

# Les ondes lumineuses



## Aspect historique :

La question de la nature de la lumière remonte à l'antiquité. PYTHAGORE, DÉMOCRITE, ARISTOTE et les autres avaient déjà construit une théorie de la lumière et la propagation de la lumière en ligne droite était déjà connu d'EUCLIDE (300 ans av. J.C.). La chute de l'empire romain (475 ap. J.C) a provoqué une stagnation du progrès scientifique pendant plusieurs siècles.

Le 17ème siècle est considéré comme le siècle de la naissance de l'optique géométrique tant du point de vue instrumentale que du point de vue théorique :

- GALILÉE invente la lunette et observe les satellites de Jupiter et Janssen le microscope.
- KEPLER énonce la loi de réfraction aux petits angles. SNELL et DESCARTES généralisent les lois de la réfraction aux grands angles. Fermat retrouve les lois de l'optique géométrique à partir du principe du temps de parcours minimal.
- La vitesse de la lumière est pour la première fois estimée par RÖMER (1676) en observant les éclipses du satellite Io dans l'ombre de Jupiter. Il obtint  $c \approx 2,4 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .

NEWTON s'est aussi intéressé à la nature de la lumière et avait la conviction que la lumière était de nature corpusculaire. Il ne comprenait pas comment la propagation rectiligne de la lumière pouvait être compatible avec une nature ondulatoire. Le rayonnement de Newton, dans le monde scientifique a certainement freiné le développement de la théorie ondulatoire défendu à l'époque par HUYGENS.

C'est au 19ème siècle que la théorie ondulatoire de la lumière a pris son essor. YOUNG introduit le concept d'interférence au début du 19ème siècle et FRESNEL construit la théorie de la diffraction à partir des idées d'HUYGENS. ARAGO et FRESNEL ont également montré que la lumière était une onde transversale (influence de la polarisation sur les interférences). Le 19ème siècle est aussi le siècle où la mesure de la vitesse de la lumière s'est amélioré notamment grâce aux expériences de FOUCAULT (expérience du miroir tournant) et FIZEAU (expérience de la roue dentée). Cependant, la théorie ondulatoire de la lumière de l'époque énonce que la lumière est une perturbation d'un milieu appelé éther (ancien concept grec) qui se propage, sans préciser la nature de ce milieu hypothétique. Parallèlement le magnétisme et l'électricité sont unifiés dans une nouvelle théorie électromagnétique en 1864 par MAXWELL. Le résultat de cette unification est qu'elle prévoit l'existence d'ondes électromagnétiques se propageant dans le vide à la vitesse

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

où  $\mu_0$  et  $\epsilon_0$  sont des constantes qui interviennent dans les interactions électromagnétiques. Lorsqu'il fit l'application numérique quelle ne fut pas sa surprise de trouver une valeur très proche de la vitesse de la lumière. La conclusion était sans appel : La lumière est une onde électromagnétique ! MAXWELL mourut avant de voir sa théorie confirmée par les expériences de HERTZ en 1888. La recherche de l'éther devient une préoccupation de la fin du 19ème siècle. MICHELSON et MORLEY, à l'aide d'un interféromètre, ont recherché les traces du mouvement de la Terre par rapport à cet éther hypothétique. L'expérience, menée à plusieurs reprises fut systématiquement négative. Il fallu attendre le début du vingtième siècle pour postuler une idée qui est déjà présente dans les équations de MAXWELL : L'éther n'existe pas et la vitesse de la lumière dans le vide est indépendante du référentiel. C'est la base de la théorie de la relativité restreinte (1905) élaborée par EINSTEIN.

L'ironie de l'histoire fait que quelques années plus tard, EINSTEIN, à partir des travaux de Planck, interprète correctement l'effet photoélectrique en modélisant la lumière de façon corpusculaire (les photons) et donne naissance avec BOHR, LOUIS DE BROGLIE, DIRAC, HEISENBERG etc. à une nouvelle physique - la mécanique quantique - théorie dans laquelle, la lumière est à la fois ondulatoire et corpusculaire, comme la matière.

La question de la nature de la lumière fut probablement l'une des interrogations les plus fécondes : elle est en quelque sorte l'origine des théories géométrique, ondulatoire, électromagnétique, relativiste et quantique de la lumière.

## I) Préliminaires :

### 1 – Quelques notions qualitatives sur l'optique ondulatoire

\* Rappels d'optique géométrique :

\* Traversée de rayons à travers une lentille CV ou une lentille DV

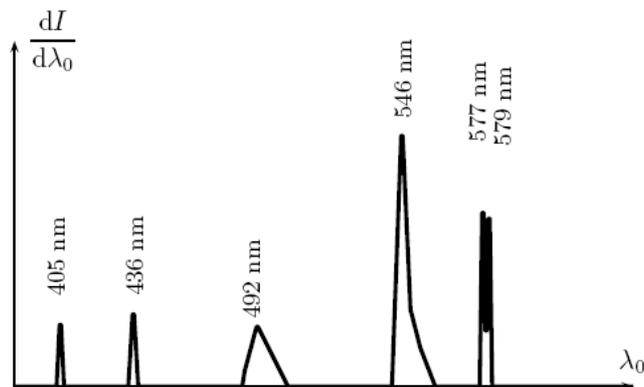
\* Exercices de révisions de sup : (voir feuilles de TD)

\* Sources de lumières usuelles : lampe spectrale, lampe à filament, laser

□ *Sources spectrales* : la quantification est une propriété naturelle de toute onde confinée par des conditions aux limites, comme on l'a montré lors de l'étude des ondes électriques. L'étude des structures atomiques montre la même quantification, et les

niveaux d'énergie d'un atome appartiennent à une série dénombrable de valeurs  $E_k$ . Lors d'une transition énergétique, un atome émet ou absorbe donc un photon d'énergie  $h\nu = |E_f - E_i|$ , en fonction des énergies initiale et finale d'un atome.

Lorsque les transitions énergétiques dans une source ont lieu exclusivement de façon *individuelle* entre atomes de la source et rayonnement émis, seules certaines valeurs de la fréquence sont possibles pour le photons émis ; on parle alors de *sources spectrales*. Ces sources n'émettent de la lumière que pour des longueurs d'onde très précises, avec seulement de faibles *largeurs de raies* dues, par exemple, à l'agitation thermique des atomes de la source et à l'effet Doppler-Fizeau qui l'accompagne. L'allure du spectre énergétique émis par une telle source est présenté sur la figure



Spectre de raies d'une lampe à vapeur de Mercure

Une **lampe à décharge** est une lampe électrique constituée d'un tube ou d'une ampoule en verre remplie de gaz ou de vapeur métallique, sous haute ou basse pression, au travers duquel on fait passer un courant électrique ; il s'ensuit une production de photons donc de lumière.

La couleur de la lumière émise par luminescence par ces lampes dépend du gaz utilisé :

\* Le néon donne une couleur rouge

\* Le mercure s'approche du bleu tout en produisant une quantité d'ultraviolet importante

\* Le sodium rayonne dans le jaune. Souvent on le mélange avec du néon pour rendre la lumière orangée

\* Le xénon (récemment employé pour l'éclairage des automobiles) est le gaz qui permet de s'approcher le plus possible du blanc pur.

Les molécules du gaz métallique utilisé ont la faculté de pouvoir s'ioniser lorsqu'elles sont soumises à la différence de potentiel créée entre les électrodes situées de chaque côté de la lampe. Les électrons libérés sont attirés par l'électrode positive – nommée cathode – et les ions négatifs par l'autre, nommée anode. Un énorme flux d'électrons traverse l'ampoule.

Lors du passage de ce flux, se produisent de nombreuses collisions entre les électrons circulants et ceux présents dans le gaz de la lampe. Lors de ces collisions, les électrons sont chassés de leur orbite, changent de couche et y reviennent en émettant un photon, dont la longueur d'onde (sa couleur) dépend de l'énergie qu'il contient mais habituellement comprise dans le spectre du visible ou de l'ultraviolet. Ils peuvent également se libérer complètement de l'atome qui les contient, et ainsi accroître le courant d'électrons circulants. C'est ainsi qu'un phénomène d'amorçage se produit à la mise sous tension de la lampe : le courant initialement très faible explose littéralement pour atteindre la puissance maximale donnée par le générateur électrique.

Lampes à décharge basse pression :

\* Les tubes fluorescents :

Ils produisent jusqu'à 100 lumens/watt. Ce type de lampe est le type le plus utilisé en éclairage de bureau ainsi que dans de nombreuses autres applications tertiaires. Les tubes fluorescents sont communément, mais faussement, encore appelés lampes néon. Ils sont pourtant très différents car la lumière émise par la décharge n'est pas directement visible. C'est une poudre déposée sur la surface intérieure du tube qui ré-émet dans le domaine visible.

\* Les lampes à vapeur de sodium basse pression :

Ce type de lampe est le type de lampe à décharge le plus efficace, produisant jusqu'à 200 lumens/watt, mais aux dépens d'un rendu de couleurs très pauvre. La lumière jaune quasi monochromatique est acceptable uniquement pour l'éclairage public et les utilisations similaires.

Lampes à décharge haute pression :

\* Les lampes aux halogénures métalliques :

Ces lampes produisent de la lumière presque blanche et atteignent  $100 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$ . Les utilisations comprennent l'éclairage d'intérieur d'immeubles de grande hauteur, de parking, de magasins, de terrains de sports.

\* Les lampes à vapeur de sodium haute pression :

Elles produisent jusqu'à 150 lumens/watt. Ces lampes produisent un spectre de lumière plus large que la lampes à vapeur de sodium basse pression. Elles sont aussi utilisées pour l'éclairage public et pour la photo assimilation artificielle dans la culture de plantes.

\* Les lampes à vapeur de mercure :

Ce type de lampe est le type de lampe haute pression le plus ancien. Il a été remplacé dans la majeure partie des utilisations par des lampes à vapeur de sodium haute pression et, parfois, par des lampes aux halogénures métalliques.

Les lampes à vapeur de mercure :

Ces lampes contiennent des vapeurs de mercure mélangée à de l'argon. Ce type de lampe ne meurt théoriquement jamais. Après 10 000 à 20 000 heures, son émission lumineuse commence à diminuer, pour atteindre moins de 25 % de l'émission initiale après 50 000 heures de fonctionnement. Leur efficacité lumineuse est située entre 50 et  $100 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$  ce qui est plus de 5 fois supérieur aux lampes à incandescence.

La lumière étant dans ce cas principalement produite par la luminescence, celle-ci est principalement composée d'ultraviolet (254 nm pour le mercure : UVC) il est donc nécessaire d'augmenter la longueur d'onde de la lumière émise par fluorescence c'est-à-dire par adjonction

sur les parois du tube d'une poudre blanche qui diminue la fréquence des ondes émises pour les replacer dans le spectre visible. Selon la composition chimique de ces poudres, il est possible d'obtenir un grand éventail de couleurs.

Dans le cas des lampes à vapeur de mercure haute pression, au moment où la lampe s'allume, seul un arc à basse pression se produit et donc, une faible quantité de lumière est émise ; puis la lampe chauffe, la pression augmente peu à peu, le mercure se vaporise, un arc à haute pression se forme et une quantité plus importante de lumière est émise. La lampe met environ 5 minutes avant de produire son flux lumineux maximal.

Les lampes à vapeur de mercure ont longtemps servi à l'éclairage public du fait de leur faible coût. Elles ont toutefois été majoritairement remplacées par les lampes à vapeur de sodium haute pression, qui émettent une lumière faisant mieux ressortir les détails de la chaussée, mais aussi qui sont plus faciles à filtrer par les astronomes. Ces sources lumineuses sont aussi plus rentables, surtout au niveau de l'efficacité lumineuse.

Les lampes fluorescentes contiennent un mélange d'argon et de vapeur de mercure à basse pression et pas forcément de néon comme le langage populaire le laisserait croire. La lumière visible est produite par deux processus successifs :

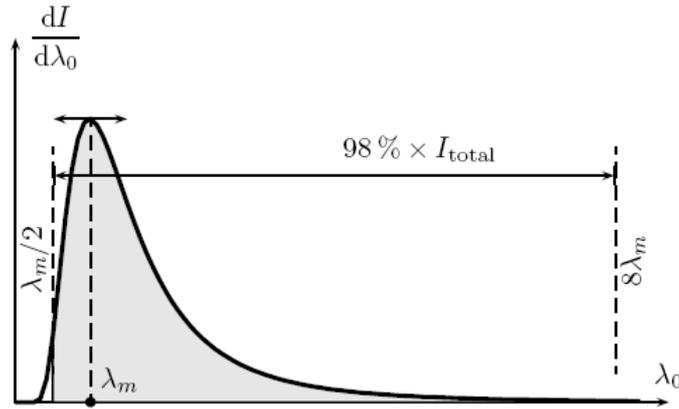
\* L'ionisation du mélange gazeux sous l'effet d'un courant électrique génère une lumière dans la gamme des ultraviolets, donc invisible mais très énergétique. Les conditions de décharges sont optimisées pour qu'un maximum (60-70%) de la puissance consommée soit rayonnée dans les deux raies de résonance du mercure à 184,9nm et 253,7nm.

\* Ce premier rayonnement est ensuite converti en lumière visible, moins énergétique (la différence donnant de la chaleur), à la surface interne du tube par un mélange binaire ou ternaire de poudres fluorescentes.

La couleur de la lumière produite provient donc essentiellement de la composition spécifique de ce revêtement interne. Le néon est un gaz rare, comme l'argon, parfois utilisé mais produisant une lumière rouge. On voit donc que cette utilisation est très particulière et que c'est par simplification abusive et métonymie que le nom de ce gaz est devenu synonyme, aujourd'hui de lampe fluorescente.

La **luminescence** est une émission de lumière dite « froide » par opposition à l'incandescence qui elle est dite « chaude » : toute lumière est produite par le retour vers un état de moindre énergie des électrons excités et on parle de luminescence quand le mode d'excitation n'est pas le chauffage.

□ *Sources thermiques* : lorsque l'émission lumineuse ne s'effectue pas dans une vapeur peu dense et transparente, mais à la surface d'un solide, les échanges d'énergie entre l'émetteur et le rayonnement sont *collectifs* et décrits par un modèle statistique. Dans le cas limite du *corps noir idéal* (qui sera décrit dans le cours d'Électromagnétisme), on prévoit un spectre énergétique continu d'émission, dont la forme générale est universelle et dont les caractéristiques ne dépendent que de la température  $T$  de la source. Ce spectre de rayonnement thermique est présenté sur la figure .



Spectre d'émission d'une source thermique (corps noir)

On montre que la longueur d'onde  $\lambda_m$  à laquelle on observe le maximum d'émission vérifie la *loi de WIEN*,  $\lambda_m = \frac{C}{T}$ , où la constante universelle  $C$  vérifie  $C = 2,895 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ .

