

Etude des réseaux de diffraction (PC*)



Un réseau est constitué par la répétition périodique d'un motif diffractant, comme par exemple une fente. Les interférences entre les rayons issus des nombreux motifs successifs privilégient alors précisément certaines directions dans lesquelles l'énergie lumineuse est envoyée.

Ce chapitre traite de la diffraction de la lumière par un réseau ainsi que de ses applications.

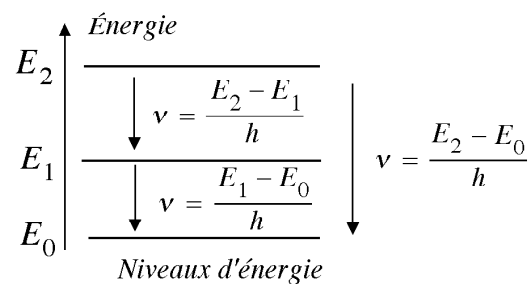
I) Intérêt d'un réseau :

Spectre d'émission :

Lorsque les atomes d'un gaz sont excités, ils émettent des radiations caractéristiques des éléments chimiques qui constituent le gaz.

Un atome excité émet un photon, c'est-à-dire un train d'ondes, à une fréquence ν telle que :

$$\Delta E = h \nu \quad (h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (\text{constante de Planck}))$$



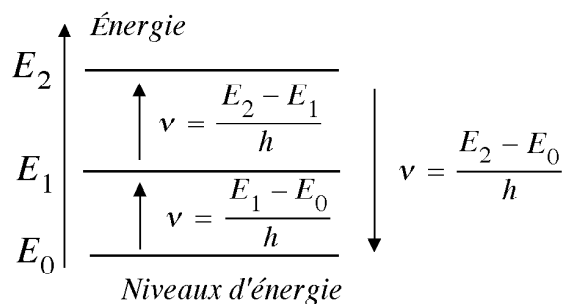
L'étude des spectres d'émission permet de connaître la composition du gaz.

En astronomie, on peut ainsi connaître la composition des gaz de la couche externe des étoiles.

En raison de l'effet Doppler, les fréquences sont un peu décalées ; on peut en déduire la vitesse avec laquelle l'étoile observée s'éloigne de la Terre.

Spectre d'absorption :

Lorsqu'un faisceau de lumière blanche traverse un milieu « transparent », ce dernier absorbe sélectivement des radiations caractéristiques du milieu traversé.



L'étude du spectre d'absorption permet de connaître la composition du milieu absorbant.

Dispersion de la lumière avec un réseau :

On peut séparer les composantes monochromatiques de la lumière avec un prisme, ou mieux, avec un réseau.

II) Réseau par transmission :

Un réseau par transmission est constitué par un très grand nombre de fentes parallèles et équidistantes.

Il est souvent constitué par une lame de verre sur laquelle on a tracé un très grand nombre de traits parallèles et équidistants (de l'ordre de 500 traits par millimètre !).

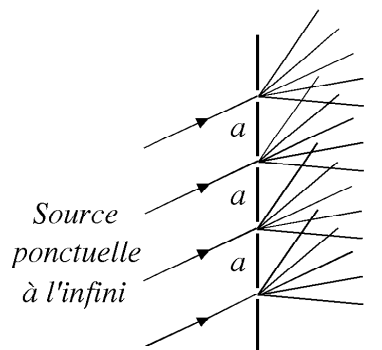
La distance a entre deux fentes successives s'appelle le *pas du réseau*.

Densité de traits : Le réseau est caractérisé par son pas a qui est la distance séparant deux motifs diffractants consécutifs. On définit la densité de traits $n = \frac{1}{a}$ (nombre de traits par mètre). Le tableau suivant donne les ordres de grandeur pour différents types de réseau :

Qualité	$n \text{ (m}^{-1}\text{)}$	$n \text{ (Lines Per Inch)}$	$a \text{ (}\mu\text{m)}$	Largeur	N
moyenne		10^3	30	2 cm	~ 2000
Classique	$\sim 4 \cdot 10^5$	10^4	~ 3	3 cm	$\sim 10\,000$
Excellente	$\sim 4 \cdot 10^6$	10^5	$\sim 0,3$	4 cm	$\sim 40\,000$

Soit une source ponctuelle, à l'infini, qui éclaire le réseau.

Chaque fente diffracte la lumière.



Réseau (vu en coupe)

Les rayons issus des différentes fentes interfèrent entre eux.

On s'intéresse seulement aux interférences à l'infini.

Remarque : la surface d'un CD ou DVD est formée de petits motifs répétés et constitue pratiquement un réseau. On remarque que cette surface décompose la lumière blanche et qu'elle apparaît colorée différemment selon l'orientation du disque.

III) Théorie élémentaire du réseau :

Soit une source S ponctuelle et monochromatique, à l'infini, qui envoie un faisceau de lumière parallèle et arrivant sur le réseau sous l'angle d'incidence i .

On cherche les directions θ pour lesquelles l'intensité des rayons qui interfèrent à l'infini est maximale.

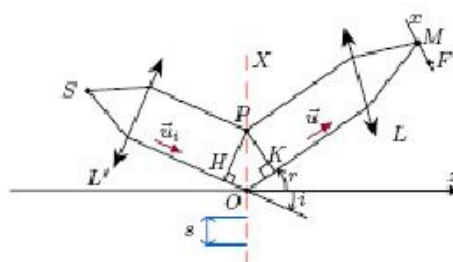
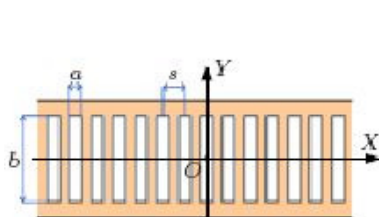
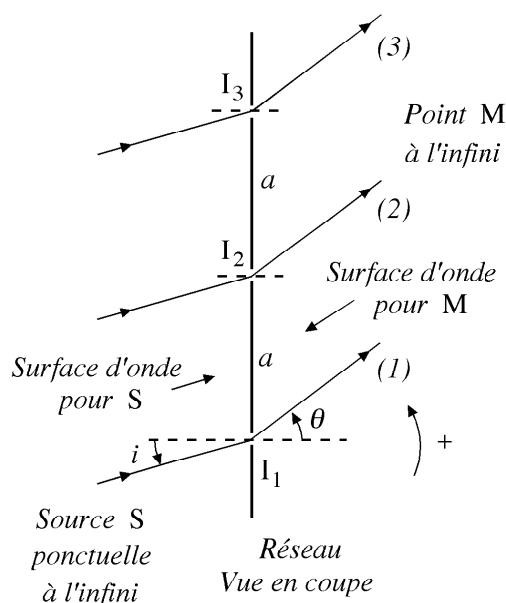
Il y a interférences à l'infini entre tous les rayons diffractés selon la direction θ .

L'amplitude diffractée par le réseau à l'infini résulte des interférences entre les rayons issus de tous les motifs éclairés : on parle d'interférences à N ondes (dans le cas des trous d'Young, il s'agit d'interférences à deux ondes).

La différence de marche entre les deux rayons (1) et (2) est :

$$\delta = (SM)_1 - (SM)_2 = a \sin \theta - a \sin i = a(\sin \theta - \sin i)$$

(Attention ! Les angles i et θ peuvent être très grands ; on n'est pas dans les conditions de Gauss : il n'y a pas de lentilles !)



S'il n'y avait que les rayons (1) et (2), l'intensité en M serait égale à :

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0} \right) \right]$$

L'intensité $I(M)$ serait maximale pour :

$$2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = 2\pi n \quad \text{soit} \quad \delta(M) = m\lambda_0 \quad (m \in \mathbb{Z})$$

Les rayons (1) et (2) sont en phase.

