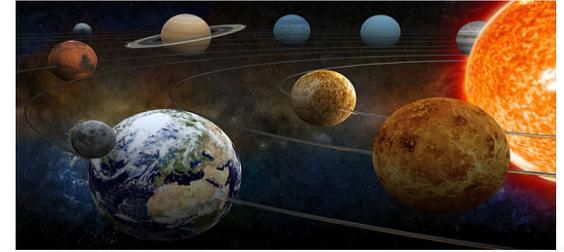
Dynamique

Référentiels non galiléens





Mécanique du point matériel



➤ I - Les « pseudo » forces d'inertie :

1 - Exemple d'une voiture accélérée :

2 - Principe fondamental dans un référentiel non galiléen :

(R) est un référentiel galiléen et (R') un référentiel en mouvement quelconque par rapport à (R).

Un point matériel M (m) est soumis à des forces (« réelles ») dont la résultante est nommée \vec{f} .

On note v et a la vitesse et l'accélération de M dans (R).

On note v' et a' la vitesse et l'accélération de M dans (R').

On rappelle que, dans le cas général :

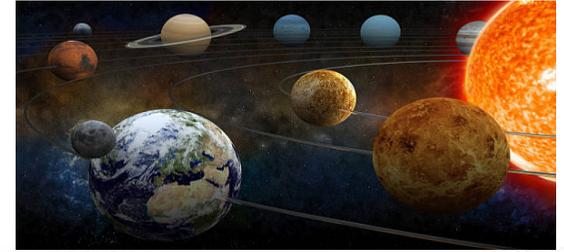
$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$





Mécanique du point matériel



Le PFD appliqué dans le référentiel galiléen (R) donne : $m\vec{a} = \vec{f}$

En utilisant la composition des accélérations :

$$m(\vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c) = \vec{f} \quad \text{soit} \quad m\vec{a}' = \vec{f} + (-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_c)$$

On pose :

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$$

« Pseudo » force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c$$

« Pseudo » force d'inertie de Coriolis

Alors :

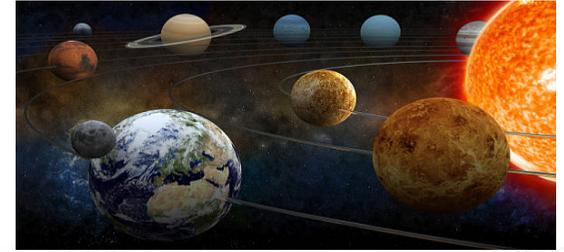
$$m\vec{a}' = \vec{f} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

On peut ainsi appliquer un « pseudo » PFD dans un référentiel non galiléen, à condition de rajouter aux forces « réelles » les « pseudo » forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.





Mécanique du point matériel



3 - Le mouvement d'entraînement est une translation :

C'est le cas par exemple d'une voiture qui accélère en ligne droite.

Alors :

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{\text{voiture} / \text{route}} \quad \text{et} \quad \vec{a}_c = \vec{0}$$

Dans le référentiel de la voiture, le « pseudo » PFD devient :

$$m\vec{a}' = \vec{f} - m\vec{a}_{\text{voiture} / \text{route}}$$

Si la résultante des forces est nulle :

$$\vec{a}' = -\vec{a}_{\text{voiture} / \text{route}}$$

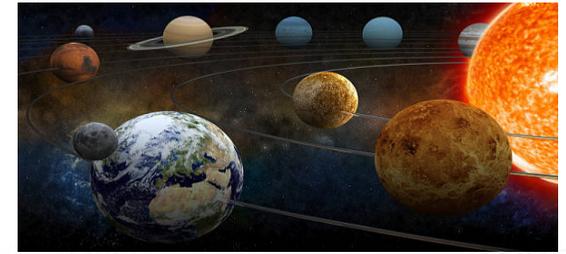
Si la voiture freine : le passager est projeté vers le pare-brise.

Si la voiture accélère : le passager est collé au siège.

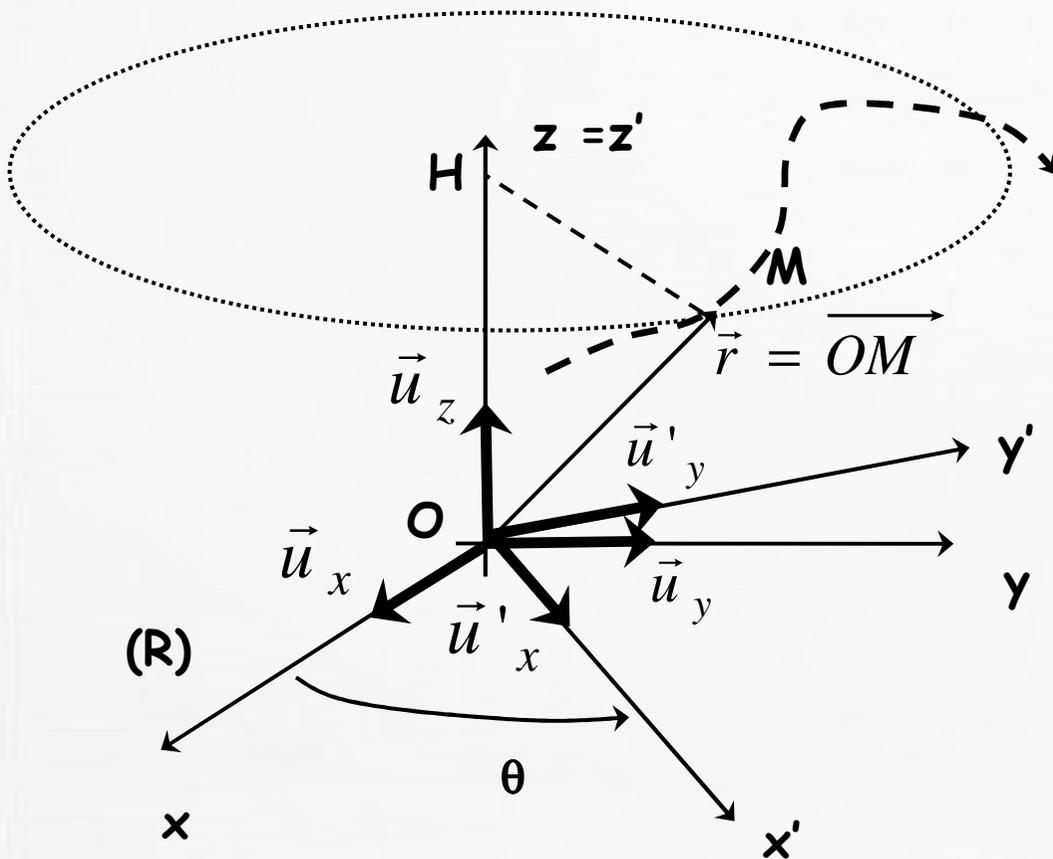




Mécanique du point matériel



4 - Le mouvement d'entraînement est une rotation autour d'un axe fixe :



$$\vec{f}_{ie} = -m \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \right)$$

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

Pour un mouvement de rotation uniforme :

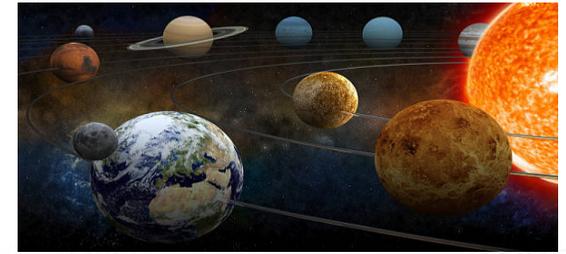
$$\vec{f}_{ie} = +m\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

C'est la **force centrifuge** !