L'intensité totale émise par unité de surface du corps rayonnant vérifie la *loi de STEFAN*,  $\frac{I}{S} = \sigma T^4$ , où la constante universelle  $\sigma$  (constante de Stefan) vérifie  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ . Ainsi, plus la température de l'émetteur est élevée, plus il émet une puissance totale importante, concentrée vers les courtes longueurs d'onde.

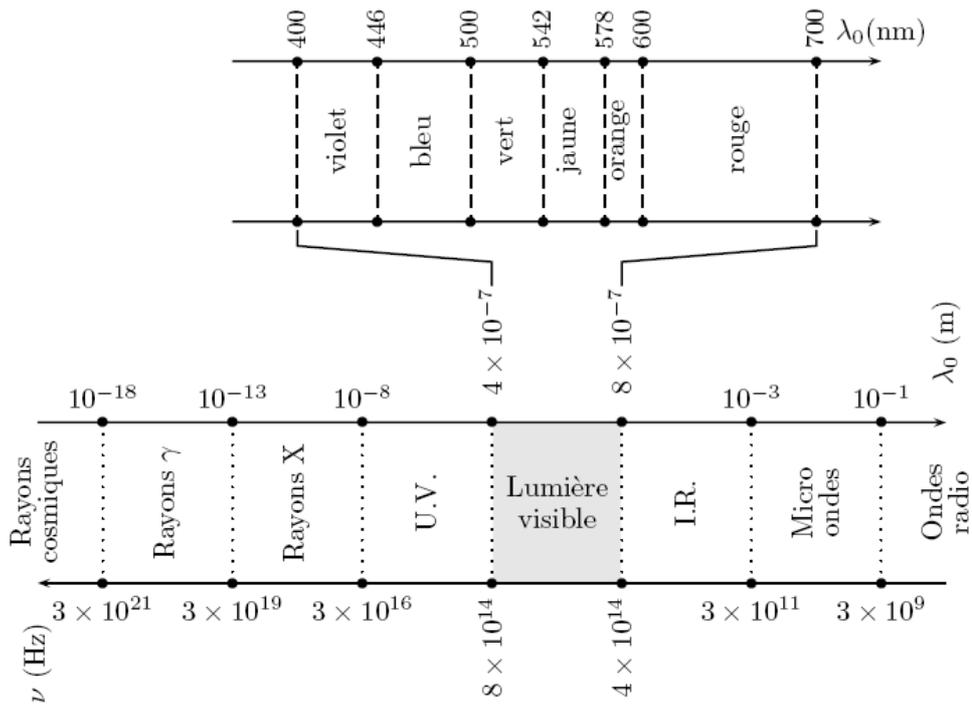
On remarque (zone grisée sur la courbe de la figure) que 98% de l'intensité émise par un tel émetteur sont concentrés dans l'intervalle  $\left[ \frac{\lambda_m}{2}, 8\lambda_m \right]$ . Un corps noir chauffé à  $T = 1500 \text{ K}$  émet ainsi à raison de  $287 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$  avec un maximum d'émission pour la longueur d'onde  $1,93 \text{ }\mu\text{m}$ , dans le proche infrarouge; la quasi-totalité de ce rayonnement est concentrée dans l'intervalle  $[0,96 \text{ }\mu\text{m}; 15,4 \text{ }\mu\text{m}]$ .

Le Soleil peut aussi être considéré comme un émetteur thermique, de température de surface  $T \simeq 5780 \text{ K}$ , avec un maximum d'émission vers  $500 \text{ nm}$ , dans le visible. Son émission se concentre dans l'intervalle  $[250 \text{ nm}; 2,0 \text{ }\mu\text{m}]$ , qui couvre notamment tout le domaine visible, mais comporte aussi des composantes infrarouges et ultraviolettes.

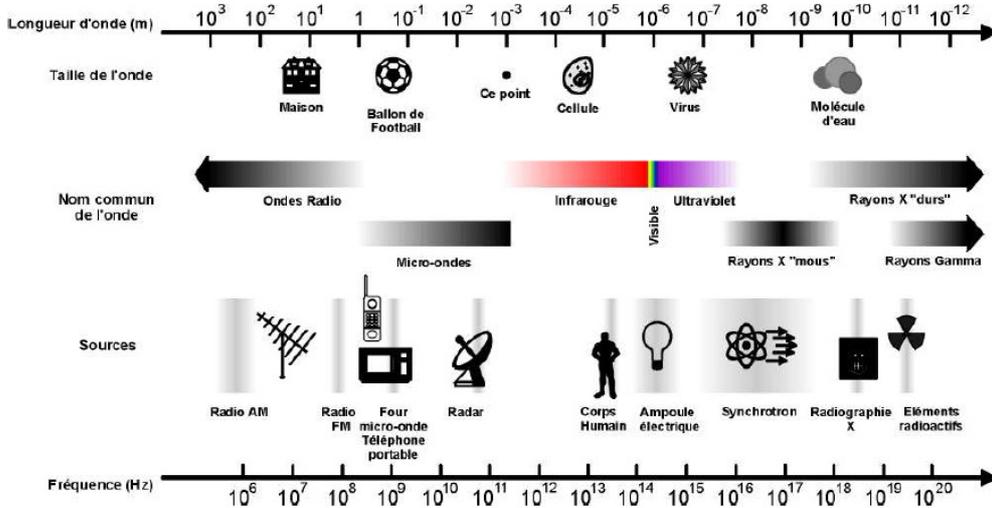
\* Laser : voir document de vulgarisation donné en annexe.

\* Étendue du spectre EM :

□ *Étendue du spectre électromagnétique* : les ondes lumineuses ne sont qu'un cas particulier des ondes électromagnétiques; celles-ci sont généralement dénommées en fonction de leur longueur d'onde dans le vide, conformément à la figure ( ). Les divisions qui y sont présentées sont en partie arbitraires.



Spectre électromagnétique : La lumière visible représente une infime partie du spectre électromagnétique



*Spectre électromagnétique.*

\* Exemples de récepteurs : l'œil, les photodiodes, les capteurs CCD

- L'œil : il est constitué de deux types de cellules sensibles à la lumière, les cônes et les bâtonnets. L'œil humain perçoit les longueurs d'onde entre 400 et 800 nm et n'est pas sensible à la lumière polarisée.

□ *La couleur* : les récepteurs d'ondes lumineuses ne sont pas sensibles aux ondes lumineuses (ou plus généralement aux ondes électromagnétiques) de la même façon selon la pulsation  $\omega$  ou, ce qui revient au même, selon la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = \frac{2\pi c_0}{\omega}$  de ces ondes. On peut aussi dire qu'ils se comportent comme des *filtres*, sélectionnant telle ou telle longueur d'onde, et donc caractérisés par des fonctions de transfert variées.

Ainsi, l'œil humain dispose de quatre types de récepteurs lumineux disposés dans le plan de la rétine. Les *bâtonnets*, situés surtout en périphérie de la rétine, permettent de percevoir la luminosité et le mouvement ; sensibles aux faibles intensités, ils sont les seuls à être utilisés pour la vision de nuit.

Les *cônes*, situés surtout dans une zone appelée *fovéa*, permettent de différencier les couleurs. Il existe chez l'homme trois types de cônes :

- sensibles surtout dans le rouge (avec un maximum de sensibilité pour  $\lambda_0 = 570$  nm) ;
- sensibles surtout dans le vert (sensibilité maximum pour  $\lambda_0 = 535$  nm) ;
- sensibles surtout dans le bleu (sensibilité maximum pour  $\lambda_0 = 445$  nm).

Le cerveau humain est alors capable de reconstituer de nombreuses nuances de teintes lors de l'observation d'une scène colorée, à partir des informations de luminosité et de couleur. C'est ce principe qui est repris dans les images synthétisées sur écran, au moyen de l'emploi de trois canaux de couleur, rouge, vert et bleu –codage RVB ou RGB en anglais).

#### - Photodiode :

La photodiode est une diode spéciale qui, lorsqu'elle est polarisée en inverse, contrairement à une diode normale, est parcourue par un courant proportionnel à la puissance lumineuse reçue. La mesure de l'intensité électrique donne donc accès (à une constante près) à la puissance lumineuse.

La photodiode détecte toute l'étendue du spectre visible mais est aussi sensible à l'infrarouge. Le temps de réaction d'une photodiode est beaucoup plus bref que celui de l'œil ( $10^{-5}$  s contre 0,1 s pour l'œil).

#### - Capteurs CCD :

Un capteur photographique est un composant électronique photosensible servant à convertir un rayonnement électromagnétique (UV, visible ou IR) en un signal électrique analogique. Ce signal est ensuite amplifié, puis numérisé par un convertisseur analogique-numérique et enfin traité pour obtenir une image numérique. Le capteur est donc le composant de base des appareils photo numériques, l'équivalent du film en photographie argentique.

Le capteur photographique met à profit l'effet photoélectrique, qui permet aux photons incidents d'arracher des électrons à chaque élément actif (photosite) d'une matrice de capteurs élémentaires constitués de photodiodes. Il est nettement plus efficace que la pellicule : jusqu'à 99 % (en théorie) et près de 50 % (en pratique) des photons reçus permettent de collecter un électron, contre environ 5 % de photons qui révèlent le grain photosensible de la pellicule, d'où son essor initial en astrophotographie.

Deux grandes familles de capteurs sont disponibles : les CCD et les CMOS.

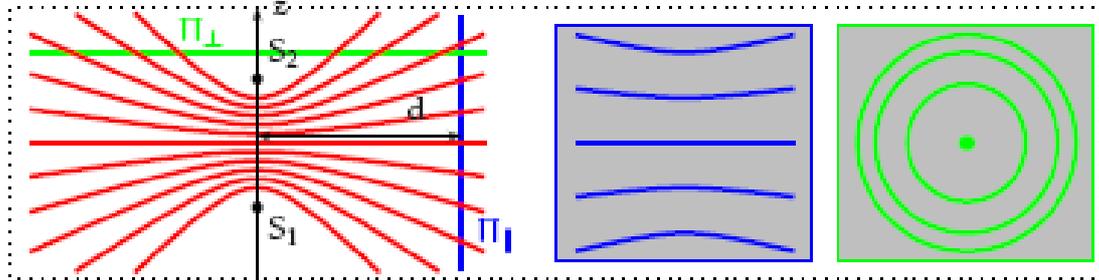
Les CCD sont surtout utilisés dans les appareils compact et de plus en plus délaissés dans les reflex. Les appareils reflex quant à eux, utilisent majoritairement des capteurs CMOS (en 2009).

Le capteur CCD (coupled charge device) est composé d'une suite de petites photodiodes placées les unes contre les autres et se présente souvent sous la forme d'une barrette.

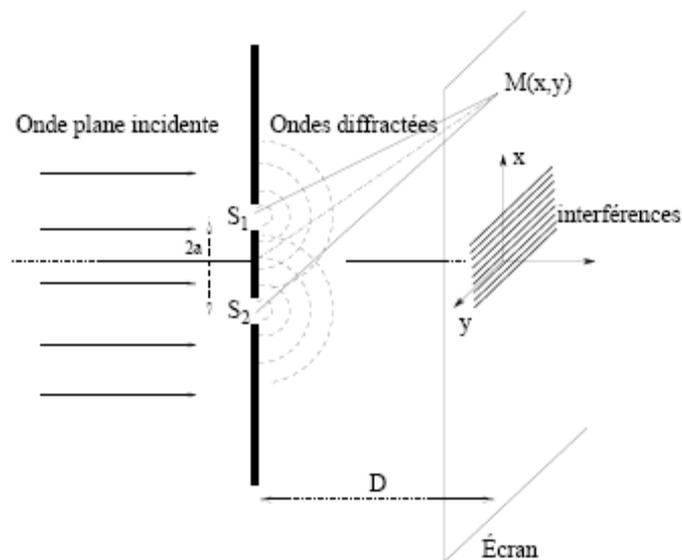
\* Quelques expériences d'interférences et de diffraction vues dans le secondaire

*Interférences :*

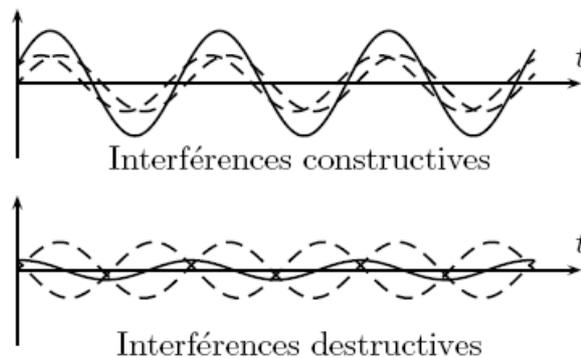
Un exemple :



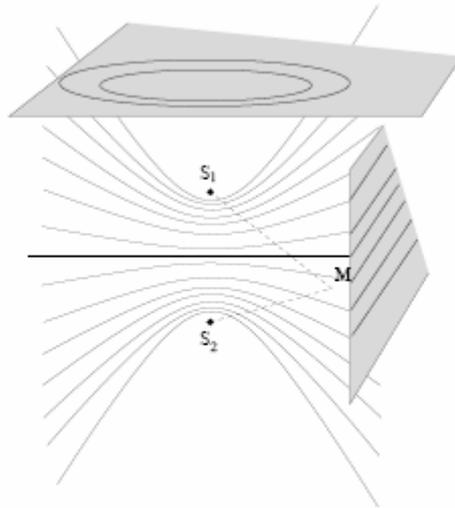
*Interférences à deux ondes et figures d'interférences*



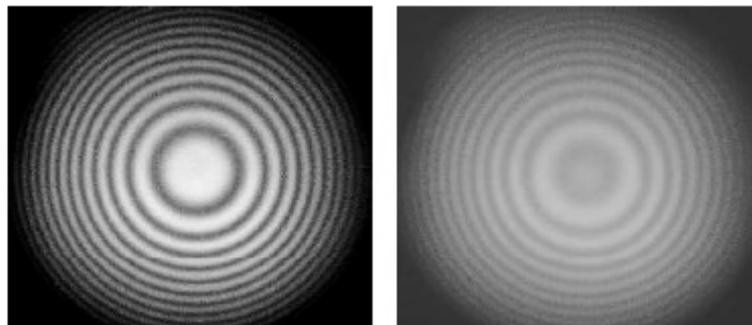
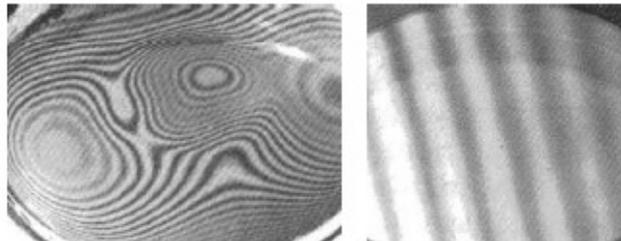
De la lumière superposée à de la lumière peut donner de l'obscurité.



L'expérience historique des fentes d'Young a mis en évidence la nature ondulatoire de la lumière. On sait maintenant que la lumière possède un double aspect, ondulatoire et corpusculaire.