Si la différence de chemin optique entre les rayons (1) et (2) vaut $m\lambda_0$:

- la différence de chemin optique entre les rayons (2) et (3) vaut aussi $m\lambda_0$
- la différence de chemin optique entre les rayons (1) et (3) vaut $2m\lambda_0$

Tous les rayons qui interfèrent en M à l'infini sont donc en phase : il y a un maximum de lumière dans cette direction d'angle θ .

Pour un angle d'incidence i donné, les angles θ correspondant à un maximum de lumière (les interférences entre les ondes issues de deux motifs successifs sont constructives) sont donnés par la relation : (« formule des réseaux »)

$$a(\sin \theta - \sin i) = m\lambda_0 \quad \text{soit} \quad \sin \theta - \sin i = m \frac{\lambda_0}{a}$$

m est appelé l'ordre du spectre (c'est l'ordre d'interférences).

Remarques :

- Pour un angle i donné, le nombre des valeurs de m est limité car : $-1 \leq \sin \theta \leq 1$.
- Cas d'un réseau en réflexion :

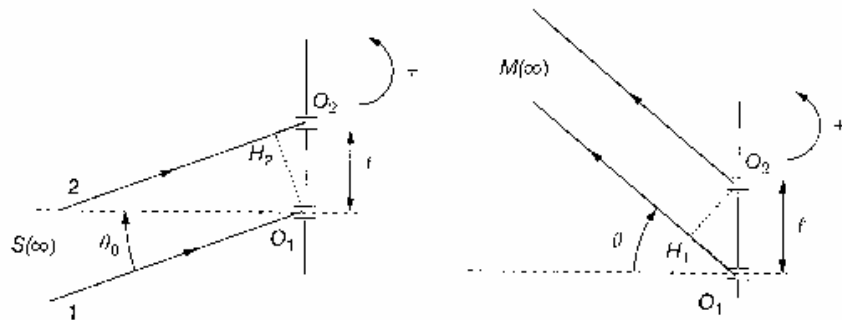
a) Etablir la formule des réseaux pour un réseau en réflexion.

b) Commenter la direction de l'ordre 0.

a) De même que précédemment, la différence de marche entre deux rayons réfléchis par deux motifs successifs est :

$$\delta = (SM)_1 - (SM)_2 = (O_1H_1) - (O_2H_2)$$

avec S et M à l'infini (voir la figure où les parties avant et après la réflexion ont été séparées pour des raisons de visibilité).



Comme $(O_1H_1) = -\ell \sin \theta$ (ne pas oublier que $\theta < 0$) et $(O_2H_2) = \ell \sin \theta_0$, on aboutit à :

$$\delta = \ell(-\sin \theta - \sin \theta_0)$$

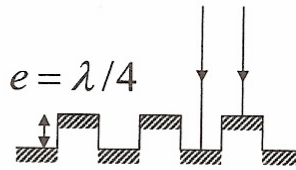
La formule des réseaux en réflexion est donc :

$$\ell(\sin \theta + \sin \theta_0) = m\lambda_0 \quad (m \in \mathbb{Z})$$

b) Dans l'ordre 0, $\sin \theta = -\sin \theta_0$. On en déduit $\theta = -\theta_0$: c'est la direction de l'optique géométrique.

Un exemple d'application directe :

Le dispositif ci-contre est un réseau par réflexion composé de deux rangées décalées de minuscules facettes de miroirs. Lorsqu'il est éclairé normalement par une raie de longueur d'onde λ et que la différence des niveaux est $e = \lambda/4$, le maximum de lumière est-il renvoyé dans la direction de l'optique géométrique ?

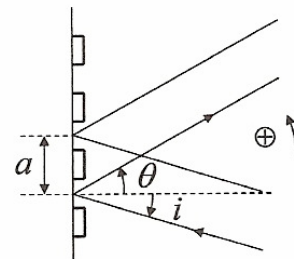


Réponse :

Considérons un motif de ce réseau constitué par deux seules facettes décalées de e . Les deux rayons renvoyés dans la direction de l'optique géométrique interfèrent destructivement puisqu'en opposition de phase ; en effet, leur différence de marche est de $2e = \lambda/2$. Il n'y a donc pas d'intensité lumineuse renvoyée dans la direction de l'optique géométrique !

Exemple ; surface d'un disque CD :

La structure mécanique de la surface d'un disque compact permet de l'assimiler à un réseau par réflexion et explique son aptitude à décomposer la lumière blanche. Suivant un rayon du disque, le pas du réseau est a et l'on note i l'angle d'incidence et θ l'angle de réflexion ; le sens positif des angles est indiqué sur la figure.



- a) Montrer que la relation fondamentale des réseaux par réflexion est, en notant k l'ordre de la diffraction :

$$\sin \theta + \sin i = k\lambda / a$$

et la commenter.

AN : $a = 1,6 \mu\text{m}$, $i = -10^\circ$; calculer, pour l'ordre $k = 1$ les deux valeurs extrêmes

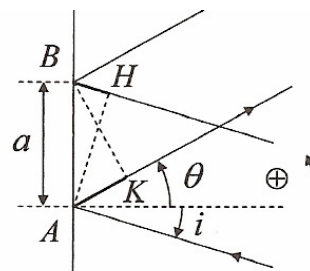
$\theta_{\min}$ et $\theta_{\max}$ correspondants aux longueurs d'onde extrêmes du spectre visible.

- b) Le faisceau de lumière blanche, parallèle et suffisamment large pour éclairer complètement un rayon du disque, est toujours placé tel que $i = -10^\circ$. La largeur de la partie enregistrée d'un CD est $l = 33 \text{ mm}$. À quelle distance minimale D_m faut-il approcher le disque de son œil pour commencer à voir l'ensemble du spectre visible ? (il est conseillé de faire un dessin clair).

Réponses :

- a) Considérons deux points A et B du disque distants du pas a du réseau.

Par rapport au rayon arrivant en A , le rayon arrivant en B est en retard de HB correspondant algébriquement à $a \sin i < 0$ (car $i < 0$).



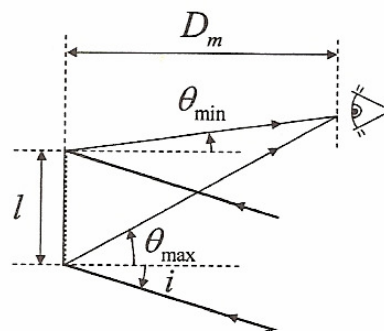
Par rapport au rayon quittant A , le rayon quittant B est en avance de AK correspondant algébriquement à $a \sin \theta > 0$ (car $\theta > 0$).

La différence de marche totale est $\delta = a(\sin \theta + \sin i)$.

Les interférences sont constructives (maximum d'intensité) pour $\delta = k\lambda$, ce qui conduit la formule du réseau par réflexion : $\sin \theta + \sin i = k\lambda / a$

On note que l'ordre $k = 0$ est obtenu dans la direction $\theta = -i$ de la réflexion prévue par l'optique géométrique.

AN : Pour le bleu $\lambda = 0,4 \mu\text{m}$, $\theta_{\min} = 25,1^\circ$;
pour le rouge $\lambda = 0,8 \mu\text{m}$, $\theta_{\max} = 42,3^\circ$.