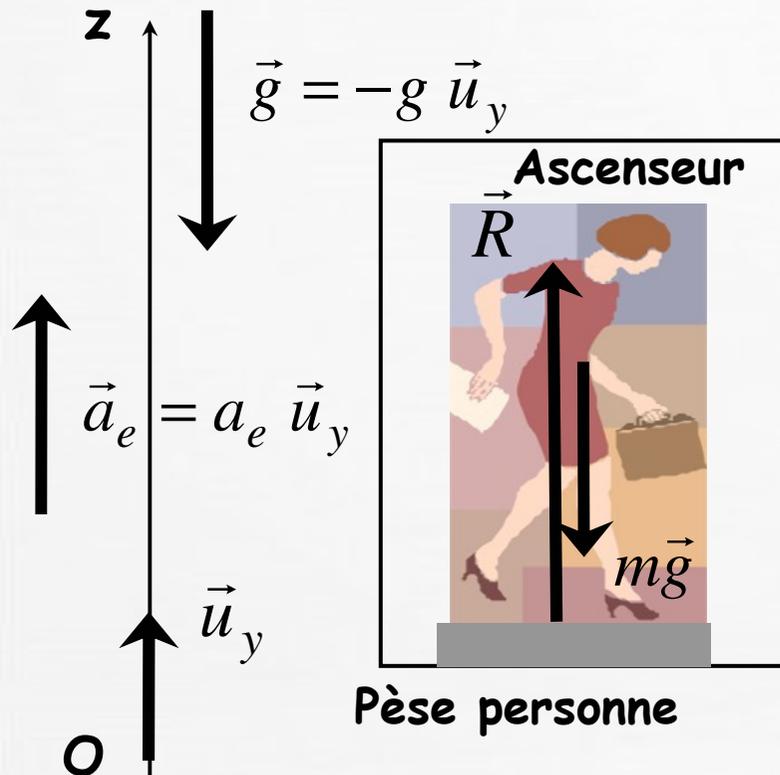


Mécanique du point matériel



II - Exemples d'applications :

1 - Ascenseur et poids apparent :



L'équilibre « relatif », dans le référentiel de l'ascenseur s'écrit :

$$m\vec{a}' = \vec{0} = \vec{R} + m\vec{g} + (-m\vec{a}_e)$$

Soit, en introduisant la notion de « poids apparent », P_{app} :

$$\vec{P}_{app} = -\vec{R}$$

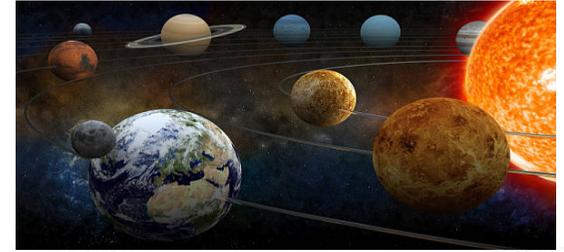
$$\vec{P}_{app} = m(\vec{g} - \vec{a}_e) = -m(g + a_e) \vec{u}_y$$

Remarque : g est en valeur absolue ($g > 0$) alors que a_e est en valeur algébrique ($>$ ou $<$ 0).





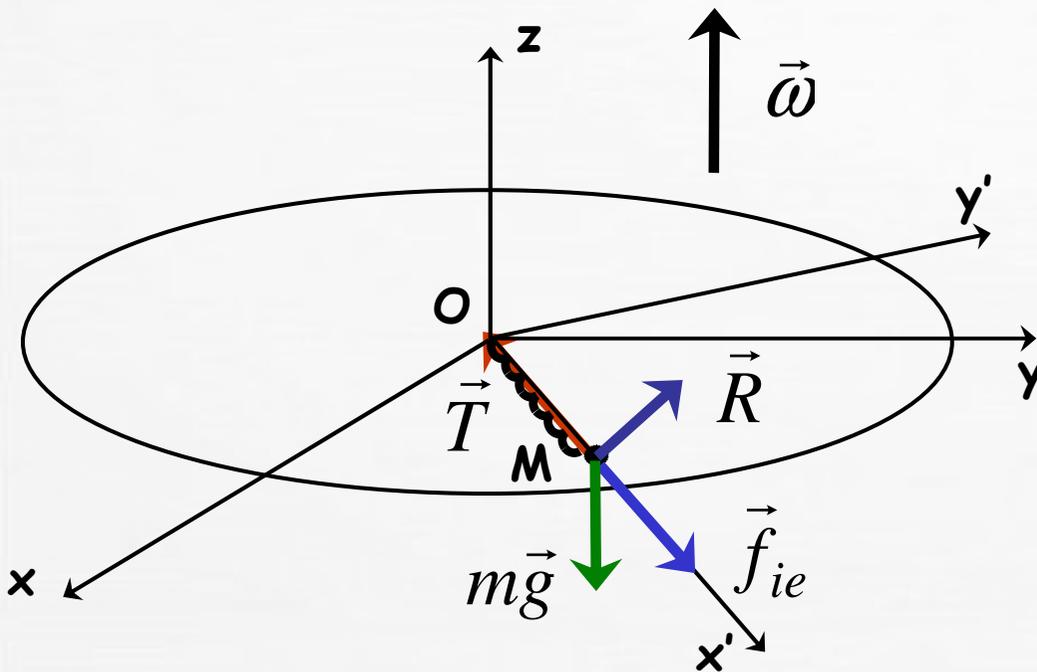
Mécanique du point matériel



II - Exemples d'applications :

2 - Ressort sur un plateau de manège tournant :

Notations :



La vitesse de rotation est constante.

A $t = 0$, la longueur du ressort est l_0 .

Le point M se déplace sans frottement sur l'axe (Ox') . A $t = 0$, (Ox') était confondu avec (Ox) et M était immobile par rapport au manège, avec $x' = L$.

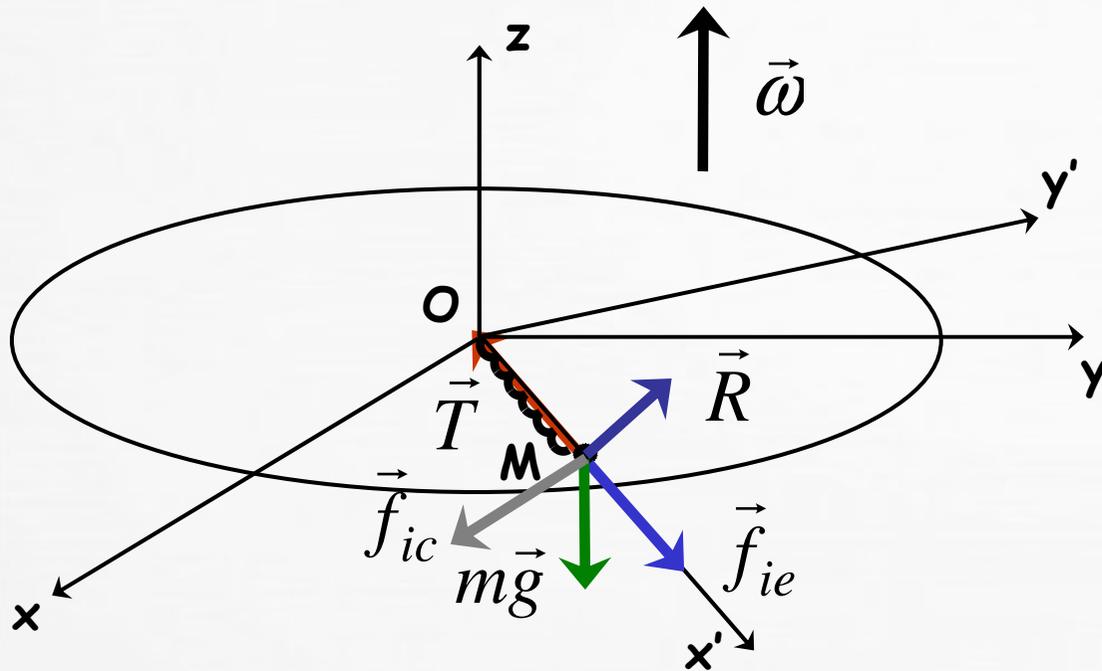
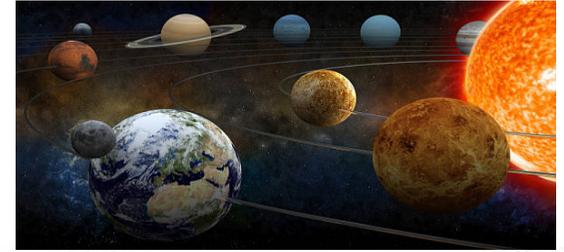
Etudier, selon les valeurs de ω et k (constante du ressort) la nature du mouvement du point M.