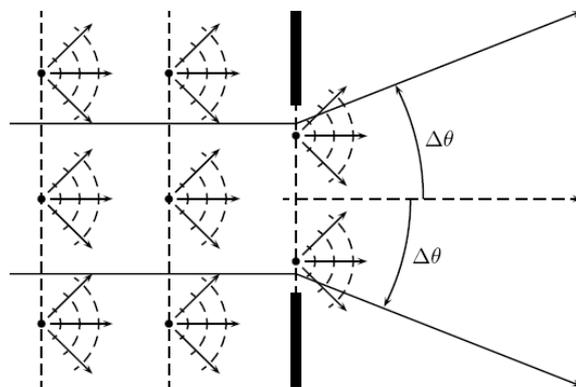
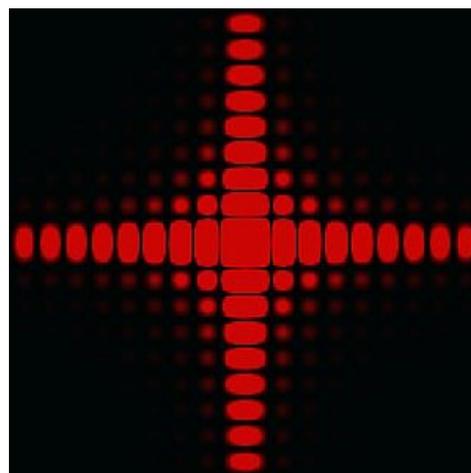
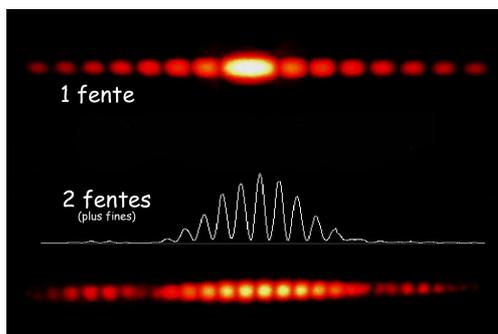
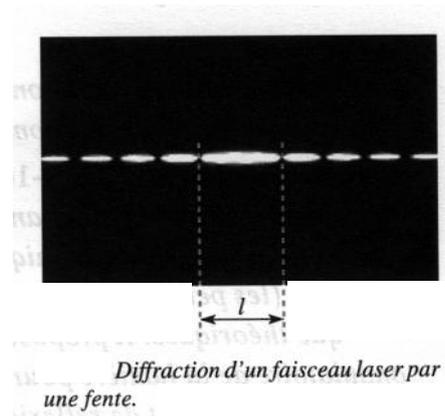
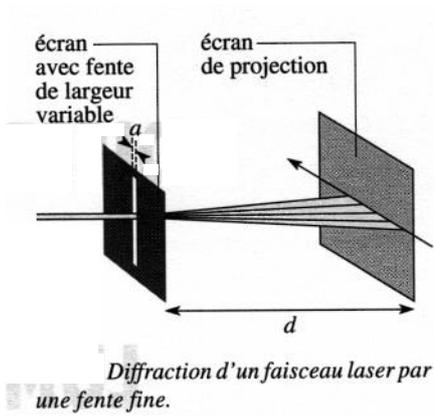


Lieu des points tels que  $S_1M - S_2M = K$  : on obtient des hyperboloïdes de révolution.



*Diffraction :*

L'expérience suivante montre la diffraction d'un rayon laser par une fente de largeur variable  $a$  et de « grande » hauteur.



Diffraction de la lumière

Sur un écran de projection située à quelques mètres, on constate que la tâche quasi-punctuelle formée par le faisceau, en l'absence d'obstacle, s'élargit perpendiculairement à la fente lorsque celle-ci se rétrécit. De plus, l'éclairement de l'écran n'est pas uniforme : autour de la tâche centrale existent des tâches secondaires, moins larges et moins lumineuses.

Des mesures expérimentales relient  $d$  (distance entre la fente et l'écran),  $\ell$  (largeur de la tâche centrale),  $\lambda$  (longueur d'onde) et  $a$  (largeur de la fente) :

$$\ell \approx 2 \frac{\lambda d}{a}$$

Ce qui correspond à une tâche de demi largeur angulaire  $\alpha \approx \frac{\lambda}{a}$ .

Si les lois de propagation rectiligne étaient vérifiées, la tâche serait plus fine dans la direction perpendiculaire à la fente : la tentative de limitation du faisceau a en fait abouti à un résultat opposé. En revanche, dans la direction de la fente, on n'observe aucun élargissement.

### Diffraction de la lumière



La diffraction est un écart aux lois de propagation de l'optique géométrique, qu'on observe lorsque une onde lumineuse traverse une ouverture de faible dimension  $a$ , ou lorsqu'elle est réfléchiée par un dispositif de faible dimension  $a$  :

- lorsque  $a \gg \lambda_0$ , on peut négliger la diffraction et traiter la propagation dans le cadre de l'optique géométrique ;
- lorsque  $a$  et  $\lambda_0$  sont comparables, la diffraction devient significative et l'ouverture angulaire  $\Delta\theta$  est de l'ordre de grandeur de  $\lambda_0/a$  ;
- enfin, lorsque  $a \ll \lambda_0$ , la diffraction se fait dans toutes les directions et l'obstacle peut être considéré comme une source de lumière *isotrope*.

\* Théorie scalaire de la lumière :

- La lumière est donc un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  ; certaines expériences montrent que les détecteurs usuels (rétine, pellicule photo, capteurs CCD...) sont sensibles au seul **champ électrique**  $\Rightarrow$  à ce stade, il suffit d'un seul champ vectoriel pour décrire la vibration lumineuse.
- Dans la plupart des expériences d'interférences et de diffraction que nous allons étudier, les « rayons lumineux » (= tubes élémentaires du vecteur de Poynting) qui vont interférer seront **quasi-parallèles** : en un point M donné, les différents champs électriques (correspondant aux différents rayons) seront donc tous pratiquement contenus dans un même plan perpendiculaire à la direction commune de propagation  $\Rightarrow$  on pourra toujours les **décomposer** sur des **axes communs** (pour 2 ondes de même polarisation rectiligne, l'axe de projection est unique).

- La «vibration lumineuse» sera donc considérée comme une **grandeur scalaire**, la projection sur un axe commun du vecteur champ électrique : cette grandeur sera notée  $s(M, t)$ .

**Rq** : pour des ondes non polarisées rectilignement, il suffira de considérer 2 grandeurs scalaires correspondant à 2 axes de projection perpendiculaires entre eux.

### Compléments : représentation scalaire d'une onde lumineuse

Les calculs d'optique ondulatoire consistent généralement à déterminer l'intensité résultant de la superposition de plusieurs ondes. Nous allons montrer que, pour le calcul de l'intensité, il est souvent possible d'oublier le caractère vectoriel du champ électrique.

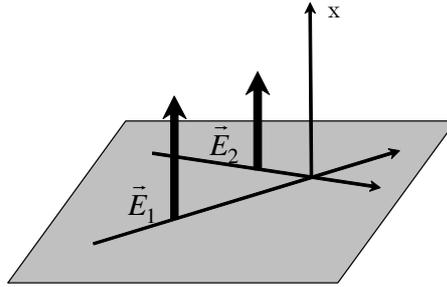
- **Ondes polarisées rectilignement :**

Une onde polarisée rectilignement selon la direction (Ox) est décrite par une fonction scalaire  $s(M, t)$  :

$$\vec{E}(M, t) = s(M, t) \vec{u}_x \quad \text{et} \quad I = K \langle s^2 \rangle$$

Etudions maintenant la superposition de deux ondes.

\* On considère tout d'abord le cas de deux ondes polarisées selon la même direction  $\vec{u}_x$ , normale aux deux directions de propagations (voir figure) :  $\vec{E}_1 = s_1(M, t) \vec{u}_x$  et  $\vec{E}_2 = s_2(M, t) \vec{u}_x$ .



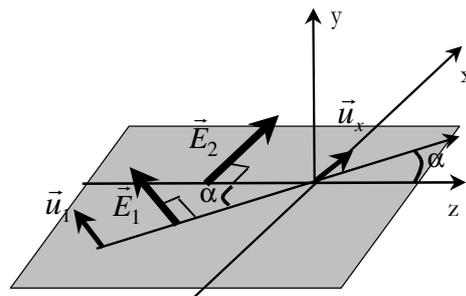
A la somme  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ , on peut donc associer la fonction scalaire  $s(M,t)$  :

$$\vec{E} = s(M,t) \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t)$$

Pour déterminer l'intensité lumineuse, égale à  $I = K \langle s^2 \rangle$ , une représentation scalaire des ondes lumineuses est donc ici justifiée. On peut en effet ignorer la direction de polarisation et écrire que  $I = K \langle (s_1 + s_2)^2 \rangle$ .

Dans d'autres cas, la représentation scalaire est une approximation plus ou moins justifiée.

\* Par exemple, on considère deux ondes polarisées dans le plan défini par leurs directions de propagation (voir figure, en choisissant le champ  $E_2$  polarisé selon (Ox)).



Le champ électrique résultant vaut alors :

$$\vec{E}(M,t) = s_1(M,t) \vec{u}_1 + s_2(M,t) \vec{u}_x$$

Soit :

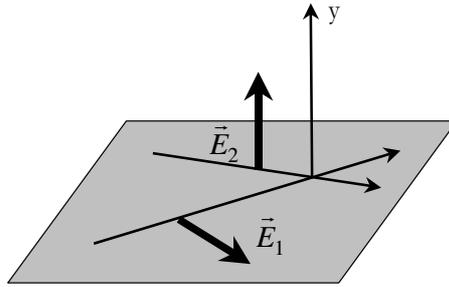
$$\vec{E}(M,t) = s_1(M,t)(\cos \alpha \vec{u}_x - \sin \alpha \vec{u}_z) + s_2(M,t) \vec{u}_x = (s_1(M,t) \cos \alpha \vec{u}_x + s_2(M,t) \vec{u}_x) - s_1(M,t) \sin \alpha \vec{u}_z$$

Si l'angle  $\alpha$  est petit, alors :

$$\vec{E}(M,t) \approx s_1(M,t) \vec{u}_x + s_2(M,t) \vec{u}_x$$

et l'on se ramène au cas précédent : l'approximation scalaire sera justifiée, ce qui ne sera pas le cas si l'angle  $\alpha$  est grand !

Les deux ont maintenant des directions de polarisation perpendiculaires. Avec les notations de la figure, il vient :



$$\vec{E}(M, t) = s_1(M, t) \vec{u}_1 + s_2(M, t) \vec{u}_2$$

Et :

$$\langle \vec{E}^2(M, t) \rangle = \langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle \neq \langle (s_1 + s_2)^2 \rangle$$

Il n'est pas possible, dans ce cas, de traduire la superposition des ondes  $\vec{E}_1(M, t)$  et  $\vec{E}_2(M, t)$  par une addition d'ondes scalaires.

Dans le cas de la lumière naturelle, la direction du champ électrique change de manière aléatoire au cours du temps. La durée moyenne entre deux changements est le temps de cohérence qui sera défini plus tard dans ce chapitre.

A ce stade, il suffit de savoir que ce temps est extrêmement bref par rapport à la durée d'une expérience (temps de réponse d'un détecteur, pour l'œil typiquement 0,1 s, pour une photodiode, typiquement  $10^{-6}$  s). Ainsi, il n'est pas possible d'attribuer une direction au champ électrique. La lumière naturelle est non polarisée.

Pour une lumière non polarisée se propageant dans la direction (Oz), les deux composantes  $E_x$  et  $E_y$  du champ électrique sont parfaitement équivalentes (par isotropie dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation).

On appelle vibration lumineuse  $s(M, t)$  une composante quelconque du champ électrique par rapport à un axe perpendiculaire à la direction de propagation.

Par conséquent, pour des ondes non polarisées, il suffira de considérer deux grandeurs scalaires correspondants aux deux axes (Ox) et (Oy). On pourra bien alors se limiter à une représentation scalaire à condition que leurs directions de propagation soit voisines.

En conclusion :

Dans un grand nombre de situations, l'intensité lumineuse, due à la superposition de plusieurs ondes EM, peut être déterminée au moyen d'un modèle simplifié, où le champ électrique est associé à une grandeur scalaire.

Cette approximation est justifiée :

- Dans le cas très fréquent d'ondes non polarisées dont les directions de propagation sont voisines.
- Pour des ondes polarisées dont on sait que les directions de polarisation sont voisines.

## 2 – Les différents modèles de la lumière

### Le modèle corpusculaire

- Newton avait déjà imaginé un modèle corpusculaire (inspiré de ses idées sur la mécanique) pouvant interpréter approximativement la diffraction (un champ gravitationnel pouvait même modifier la trajectoire de ses particules de lumière pesantes, comme en Relativité Générale !).
- Le modèle plus moderne du photon (Einstein, 1905) s'applique facilement à « l'effet photoélectrique ».

### Le modèle ondulatoire

- Celui-ci interprète facilement les phénomènes de diffraction et d'interférences : la lumière est alors considérée comme une onde électromagnétique de fréquence  $\nu$ .
- Il faut donc accepter une « dualité onde-corpuscule », où l'énergie  $E$  des photons est reliée à la fréquence de l'onde par la relation :  $E = h\nu$  ( $h =$  « constante de Planck »)

(On rappelle que la quantité de mouvement d'un photon est  $p = h\nu / c$ ).

Application : on va calculer la pression de radiation exercée sur un miroir parfait par une onde lumineuse en utilisant le modèle corpusculaire (principe par exemple des voiles solaires). On suppose que l'incidence des photons est normale au miroir.

Pendant  $dt$ , le nombre de photons qui frappent une surface  $dS$  du miroir est  $n^* cdtdS$  ; la quantité de mouvement cédée à la paroi est alors (calcul identique à celui de la pression cinétique en thermodynamique) :

$$dp = 2n^* c dt dS \left( \frac{h\nu}{c} \right)$$

La pression de radiation est donc :

$$P_{rad} = \frac{dp}{dt dS} = 2n^* h\nu$$

Un modèle ondulatoire conduit à  $P_{rad} = \epsilon_0 E_0^2$ , où  $E_0$  est l'amplitude du champ électrique associée à l'onde. Or (voir cours sur les ondes EM dans le vide) :

$$\langle e_{em} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = n^* h\nu$$

Les deux méthodes conduisent au même résultat.

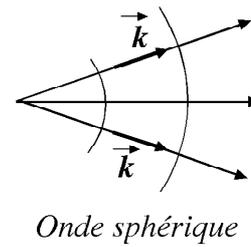
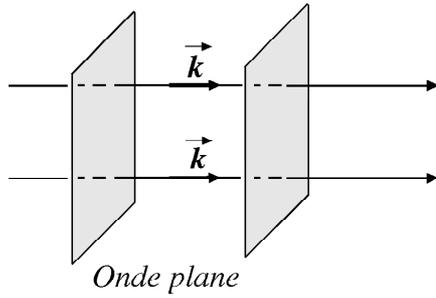
### Quel modèle utiliser ?