- b) À une distance trop faible du CD, l'œil n'a pas le champ nécessaire pour percevoir la totalité du spectre. Le rouge et le bleu sont perçus simultanément à la distance minimale D_m lorsque chacune des couleurs provient d'une extrémité de la partie enregistrée. La figure montre clairement que :

$$D_m \tan \theta_{\max} = D_m \tan \theta_{\min} + l \Rightarrow \underline{D_m = \frac{l}{\tan \theta_{\max} - \tan \theta_{\min}} \approx 7,5 \text{ cm}}$$

IV) Interprétation de la formule des réseaux :

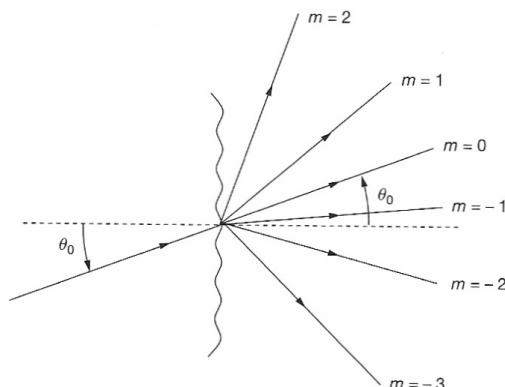
1 – Cas d'une lumière monochromatique :

On suppose que la source ne délivre qu'une seule longueur d'onde et on considère un réseau éclairé sous l'incidence i .

Pour $m = 0$, la formule des réseaux donne $\theta = i$: cette solution est dans la direction de l'optique géométrique.

Les autres solutions peuvent être obtenues numériquement et dépendent de la longueur d'onde.

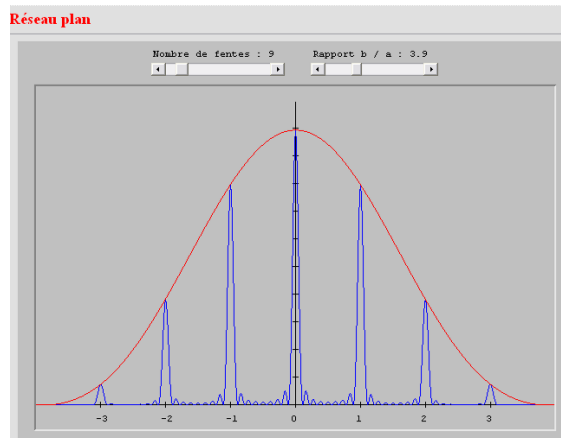
Elles sont représentées sur la figure.



Le rayon incident peut être observé, à la sortie du réseau, dans plusieurs directions.

La mesure précise des directions des rayons diffractés permet d'en déduire la longueur d'onde du rayonnement utilisé, si le pas du réseau est connu : le réseau est alors un spectromètre.

La connaissance de la longueur d'onde permet d'accéder au pas a du réseau.



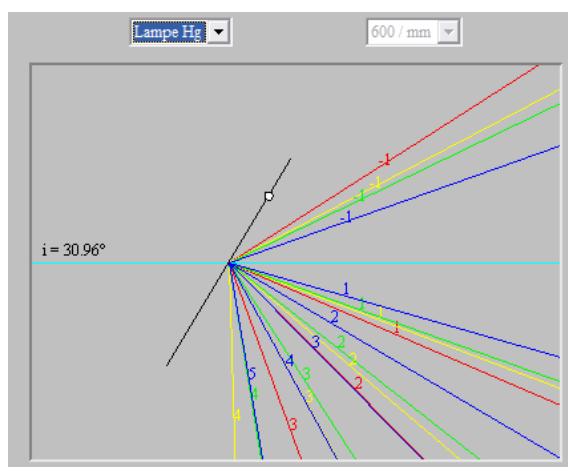
[Animation JJ.Rousseau](#)

2 – Cas de la lumière blanche :

La solution dans la direction de l'optique géométrique :

$$\theta = i \quad \text{pour} \quad m = 0$$

est valable indépendamment de la longueur d'onde. Dans cette direction, on observera de la lumière blanche.



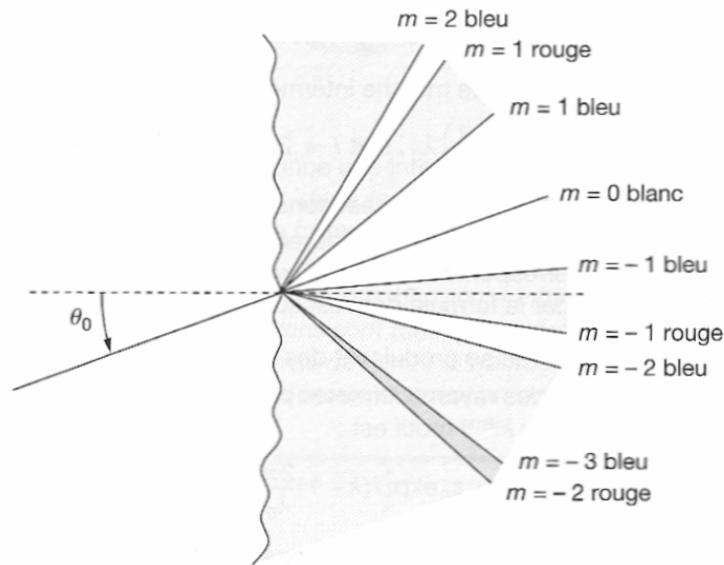
[Animation JJ.Rousseau](#)

En revanche, dans les autres ordres, l'angle θ est fonction de la longueur d'onde. Cela signifie que suivant sa couleur, le rayon émergera du réseau avec un angle différent.

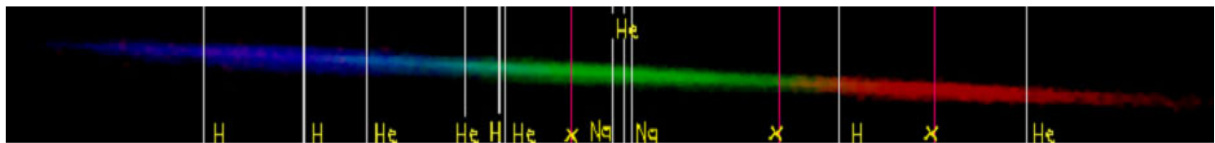
De même que le prisme, le réseau disperse la lumière dans les ordres non nuls. L'ordre nul, qui correspond à la direction de l'optique géométrique, est non dispersif.

Pour un ordre m donné, la déviation augmente du bleu au rouge.

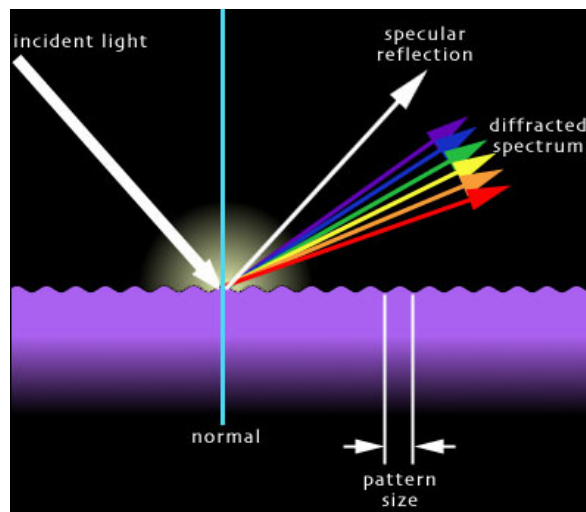
Il se peut parfois que les ordres se recouvrent (un ordre commence alors que le précédent n'est pas achevé) : c'est le cas ici pour les ordres $m = -2$ et $m = -3$.



Remarque : le réseau est préféré au prisme en tant que spectromètre : en effet, la formule des réseaux permet de relier précisément l'angle θ à la longueur d'onde, sans devoir utiliser une propriété d'un milieu. Pour le prisme, en effet, il est nécessaire de connaître la loi donnant la variation d'indice avec la longueur d'onde. Le pouvoir séparateur est également meilleur avec le réseau qu'avec le prisme.