(R) : réf terrestre galiléen ; (R') : réf lié au plateau (non galiléen)





Mécanique du point matériel



$$m\vec{a}' = \vec{R} + m\vec{g} + \vec{T} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

$$\vec{a}' = \ddot{x}'\vec{u}'_x \quad ; \quad \vec{v}' = \dot{x}'\vec{u}'_x$$

$$\vec{T} = -k(x' - \ell_0)\vec{u}'_x$$

$$m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$$

$$\vec{f}_{ie} = m\omega^2 x'\vec{u}'_x$$

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}' = -2m\omega\dot{x}'\vec{u}'_y$$

$$\vec{R} = R'_y\vec{u}'_y + R'_z\vec{u}'_z$$

(Pas de frottement : $R'_x = 0$)

→

$$m\ddot{x}' = -k(x' - \ell_0) + m\omega^2 x'$$

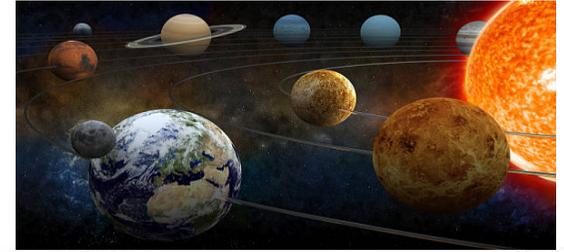
$$0 = -2m\omega\dot{x}' + R'_y$$

$$0 = -mg + R'_z$$





Mécanique du point matériel



Equation du mouvement : $m\ddot{x}' + (k - m\omega^2)x' = k\ell_0$

On pose :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{Pulsation propre du système masse-ressort})$$

Alors : $\ddot{x}' + (\omega_0^2 - \omega^2)x' = \omega_0^2\ell_0$

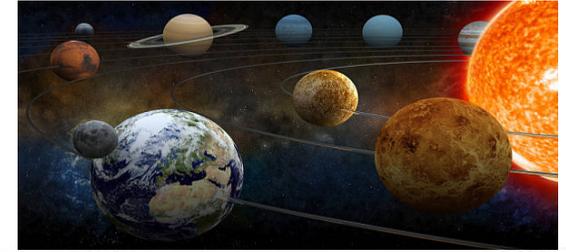
$$\text{Si } \omega_0 > \omega : x' = \left(L - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\ell_0\right) \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}t\right) + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\ell_0$$

$$\text{Si } \omega_0 < \omega : x' = \left(L - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\ell_0\right) \text{ch}\left(\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}t\right) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\ell_0$$

Réaction du plateau : $R'_y = 2m\omega\dot{x}' \neq 0!$; $R'_z = mg$

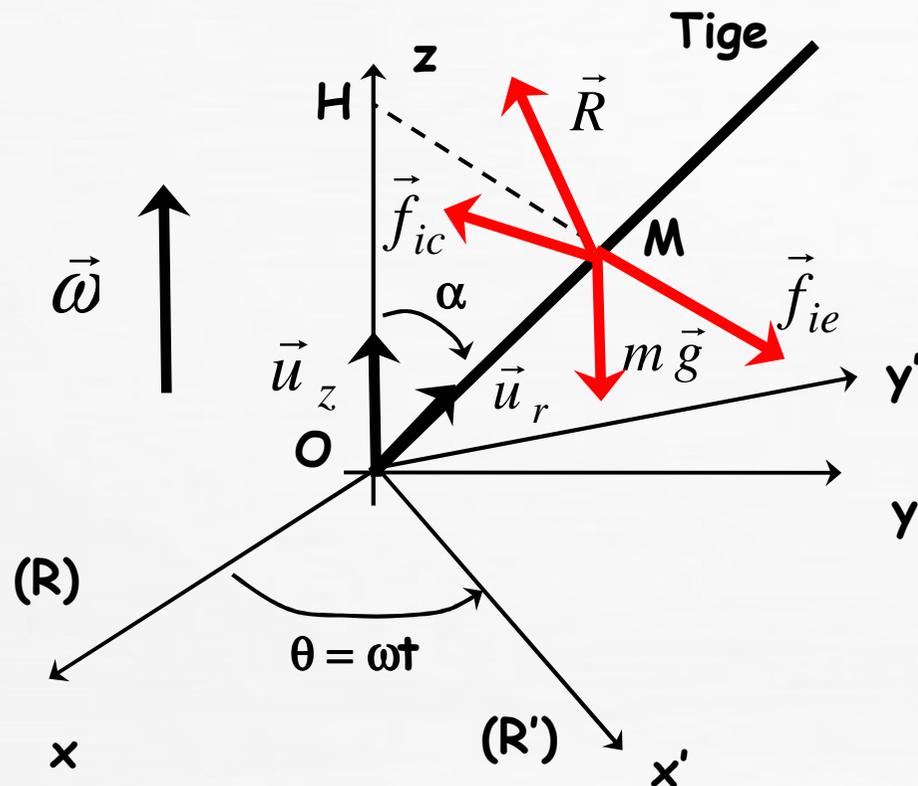


Mécanique du point matériel



➤ II - Exemples d'applications :

3 - Tige tournant à vitesse angulaire constante :



La tige est dans le plan $(Ox'z)$.

Dans le référentiel (R') lié à la tige :

$$m \ddot{r} \vec{u}_r = -mg \vec{u}_z + \vec{R} + m \omega^2 \overrightarrow{HM} - 2m \vec{\omega} \wedge (\dot{r} \vec{u}_r)$$

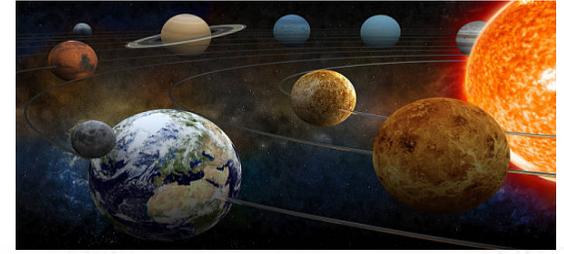
On projette sur l'axe de la tige :

$$m \ddot{r} = -mg \cos \alpha + (m \omega^2 \sin^2 \alpha) r$$

$$\ddot{r} - (\omega \sin \alpha)^2 r = -g \cos \alpha$$



Mécanique du point matériel



La solution générale de cette équation différentielle est de la forme :

$$r = Ae^{(\omega \sin \alpha) t} + Be^{-(\omega \sin \alpha) t} + \frac{g \cos \alpha}{(\omega \sin \alpha)^2}$$

Compte tenu des CI :

$$r = \left(r_0 - \frac{g \cos \alpha}{(\omega \sin \alpha)^2} \right) ch(\omega \sin \alpha t) + \frac{g \cos \alpha}{(\omega \sin \alpha)^2}$$

3 cas sont à considérer :

$$r_0 > \frac{g \cos \alpha}{(\omega \sin \alpha)^2} : M \text{ grimpe le long de la tige.}$$

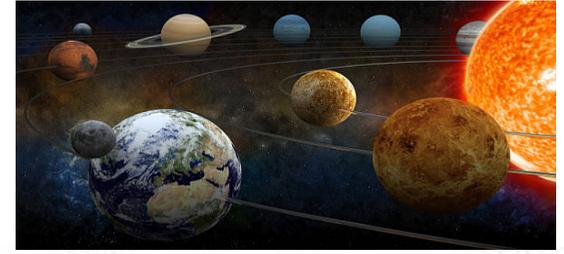
$$r_0 < \frac{g \cos \alpha}{(\omega \sin \alpha)^2} : M \text{ tombe en 0.}$$

$$r_0 = \frac{g \cos \alpha}{(\omega \sin \alpha)^2} : \text{position d'équilibre instable de } M.$$