- Lorsque les **dimensions des obstacles** (objets, diaphragmes...) que rencontre la lumière sont **grandes** devant sa **longueur d'onde**  $\lambda$ , le modèle géométrique suffit.
- Dans le cas contraire, et à condition de ne pas être dans une situation où une petite quantité de lumière interagit avec la matière (atome, électron...), on optera pour le modèle ondulatoire : c'est l'objet d'étude du présent chapitre.

## II) Phase d'une onde lumineuse

Les rayons lumineux de l'optique géométrique sont en tout point tangents à la direction de propagation de l'onde lumineuse.

Les rayons lumineux sont les lignes de champ du vecteur d'onde  $\vec{k}$ . Ce sont les trajectoires de l'énergie.



**Principe de retour inverse de la lumière :**

« Les lois de la réflexion et de la réfraction sont indépendantes du sens de parcours de la lumière. »

Si on inverse le sens de propagation de la lumière, les rayons lumineux sont inchangés.

Pour une lumière monochromatique : (dans le cadre de la théorie scalaire de la lumière)

$$s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)$$

On définit la période T, la fréquence f, la pulsation  $\omega$ , le nombre d'onde  $\sigma = 1/\lambda$  et le vecteur d'onde dont le module est  $k = 2\pi\sigma = 2\pi/\lambda$ .

La fréquence d'une onde EM visible détermine sa couleur, encore caractérisée par sa longueur d'onde, à condition de préciser le milieu de propagation.

Le lien entre les variations temporelles et spatiales est donné par la vitesse de propagation et dépend du milieu.

Dans le vide :

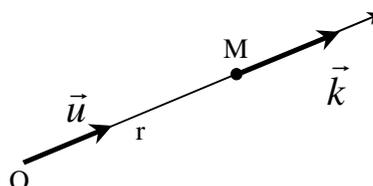
$$\lambda_0 = cT = \frac{c}{f} \quad \text{et} \quad k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

Dans un milieu matériel, où l'onde se propage à la vitesse  $v = c/n$  : (n est l'indice du milieu, supposé homogène)

$$\lambda = vT = \frac{v}{f} = \frac{\lambda_0}{n} \quad ; \quad k = \frac{\omega}{v} = nk_0$$

**Différence de phase entre deux points situés sur un même rayon lumineux :**

Dans un milieu homogène d'indice n, un rayon lumineux rectiligne est déterminé par un point O quelconque et son vecteur unitaire  $\vec{u}$ . M étant un point quelconque de ce rayon,  $r = \vec{u} \cdot \overline{OM}$  est la longueur parcourue par la lumière entre O et M, comptée positivement dans le sens de propagation.



La phase de l'onde en M peut s'écrire :

$$\Phi(M, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0 = \omega t - k \cdot r + \varphi_0 = \omega t - nk_0 r + \varphi_0 = \omega t - 2\pi \frac{nr}{\lambda_0} + \varphi_0$$

Ainsi, la différence de phase entre les points O et M est (en fait, la phase relative de l'onde en M par rapport à celle en O) :

$$\Phi_{M/O} = \Phi(M, t) - \Phi(O, t) = -\vec{k} \cdot \vec{OM} = -\frac{2\pi}{\lambda_0} n r \quad \text{avec} \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \vec{u}$$

On voit ici apparaître l'intérêt de la notion de chemin optique,  $\delta = nr$  et :

$$\Phi_{M/O} = -\frac{2\pi}{\lambda_0} n r = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta$$

Remarque : la présence du « moins » vient du choix de la phase en  $(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)$ . On aurait un « plus » avec le choix contraire  $(-\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)$ .

#### Continuité de la phase :

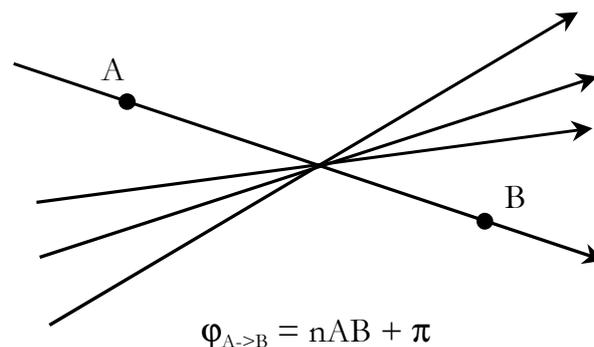
A la séparation entre deux milieux transparents, les rayons lumineux sont réfractés et réfléchis. Si les limites transversales du faisceau sont très grandes devant la longueur d'onde, les rayons sont déviés selon les lois de Snell-Descartes. Dans le cas, contraire, on observe le phénomène de diffraction (voir chapitre correspondant).

On note  $n_1$  l'indice du milieu (1) et  $n_2$  l'indice du milieu (2). Alors, en tout point du dioptre (surface de séparation entre ces deux milieux) :

- La phase de l'onde réfractée est égale à celle de l'onde incidente.
- Si  $n_1 > n_2$ , alors la phase de l'onde réfléchie est égale à celle de l'onde incidente.
- SI  $n_1 < n_2$ , alors la phase de l'onde réfléchie est égale à celle de l'onde incidente augmentée de  $\pi$ .

On rappelle également que :

- Une réflexion sur un métal s'accompagne d'une discontinuité de phase de  $\pi$ .
- Lorsqu'une onde passe par un point de convergence (voir figure), on admettra qu'il faut ajouter  $\pi$  à la différence de phase calculée à partir de la distance.



### III) Notion de chemin optique

Soit un milieu caractérisé en tout point  $M(x,y,z)$  par un indice  $n(x,y,z)$  ; on définit le chemin optique entre deux points A et B , le long d'une courbe (C) par :

$$L_{AB} = (AB) = \int_{A,(C)}^B n(x, y, z) d\ell$$

Le chemin optique est égal à la distance que franchirait la lumière dans le vide pendant le même temps  $\Delta t$  qu'elle met à parcourir la courbe (C) dans le milieu considéré. En effet :

$$L_{AB} = (AB) = \int_{A,(C)}^B \frac{c}{v} (v dt) = \int_{A,(C)}^B c dt = c \Delta t$$

Par ailleurs,  $(AB) = (BA)$  et, pour un milieu homogène,  $(AB) = nAB$ .

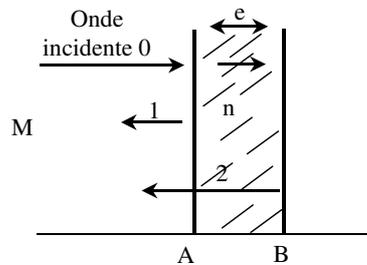
Le chemin optique est égal à  $c$  fois le temps mis par la lumière pour aller de A à B dans le milieu d'indice  $n$ . Il est donc une « image » du temps mis par la lumière pour aller d'un point à un autre.

La variation de la phase d'une onde EM, à cause de sa propagation entre deux points O et M, se met donc sous la forme :

$$\Phi_{M/O} = \phi_M - \phi_O = -\frac{2\pi}{\lambda_0} (OM) = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_{OM}$$

### Exercice d'application : couleurs d'une lame savonneuse

Une bulle d'eau savonneuse d'épaisseur  $e$  et d'indice  $n = 1,3$  est éclairée sous incidence normale. Le coefficient de réflexion est faible et les ondes issues de deux réflexions ou plus ont une intensité négligeable.



- Quel déphasage présente entre elles les deux ondes réfléchies ?
- A quelle condition une lumière de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  est-elle réfléchi avec une intensité maximale ?
- Pourquoi la bulle, éclairée en lumière blanche, prend-elle des reflets colorés lorsqu'elle devient très mince ? Donner un ordre de grandeur de l'épaisseur d'une bulle colorée.

### Solution :

- Onde 1 : une réflexion air – eau (avec déphasage supplémentaire de  $\pi$ ).
  - Onde 2 : une transmission air – eau puis une réflexion eau – air et une transmission eau – air.
- Ainsi :

$$\varphi_1(M) = \varphi_0(A) + \frac{2\pi}{\lambda_0} AM + \pi ; \quad \varphi_2(M) = \varphi_0(A) + \frac{2\pi}{\lambda_0} (2ne + AM)$$

D'où :

$$\varphi(M) = \varphi_1(M) - \varphi_2(M) = \frac{4\pi ne}{\lambda_0} - \pi$$

b) L'intensité réfléchie est maximale si ces deux ondes sont en phase, soit  $\varphi = 2p\pi$  (p entier), soit :

$$\lambda_0 = \frac{4ne}{2p+1} \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{\lambda_0} = \frac{p}{2ne} + \frac{1}{4ne}$$

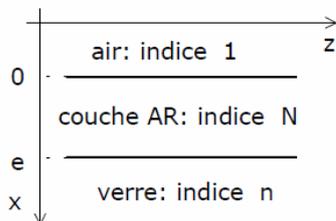
Entre deux maxima, l'écart est  $\Delta\left(\frac{1}{\lambda_0}\right) = \frac{1}{2ne}$ .

c) L'onde réfléchie (superposition de 1 et de 2) est nettement colorée si l'épaisseur est voisine de celle pour laquelle il n'existe qu'un seul maximum dans le visible, soit :

$$\Delta\left(\frac{1}{\lambda_0}\right) = \frac{1}{2ne} = \frac{1}{\lambda_{\text{violet}}} - \frac{1}{\lambda_{\text{rouge}}} \quad \text{soit} \quad e = 0,3 \mu\text{m}$$

La couleur de l'onde réfléchie dépend de l'épaisseur de la bulle.

### Compléments ; « couche anti-reflet » (lien avec les diélectriques) :



A la surface plane de séparation entre du verre (indice n) et de l'air (indice 1), on a déposé une couche (indice N), d'épaisseur e, destinée à être anti-reflet.  
Une OPPM, en provenance des x négatifs, arrive sous incidence normale sur la couche AR.

1) Calculer le coefficient de réflexion en amplitude de l'onde totale réfléchie ; on introduira les grandeurs :  $\varphi$  = déphasage dû à un aller-retour dans la couche AR ;  $r = \frac{N-n}{N+n}$  et  $r' = \frac{N-1}{N+1}$ .

**Rq** : les milieux sont supposés non absorbants, les indices sont donc tous réels.

2) En déduire N et e de façon à ce que la couche intermédiaire soit effectivement anti-reflet. (on notera  $\lambda_0$  la longueur d'onde dans le vide de l'onde utilisée).

Quelles sont les applications de ce dispositif ?

Quelles en sont les limites ? Comment l'améliorer ?

3) On se propose de retrouver les résultats précédents par une autre approche.

On donne les expressions du champ électrique, polarisé selon Oz, dans les 3 milieux :

$$x < 0 : \vec{E} = A_0 \exp[i(\omega t - k_0 x)] \vec{e}_z, \quad \text{avec} \quad k_0 = 2\pi / \lambda_0$$

$$x > e : \underline{\vec{E}} = A_V \exp[i(\omega t - nk_0 x)] \vec{e}_z$$

$$0 < x < e : \underline{\vec{E}} = A_C \exp[i(\omega t - Nk_0 x)] \vec{e}_z + D_C \exp[i(\omega t + Nk_0 x)] \vec{e}_z$$

- Justifier les expressions précédentes.
- Donner la forme du champ magnétique dans les 3 milieux.
- Donner les conditions aux limites vérifiées par les champs, en déduire  $N$  et  $e$ .

**Rq :** les différents milieux sont des isolants parfaits et se comportent comme le vide du point de vue magnétique.

### Solution :

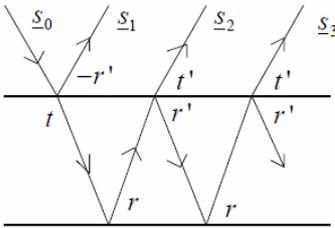
1) Soit  $\underline{s}_0 = a_0 e^{i\omega t}$  l'amplitude complexe de l'onde arrivant sur la couche en  $x=0$  (en projection sur  $\vec{e}_z$ ) ; le cours (réflexion et transmission sous incidence normale d'une OPPM) permet de poser par ailleurs :

$$t = \frac{2}{1+N} = \text{coefficient de transmission en amplitude air/couche AR}$$

$$t' = \frac{2N}{1+N} = \text{coefficient de transmission en amplitude couche AR/air}$$

• Rappelons que  $r =$  coefficient de réflexion en amplitude couche AR/verre et que  $r'$  est le coefficient de réflexion couche AR /air ;  $-r' = \frac{1-N}{1+N}$  sera le coefficient de réflexion air/couche AR.

• Raisonnons sur la figure ci-dessous :



Pour plus de clarté, traçons les rayons comme si l'incidence était oblique.

Reportons au niveau de chaque dioptre le coefficient (de réflexion ou de transmission) qui modifie l'amplitude de l'onde à ce niveau.

Le déphasage consécutif à un aller-retour dans la couche anti-reflet vaut :

$$\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda_0} = 4\pi \frac{Ne}{\lambda_0}$$

• On peut alors exprimer les amplitudes complexes des ondes qui émergent de la couche, soit :

$$\underline{s}_1 = -r' \underline{s}_0 ; \underline{s}_2 = r t t' e^{-i\varphi} \underline{s}_0 ; \underline{s}_3 = r r' e^{-i\varphi} \underline{s}_2 = r^2 r' t t' e^{-2i\varphi} \underline{s}_0$$

• Une récurrence immédiate montre que pour  $p > 1$ , on a :  $\underline{s}_{p+1} = \underline{s}_p \times r r' e^{-i\varphi}$ . D'où :

$$\underline{s}_{tot} = \underline{s}_0 \left[ -r' + r t t' e^{-i\varphi} \times \sum_{p=0}^{\infty} (r r' e^{-i\varphi})^p \right] = \underline{s}_0 \left[ -r' + \frac{r t t' e^{-i\varphi}}{1 - r r' e^{-i\varphi}} \right] \Rightarrow \underline{r}_{tot} = \frac{\underline{s}_{tot}}{\underline{s}_0} = -r' + \frac{r t t' e^{-i\varphi}}{1 - r r' e^{-i\varphi}}$$

• Remarquons que :  $t t' = \frac{4N}{(1+N)^2} = 1 - (r')^2 \Rightarrow \underline{r}_{tot} = -r' + [1 - (r')^2] \times \frac{r e^{-i\varphi}}{1 - r r' e^{-i\varphi}}$  ; il vient enfin :

$$\underline{r}_{tot} = \frac{-r' + r e^{-i\varphi}}{1 - r r' e^{-i\varphi}}$$

2) Pour que la couche soit anti-reflet, il faut évidemment que  $\underline{r}_{tot} = 0$  ; on en déduit :

$$-r' + r e^{-i\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{r'}{r} = e^{-i\varphi} ; \text{or, } r \text{ et } r' \text{ sont réels} \Rightarrow e^{-i\varphi} \text{ aussi} \Rightarrow \boxed{e^{-i\varphi} = \pm 1}$$

♦  $\boxed{\varphi = 2p\pi}$  :  $r = r' \Rightarrow \frac{N-1}{N+1} = \frac{N-n}{N+n} \Rightarrow n=1$ , ce qui n'est guère intéressant (si  $n=1$ ,

la couche est inutile puisqu'il n'y aurait pas de réflexion de toute manière !).

$$\diamond \boxed{\varphi = (2p+1)\pi} : r = -r' \Rightarrow \frac{N-1}{N+1} = -\frac{N-n}{N+n} \Rightarrow \boxed{N = \sqrt{n}}$$

• On a alors :  $\varphi = 4\pi \frac{Ne}{\lambda_0} = (2p+1)\pi \Rightarrow \boxed{e_p = \frac{2p+1}{4} \times \frac{\lambda_0}{\sqrt{n}}}$

**Rq1 :** on a  $e_{\min} = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{n}} \approx 0,1 \mu m$  en prenant  $\sqrt{n} = 1,25$  et  $\lambda_0 \approx 0,6 \mu m$  (jaune) ; cette valeur numérique est satisfaisante, car si l'on avait trouvé  $e_{\min} = 1 mm$ , les couches AR auraient été bien trop épaisses pour être utilisables dans la plupart des cas.