Spectre de Véga, étoile principale de la constellation de la Lyre, située à seulement 25,4 années-lumière du Soleil, réalisé avec un réseau de diffraction)



Exercice d'application ; recouvrement des ordres :

Un réseau comportant $n_0 = 800$ motifs par millimètre est éclairé par une lampe à vapeur atomique en incidence normale. Les longueurs d'onde sont comprises entre $\lambda_{\min} = 404,7 \text{ nm}$ (violet) et $\lambda_{\max} = 579,1 \text{ nm}$ (jaune). Les spectres se recouvrent-ils et si oui, à partir de quel ordre ?

Réponse :

On évalue les déviations des longueurs d'onde extrêmes dans les différents ordres grâce à la formule des réseaux. Le pas est donné par $\ell = 1/n_0 = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$. On en déduit :

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
Violet	$18,9^\circ$	$40,4^\circ$	$76,2^\circ$
Jaune	$27,6^\circ$	$67,9$	/

(La jaune n'existe pas dans les ordres supérieurs ou égaux à 3).

Les ordres ne se recouvrent donc pas.

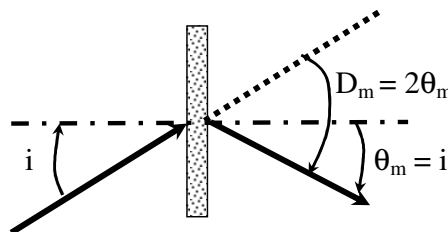
V) Etude expérimentale : (Voir TP)**Fabriquer un réseau plan :**[Expérience de J.J. Rousseau](#)**1) Minimum de déviation dans un ordre donné :**

Pour un ordre m donné, la déviation du rayon incident est :

$$D_m = \theta_m - i \quad (\text{Avec : } \sin \theta_m - \sin i = m \frac{\lambda_0}{a})$$

On cherche un extremum (que l'on supposera être un minimum) de D_m lorsque l'angle d'incidence i varie, pour un ordre m donné :

$$\frac{dD_m}{di} = 0 \quad \text{soit} \quad d\theta_m = di \quad \text{et} \quad \cos \theta_m d\theta_m = \cos i di$$



Finalement, $\cos \theta_m = \cos i$, d'où $\theta_m = -i$ (la solution $\theta_m = i$ n'est pas intéressante car elle correspond à une déviation nulle).

Le rayon diffracté est symétrique du rayon incident par rapport au réseau :

$$D_{\min} = 2\theta_m \quad d'où \quad \sin\left(\frac{D_{\min}}{2}\right) = \frac{m\lambda_0}{a}$$

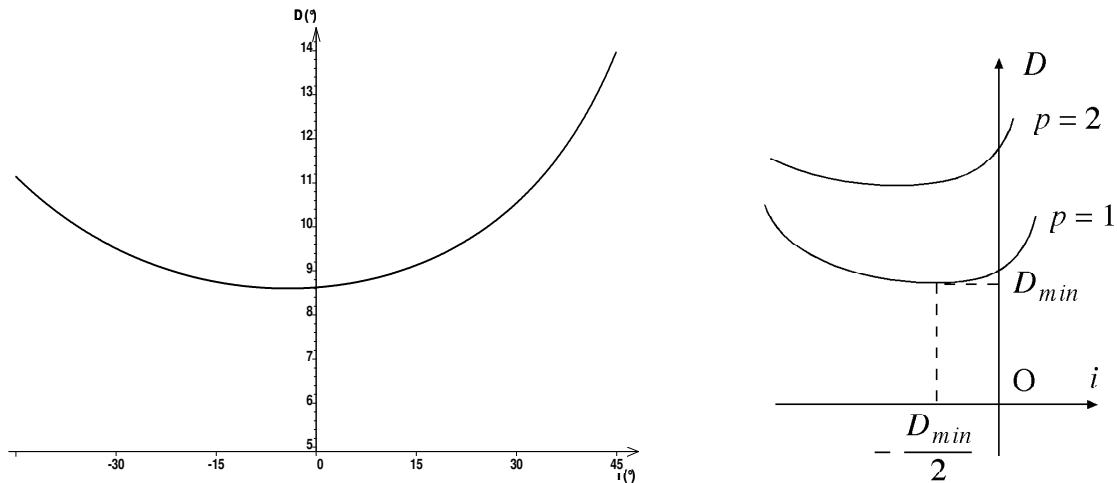
En mesurant D_m , on peut en déduire soit a soit la longueur d'onde dans le vide de la radiation utilisée.

Remarque : cette relation est à comparer à la formule obtenue avec un goniomètre à prisme permettant de mesurer l'indice du prisme :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

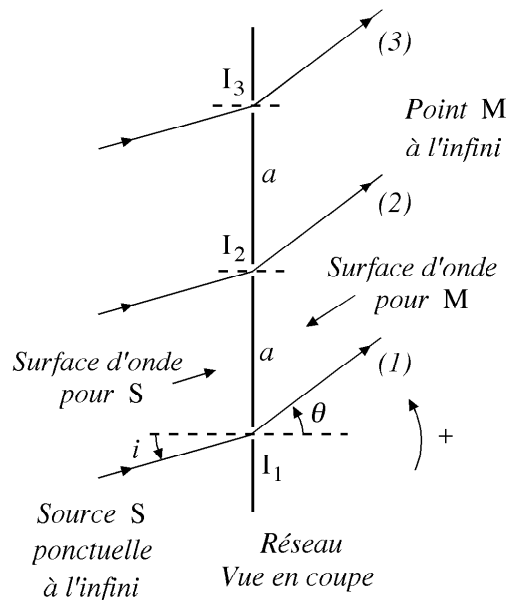
La courbe suivante a été tracée avec Regressi, avec un pas du réseau $p = 1 / a = 300$ traits / mm et une longueur d'onde dans le vide de 500 nm.

Cette courbe donne la déviation pour l'ordre 1 en fonction de l'angle d'incidence.



2) Intensité diffractée dans un ordre donné :

On ne prend pas en compte dans un 1^{er} temps la diffraction par les motifs du réseau.



On rappelle : $\varphi = 2\pi \frac{a}{\lambda_0} (\sin \theta - \sin i)$ est le déphasage entre deux rayons successifs.

Tous les rayons considérés sont issus d'un même train d'onde (division du front d'onde) : ils sont cohérents et vont donc interférer. Il faut sommer les amplitudes des vibrations lumineuses. L'amplitude complexe du 1^{er} rayon est :

$$\underline{s}_1 = A e^{i\alpha} \quad (A = \text{cste} : \text{la diffraction est supposée isotrope pour le moment})$$

Par ailleurs, $\underline{s}_{k+1} = \underline{s}_k e^{-i\varphi}$; par conséquent :

$$\underline{s}_{tot} = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{s}_1 e^{-ik\varphi} = \underline{s}_1 \frac{1 - e^{-iN\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}}$$

Soit :

$$\underline{s}_{tot} = \underline{s}_1 \frac{e^{-iN\varphi/2}}{e^{-i\varphi/2}} \frac{e^{iN\varphi/2} - e^{-iN\varphi/2}}{e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}} = \underline{s}_1 \frac{e^{-iN\varphi/2}}{e^{-i\varphi/2}} \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$$

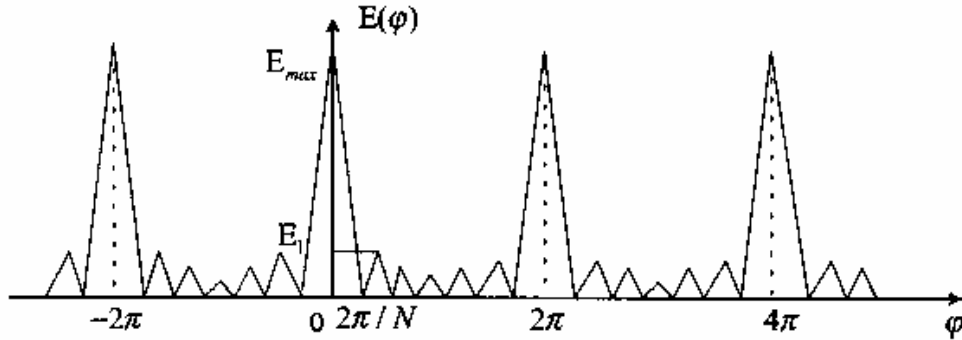
On calcule ensuite l'éclairement :

$$I(\varphi) = \frac{1}{2} k |\underline{s}_{tot}|^2 = \frac{1}{2} k A^2 \left(\frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \right)^2 = \frac{1}{2} k N^2 A^2 \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{N^2 \sin^2(\varphi/2)} = I_0 \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{N^2 \sin^2(\varphi/2)}$$

La fonction est 2π périodique ; on l'étudie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Pour $\varphi \rightarrow 0$, $\sin(\varphi/2) \rightarrow \varphi/2$ et $I(\varphi) \rightarrow I_0$: tous les rayons qui interfèrent sont en phase. L'amplitude totale est alors NA et l'éclairement est maximal.