Mécanique du point matériel



Résolution par la conservation de l'énergie mécanique

Définition de **l'énergie potentielle centrifuge** : la force d'inertie centrifuge s'écrit :

$$\vec{f}_{ie} = m \omega^2 \overrightarrow{HM} = m \omega^2 \rho \vec{u}_\rho$$

Elle dérive de l'énergie potentielle centrifuge telle que (en coordonnées cylindriques) :

$$\vec{f}_{ie} = - \frac{dE_{p,ie}}{d\rho} \vec{u}_\rho = m \omega^2 \rho \vec{u}_\rho$$

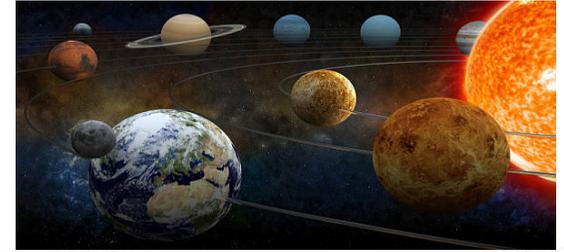
Par conséquent (à une constante près) :

$$E_{p,ie} = - \frac{1}{2} m \omega^2 \rho^2$$





Mécanique du point matériel



La force de Coriolis, perpendiculaire à la vitesse (donc au déplacement) ne travaille pas. La masse m constitue donc, dans (R') , un système conservatif dont l'énergie mécanique, constante, s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + mgr \cos \alpha - \frac{1}{2} m \omega^2 (r \sin \alpha)^2$$

Par dérivation temporelle :

$$\frac{dE_m}{dt} = m \dot{r} \ddot{r} + mg \dot{r} \cos \alpha - m (\omega \sin \alpha)^2 r \dot{r} = 0$$

Soit :

$$\ddot{r} + g \cos \alpha - (\omega \sin \alpha)^2 r = 0$$

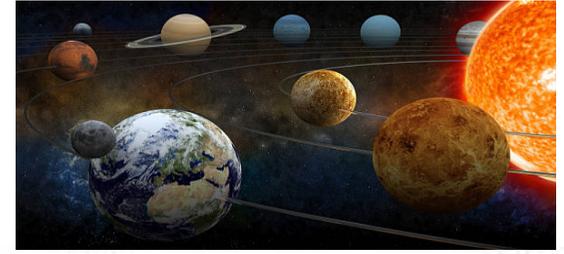
$$\ddot{r} - (\omega \sin \alpha)^2 r = -g \cos \alpha$$

On retrouve l'équation différentielle obtenue en utilisant le pseudo-PFD dans (R') .





Mécanique du point matériel



- C -

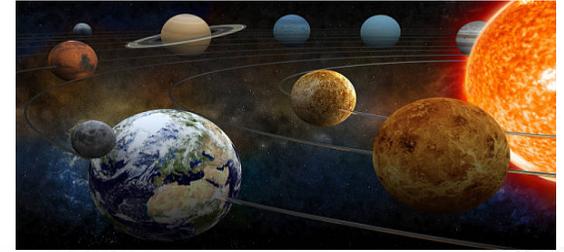
Dynamique

Caractère galiléen approché de
quelques référentiels d'utilisation
courante



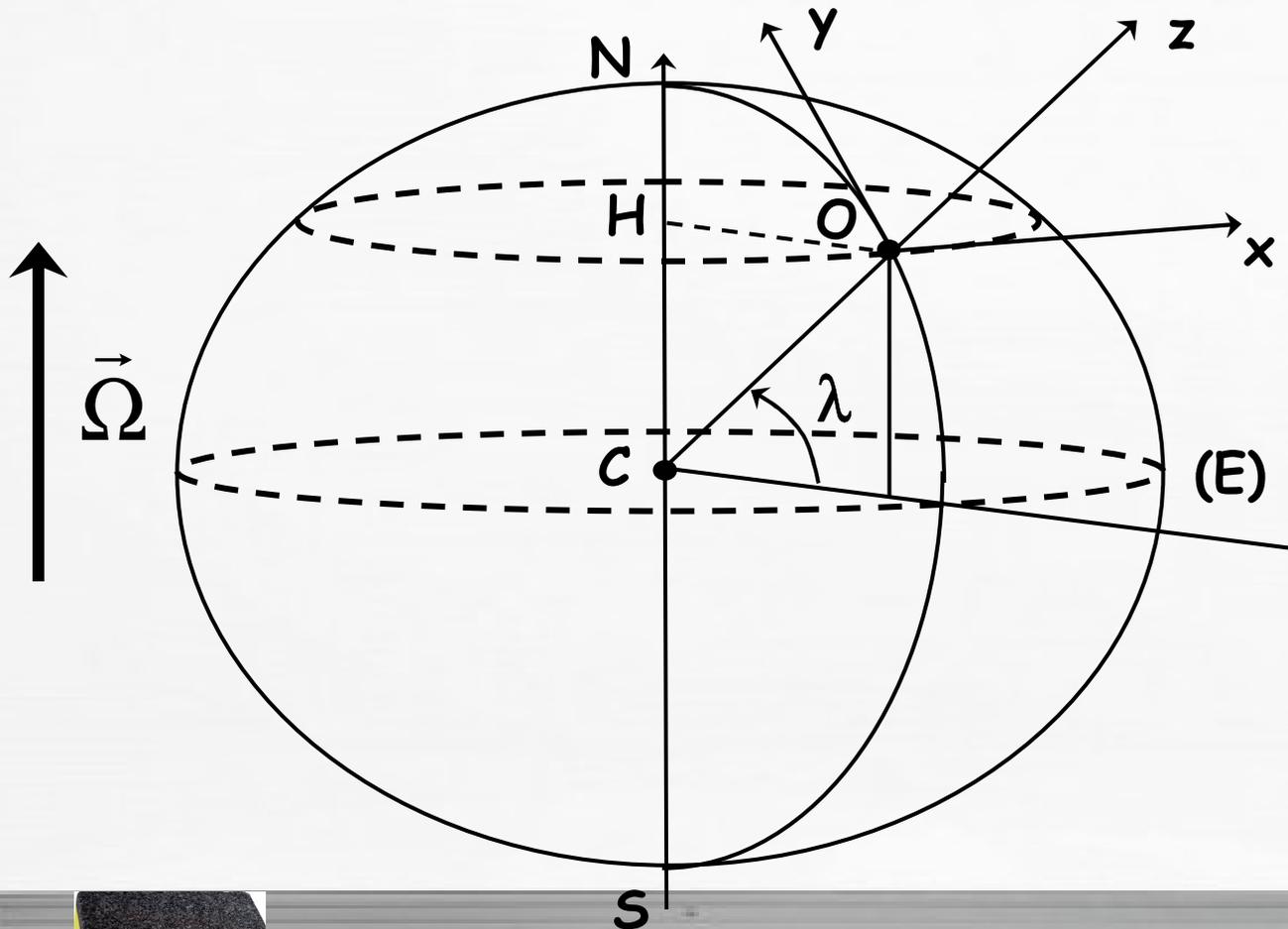


Mécanique du point matériel



I - Le référentiel terrestre :

1 - Définitions et notations :



O : Paris

Ox : dirigé **vers l'Est** et tangent au parallèle du lieu.

Oy : dirigé **vers le Nord** et tangent au méridien du lieu.

Oz : dirigé selon le **rayon terrestre CO** et dirigé vers l'extérieur de la Terre.