**Rq2 :** ces couches sont utilisées en lunetterie, sur les objectifs d'appareils photographiques, les lames compensatrices... bref dans la quasi-totalité des systèmes optiques, ceci pour éviter des réflexions parasites et des pertes de luminosité (rappelons qu'un objectif d'appareil photo moderne comporte un grand nombre de lentilles, donc un encore plus grand nombre de dioptries).

Cependant, on constate que  $e_p$  dépend de  $\lambda_0$  ; en lumière blanche, une seule couche ne pourra être anti-reflet pour toutes les longueurs d'ondes : ainsi, un verre traité anti-reflet pour le jaune (couleur dominante du spectre solaire) donnera des reflets pourpres (mélange de bleu et de rouge) lorsqu'il sera éclairé en lumière blanche.

Il faut donc un traitement « multi-couches », souvent assez sophistiqué, pour espérer éliminer quasiment tous les reflets (sur les objectifs, il est souvent écrit : MC lens, de « multi-coated »).

3) a) Puisqu'il n'y a pas d'onde réfléchiée en  $x=0$ , le champ électrique peut être décrit par une seule onde plane dans la région  $x < 0$  : elle s'y propage selon les  $x$  croissants dans un milieu d'indice 1 (dépendance en  $e^{i(\omega t - k_0 x)}$ ) ; pour  $x > e$ , on a toujours une seule onde plane se propageant selon les  $x$  croissants, mais dans un milieu d'indice  $n$  ; enfin, pour  $0 < x < e$ , on a bien la superposition de 2 ondes résultantes planes se propageant en sens contraire dans un milieu d'indice  $N$ .

b) La structure des ondes planes fournit :

$$x < 0 : \vec{B} = \frac{\vec{e}_x}{c} \wedge \underline{E} \vec{e}_z = -\frac{A_a}{c} \exp[i(\omega t - k_0 x)] \vec{e}_y ; \quad x > e : \vec{B} = \frac{n}{c} \vec{e}_x \wedge \underline{E} \vec{e}_z = -\frac{nA_y}{c} \exp[i(\omega t - nk_0 x)] \vec{e}_y$$

$$0 < x < e : \vec{B} = \frac{N}{c} \vec{e}_x \wedge \underline{E}^+ \vec{e}_z + \frac{N}{c} (-\vec{e}_x) \wedge \underline{E}^- \vec{e}_z = -\frac{NA_c}{c} \exp[i(\omega t - Nk_0 x)] \vec{e}_y + \frac{ND_c}{c} \exp[i(\omega t + Nk_0 x)] \vec{e}_y$$

c) • Conservation de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  en  $x=0$  et  $x=e$  :

• en  $x=0$  :  $A_a = A_c + D_c$  (1)

• en  $x=e$  :  $A_y \exp(-ink_0 e) = A_c \exp(-iNk_0 e) + D_c \exp(iNk_0 e)$  (2)

• Conservation de la composante tangentielle de  $\vec{B}$  en  $x=0$  et  $x=e$  :

(en l'absence de courants libres,  $H_{\text{tang}}$  se conserve  $\Rightarrow B_{\text{tang}}$  aussi puisqu'ici,  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ )

• en  $x=0$  :  $-A_a = -NA_c + ND_c$  (3)

• en  $x=e$  :  $-nA_y \exp(-ink_0 e) = -NA_c \exp(-iNk_0 e) + ND_c \exp(iNk_0 e)$  (4)

• En combinant les relations (1) et (3), il vient :

$$\boxed{2A_c = A_a \left( \frac{N+1}{N} \right)} \quad \text{et} \quad \boxed{2D_c = A_a \left( \frac{N-1}{N} \right)}$$

• Les relations (2) et (4) conduisent à :  $A_c \exp(-iNk_0 e)(N-n) = D_c \exp(iNk_0 e)(N+n)$

• En éliminant  $A_a$ ,  $A_c$  et  $D_c$  entre ces dernières expressions, on obtient :

$$\boxed{\frac{(N+1)(N-n)}{(N+n)(N-1)} = \exp(-i2Nk_0 e) = \exp(-i \frac{4\pi Ne}{\lambda_0}) = \pm 1}$$

ce qui est conforme aux résultats intermédiaires de la question 2) : la suite des calculs est identique.

#### IV) Surface d'ondes et stigmatisme :

##### 1) Surfaces d'onde :

Une surface d'onde ( $\Sigma$ ), relative à une source ponctuelle (S), est le lieu des points M tels que :

$$(SM) = cste$$

C'est une surface équiphase ( $\Phi_{M/S} = cste$ ).

En d'autres termes, vu la signification du chemin optique, une surface d'onde est un ensemble de points atteints en même temps par la lumière issue de S.

Pour une onde monochromatique plane :

$$\underline{s} = \underline{s}_0 \exp \left[ i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right] \quad (\text{avec } \underline{s}_0 = s_m e^{i\phi_0})$$

les surfaces équiphases sont des plans normaux à la direction de propagation dont le vecteur unitaire  $\vec{u}$  est uniforme et constant.

##### Onde émise par une source ponctuelle :

Elle peut s'exprimer sous la forme d'une onde sphérique (les surfaces équiphases sont des sphères) dont l'amplitude complexe est :

$$\underline{s} = \underline{a}_0 \frac{\exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r \right) \right]}{r} = \underline{a}_0 \frac{\exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} nr \right) \right]}{r}$$

La dépendance en  $1/r$  se justifie en invoquant la conservation de l'énergie.

A grande distance de la source ( $r \gg \lambda$ ), les variations de la phase sont prépondérantes par rapport aux variations de  $1/r$  :  $\underline{a}_0/r$  est pratiquement constant et on écrira :

$$\underline{s} = \underline{s}_0 \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r \right) \right]$$

En effet, supposons par exemple que la distance  $r$  passe de 1 m à 1,005 m (elle varie de 5 mm) ; on voit bien que les rapports  $1/1$  et  $1/1,005$  conduisent pratiquement à la même valeur ; par contre, en se plaçant par exemple à  $t = 0$  et en notation réelle, la phase du cosinus varie beaucoup (5 mm est beaucoup plus grand que la longueur d'onde dans le visible).

L'onde sphérique est alors assimilable à une onde plane progressive monochromatique.

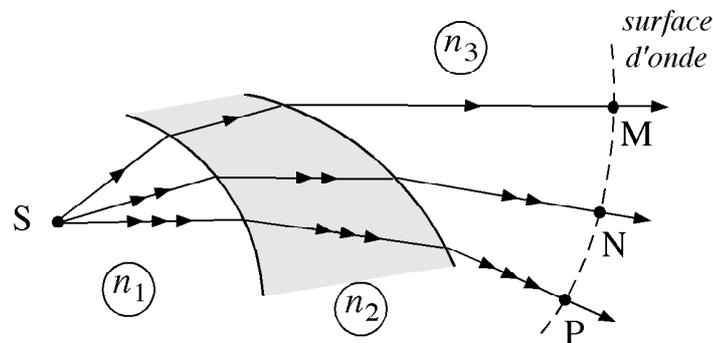
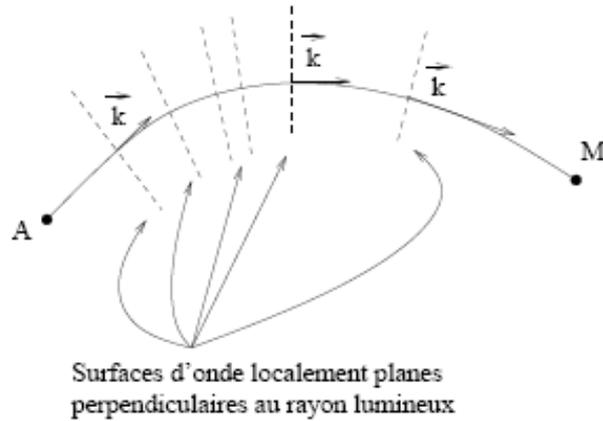
## 2 – Théorème de Malus

Enoncé :

« Dans un milieu isotrope, après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions, les rayons issus d'un même point source demeurent perpendiculaires aux surfaces d'ondes. »

Pour une onde plane, les rayons sont parallèles entre eux et perpendiculaires aux plans d'ondes ; pour une onde sphérique, les rayons lumineux sont justement les rayons des sphères d'ondes.

Ce théorème sera admis et justifié par quelques exemples.



• **Application** : considérons les cas de figure ci-dessous :

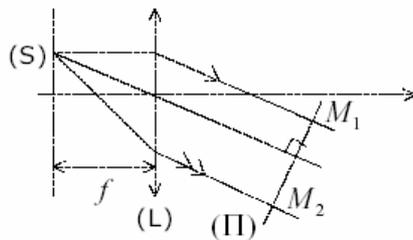


figure (a)

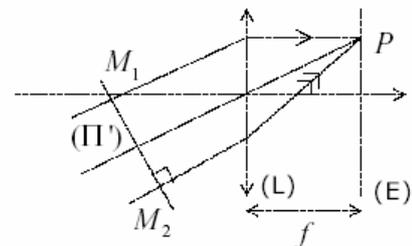


figure (b)

♦ dans le cas (a), la source (S) est placée dans le plan focal objet d'une lentille (L) ; les rayons ressortent parallèles, ( $\Pi$ ) est un plan d'onde  $\Rightarrow (SM_1) = (SM_2)$ .

♦ dans le cas (b), des rayons parallèles convergent en un même point P d'un écran (E) placé dans le plan focal image d'une lentille (L) : si l'on plaçait une source ponctuelle en P, on se retrouverait dans le cas (a), et l'on aurait toujours  $(PM_1) = (PM_2)$  ; le principe du retour inverse de la lumière fait que l'on a effectivement  $(M_1P) = (M_2P)$ .

En revanche, les ondes en  $M_1$  et  $M_2$  ne sont pas forcément en phase, et ( $\Pi'$ ) n'est plus un plan d'onde : simplement, toute différence de phase entre les 2 rayons acquise avant le plan ( $\Pi'$ ) sera conservée jusqu'en P (nous nous servirons souvent de ce résultat).

Remarque : on peut évoquer les temps de propagation pour expliquer que le chemin optique est le même entre  $SM_1$  et  $SM_2$ .

### Démonstration du théorème de Malus :

Il a été établi par E. Malus en 1808 dans le cas de la réflexion et généralisé par A. Dupin en 1816. Il traduit la propriété *d'orthogonalité des rayons lumineux et des surfaces d'ondes* après réfraction ou réflexion, dans un milieu *isotrope*.

Considérons un premier rayon lumineux issu d'un point  $A$  qui atteint une surface dioptrique  $S_1$  en  $I_1$ . Il passe par un point  $B$  du milieu 2, situé sur la surface d'onde  $\Sigma$ . Un second rayon lumineux, issu de  $A$  et voisin du premier, atteint la surface  $S_1$  en  $I'_1$ . Il passe par un point  $B'$  situé aussi sur  $\Sigma$ . Calculons la différence de chemin optique  $\Delta L = (AI'_1B') - (AI_1B)$  :

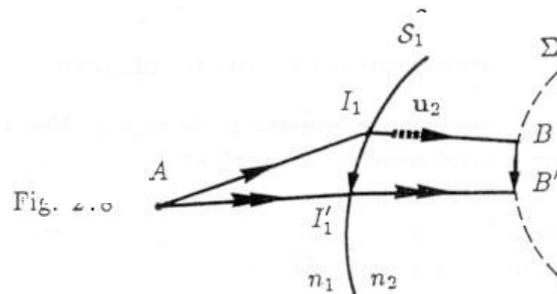
$$\Delta L = n_1 \mathbf{u}_1 \cdot (\Delta \mathbf{I} - \Delta \mathbf{A}) + n_2 \mathbf{u}_2 \cdot (\Delta \mathbf{B} - \Delta \mathbf{I}) = -(n_2 \mathbf{u}_2 - n_1 \mathbf{u}_1) \cdot \Delta \mathbf{I} + n_2 \mathbf{u}_2 \cdot \Delta \mathbf{B},$$

puisque  $\Delta \mathbf{A} = 0$ . Comme  $(n_2 \mathbf{u}_2 - n_1 \mathbf{u}_1) = a \mathbf{N}$  et que  $\Delta \mathbf{I} = \mathbf{I}_1 \mathbf{I}'_1$  est normal à  $\mathbf{N}$ , il vient :

$$\Delta L = n_2 \mathbf{u}_2 \cdot \Delta \mathbf{B}.$$

Mais  $\Sigma$  est une surface d'onde tout comme  $A$  qui est une surface d'onde ponctuelle. Par conséquent, le chemin optique entre ces deux surfaces est le même et  $\Delta L = 0$ . Il en résulte que  $\Delta \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{B}'$  est normal à  $\mathbf{u}_2$ . Comme  $B$  et  $B'$  sont des points voisins qui appartiennent à  $\Sigma$ ,  $\mathbf{u}_2$  est normal à  $\Sigma$ .

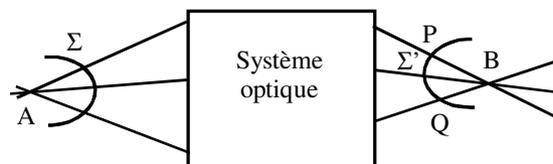
Cette démonstration se généralise sans difficulté lorsque les rayons franchissent plusieurs surfaces dioptriques. Ainsi, dans les milieux *isotropes*, les rayons lumineux sont *normaux* aux surfaces d'ondes.



### 3) Stigmatisme :

Deux points  $A$  et  $B$  seront stigmatiques vis-à-vis d'un système optique  $(\Sigma)$  si le chemin optique  $(AB)$  est indépendant du rayon ayant traversé le système  $(\Sigma)$ .