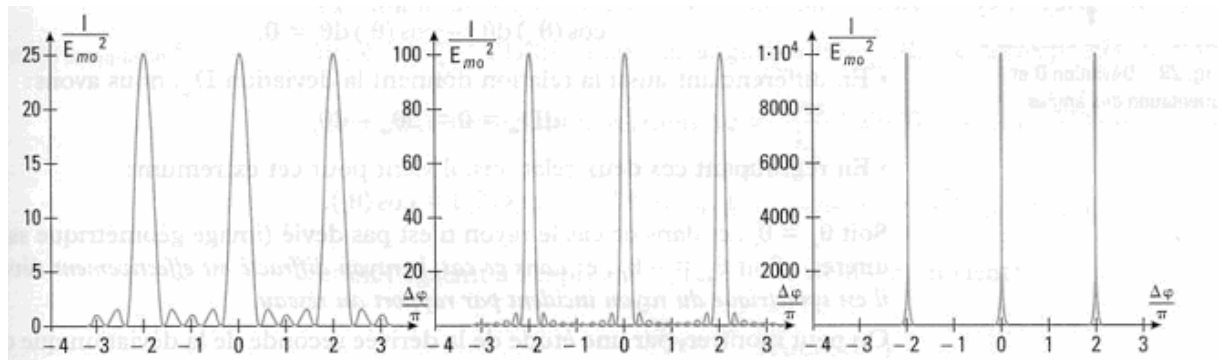
L'éclairement s'annule pour $\sin(N\varphi/2) = 0$, soit $\varphi = 2p\pi/N$, $p \neq 0$.

Le 1^{er} maximum secondaire a lieu pour $\varphi \approx 3\pi/N$, alors $I_1 \approx I_0 (2/3\pi)^2 \approx 0,04 I_0$.



Soient L la longueur du réseau éclairé, a le pas du réseau et N le nombre de traits éclairés :

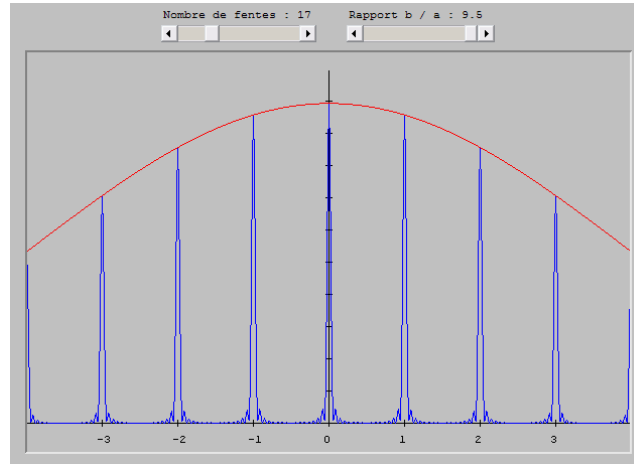
$$L = Na$$



Répartition de l'intensité pour des interférences à $N = 5, 10$ et 100 ondes

La demi-largeur d'un maximum principal est égale à :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$$



Remarque :

Le 2^{ème} maximum secondaire a une intensité $I_2 \approx I_0(2/5\pi)^2 \approx 0,016I_0$; l'éclairement est donc concentré dans les directions correspondant aux maximums principaux, $\varphi = 2k\pi$, ce qui permet d'obtenir :

$$\varphi = 2k\pi = \frac{2\pi a}{\lambda}(\sin \theta_k - \sin i) \quad \text{soit} \quad \sin \theta_k - \sin i = k \frac{\lambda}{a}$$

On retrouve la formule classique des réseaux.

Dans cette partie, on prend en compte la diffraction :

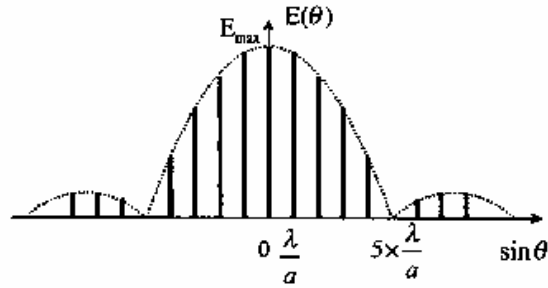
Cette fois, il faut tenir compte de la diffraction non isotrope de chacune des fentes ; on aura ainsi :

$$\underline{s}_1(\theta) = A(\theta)e^{i\alpha\theta} = A_{\max} \sin c\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right)e^{i\alpha\theta}$$

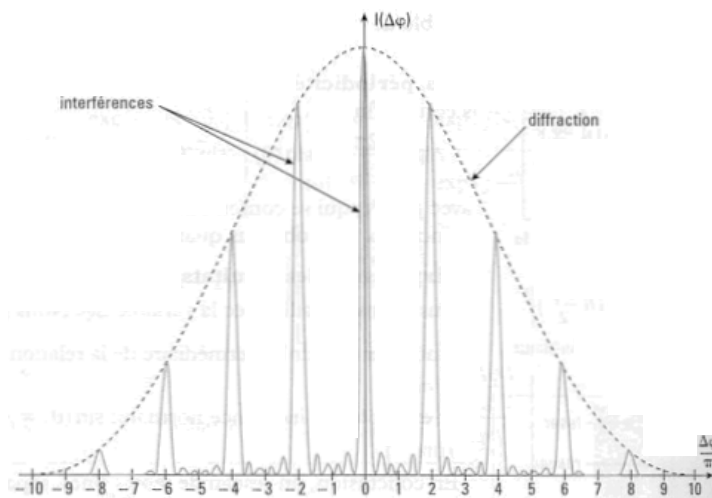
La suite du calcul est inchangée. On obtient ainsi , en supposant ici $i = 0$:

$$I(\varphi) = I_0 \sin^2 c^2\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right) \frac{\sin^2(N\pi a \sin \theta / \lambda)}{N^2 \sin^2(\pi a \sin \theta / \lambda)}$$

b étant plus petit que a, on voit que la « fonction diffraction » (le sinc^2) varie « moins vite » que la fonction « réseau » $\left(\frac{\sin^2(N\pi a \sin \theta / \lambda)}{N^2 \sin^2(\pi a \sin \theta / \lambda)}\right)$: c'est donc la 1^{ère} qui enveloppe la seconde.



La fonction diffraction s'annule (voir figure) pour la 1^{ère} fois en $\sin \theta = \lambda / b = 5\lambda / a$; les maximums principaux de la fonction réseau sont donnés par $\sin \theta = k\lambda / a$. Dans le lobe principal de la fonction diffraction, on peut observer les maximums d'ordre $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ et 4 , soit 9 maximums (les ordres -5 et 5 correspondent à l'annulation de la fonction diffraction et ne sont donc pas visibles).