λ : **latitude** du lieu, $\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

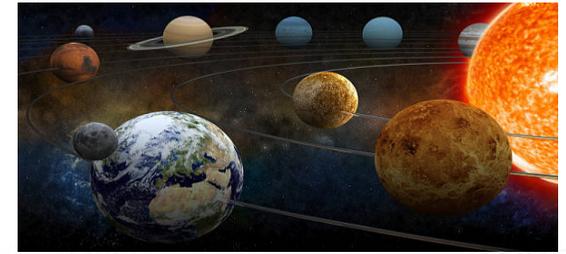
Ω : **vitesse angulaire** de la Terre autour de l'axe NS :

$$\vec{\Omega} = \Omega(\cos \lambda \vec{u}_y + \sin \lambda \vec{u}_z)$$

$$\Omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

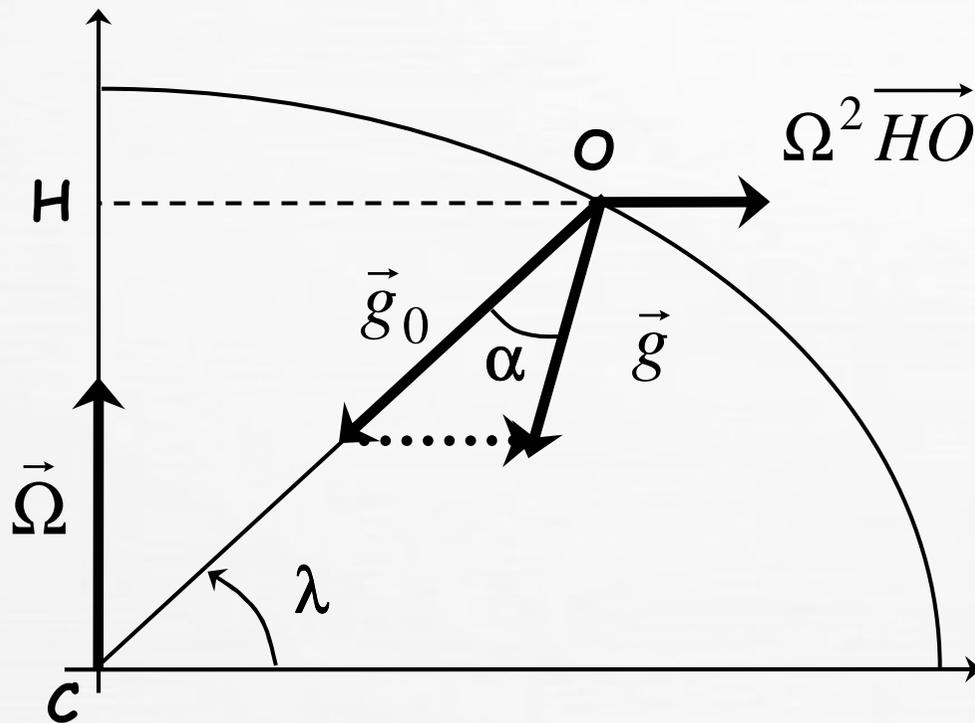


Mécanique du point matériel



➤ I - Le référentiel terrestre :

2- Le poids d'un corps :



Immobilité relative d'une personne située sur un pèse -personne en O :

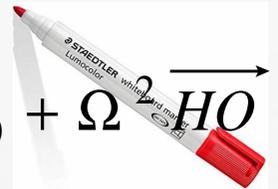
$$-G \frac{mM_T}{R_T^2} \vec{u}_z + m\Omega^2 \overrightarrow{HO} + \vec{R} = \vec{0}$$

Comme dans l'exemple de l'ascenseur, on définit : $\vec{P}_{app} = \vec{P} = -\vec{R}$

$$\vec{P} = -G \frac{mM_T}{R_T^2} \vec{u}_z + m\Omega^2 \overrightarrow{HO}$$

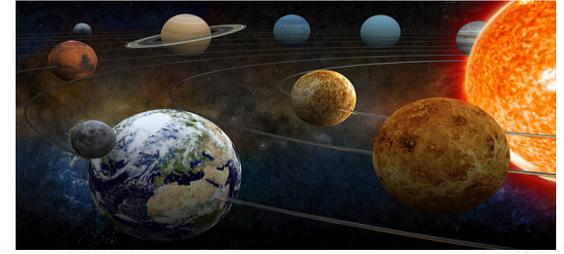
En posant $\vec{P} = m\vec{g}$, il vient :

$$\vec{g} = -G \frac{M_T}{R_T^2} \vec{u}_z + \Omega^2 \overrightarrow{HO} = \vec{g}_0 + \Omega^2 \overrightarrow{HO}$$





Mécanique du point matériel



g est appelée accélération de la pesanteur et comprend deux termes :

- * le terme **gravitationnel** g_0 (prépondérant)
- * le **terme centrifuge** $\Omega^2 OH$ (faible)

La direction du fil à plomb (la verticale du lieu, donnée par la direction du poids mg) n'est pas confondue avec le rayon terrestre CO (écart d'un angle α).

Quelques valeurs numériques :

$$|g_0| = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9,81 \text{ m.s}^{-2} = g_{\text{Pôles}}$$

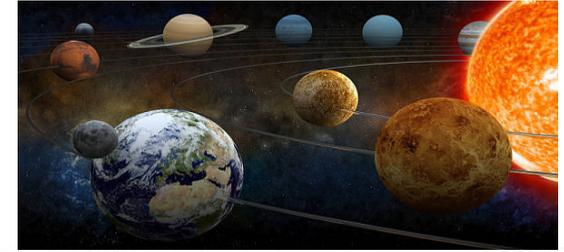
$$(\Omega^2 HO)_{\text{max}} = \Omega^2 R_T \approx 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-2} \quad (\text{à l'équateur})$$

$$\frac{g_0 - g_{\text{équateur}}}{g_0} \approx 3,4 \cdot 10^{-3} = 0,34 \%$$

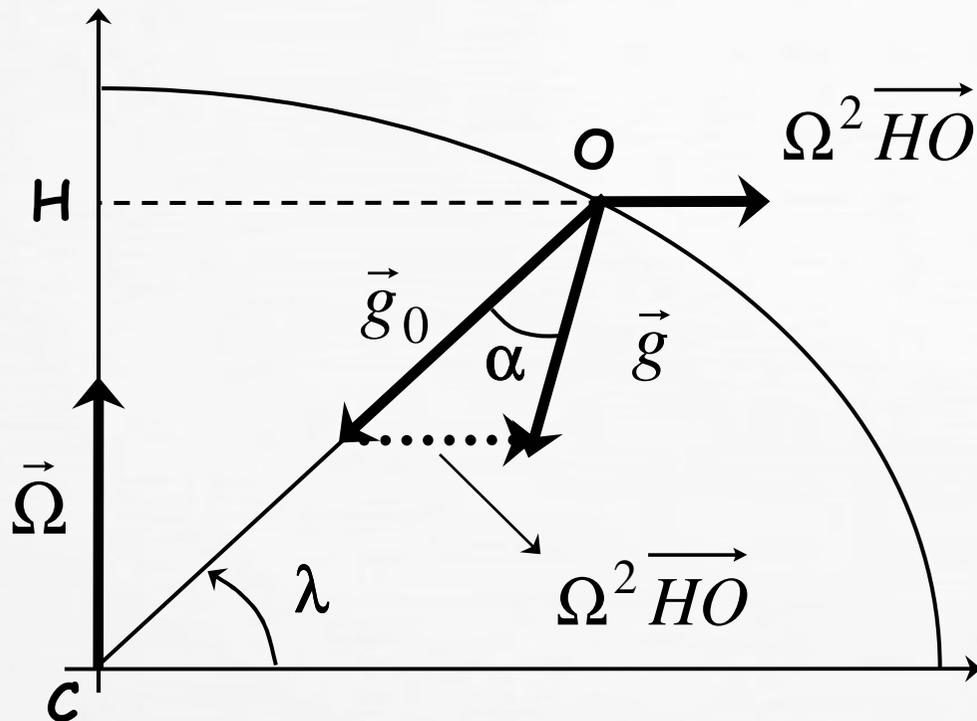




Mécanique du point matériel



Evaluation de l'angle d'inclinaison α :



$$\frac{\sin \alpha}{\Omega^2 HO} = \frac{\sin \lambda}{g}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin \lambda}{g} \Omega^2 HO$$

$$\sin \alpha \approx \alpha ; g \approx g_0 ; HO = R_T \cos \lambda$$

$$\alpha \approx \frac{\sin \lambda}{g_0} \Omega^2 R_T \cos \lambda = \frac{\Omega^2 R_T}{2 g_0} \sin 2 \lambda$$

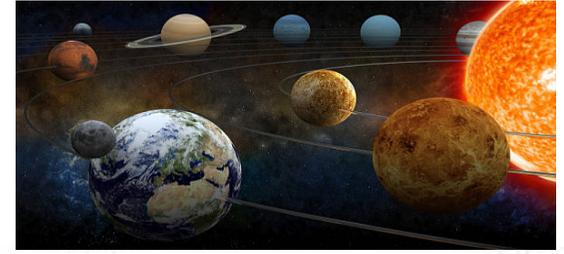
AN : $\alpha_{\max} \approx 0,0017 \text{ rad} = 0,1^\circ$ (Pour $\lambda = 45^\circ$)

Quelle devrait la vitesse de rotation de la Terre pour être en état d'apesanteur ?





