CULTURE SCIENCES PHYSIQUE

Ressources scientifiques
pour l'enseignement de la physique

Un partenariat entre
ENS DE LYON éduscol

Écoulement de Poiseuille d'un fluide visqueux

Auteur(s) :

Olivier Granier

Lycée Jacques Decour, Paris

Delphine Chareyron

ENS Lyon

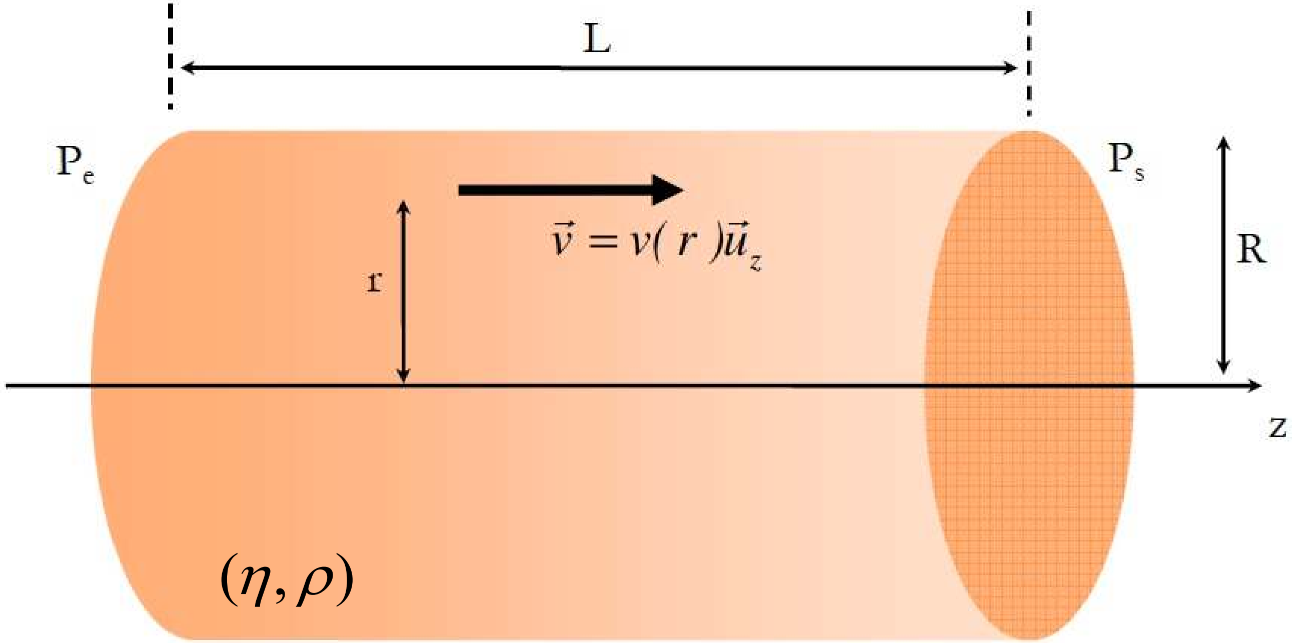
Nicolas Taberlet

ENS Lyon

Le projet « La physique animée » est une collaboration entre l'Université des sciences en ligne (Unisciel) et le site CultureSciencesPhysique de l'ENS de Lyon

Réalisation : Olivier Granier, Delphine Chareyron, Nicolas Taberlet - Illustrations : Justine Chapelon - Montage : Delphine Chareyron - Images studio et incrustation : ENSmédia - Image Labo : Chez Moi Prod - Assistance graphique : Coralie Passaret - Musique : Stéphane Arbon.

Écoulement de Poiseuille : champ des vitesses



On s’intéresse à l’écoulement d’un fluide visqueux dans une conduite cylindrique horizontale de rayon R et de longueur L, en régime stationnaire, c’est-à-dire indépendant du temps.