Soit un point objet  $A$  et son image  $B$  par un système optique constitué de miroirs et de lentilles. On considère deux rayons lumineux quelconques reliant  $A$  à  $B$  et leur intersection  $P$  et  $Q$  avec une surface d'onde  $\Sigma'$ .



D'après le théorème de Malus :  $(AP) = (AQ)$

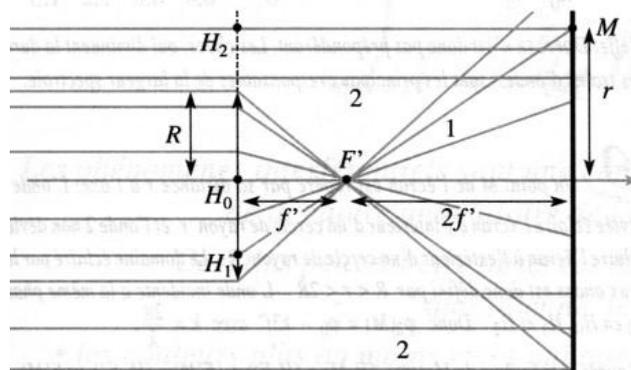
D'après le principe de retour inverse de la lumière,  $BP$  et  $BQ$  sont des rayons lumineux et  $(BP) = (BQ)$ , soit  $(PB) = (QB)$ .

Par conséquent,  $(AP) + (PB) = (AQ) + (QB) = (AB)$  : le chemin optique entre deux points conjugués par un système optique stigmatique est indépendant du rayon qui les relie.

On peut également indiquer que le temps de propagation des rayons émis en même temps par le point A pour aller en B ne dépend du rayon, puisqu'il y a stigmatisme. Par conséquent, les chemins optiques  $(APB)$  et  $(AQB)$  sont égaux.

### Exercice d'application : (déphasage entre deux ondes cohérentes)

Une onde plane, supposée monochromatique, est interceptée par une lentille mince convergente de rayon R et de distance focale image  $f'$ . Un écran est placé à une distance  $3f'$  de la lentille.



Déterminer le domaine de l'écran éclairé par les deux ondes et calculer leur déphasage en un point de ce domaine. La lentille est taillée dans un verre d'indice  $n$  et son épaisseur au niveau de l'axe optique est  $e$ .

### Solution :

Un point M de l'écran est repéré par sa distance  $r$  à l'axe. L'onde (1) déviée éclaire l'écran à l'intérieur d'un cercle de rayon  $r$  et l'onde (2) non déviée éclaire l'écran à l'extérieur d'un cercle de rayon  $R$ . Le domaine éclairé par les deux ondes est donc défini par  $R < r < 2R$ .

L'onde incidente a la même phase  $\varphi_0$  en  $H_0$ ,  $H_1$  et  $H_2$ . Donc :

$$\varphi_2(M) = \varphi_0 - k_0(3f') = \varphi_0 - 3f' \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

D'après le théorème de Malus :

$$(H_1M) = (H_1F') + (F'M) = (H_0F') + (F'M)$$

Par rapport à un trajet de même distance dans l'air le long de l'axe, la lentille apporte un trajet optique supplémentaire :  $ne - e = (n - 1)e$ .

On en déduit :

$$\varphi_1(M) = \varphi_0 - k_0(f' + (n - 1)e + F'M) + \pi$$

Le déphasage est donc :

$$\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (-2f' + (n - 1)e + F'M) + \pi$$

En se limitant aux termes du second ordre en  $r / f'$  ( $F'M \approx 2f' + r^2 / f'$ ) :

$$\varphi(M) \approx \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( (n-1)e + \frac{r^2}{f'} \right) + \pi$$

## V) Trains d'ondes :

### 1) Définitions :

Une onde plane progressive monochromatique, de direction (Oz), est de la forme :

$$\vec{E} = E_{xm} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) + \phi \right] \vec{u}_x + E_{ym} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) + \psi \right] \vec{u}_y$$

Pour t compris entre  $-\infty$  et  $+\infty$  et quel que soit z.

Un atome individuel émet pendant un temps très bref, de l'ordre de  $\tau_0 = 10^{-11} s$  (appelé temps de cohérence, voir tableau ci-dessous). L'émission lumineuse n'est pas continue, elle se fait par émission de trains d'ondes de durée moyenne  $\tau_c$  grande devant la période du signal.

En un point donné, la durée de réception du train d'onde est  $\tau_c$ .

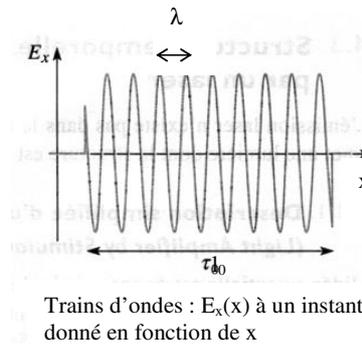
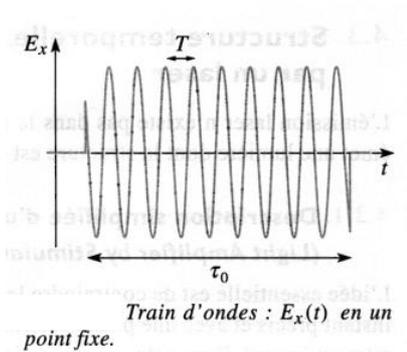
A un instant déterminé, la longueur du train d'onde est  $L_c = c\tau_c$  (appelée longueur de cohérence temporelle, de l'ordre de quelques mm).

Remarque : c est la vitesse de la lumière dans le vide. Dans le cas d'un milieu matériel où la vitesse est v, il faudra écrire  $L_c = v\tau_c = c\tau_c / n$ .

Les molécules ou atomes excités émettent des trains d'ondes de fréquence  $\nu$  avec une largeur naturelle  $\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau_0}$  pour une raie d'émission à la fréquence  $\nu$  avec  $\frac{\Delta\nu}{\nu}$  très petit. La raie monochromatique n'existe pas !

Les trains d'ondes sont aléatoires entre eux. Deux trains d'ondes émis successivement par la même particule ont des déphasages aléatoires.

	$\lambda_0$ (nm)	radiation	$\nu_0$ (en $10^{14}$ Hz)	$\Delta\nu_0$ (en Hz)	$\tau_c$ (s)	$L_c$	$L_c$
Lumière blanche	400 à 800		7,5 – 3,5	$4 \cdot 10^{14}$	$2,5 \cdot 10^{-15}$	750 nm	$\approx \lambda_0$
Vapeur de mercure (haute pression)	546,1	Verte	5,49	$10^{12}$	$10^{-12}$	0,3 mm	$\approx 550\lambda_0$
Vapeur de mercure (basse pression)	546,1	Verte	5,49	$10^9$	$10^{-9}$	0,3 m	$\approx 5 \cdot 10^5 \lambda_0$
Vapeur de cadmium	643,8	Rouge	4,66	$10^9$	$10^{-9}$	0,3 m	$\approx 5 \cdot 10^5 \lambda_0$
Laser He – Ne ordinaire	632,8	Rouge	4,74	$10^9$	$10^{-9}$	0,3 m	$\approx 5 \cdot 10^5 \lambda_0$
Laser He – Ne stabilisé	632,8	Rouge	4,74	$10^4$	$10^{-4}$	30 km	$\approx 5 \cdot 10^{10} \lambda_0$



L'onde lumineuse reçue par un point M est la somme des trains d'ondes émis par un grand nombre d'atomes. Sa structure dépend de la nature de la source (classique ou laser).

L'onde émise par une source classique (naturelle) est une succession ininterrompue de trains d'ondes de durée voisines de  $\tau_c$  et incohérents, c'est-à-dire sans relation de phase entre eux. La source est dite incohérente.

Une source laser possède un temps de cohérence beaucoup plus grand, de l'ordre de  $\tau_c = 10^{-7} s$  et une longueur de cohérence correspondante de l'ordre de plusieurs mètres : une telle source est dite cohérente.

Durée d'un train d'onde :

L'onde monochromatique est un modèle : un signal sinusoïdal de la forme  $s(t) = s_0 \cos(\omega t)$  existe à tout instant et ne peut représenter un signal physique, qui est par nature de durée limitée.

Ainsi, un train d'onde émis lors de la désexcitation d'un atome ne peut être décrit par un signal purement monochromatique.

On peut considérer ce train d'onde comme une superposition de plusieurs ondes monochromatiques, autrement dit un « paquet d'ondes ». L'amplitude de ce paquet d'onde peut s'écrire sous la forme :

$$s(x, t) = \sum_{\substack{\text{ondes sinusoïdales} \\ \text{du paquet d'ondes}}} s_{0_i} \cos\left(\omega_i \left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_i\right) \quad \text{avec } \omega_i \in \left[\omega - \frac{\Delta\omega}{2}; \omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right]$$

On suppose que  $\Delta\omega \ll \omega$  (le signal reste quasiment monochromatique).

On va montrer que ce paquet d'ondes a une extension temporelle  $\tau_c$  finie ; on se place en un point d'observation d'abscisse nulle par convention et on suppose que les composantes du paquet d'onde sont en phase à l'instant  $t = 0$  :

$$s(x = 0, t = 0) = \sum_{\substack{\text{ondes sinusoïdales} \\ \text{du paquet d'ondes}}} s_{0_i}$$

Les ondes du paquet d'ondes se superposent alors de manière constructive ; lorsque le temps évolue, la phase de chaque composante évolue différemment (puisque les pulsations sont différentes). On peut écrire à l'instant  $t$  (et au même point de l'espace) l'évolution de ce paquet d'ondes sous la forme, en précisant les « phases extrêmes » :

$$s(x_0, t) = s_{0_-} \cos\left(\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) + \dots + s_{0_+} \cos\left(\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right)$$

La différence des « phases extrêmes » vaut :

$$\Delta\varphi = (\Delta\omega) t = (2\pi\Delta\nu) t$$

La superposition des ondes du paquet cesse d'être constructive quand cette différence est de l'ordre de  $2\pi$ . Le temps correspond alors à la durée du train d'onde  $\tau_c$  :

$$\Delta\varphi = (2\pi\Delta\nu) \tau_c = 2\pi \quad \text{soit} \quad \tau_c \Delta\nu = 1$$

On peut faire intervenir la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  en écrivant que :

$$\nu = \frac{c}{\lambda_0} \quad d'où \quad \Delta\nu = \frac{c}{\lambda_0^2} \Delta\lambda_0$$

Soit :

$$\tau_c \frac{c}{\lambda_0^2} \Delta\lambda_0 = 1 \quad d'où \quad \ell_c = c\tau_c = \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0^2}$$

où  $\ell_c$  représente la longueur de cohérence du train d'onde (c'est la longueur spatiale du train d'onde).

## 2) Profil spectral d'un train d'ondes quasi-monochromatique

Au lieu d'une onde sinusoïdale de pulsation  $\omega_0$  limitée dans le temps, on se propose de décrire l'onde émise par un atome comme étant la superposition d'une infinité d'ondes rigoureusement monochromatiques, de pulsations voisines de  $\omega_0$ . On retrouve ainsi la notion de paquet d'ondes déjà citée dans le cours sur les ondes. Ce paquet d'onde se propagera le plus souvent à la même vitesse (celle de la lumière) car on pourra souvent négliger la dispersion (pas dans le cas d'un prisme et de la lumière blanche).

(Oz) étant la direction de propagation, à chaque bande spectrale élémentaire  $d\omega$  est attachée une amplitude complexe : (dans le vide,  $v = c$ )

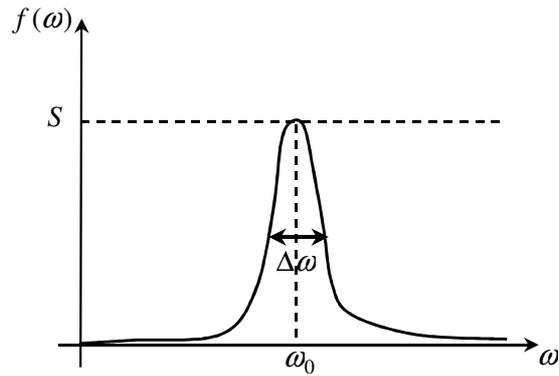
$$d\underline{s}(M, t) = f(\omega) \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] d\omega$$

L'amplitude complexe totale, résultant de la superposition des bandes spectrales est :

$$\underline{s}(M, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] d\omega$$

$f(\omega)$  est appelé le profil spectral en amplitude de la source et ne possède de valeurs significatives qu'aux alentours de  $\omega_0$ . Par exemple (profil spectral lorentzien) :

$$f(\omega) = \frac{S}{1 + 4 \frac{(\omega - \omega_0)^2}{(\Delta\omega)^2}} \quad (\Delta\omega \text{ est la largeur à mi-hauteur})$$



Pour le calcul de  $s(t)$ , on pose  $u = \omega - \omega_0$  et  $v = t - \frac{z}{c}$  :

$$\underline{s}(M, t) = S \exp(i\omega_0 v) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(iuv)}{1 + 4 \frac{u^2}{(\Delta\omega)^2}} du$$

Comme (voir formulaire de mathématique) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(iuv)}{1 + 4 \frac{u^2}{(\Delta\omega)^2}} du = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \exp\left(-\frac{\Delta\omega \left|t - \frac{z}{c}\right|}{2}\right)$$

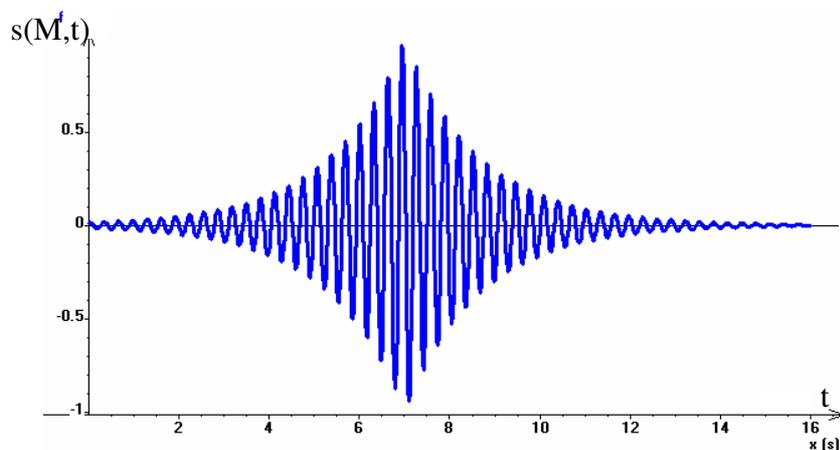
Il vient :

$$\underline{s}(M, t) = \frac{2\pi S}{\Delta\omega} \exp\left(i\omega_0 \left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \exp\left(-\frac{\Delta\omega \left|t - \frac{z}{c}\right|}{2}\right)$$

En prenant la partie réelle :

$$s(M, t) = \frac{2\pi S}{\Delta\omega} \exp\left(-\frac{\Delta\omega \left|t - \frac{z}{c}\right|}{2}\right) \cos\left(\omega_0 \left(t - \frac{z}{c}\right)\right)$$

On obtient l'expression d'une onde sinusoïdale dont l'amplitude  $A$  est modulée par une fonction exponentielle (courbe tracée pour un  $z$  fixé) :



On peut évaluer le temps de cohérence ainsi que la largeur de cohérence : en un  $z$  donné, l'amplitude a diminué d'un facteur  $e$  au bout de  $\frac{\tau_c}{2} = \frac{2}{\Delta\omega}$ , soit  $\tau_c = \frac{4}{\Delta\omega}$ .