Mécanique du point matériel



➤ I - Le référentiel terrestre :

3 - Effets de la force de Coriolis :

* **Déplacements parallèles au sol** : un mobile se déplace selon un méridien ou un parallèle.

La force de Coriolis est toujours dirigée vers la droite dans le sens du mouvement (dans l'hémisphère Nord) et vers la gauche dans le sens du mouvement (dans l'hémisphère Sud).

On le montre à partir de la définition de la force de Coriolis :

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}'$$

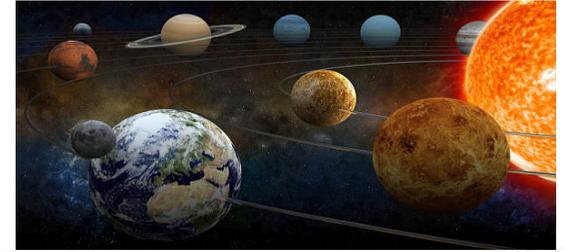
Dans l'hémisphère Nord :

- * La rive droite des fleuves est souvent plus érodée que la rive gauche
- * Les rails de chemin de fer sont davantage usés à droite.

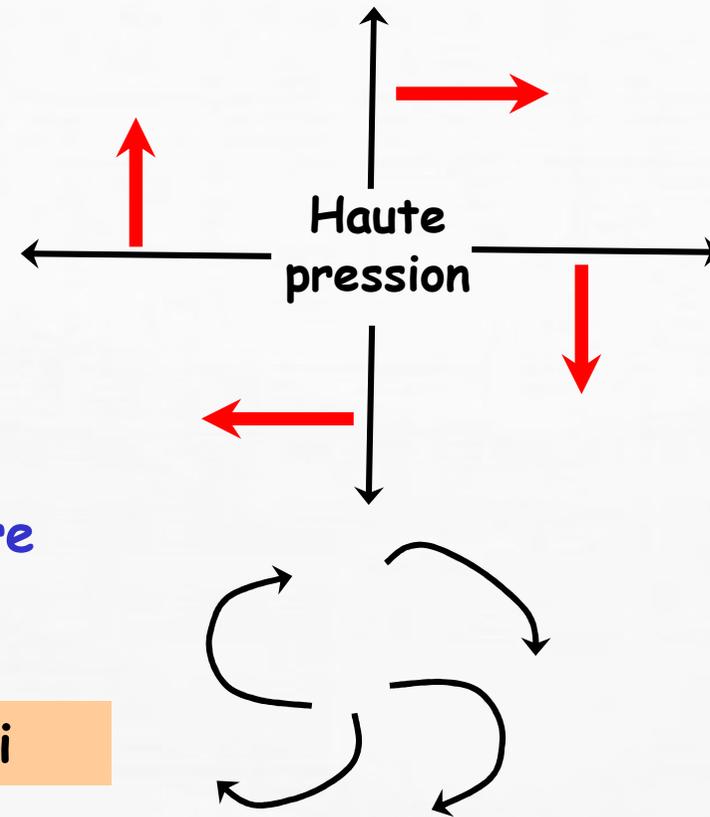
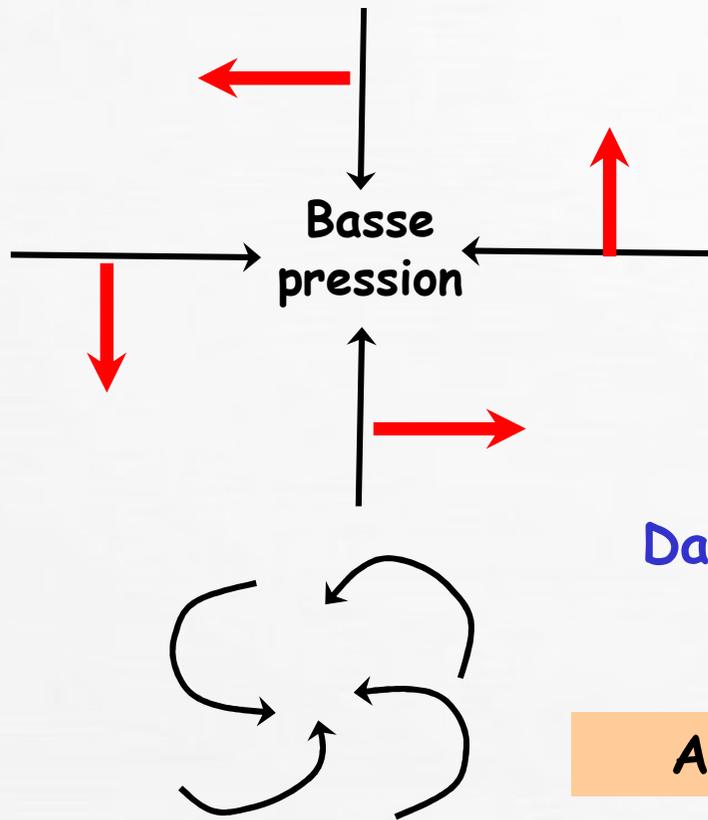




Mécanique du point matériel



* Enroulement des dépressions et des anticyclones :



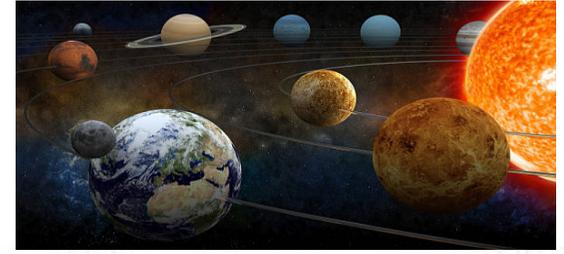
Dans l'hémisphère Nord

Animation Cabri





Mécanique du point matériel



Exercice : (deux trains qui se croisent)

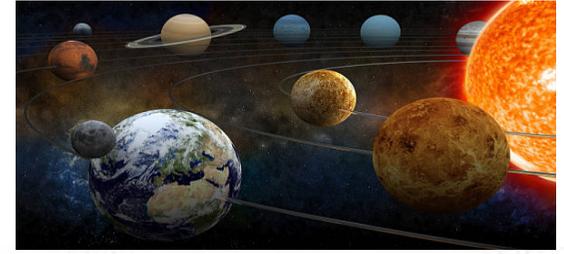
Deux trains identiques, de masse $m = 10 \text{ t}$ (et assimilés à des points matériels), animés d'un mouvement uniforme (de vitesse égale à $v = 144 \text{ km.h}^{-1}$) le long d'un parallèle (situé à la latitude $\lambda = 45^\circ$), se croisent.

Calculer la différence des forces de réaction sur les rails du train qui se dirige vers l'Est et de celui qui se dirige vers l'Ouest.





Mécanique du point matériel



Chute libre verticale : un mobile se trouve à l'instant $t = 0$ sur l'axe (Oz) à une hauteur h . On le lâche sans vitesse initiale (pas de frottements).