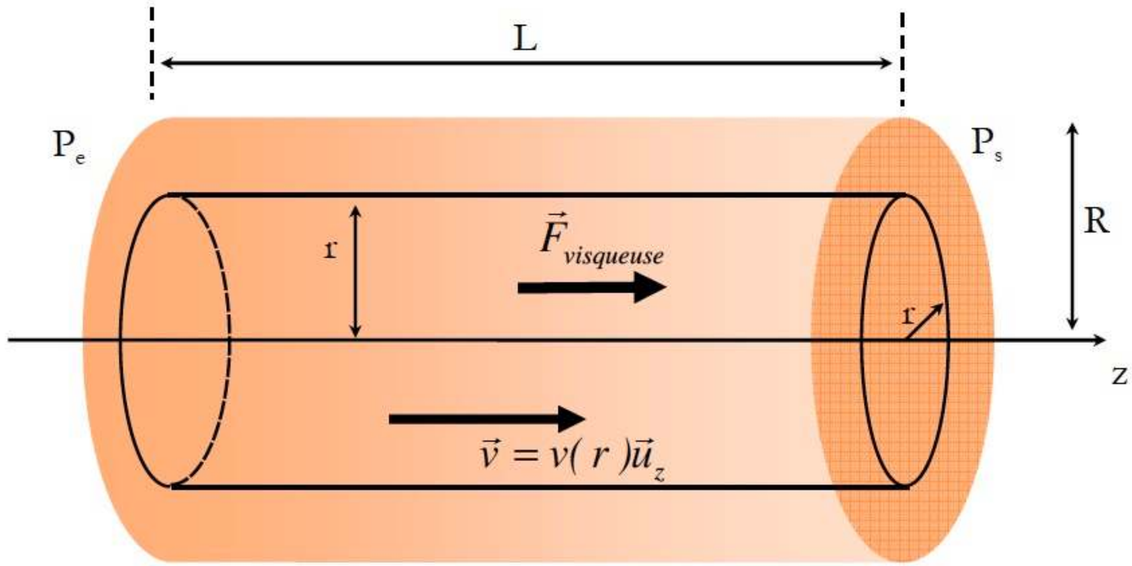
Le nombre de Reynolds de l’écoulement est supposé être plus petit que 2 000. L’écoulement est alors laminaire et les lignes de courant sont parallèles à l’axe du cylindre, les tranches de fluide glissant progressivement les unes sur les autres sans se croiser.

Le vecteur vitesse de l’écoulement pourra s’écrire :

$$\vec{v} = v(r)\vec{u}_z$$

La vitesse est nulle sur les parois, par adhérence du fluide visqueux, et maximale au centre de la conduite.
On va montrer que le profil des vitesses pour cet écoulement laminaire est parabolique.

Nous négligerons la pesanteur dans un tel écoulement.

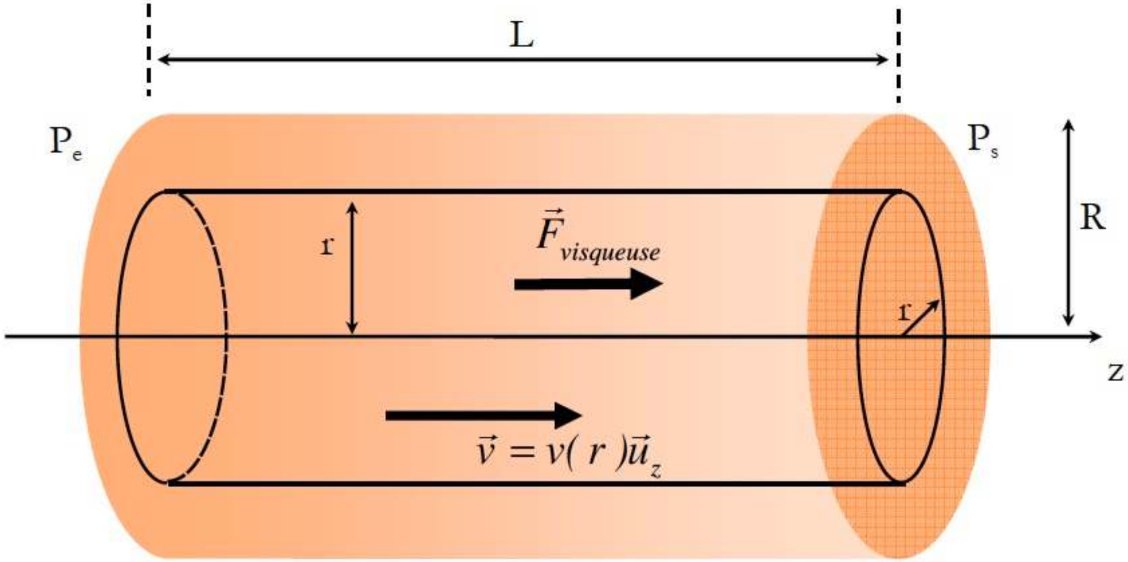


On considère la portion de fluide cylindrique, de rayon r et de longueur celle de la conduite L, centrée sur l'axe.

On note P_e la pression à l'entrée de cette portion de fluide et P_s la pression en sortie.