En pratique, les maximums situés dans les lobes secondaires de la fonction diffraction ne sont pas visibles. L'éclairement en fonction de θ a donc l'allure donnée sur la figure.

3) Pouvoir dispersif d'un réseau :

On rappelle le déphasage entre deux rayons passant par deux traits consécutifs du réseau :

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{2\pi a}{\lambda_0}(\sin \theta - \sin i)$$

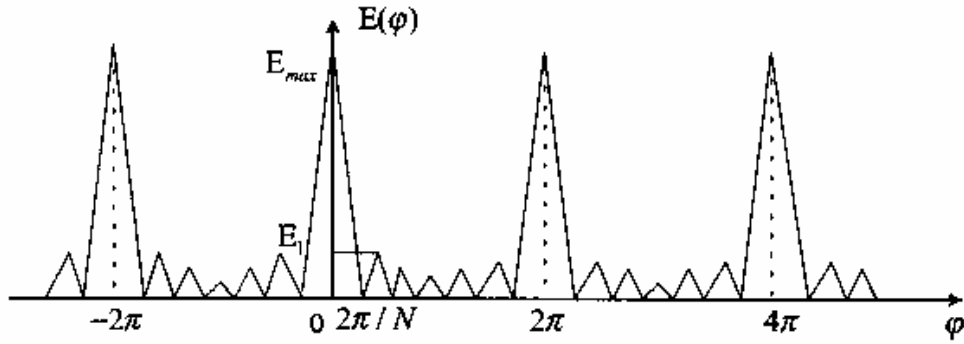
Soient L la longueur du réseau éclairé, a le pas du réseau et N le nombre de traits éclairés :

$$L = Na$$

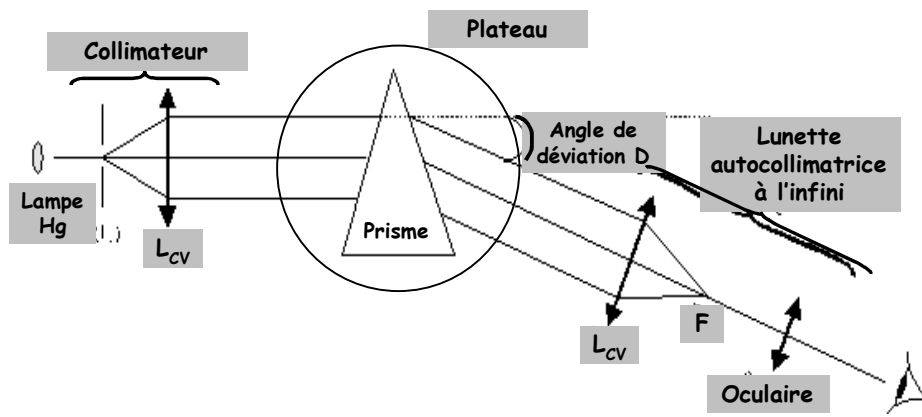
On a montré au paragraphe précédent qu'un maximum principal a une demi-largeur angulaire (prise à mi-hauteur du pic d'intensité) égale à :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$$

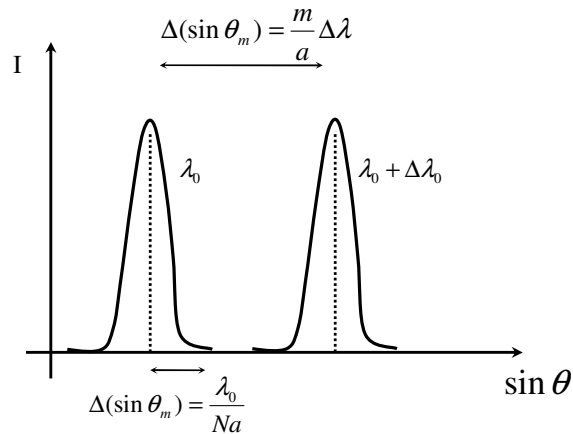
L'analyse spectrale de la lumière sera convenable si le réseau sépare correctement la lumière dans un ordre donné et si deux ordres différents ne se recouvrent pas.



On considère deux radiations lumineuses de longueurs d'onde voisines λ_0 et $\lambda_0 + \Delta\lambda$ (lampe à vapeur de sodium, par exemple). On souhaite, dans un ordre donné m , résoudre ces deux raies séparées de $\Delta\lambda$.



On voit sur l'écran ou à travers la lunette auto-collimatrice :



En utilisant l'expression du déphasage pour un même ordre m :

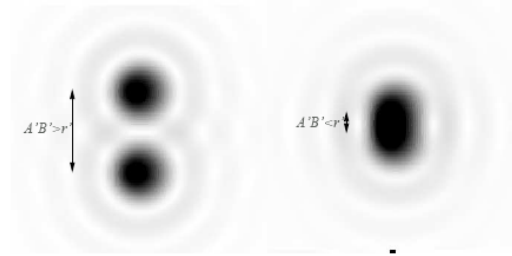
$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{2\pi a}{\lambda_0} (\sin \theta_m - \sin i) = 2\pi m$$

On en déduit l'écart angulaire entre les maximums principaux consécutifs de chacune de ces radiations :

$$\Delta(\sin \theta_m) = \frac{m}{a} \Delta\lambda$$

Cette largeur doit être, d'après le critère de résolution de Rayleigh, supérieure ou égale à la demie largeur angulaire du pic d'intensité d'ordre m , égale à :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$$



· Critère de séparation de Rayleigh : lorsque les deux tâches d'Airy sont séparées par une distance inférieure au rayon d'une tâche, on considère que les deux points images ne sont pas résolus.

Soit, avec $\Delta\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda_0} \Delta(\sin \theta_m)$:

$$\Delta(\sin \theta_m) = \frac{\lambda_0}{Na}$$

Et, en se plaçant à la limite de résolution :

$$\frac{\lambda_0}{Na} = \frac{m}{a} \Delta\lambda$$

La résolution théorique du réseau est :

$$\mathfrak{R} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} = m \frac{L}{a} = mN$$

Par exemple, dans le cas du sodium :

$$\lambda_0 = 589 \text{ nm} \quad ; \quad \Delta\lambda = 0,6 \text{ nm} \quad ; \quad \mathfrak{R} = 982 \approx 1000$$

A l'ordre 1, on peut choisir $N = 1000$. A l'ordre 2, $N = 500$.

Dispersion angulaire du réseau :

En différentiant l'expression du déphasage $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{2\pi a}{\lambda_0} (\sin \theta_m - \sin i) = 2\pi m$ pour un ordre donné, on obtient :

$$\cos \theta_m d\theta_m = \frac{m}{a} d\lambda_0$$

On montre que la dispersion angulaire du réseau vaut :

$$\mathfrak{S}_{ang} = \frac{d\theta_m}{d\lambda_0} = \frac{m}{a \cos \theta_m}$$

La dispersion est d'autant plus élevée que l'ordre est grand et le pas du réseau petit.

Exercice d'application :

- On considère un réseau de $n=1100$ traits/mm, délimité par une monture de 35 mm sur 35 mm.
- Il est éclairé par un faisceau lumineux **parallèle**, sous un angle d'incidence noté i (compté à partir de la normale au plan du réseau) ; l'observation se fait à l'**infini**, selon une direction variable notée θ .
- On a donc i et $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.
- On prendra pour limites du spectre visible les longueurs d'onde $\lambda_V = 0,400\mu m$ et $\lambda_R = 0,750\mu m$

1) Quel est l'ordre maximal $p_{\max}$ observable pour chacune des radiations extrêmes du spectre visible ?

2) On s'intéresse, pour un angle i donné, à la « **dispersion angulaire** » $\frac{d\theta}{d\lambda}$ du réseau ;

calculer cette grandeur dans le **second** ordre et au **minimum** de déviation, pour $\lambda = 0,5890\mu m$.