Dans l'hypothèse où le **référentiel terrestre est galiléen**, la chute libre est verticale et on peut écrire :

$$v_z = -g_0 t \quad ; \quad z = -\frac{1}{2} g_0 t^2 + h$$

La **prise en compte de la force de Coriolis** entraîne une légère déviation vers l'Est (force dirigée selon les $x > 0$) :

$$\vec{f}_{ie} = -2m\vec{\Omega} \wedge v_z \vec{u}_z = -2m\Omega(\cos \lambda \vec{u}_y + \sin \lambda \vec{u}_z) \wedge v_z \vec{u}_z$$

$$\vec{f}_{ie} = -2mv_z \Omega \cos \lambda \vec{u}_x = (2mg_0 \Omega \cos \lambda) t \vec{u}_x$$

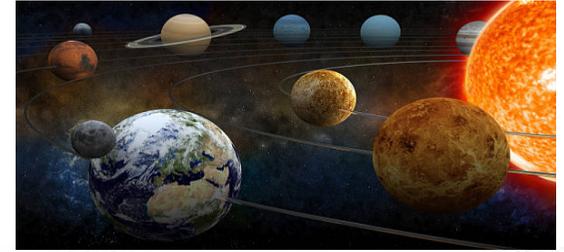
Ordre de grandeur de la déviation observée :

$$h = 100 \text{ m} \quad ; \quad \lambda = 45^\circ \quad \text{alors} \quad x = 1,5 \text{ cm}$$





Mécanique du point matériel

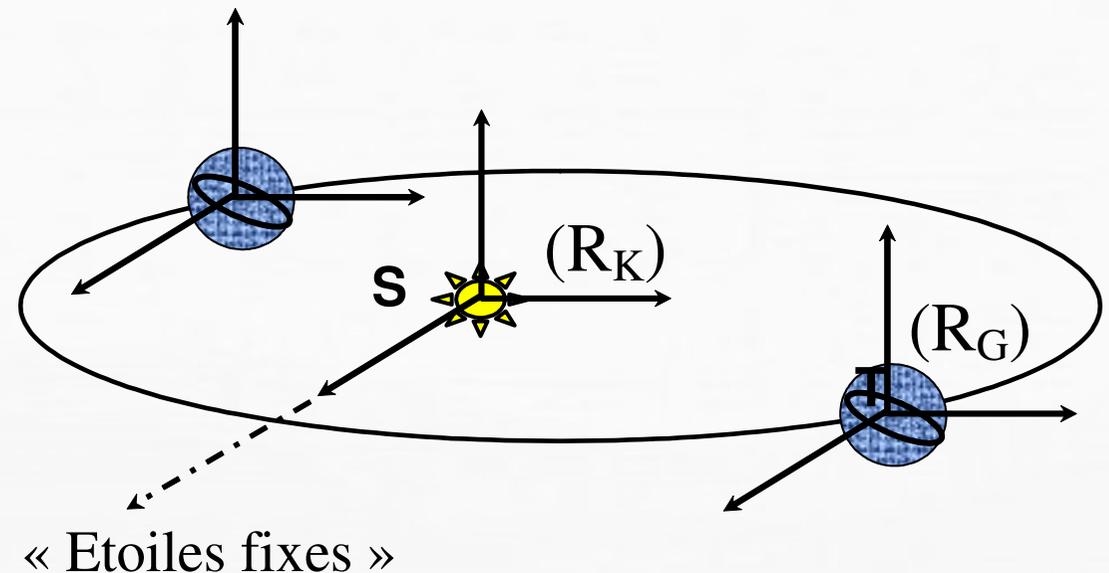


➤ II - Le référentiel géocentrique :

1 - Définitions et notations :

*** Origine : le centre d'inertie de la Terre

*** Trois axes dirigés vers trois étoiles lointaines « fixes »



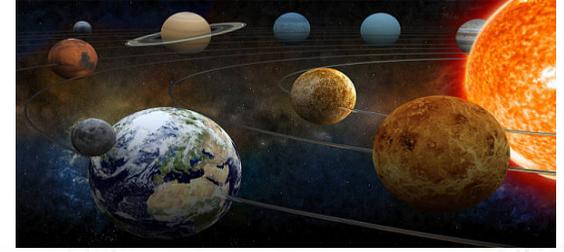
(R_G) a un mouvement de translation quasi-circulaire par rapport au référentiel de Kepler (R_K) . La période est de 365,25 jours (année sidérale).

(R_G) n'est pas, en toute rigueur, galiléen.





Mécanique du point matériel



➤ II - Le référentiel géocentrique :

2 - Accélération d'entraînement de (R_G) par rapport à (R_K) :

Le théorème du centre d'inertie, appliqué à la Terre, donne :

$$M_T \vec{a}_T = -\frac{GM_T M_S}{TS^3} \vec{ST} - \frac{GM_T M_L}{TL^3} \vec{LT}$$

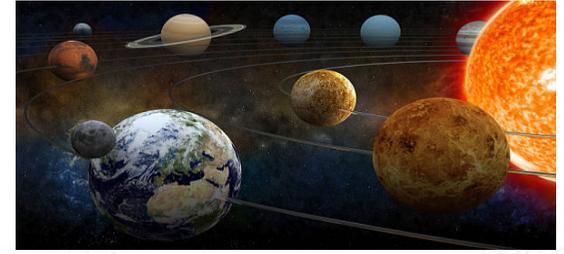
$$\vec{a}_T = -\frac{GM_S}{TS^3} \vec{ST} - \frac{GM_L}{TL^3} \vec{LT}$$

a_T représente l'accélération d'entraînement du référentiel (R_G) dans son mouvement de translation quasi circulaire autour de (R_K) .





Mécanique du point matériel



➤ II - Le référentiel géocentrique :

3 - Le champ des marées :

On considère un point matériel M (m). L'étude de son mouvement est faite dans (R_G) , considéré **comme non galiléen** (M peut être une particule d'eau d'un océan, par exemple).

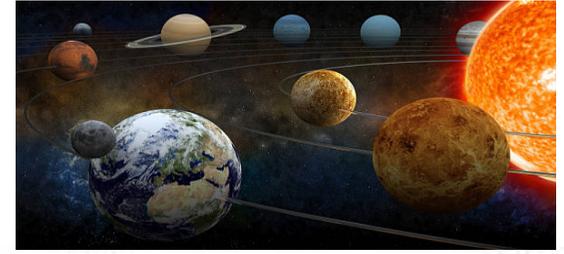
M est soumis aux forces suivantes :

- Les forces **gravitationnelles** exercées par la Terre, le Soleil, la Lune (éventuellement les autres planètes ...).
- Des forces **appliquées F** (électriques, magnétiques, réaction, ...)
- La force **d'inertie d'entraînement**, $f_{ie} = -ma_T$ (la force de Coriolis est nulle car (R_G) est en translation par rapport à (R_K)).





Mécanique du point matériel



Le PFD appliqué dans (R_G) donne :

$$m\vec{a}(M) = -\frac{GmM_T}{TM^3}\vec{TM} + \left(-\frac{GmM_L}{ML^3}\vec{LM} - \frac{GmM_S}{MS^3}\vec{SM} \right) + \vec{F} - m\vec{a}_T$$

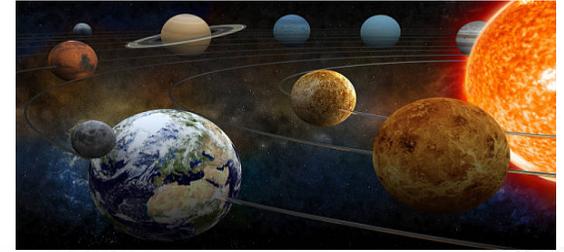
En remplaçant \vec{a}_T par son expression précédente :

$$m\vec{a}(M) = -\frac{GmM_T}{TM^3}\vec{TM} + \left(-\frac{GmM_L}{ML^3}\vec{LM} - \frac{GmM_S}{MS^3}\vec{SM} \right) + \vec{F} - m \left(-\frac{GM_L}{TL^3}\vec{LT} - \frac{GM_S}{TS^3}\vec{ST} \right)$$

$$m\vec{a} = -\frac{GmM_T}{TM^3}\vec{TM} + m \left(-\frac{GM_L}{ML^3}\vec{LM} + \frac{GM_L}{TL^3}\vec{LT} \right) + m \left(-\frac{GM_S}{MS^3}\vec{SM} + \frac{GM_S}{TS^3}\vec{ST} \right) + \vec{F}$$



Mécanique du point matériel



$$m\vec{a} = -\frac{GmM_T}{TM^3}\vec{TM} + m\left(-\frac{GM_L}{ML^3}\vec{LM} + \frac{GM_L}{TL^3}\vec{LT}\right) + m\left(-\frac{GM_S}{MS^3}\vec{SM} + \frac{GM_S}{TS^3}\vec{ST}\right) + \vec{F}$$

↓
Champ gravitationnel terrestre au point M

↓
Différence des champs gravitationnels (due à la Lune) aux points M et T (centre de la Terre).