On applique le théorème de la résultante cinétique au système constitué de cette portion de fluide à l'instant t et de la masse dm qui y rentre entre les instants t et t + dt.
A l'instant t + dt, ce système est constitué de la même portion de fluide contenu dans le cylindre de rayon r et de la masse dm qui en est sortie entre les instants t et t + dt.
En régime stationnaire, la variation de quantité de mouvement de ce système fermé est alors simplement nulle.
Par conséquent, la somme des forces qui s'exercent sur ce système est également nulle :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$



Soit la force de pression en amont, $\pi r^2 P_e$, moins la force de pression en aval, $\pi r^2 P_s$ plus la force de frottement visqueuse F qui s'exerce sur la surface latérale du cylindre de rayon r qui est égale à 0 :

$$\pi r^2 P_e - \pi r^2 P_s + F = 0$$

L'interprétation physique de ce résultat est simple : lorsqu'un liquide visqueux s'écoule dans un tuyau, la pression diminue lorsqu'on se déplace dans le même sens que l'écoulement : cela crée une force dans le sens de l'écoulement qui contrebalance la force de frottement causée par la viscosité du liquide.

Pour un fluide visqueux newtonien, la force de viscosité F est donnée par:

$$F = \eta \frac{dv(r)}{dr} 2\pi r L$$

On en déduit :

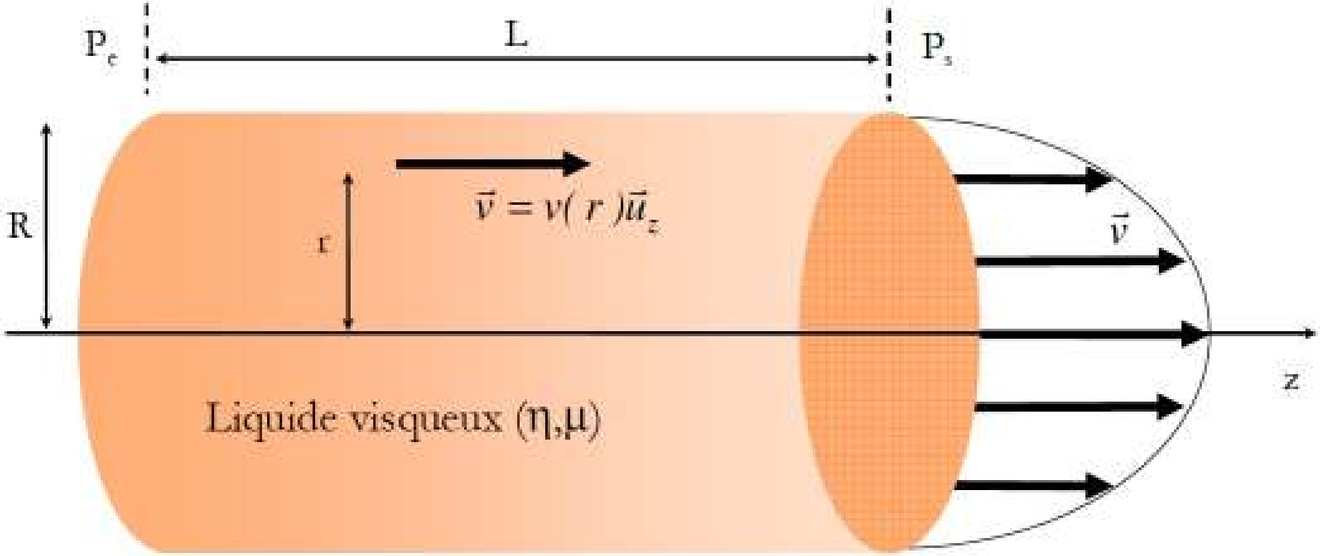
$$\pi r^2 P_e - \pi r^2 P_s + \eta \frac{dv(r)}{dr} 2\pi r L = 0$$

Ce qui permet d'isoler la dérivée :

$$\frac{dv(r)}{dr} = -\frac{P_e - P_s}{2\eta L} r$$

Et d'obtenir, en écrivant que le fluide colle à la paroi en r=R et donc que sa vitesse y est nulle, le champ des vitesses par intégration :