On remarque que :

$$\tau_c \Delta\omega = 4 \quad \text{soit} \quad \tau_c \Delta f = \frac{2}{\pi} \approx 1 \quad (\text{comprendre : de l'ordre de } 1)$$

Un autre profil de raies aurait donné un résultat qualitativement identique :

$$\tau_c \Delta f \approx 1$$

Il s'agit en fait de deux façons équivalentes de décrire un phénomène ondulatoire : la description naturelle, dans l'espace des temps  $s(t)$  et la description dans l'espace des fréquences  $f(\omega)$  sont telles que :

$$\underline{s}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (\text{en } z = 0)$$

et il est possible de montrer que le profil spectral  $f(\omega)$  en amplitude se calcule à partir de  $s(t)$  par :

$$f(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{s}(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (\text{exemple de transformée de Fourier})$$

On peut dire que  $f(\omega)$  et  $s(t)$  contiennent l'une et l'autre toute l'information relative au signal.

Le passage du profil spectral  $f(\omega)$  à  $s(t)$  est un exemple d'application de la transformée de Fourier, dont les propriétés sont données en annexe à la fin du chapitre.



# Annexe 1 : transformée de Fourier



## 1) Définitions :

Sous des conditions de régularité que l'on admettra réalisées en physique, on définit la transformée de Fourier  $\hat{g}(\omega)$  d'une fonction  $g(t)$  par :

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$$

On démontre le théorème de réciprocity :

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Ce théorème permet d'affirmer que toute fonction (temporelle par exemple)  $g(t)$  peut être considérée comme la somme d'une infinité de fonctions sinusoïdales, même si elle n'est pas périodique (c'est une généralisation des séries de Fourier vues en électronique).

Spectre : on appelle spectre d'une fonction  $g(t)$  l'ensemble des valeurs de  $\omega$  donnant une contribution non nulle à  $g(t)$ . C'est un spectre continu, contrairement aux cas des séries de Fourier qui conduisent à un spectre discret de fréquences.

## 2) Extension temporelle et largeur spectrale d'un signal :

### a) 1<sup>er</sup> exemple ; impulsion de durée $\tau$ :

Calculons la transformée de Fourier de la fonction

$$g(|t| < \tau/2) = 1 \quad \text{et} \quad g(|t| > \tau/2) = 0$$

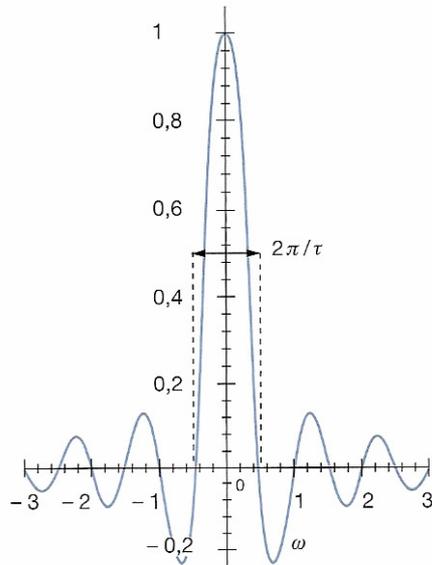
$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp(-j\omega t) dt$$

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-j\omega\tau/2) - \exp(j\omega\tau/2)}{-j\omega} = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 \sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau}$$

Si on définit la fonction *sinus-cardinal* par :

$$\text{sinc } u = \frac{\sin u}{u} \quad \text{alors} \quad \hat{g}(\omega) = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(\omega\tau/2)$$

L'allure du graphe de  $\hat{g}(\omega)$  est donnée sur la figure et montre que  $\hat{g}(\omega)$  ne prend de valeurs notables que sur un intervalle de pulsations  $\Delta\omega = 2\pi/\tau$  correspondant au pic central du graphe, appelé largeur spectrale de  $g(t)$ .



**b) Signal sinusoïdal de durée limitée :**

Calculons la transformée de Fourier de la fonction  $g(|t| < \tau/2) = 2\cos(\omega_0 t)$  et  $g(|t| > \tau/2) = 0$  :

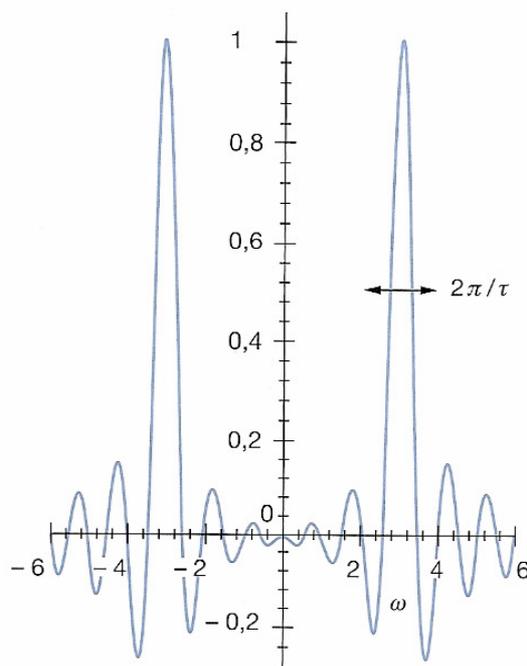
$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 2\cos(\omega_0 t) \exp(-j\omega t) dt .$$

Soit avec  $2\cos(\omega_0 t) = \exp(j\omega_0 t) + \exp(-j\omega_0 t)$  :

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp(-j(\omega - \omega_0) t) dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp(-j(\omega + \omega_0) t) dt .$$

Soit en utilisant le résultat du premier exemple :

$$\hat{g}(\omega) = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \text{sinc}\left(\frac{(\omega - \omega_0) \tau}{2}\right) + \text{sinc}\left(\frac{(\omega + \omega_0) \tau}{2}\right) \right\} .$$



L'allure du graphe de  $\hat{g}(\omega)$  est donnée sur la figure et montre que la largeur spectrale de  $\hat{g}(\omega)$  vaut  $\Delta\omega \approx 1/\tau$ . En particulier, une sinusoïde pure ( $\Delta\omega = 0$ ) est nécessairement d'extension temporelle infinie ( $\tau \rightarrow \infty$ ).

Un signal périodique de durée limitée n'est pas représentable par une fréquence unique. Seul le cas unique d'un signal sinusoïdal éternel peut être considéré comme strictement monochromatique.

### c) Généralisation :

Les résultats précédents se généralisent qualitativement pour les fonctions usuellement rencontrées en physique. Les largeurs spectrales  $\Delta\omega$  et fréquentielle  $\Delta f$  d'une fonction  $g(t)$  sont reliées à la durée  $\tau$  pendant laquelle  $g(t)$  prend des valeurs notables par les relations :

$$\tau\Delta\omega \approx 2\pi \quad ; \quad \tau\Delta f \approx 1$$

Un signal est d'autant plus étendu en fréquence qu'il est bref.

### 3) Applications :

La transmission d'une émission télévisée en noir et blanc dans le standard « 625 lignes » nécessite d'émettre 25 fois par seconde  $(625) \cdot (360)$  signaux individuels, chaque signal réglant la teinte d'un point de l'écran à raison de 360 points par ligne. Ainsi la durée de chaque signal est de l'ordre de :

$$\tau \approx \frac{1}{(25)(625)(360)} \approx 0,18 \mu\text{s}$$

et la propriété  $\tau\Delta f \approx 1$  montre qu'un canal de télévision occupe une bande de fréquence de largeur :

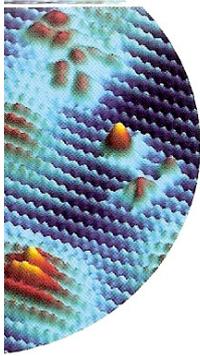
$$\Delta f \approx \frac{1}{\tau} \approx 5,6 \text{ MHz}$$

à comparer à la largeur  $\Delta f \approx 40 \text{ kHz}$  d'un canal radio en modulation d'amplitude. On voit ici les limitations du nombre de canaux disponibles pour des chaînes télévisées véhiculées par des ondes hertziennes. On voit en revanche l'intérêt de la propagation par fibres optiques qui permet d'augmenter la fréquence des ondes porteuses jusqu'à  $f \approx 10^{14} \text{ Hz}$ , ce qui augmente considérablement le nombre de canaux disponibles. Ceci permet aussi d'augmenter le nombre de pixels c'est-à-dire la qualité de l'image en acceptant des canaux plus larges (standards « haute définition »).

### Retour sur le circuit RLC série :

On peut montrer que la fonction de transfert d'un système linéaire est la transformée de Fourier de sa réponse à une impulsion. Nous retrouvons sur la relation  $\Delta\omega\tau \approx 1$  le lien entre la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle d'un circuit  $R - L - C$  série : le facteur de qualité  $Q = \omega_0/\Delta\omega = 2\pi\tau/T_0$  est d'autant plus élevé que la bande passante  $\Delta\omega$  est étroite et que la constante de temps  $\tau$  de l'amortissement de la réponse impulsionnelle est plus courte.

# Annexe 2 : Le Laser



## Le laser : principe de fonctionnement

Fruits de la découverte de l'émission stimulée par Einstein, et de la mise au point des oscillateurs radiofréquence pendant la dernière guerre, le maser fut inventé en 1954, suivi de près par le laser en 1960. Depuis, de nombreux types de lasers ont été mis au point, dont la taille varie depuis le micromètre jusqu'à la centaine de mètres et qui couvrent un domaine spectral s'étendant des micro-ondes ( $10^9\text{Hz}$ ) jusqu'aux rayons X ( $10^{17}\text{Hz}$ ). Tout d'abord instruments rétifs et exotiques de laboratoire, ils sont maintenant présents, et souvent invisibles, dans de nombreux appareils de notre vie quotidienne : lecteurs de CD, imprimantes, liaisons téléphoniques...

### L'amplification par émission stimulée

Le phénomène physique de base est contenu dans les lettres SE des acronymes LASER (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*) et MASER (*Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation*) : il s'agit de l'émission stimulée, introduite par Einstein dès 1917 pour expliquer au niveau microscopique l'interaction d'un atome avec le rayonnement du corps noir. Lorsqu'un atome, possédant des niveaux ( $a$ ) et ( $b$ ) d'énergie  $E_a$  et  $E_b$ , interagit avec un rayonnement monochromatique de fréquence  $f$  proche de la fréquence de Bohr  $f_0=(E_b-E_a)/h$ , deux phénomènes symétriques peuvent se produire (Fig. 1) :

1. l'atome dans l'état de plus basse énergie ( $a$ ) est porté dans l'état ( $b$ ) plus excité. C'est le phénomène d'absorption de la lumière par l'atome.
2. l'atome est dans l'état de plus haute énergie ( $b$ ) est porté dans l'état ( $a$ ) moins excité. C'est le phénomène d'émission stimulée (ou induite).

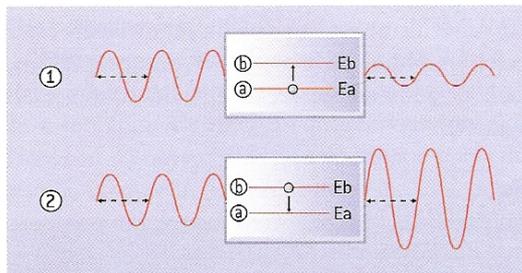


Fig. 1 Après interaction avec l'atome, l'onde électromagnétique voit son amplitude, donc son énergie, diminuée dans le processus d'absorption [1] et augmentée dans le processus d'émission stimulée [2].

Après interaction avec l'atome, le champ électrique a une amplitude inférieure à l'amplitude incidente dans le cas 1, et supérieure dans le cas 2.

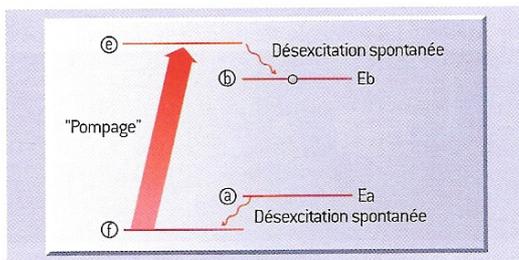
Lorsque le champ interagit avec de nombreux atomes, au nombre de  $N_a$  dans le niveau inférieur ( $a$ ), et de  $N_b$  dans le niveau supérieur ( $b$ ), les deux processus coexistent : l'émission stimulée ne prédomine que si  $N_b > N_a$ , c'est-à-dire s'il y a « inversion de population ». Dans ce dernier cas, le milieu atomique se comporte comme un amplificateur optique, analogue à un amplificateur électronique, qui transforme un courant oscillant incident en un courant oscillant de plus grande amplitude et de même fréquence, avec une relation de phase bien déterminée entre l'entrée et la sortie. L'inversion de population, nécessaire pour l'amplification optique, n'est pas un phénomène spontané, puisque les atomes au repos sont dans le niveau de plus basse énergie  $E_a$ . On ne peut pas non plus l'obtenir en chauffant le milieu, car à l'équilibre thermique les niveaux d'énergie les plus bas sont toujours les plus peuplés, ni en l'éclairant avec un rayonnement très intense, car, à cause de la coexistence entre les deux processus d'absorption et d'émission stimulée, on atteint au mieux dans ce cas l'égalité entre  $N_a$  et  $N_b$ . Les physiciens ont imaginé des processus dits de « pompage » pour réaliser cette inversion de population en excitant un ou des niveaux d'énergie plus élevée que  $E_b$ . Le niveau ( $b$ ) est ensuite peuplé par divers processus de désexcitation se produisant dans le milieu. Il est aussi avantageux, pour que  $N_a$  soit le plus faible possible, que ( $a$ ) ne soit pas le niveau fondamental du système, mais lui-même un niveau excité (Fig. 2).