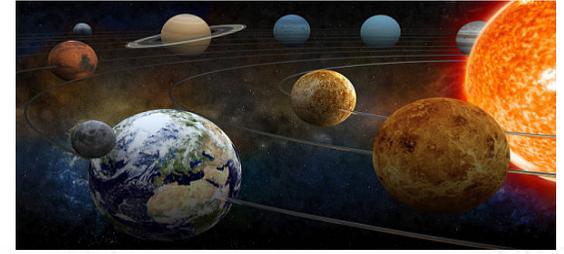
↓
Différence des champs gravitationnels (due au Soleil) aux points M et T (centre de la Terre).

↓
Autres forces





Mécanique du point matériel



$$\vec{\varphi}_L = \left(-\frac{GM_L}{ML^3} \overrightarrow{LM} + \frac{GM_L}{TL^3} \overrightarrow{LT} \right) = \vec{G}_L(M) - \vec{G}_L(T)$$

$$\vec{\varphi}_S = \left(-\frac{GM_S}{MS^3} \overrightarrow{SM} + \frac{GM_S}{TS^3} \overrightarrow{ST} \right) = \vec{G}_S(M) - \vec{G}_S(T)$$

φ_L et φ_S sont appelés « **champs des marées** ».

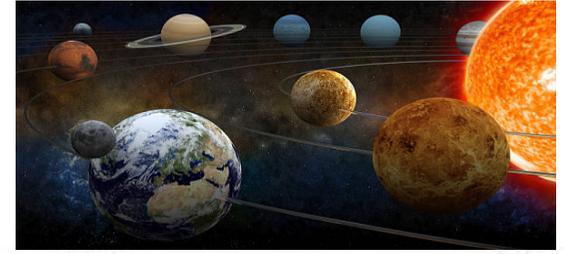
Ce sont des termes différentiels qui, lorsqu'ils sont négligés, conduisent à considérer le référentiel géocentrique comme étant galiléen.

Nous allons voir que ces champs permettent d'expliquer qualitativement le phénomène des marées océaniques.





Mécanique du point matériel



➤ II - Le référentiel géocentrique :

4 - Les marées océaniques :

Hypothèses (théorie statique des marées) :

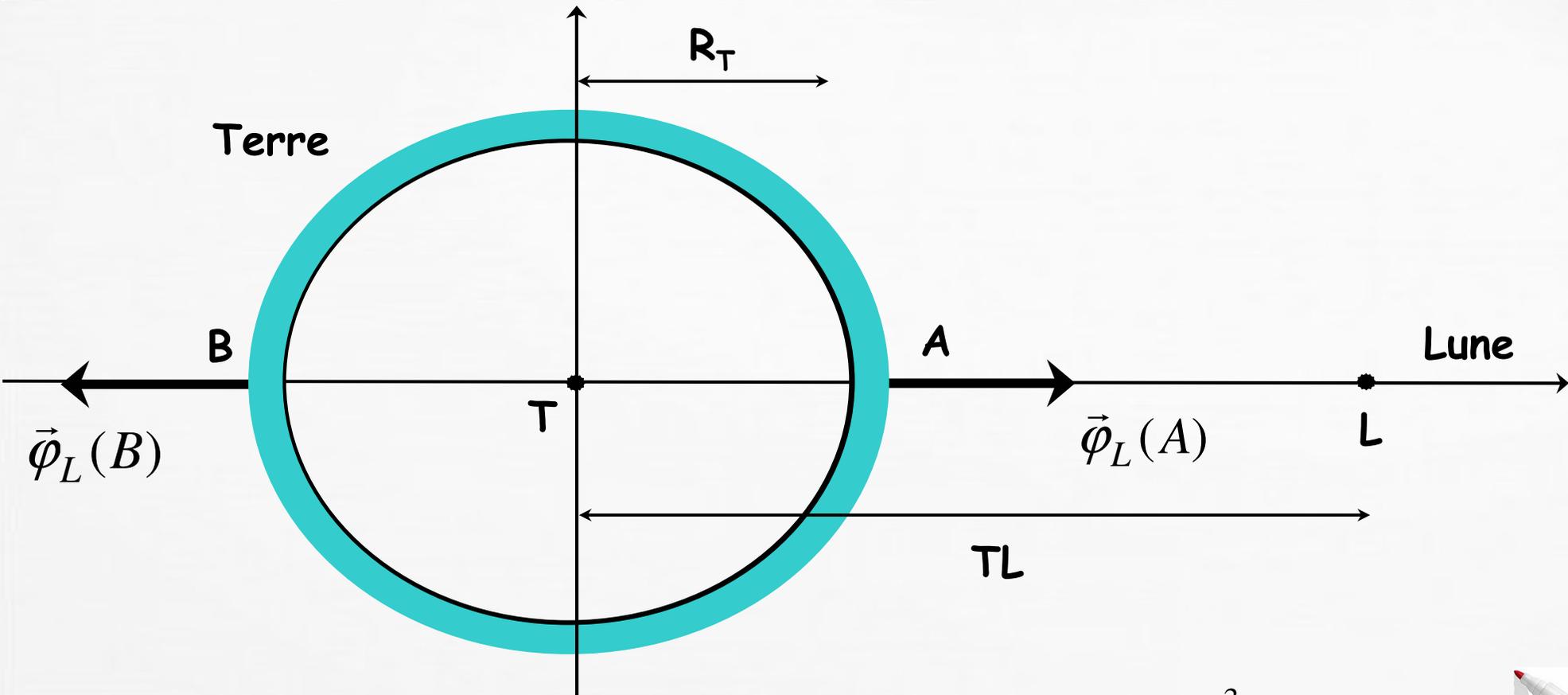
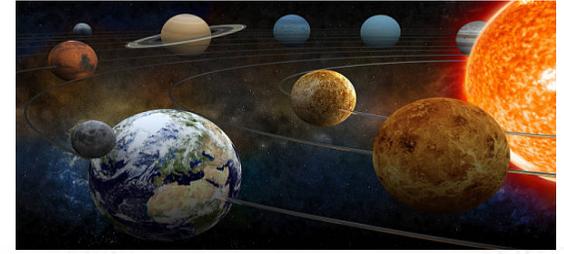
- Pas de rotation propre de la Terre.
- La Terre serait, en l'absence de phénomène des marées, recouverte uniformément d'eau au repos dans (R_G).
- On prend en compte l'effet de la Lune et du Soleil (« champs des marées »).

On considère tout d'abord l'influence de la Lune.





Mécanique du point matériel

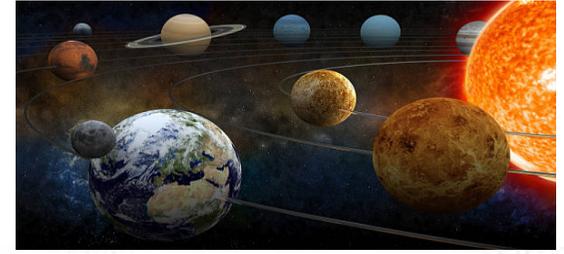


$$\varphi_L(A) = \varphi_L(B) = 2GM_T \frac{M_L}{TL^3} R_T = 2g_0 \frac{M_L}{M_T} \left(\frac{R_T}{TL} \right)^3 = 1,1 \cdot 10^{-7} g_0$$





Mécanique du point matériel



Le champ des marées dû au Soleil vaut, aux mêmes points A et B :

$$\varphi_S(A) = \varphi_S(B) = 2GM_T \frac{M_S}{TS^3} R_T = 2g_0 \frac{M_S}{M_T} \left(\frac{R_T}{TS} \right)^3 = 5,1 \cdot 10^{-8} g_0$$

On constate que :

$$\frac{\varphi_L(A)}{\varphi_S(A)} = 2,2$$

Les contributions de la Lune et du Soleil sont du même ordre de grandeur.

Prendre en compte de la rotation propre de la Terre et d'autres choses plus compliquées !