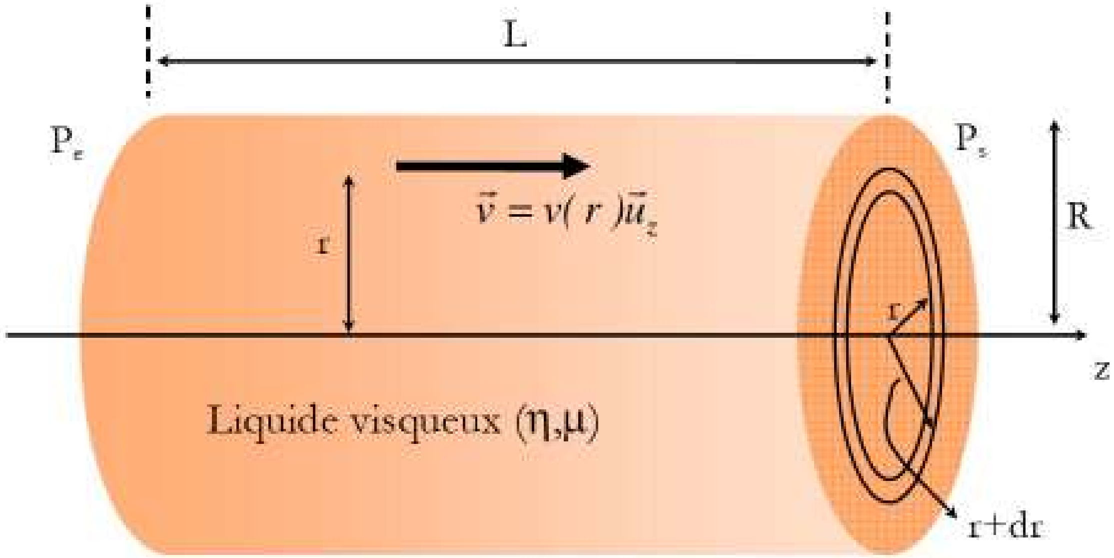
$$v(r) = \frac{P_e - P_s}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$



On peut tracer l’allure du profil des vitesses, c’est-à-dire tracer la courbe qui passe par les extrémités des vecteurs vitesses, ces derniers étant dessinés à partir d’un plan z=cste.

Le profil obtenu est bien parabolique.

Débit volumique :



Le débit volumique dans la conduite est le flux du vecteur vitesse à travers une section transverse quelconque, soit, en prenant comme surface élémentaire celle comprise entre deux cercles de rayons r et r+dr :

$$D_v = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \int_0^R \frac{P_e - P_s}{4\eta L}(R^2 - r^2) 2\pi r dr$$

D'où l'expression du débit volumique, qui constitue la loi de Poiseuille :

$$D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L}(P_e - P_s)$$

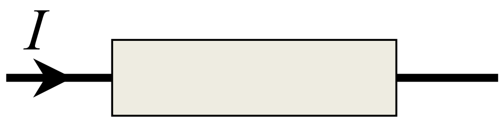
Résistance hydraulique :

La différence de pression P_e- P_s est le « moteur » de l'écoulement. Encore appelée « perte de charge », elle est proportionnelle au débit volumique :

$$P_e - P_s = \Delta P = \frac{8\eta L}{\pi R^4} D_v$$

On peut, par analogie avec la loi d'Ohm valable pour les conducteurs ohmiques en électricité, définir une résistance hydraulique sous la forme :

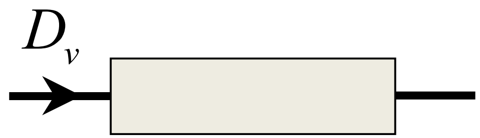
Électrique



$$V_1 - V_2 = \Delta V = RI$$

$$\left(R = \frac{\rho L}{\pi R^2} \right)$$

Hydraulique



$$P_e - P_s = \Delta P = R_{hyd} D_v$$

$$\left(R_{hyd} = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \right)$$

De la même manière qu'en électricité où l'on définit la résistance électrique d'un fil de cuivre de résistivité ρ, de longueur L et de rayon R, parcouru par un courant I quand la tension à ses bornes est V_1- V_2 sous la forme …

Les conclusions seront les mêmes que ce soit pour un mouvement d'électrons ou de liquide visqueux : plus la longueur parcourue est grande ou plus le rayon est faible et plus sont importants les frottements et donc les résistances.

On peut finir par un exemple d'ordre de grandeur :

Un robinet de jardin a été installé à 50 m de l'arrivée principale d'eau où la pression vaut 3 bars.

Le tuyau de raccordement utilisé pour rejoindre le robinet de jardin a un diamètre intérieur standard de 1 cm.

Le débit volumique souhaité est de 0,4 L/s.

La viscosité de l'eau est $\eta=10^{-3}$ Poiseuille.

On évalue la perte de charge pour cet écoulement de Poiseuille laminaire :

$$P_e - P_s = \frac{8\eta L}{\pi R^4} D_v \approx 80.10^3\, Pa \approx 0,8\, bar$$

Et on obtient une valeur de l'ordre de 0,8 bar, qui est loin d'être négligeable.