## De l'amplificateur laser à l'oscillateur laser

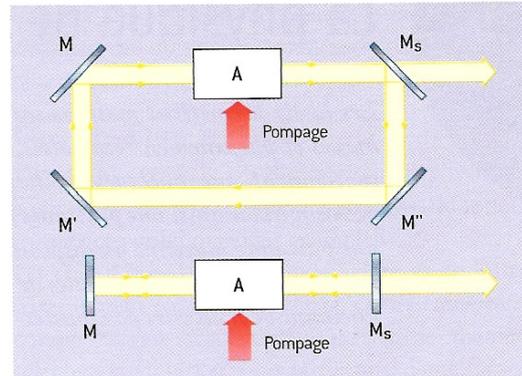
Pour transformer un amplificateur en oscillateur, il faut «boucler» sa sortie sur son entrée. Un exemple en est fourni par l'effet Larsen: si on «boucle» un circuit électroacoustique en approchant un micro du haut-parleur auquel il est connecté par un amplificateur, on entend dans certaines conditions un sifflement strident. Le système amplificateur a engendré une onde sonore très monochromatique et s'est donc transformé en oscillateur. De la même manière, on obtiendra un oscillateur optique en réinjectant la sortie de l'amplificateur optique à son entrée à l'aide de miroirs (Fig. 3). Le faisceau de sortie est issu du miroir de sortie  $M_s$ , qui n'est pas parfaitement réfléchissant et transmet une partie de la lumière recyclée. Si le gain de l'amplificateur est supérieur aux pertes qui se produisent sur un tour, un faible champ initial verra son énergie multipliée par un facteur plus grand que 1 à chaque tour. Cette augmentation s'arrêtera à cause de la saturation de l'amplificateur, dont le gain diminue lorsque l'intensité est trop forte. Le laser atteint un régime stationnaire lorsque le bilan sur un tour est neutre: le gain en présence de saturation est alors égal aux pertes.

### Le bouclage

À cause du bouclage par les miroirs, le laser est un résonateur optique, l'analogue optique d'un résonateur acoustique comme un tuyau d'orgue. Il possède différents modes de vibration possibles. S'il fonctionne sur un seul mode, sa fréquence est parfaitement déterminée et liée à la longueur du laser. Le



**Fig. 2** L'inversion de population sur la transition  $(a) \rightarrow (b)$  de l'atome, est obtenue en portant par un processus de «pompage» les atomes de leur niveau fondamental  $(f)$  jusqu'au niveau excité  $(e)$ , d'où ils retombent spontanément sur le niveau supérieur  $(b)$ . Le niveau inférieur  $(a)$  se vide rapidement par désexcitation vers le niveau fondamental  $(f)$ .



**Fig. 3** Schéma d'un laser à cavité en anneau (en haut) et d'un laser à cavité linéaire (en bas). A est le milieu amplificateur contenant les atomes sur lesquels on a réalisé l'inversion de population.  $M_s$  est le miroir de sortie, partiellement réfléchissant et partiellement transmettant. Les autres miroirs M, M', M'' sont parfaitement réfléchissants.

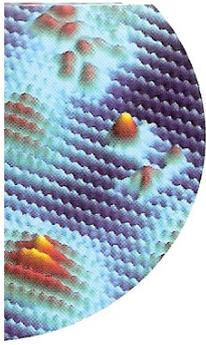
laser produit dans ce cas un champ purement sinusoïdal, de très grande cohérence temporelle.

Si on considère par exemple une cavité linéaire formée de deux miroirs plans parallèles, seule une onde se propageant de manière exactement perpendiculaire aux deux miroirs sera recyclée sur un grand nombre de tours. C'est ce qui explique l'extrême directivité du rayonnement laser, c'est-à-dire sa très grande cohérence spatiale.

Dans les deux cas, cette cohérence n'est pas totale: une désexcitation spontanée du niveau excité peut se produire parfois, qui interrompt la sinusoïde émise par le laser, et limite donc sa cohérence temporelle. La diffraction du faisceau laser, de taille transverse nécessairement finie, limite sa cohérence spatiale. Dans les deux cas, ces limites se situent à de nombreux ordres de grandeur de ce qu'on pouvait obtenir avec les sources classiques. Les physiciens disposent avec le laser d'un rayonnement électromagnétique ayant d'extraordinaires propriétés de cohérence, comme ils n'auraient même pas osé rêver d'en posséder avant les années 1960.

### Bibliographie

- D. Dangoisse, D. Hennequin, V. Zehnlé-Daoui, *Les lasers*, Dunod, 1998.
- B. Cagnac, J-P Faroux, *Lasers*, EDP Sciences, 2002.
- G. Grynberg, A. Aspect, C. Fabre, *Introduction aux lasers et à l'optique quantique*, Ellipses, 1997.



## Le laser : un instrument de mesure extraordinairement sensible

*Nous avons vu dans l'article précédent à quel point le « concentré d'énergie » fourni par le laser pouvait être utile pour modifier de manière spectaculaire la matière sur laquelle son rayonnement est focalisé. Mais les lasers ont bien d'autres applications que cette utilisation quelque peu brutale de la force pure. Nous allons ici donner quelques illustrations de la manière dont on peut utiliser, non plus l'énergie, mais l'extrême pureté spectrale de la lumière laser, pour des applications non moins impressionnantes que les précédentes.*

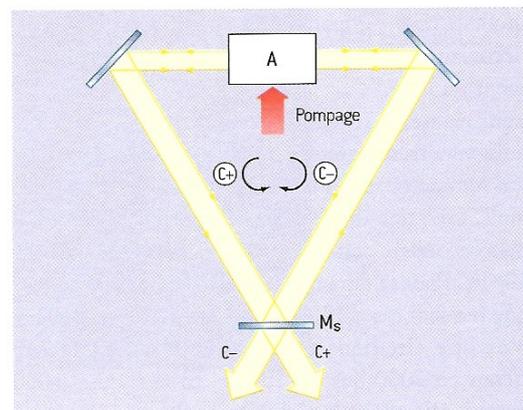
### La cohérence temporelle du laser

Le fonctionnement même du laser impose une très grande cohérence temporelle à la lumière qu'il émet : la durée des trains d'onde émis (sinusoïdes pures) est beaucoup plus grande que pour une source classique. Elle n'est limitée que par les imperfections du dispositif : par exemple les inévitables fluctuations de la longueur de la cavité du laser entraînent de faibles fluctuations de sa fréquence d'émission. Le laser n'émet une sinusoïde parfaitement monochromatique que pendant un temps de quelques dizaines de nano-secondes. En stabilisant certains paramètres, principalement la longueur du laser, on peut obtenir des trains d'onde d'une milliseconde, voire d'une seconde, et qui s'étendent sur des centaines de milliers de kilomètres ! Avec de telles sources, il devient très aisé d'observer des interférences : la lumière laser se caractérise par un scintillement sur les surfaces éclairées. Ce phénomène, appelé « tavelure », est dû à l'apparition d'interférences entre les ondes réémises par les différents points de la surface éclairée.

Cette extraordinaire monochromaticité de la lumière laser est utilisée dans de nombreuses applications. Nous allons ici nous restreindre à en décrire une, celle où on cherche à mesurer avec la plus grande sensibilité possible la vitesse, linéaire ou angulaire, d'un objet.

### Vélocimétrie laser

Le phénomène qui est à la base de la vélocimétrie laser est l'effet Doppler. Un objet se déplaçant à la vitesse  $v$  par rapport à une source lumineuse émettant une onde de fréquence  $f$  la réémet ensuite



**Fig. 1** Dans un laser en anneau, l'oscillation laser peut se produire dans les deux sens de rotation  $C_+$  et  $C_-$ . Les fréquences des deux ondes sortant par le miroir de sortie  $M_s$  sont différentes si le laser est animé d'un mouvement de rotation dans le plan du triangle.

dans toutes les directions par un processus de diffusion élastique. Un observateur au repos verra cette onde diffusée avec une fréquence  $f'$  qui dépend de  $v$ . La mesure du décalage de fréquence  $f' - f$  permet ainsi de déterminer la composante de la vitesse de l'objet le long de la direction de propagation de l'onde. Ce décalage vaut par exemple 1 kHz pour une vitesse  $v$  de 1  $\mu\text{m/s}$  et une longueur d'onde de 1  $\mu\text{m}$ . Cette technique, connue sous le nom de « vélocimétrie Doppler », est utilisée pour mesurer à distance et sans contact la vitesse d'objets diffusants. Elle ne nécessite pas de stabiliser la longueur du laser pour obtenir une onde laser la plus parfaite possible. En effet, les fluctuations de longueur de la cavité laser affectent de la même

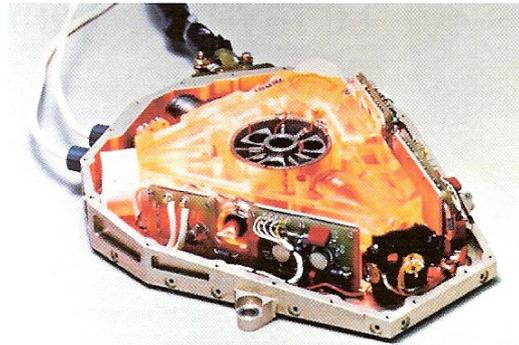
manière les fréquences  $f$  et  $f'$ . On peut donc mesurer par cette technique des vitesses très faibles, par exemple de particules diffusantes en suspension dans un liquide. On l'utilise beaucoup en biologie et en diagnostic médical, par exemple pour déterminer la vitesse des cellules sanguines dans une artère ou une veine.

### Le gyrolaser, un gyroscope sans pièces mobiles

Considérons maintenant le laser de la figure 1: sa cavité a la forme d'un triangle équilatéral. L'oscillation laser peut se produire dans les deux sens de rotation  $C_+$  et  $C_-$  et donne naissance à travers le miroir de sortie  $M_s$  à deux faisceaux laser distincts et de même intensité. Supposons que ce dispositif tourne dans son plan avec la fréquence angulaire  $\Omega$ . Les ondes qui se propagent dans la cavité subissent des effets de décalage de fréquence de type effet Doppler différents selon qu'ils se propagent dans le sens  $C_+$  ou  $C_-$ . On montre que la différence entre les fréquences de ces deux ondes est proportionnelle à  $\Omega$ . La mesure du battement entre les deux ondes laser permet donc de déterminer la vitesse de rotation du dispositif par rapport à un référentiel d'inertie: il s'agit donc d'un gyroscope purement optique que l'on appelle « gyrolaser ».

Donnons un ordre de grandeur de l'effet: la très lente rotation de la terre ( $\Omega=15^\circ/\text{heure}$ ) produit sur un laser de forme circulaire de 10 cm de rayon et situé dans un plan équatorial un décalage de fréquence entre les deux ondes de 14 Hz. Les imperfections du gyrolaser, par exemple le très faible couplage entre les deux ondes se propageant en sens inverse par rétrodiffusion de lumière, limitent la stabilité et la précision de la mesure de la vitesse de rotation à des valeurs typiques de quelques  $10^{-2^\circ}/\text{heure}$ , soit déjà un *millième de la vitesse de rotation terrestre!*

La principale application du gyrolaser est la navigation: trois gyrolasers (du type de la **figure 2**) situés dans trois plans formant un trièdre, couplés à un accéléromètre (constitué d'une bille en lévitation électromagnétique dont on mesure très précisément la position instantanée), permettent de déterminer les six composantes de la vitesse linéaire et de la vitesse angulaire du dispositif dans lesquels ils se



**Fig. 2** Gyrolaser utilisé en navigation. Le trajet de la lumière dans le laser a la forme d'un triangle équilatéral [© JAXA].

trouvent, et donc par intégration sa position et son attitude, sans avoir besoin de faire appel à un dispositif de repérage extérieur comme le GPS. De telles centrales à inertie, de faible volume (le  $\text{dm}^3$ ), sans pièces mobiles délicates comme dans les gyroscopes mécaniques, résistent très bien aux vibrations: on en trouve dans les missiles, les fusées, les avions, et les sous-marins.

Il existe bien d'autres exemples de mesures effectuées par laser, qui concernent la mesure de position, de taille, ou de composition chimique du corps illuminé par le laser. Toutes ces mesures, poussées à leurs limites, peuvent être d'une extraordinaire sensibilité. Elles présentent aussi l'avantage de se faire à distance, sans contact mécanique entre l'observateur et l'objet à mesurer.



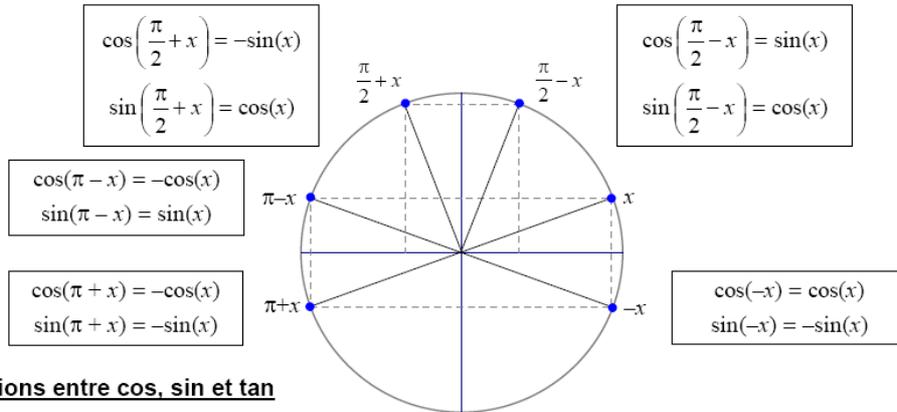
#### Bibliographie

- G. Grynberg, A. Aspect et C. Fabre, *Introduction aux lasers et à l'optique quantique*, Ellipses, 1997.
- « Gyroscopes et gyromètres », *Encyclopædia Universalis*.

# TRIGONOMÉTRIE : FORMULAIRE

## Angles associés

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :



## Relations entre cos, sin et tan

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

## Formules d'addition

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \tan(b)}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \tan(b)}$$

## Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a) \quad \sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a) \quad \tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

Extensions :  $\cos(3a) = 4 \cos^3(a) - 3 \cos(a)$

$\sin(3a) = 3 \sin(a) - 4 \sin^3(a)$

$\tan(3a) = \frac{3 \tan(a) - \tan^3(a)}{1 - 3 \tan^2(a)}$

Au delà, utiliser la formule de Moivre.

## Formules de linéarisation

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

$$\tan^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{1 + \cos(2a)}$$

Extensions :  $\cos^3(a) = \frac{\cos(3a) + 3 \cos(a)}{4}$

$\sin^3(a) = \frac{-\sin(3a) + 3 \sin(a)}{4}$

$\tan^3(a) = \frac{-\sin(3a) + 3 \sin(a)}{\cos(3a) + 3 \cos(a)}$

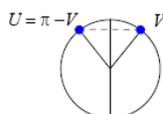
Au delà, utiliser les formules d'Euler. Les formules d'Euler permettent également de montrer que :

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)] \quad \cos(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)] \quad \sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

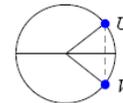
## Résolution d'équations trigonométriques



$$\cos(U) = \cos(V) \Leftrightarrow (U = V [2\pi] \text{ ou } U = -V [2\pi])$$

$$\sin(U) = \sin(V) \Leftrightarrow (U = V [2\pi] \text{ ou } U = \pi - V [2\pi])$$

$$\tan(U) = \tan(V) \Leftrightarrow U = V [\pi]$$



## Expression du cosinus, sinus et tangente en fonction de la tangente de l'angle moitié

Si  $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$ , on a :  $\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  ;  $\sin(a) = \frac{2t}{1+t^2}$  ;  $\tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}$