3) Par ailleurs, on rappelle que le « **pouvoir de résolution** » du réseau, au sens de Rayleigh, est donné par :

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}} = pN$$

où $\delta\lambda_{\min}$ est le plus petit écart de longueur d'onde (à partir de λ donnée) pouvant être mis en évidence par le spectroscope, p est l'ordre d'observation et N est le nombre total de traits du réseau.

a) Calculer R pour la radiation précédente et dans le second ordre ; en déduire $\delta\lambda_{\min}$.

b) L'observation se fait dans le plan focal d'une lentille de distance focale $f = 1 m$; quelle est, dans le second ordre et au minimum de déviation, la distance entre les images des raies de longueur d'onde $\lambda = 0,5890\mu m$ et $\lambda + \delta\lambda_{\min}$, dans le plan focal de la lentille ?

c) Ces deux raies sont-elles résolues spatialement si l'image est obtenue grâce à un capteur CCD (« Charge Coupled Device ») constitué de cellules élémentaires (« pixels ») de $10\mu m$ de côté ?

Que peut-il se passer si la focale de la lentille est nettement plus courte ou si les cellules du capteur sont plus larges ?

Solution :

1) On applique LA « formule du réseau », à savoir :

$$\sin\theta - \sin i = p \frac{\lambda}{a} = pn\lambda \quad (1) ; \quad \text{or } |\sin\theta - \sin i|_{\max} = 2 \Rightarrow p_{\max} = E\left(\frac{2}{n\lambda}\right)$$

- L'application numérique donne : pour le ROUGE : $p_{\max}^R = 2$; pour le VIOLET : $p_{\max}^V = 4$

Rq : ces valeurs sont faibles, c'est une des limitations des réseaux **plans**, puisque le pouvoir de résolution est proportionnel à l'ordre p .

2) On différencie la relation (1), à i, n et p fixés, ce qui conduit à :

$$\cos\theta d\theta = pnd\lambda \Rightarrow \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{pn}{\cos\theta}$$

- Considérons le minimum de déviation, dans un ordre donné et pour une longueur d'onde donnée ; cette fois, la différentiation de la relation (1) fournit :

$$\cos\theta \times d\theta = \cos i \times di \quad (2)$$

Par ailleurs, l'angle de déviation D est défini par : $D = \theta - i \Rightarrow \frac{dD}{di} = \frac{d\theta}{di} - 1$

$\Rightarrow$ pour la déviation minimale, on a : $\frac{dD}{di} = \frac{d\theta}{di} - 1 = 0 \Rightarrow d\theta = di \Rightarrow$ on reporte dans (2) :

$\cos\theta = \cos i \Rightarrow \theta = \pm i$, pour i et $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$; or $\theta = i$ correspond à l'ordre 0, qui ne présente aucun intérêt en spectroscopie $\Rightarrow$ on retient la solution $\theta_{\min} = -i_{\min} \Rightarrow \boxed{D_{\min} = -2i}$.

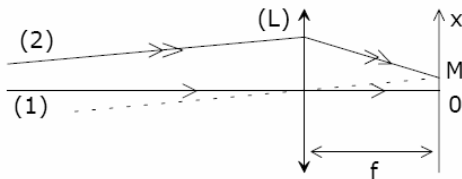
- En reportant cette dernière expression dans la relation (1), et se plaçant dans l'ordre 2, il vient :

$$2 \sin \theta_{\min} = 2n\lambda \Rightarrow \boxed{\theta_{\min} = 0,7048 \text{ rad} = 40,38^\circ} \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{d\lambda} = 2,888 \text{ rad} / \mu\text{m}}$$

3)a) Une simple application numérique fournit :

$$\boxed{R = 2 \times N = 2 \times n \times 35 = 77000} \Rightarrow \boxed{\delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{R} = 7,649 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 7,649 \text{ pm}}$$

b) Raisonnons sur la figure ci-dessous :



Pour simplifier, on suppose que la lentille est perpendiculaire au rayon (1), correspondant à la raie de longueur d'onde λ .

- Quant à lui, le rayon (2), associé à la raie $\lambda + \delta\lambda_{\min}$, fait un angle $\delta\theta_{\min}$ avec le rayon (1).

- En notant $\delta x_{\min}$ la distance OM, on peut lire sur la figure :

$$\boxed{\delta x_{\min} = f \times \tan(\delta\theta_{\min}) \simeq f \times \delta\theta_{\min} = f \times \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right) \times \delta\lambda_{\min}}$$

- L'application numérique permet d'obtenir :

$$\boxed{\delta\theta_{\min} = 2,209 \cdot 10^{-5} \text{ rad}} \quad \text{et} \quad \boxed{\delta x_{\min} = 22,09 \mu\text{m}}$$

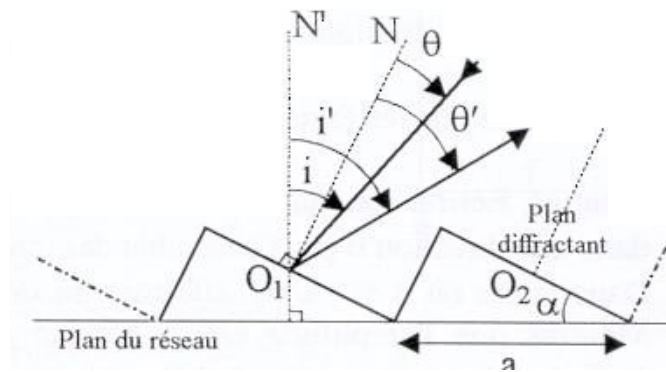
c) Les images des deux raies par la lentille sont séparées par une distance supérieure à la taille des pixels : elles se formeront donc sur **deux** cellules CCD **différentes** et donneront bien deux « informations » distinctes $\Rightarrow$ les deux raies, déjà résolues angulairement, seront effectivement résolues spatialement.

Rq : si la distance focale de la lentille est plus faible (ou si la taille des pixels est plus grande), les deux rayons peuvent impressionner le même pixel et ne donner qu'une seule « image » : les raies, résolues angulairement, ne le sont plus spatialement.

VI) Etude d'un réseau à échelottes :

Un réseau à échelotte est obtenu en traçant sur une surface métallique des dents de scie dont la coupe est représentée sur la figure. Les bandes utiles réfléchissantes, de largeur b , sont inclinées d'un angle α et constituent un réseau de N bandes de pas $a = \frac{b}{\cos \alpha}$.

On éclaire ce réseau à l'aide d'un faisceau parallèle monochromatique incident sous l'angle i et on observe la lumière diffractée dans la direction i' .



- 1) Calculer l'amplitude diffractée par une bande dans la direction i' ? Dans quelle direction trouve-t-on un maximum ? Une amplitude nulle ?
- 2) Calculer l'intensité totale diffractée par le réseau dans la direction i' .
- 3) Tracer les deux graphes des fonctions de diffraction et d'interférence. En déduire que l'on peut ajuster les paramètres du réseau de telle sorte que, pour une longueur d'onde donnée, seul le maximum d'ordre p soit lumineux et tous les autres éteints.

Solution :

- 1) L'amplitude diffractée dans la direction θ' par une bande diffractante est :

$$\underline{s}(\theta') = s_0 \int_{-b/2}^{b/2} \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta' + \sin \theta) \xi \right] d\xi$$

avec $\theta' = i' - \alpha$ et $\theta = i - \alpha$. Il en résulte que :

$$\left| \underline{s}(i') = s_0 b \sin c \left[\frac{\pi b}{\lambda} (\sin(i' - \alpha) + \sin(i - \alpha)) \right] \right| \quad (1)$$

Cette amplitude est maximale quand $\sin(i' - \alpha) = -\sin(i - \alpha)$ soit :

$$i' = -i + 2\alpha \quad (2)$$

Elle est nulle pour :

$$\left| \sin(i' - \alpha) = p \frac{\lambda}{b} - \sin(i - \alpha) \right| \quad (3)$$

avec p entier non nul.

- 2) L'amplitude totale diffractée par le réseau dans la direction i' est :

$$\underline{S}(i') = \underline{s}(i') \sum_{n=-m}^m \exp \left[-jn \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin i' + \sin i) \right]$$

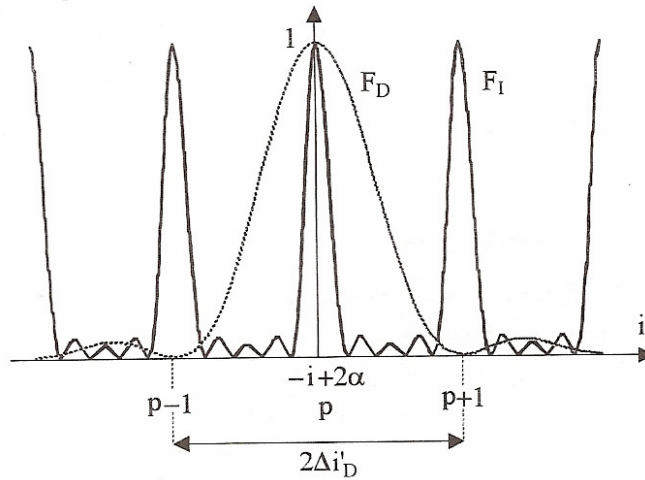
avec $N = 2m + 1$, ce qui nous donne :

$$\underline{S}(i') = N \underline{s}(i') \left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi a}{\lambda}(\sin i' + \sin i)\right)}{N \sin\left(\frac{N\pi a}{\lambda}(\sin i' + \sin i)\right)} \right] \quad (4)$$

On en déduit l'intensité diffractée dans la direction i' :

$$I(i') = N^2 |\underline{s}(i')|^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi a}{\lambda}(\sin i' + \sin i)\right)}{N \sin\left(\frac{N\pi a}{\lambda}(\sin i' + \sin i)\right)} \right]^2 = N^2 F_D(i') \cdot F_I(i') \quad (5)$$

3) Les fonctions de diffraction et d'interférence sont représentées ci-dessous dans le cas où seul l'ordre p est lumineux.



Le maximum principal de diffraction correspond, comme nous l'avons vu, à :

$$i' = -i + 2\alpha \quad (2)$$

Les maxima d'interférence sont définis par :

$$\sin i' + \sin i = p \frac{\lambda}{a} \quad (6)$$

avec p entier.

On peut faire coïncider le maximum d'interférence d'ordre p avec le maximum principal de diffraction si les conditions (2) et (6) sont remplies simultanément. Il faut donc que l'angle d'incidence i soit tel que :

$$2 \sin \alpha \cos(i - \alpha) = p \frac{\lambda}{a} \quad (7)$$

Par ailleurs, on veut que les autres maxima d'interférence soient éteints.

La demi-largeur angulaire du maximum principal de diffraction, qui est aussi la distance entre deux minima nuls - sauf ceux qui encadrent ce maximum - est, d'après (3) :

$$\Delta i'_D \approx \frac{\lambda}{b \cos(i' - \alpha)} = \frac{\lambda}{b \cos(i - \alpha)} \quad (8-a)$$

La distance angulaire entre deux maxima de la figure d'interférence est, d'après (6) :

$$\Delta i'_I \approx \frac{\lambda}{a \cos i'} = \frac{\lambda}{a \cos(i - 2\alpha)} \quad (8-b)$$

L'extinction des maxima différents de p nécessite donc que $\Delta i'_D = \Delta i'_I$, soit :

$$a \cos(i - 2\alpha) = b \cos(i - \alpha) \quad (9)$$

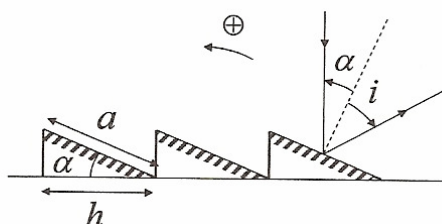
Comme $b = a \cos \alpha$ la seule solution possible pour (9) est $i = \alpha$. Donc d'après (7), pour p et λ donnés, il faut que $2a \sin \alpha = p\lambda$.

Dans ce cas on dit que le réseau est "blazé" pour l'ordre p .

Ce résultat n'est obtenu, en toute rigueur, que pour une longueur d'onde λ donnée. Si on éclaire ce réseau avec une lumière polychromatique dont le spectre est centré sur λ , de la lumière réapparaît dans les autres ordres pour les autres radiations. Toutefois la

Compléments sur le réseau à échelottes :

De petits miroirs (ou facettes), en nombre N important, de longueur a , sont inclinés sur le plan du réseau par réflexion d'un angle α (le pas est $h = a \cos \alpha$). Un faisceau lumineux de longueur d'onde λ arrive normalement au plan du réseau.



a) Sans calcul, dire dans quelle direction i_d ,

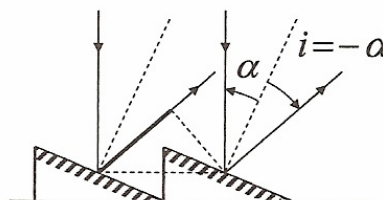
l'amplitude diffractée par une facette est maximale. Les ondes envoyées par deux facettes successives dans cette direction sont-elles forcément en phase ?

b) Sans calcul, dire dans quelle direction i_0 les interférences entre facettes successives conduisent à l'ordre $K = 0$; quelle est la particularité de cet ordre ? Comment est la diffraction dans cette direction ?

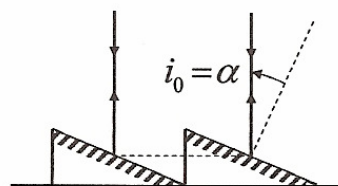
c) Dans ce dispositif, comparer pour la lumière la largeur apparente d'une facette et le pas du réseau ; qu'en déduit-on ? Quel peut être l'intérêt de ce dispositif ?

Réponses :

a) L'amplitude diffractée par une facette est maximale dans la direction de la réflexion $i_d = -\alpha$ prévue par l'optique géométrique. Dans cette direction, la différence de marche entre deux ondes de facettes successives (en gras sur la figure) dépend des paramètres du réseau (elle vaut $\delta = h \sin 2\alpha$) ; les interférences peuvent être constructives ou destructives.



b) Pour un faisceau arrivant normalement au plan du réseau il n'y a pas de différence de marche à l'arrivée entre deux facettes successives. Il en est de même si le faisceau repart dans la même direction, soit $i_0 = \alpha$, ce qui ne correspond évidemment pas à la direction de l'optique géométrique des facettes ! (mais à celle du plan du réseau). La diffraction n'est pas maximale dans cette direction, qui peut même correspondre à un zéro de la diffraction. La caractéristique de l'ordre $K = 0$ est de ne pas être dispersif ($\delta = K\lambda = 0, \forall \lambda$).



c) Pour la lumière la largeur apparente d'une facette, soit $a \cos \alpha$ (et qui gouverne la diffraction) est égale au pas h du réseau (qui gouverne les interférences) ; on en déduit que la demi-largeur du pic central de diffraction est égale à la distance entre deux ordres d'interférence. Et donc qu'avec un bon choix des paramètres, la

diffraction peut éliminer l'ordre d'interférence $K = 0$ non dispersif (donc sans intérêt) ; le maximum de lumière prévue par la diffraction dans la direction de l'optique géométrique correspond alors à un ordre dispersif $K \neq 0$. Contrairement au réseau par transmission, ici, dispersion et luminosité peuvent s'obtenir simultanément ; c'est l'intérêt du réseau par réflexion.

