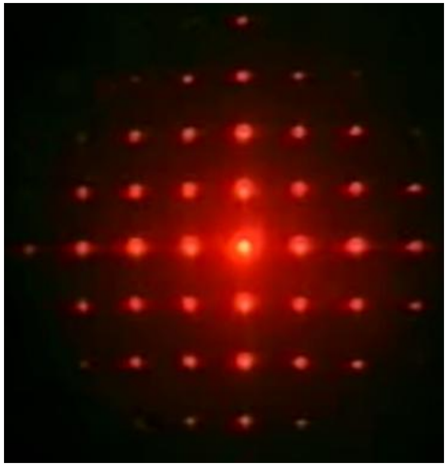
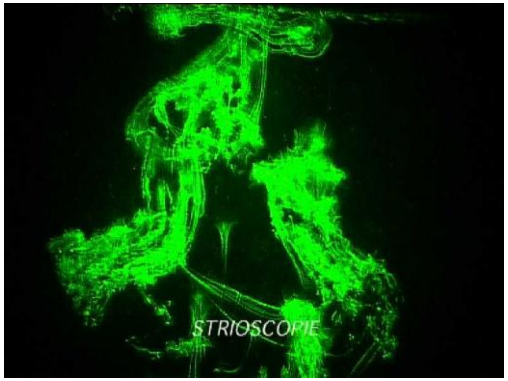
Filtrage spatial en optique

O Granier, PC*

(Lycée J Decour, Paris)



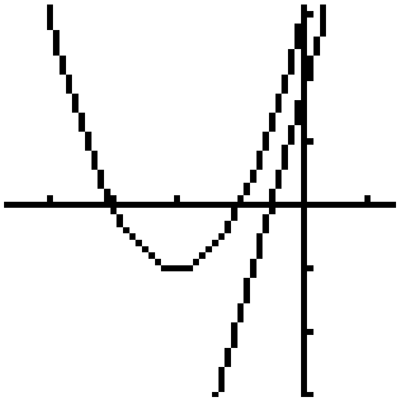


Le filtrage spatial :

❖ Consiste à sélectionner l’information selon la fréquence spatiale à laquelle une valeur apparaît sur une ligne ou dans un plan.

❖ Sert pour l'épuration d'un faisceau laser, qui consiste à en retirer les irrégularités qui peuvent l'affecter pour diverses causes.

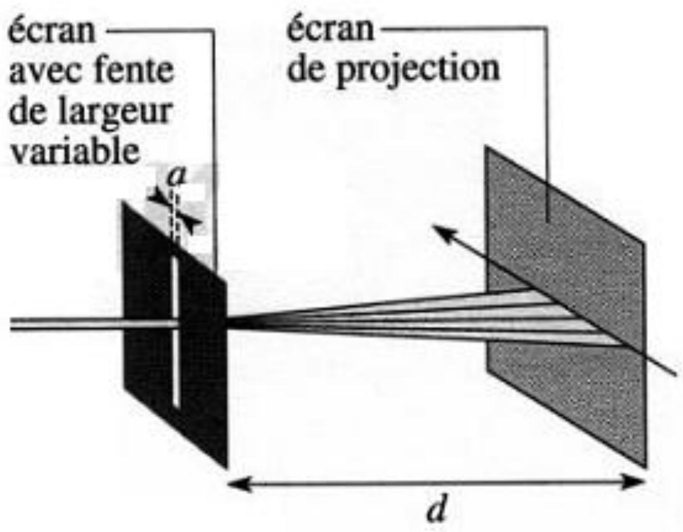
Les appareils de prise de vue de bonne qualité sont équipés d'un filtre spatial passe-bas optique appelé filtre anti-crénelage, dont le rôle est de supprimer les détails trop fins de l'image formée sur le capteur et ainsi d'éviter l'apparition de moiré ou de crénelage.



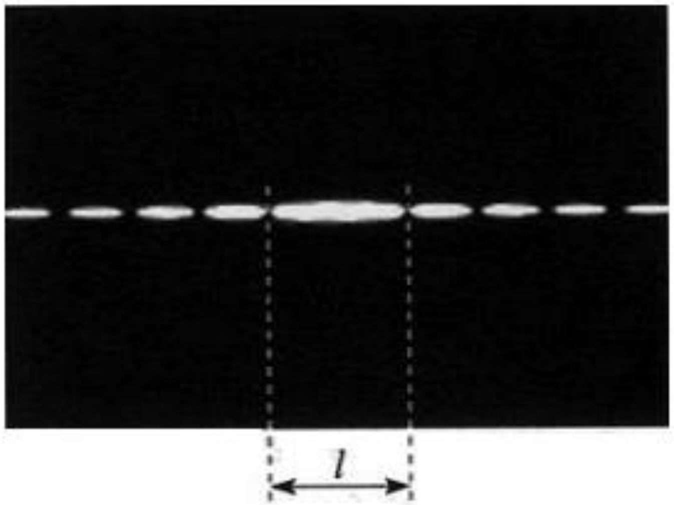
Le filtrage spatial optique utilise les propriétés de répartition du flux lumineux dans un système optique comprenant une ou plusieurs lentilles.

On intercepte les rayons lumineux à proximité du point focal image avec des fentes, des grilles, des plaques percées de réseaux de points, ou des matériaux biréfringents pour sélectionner les fréquences transmises.

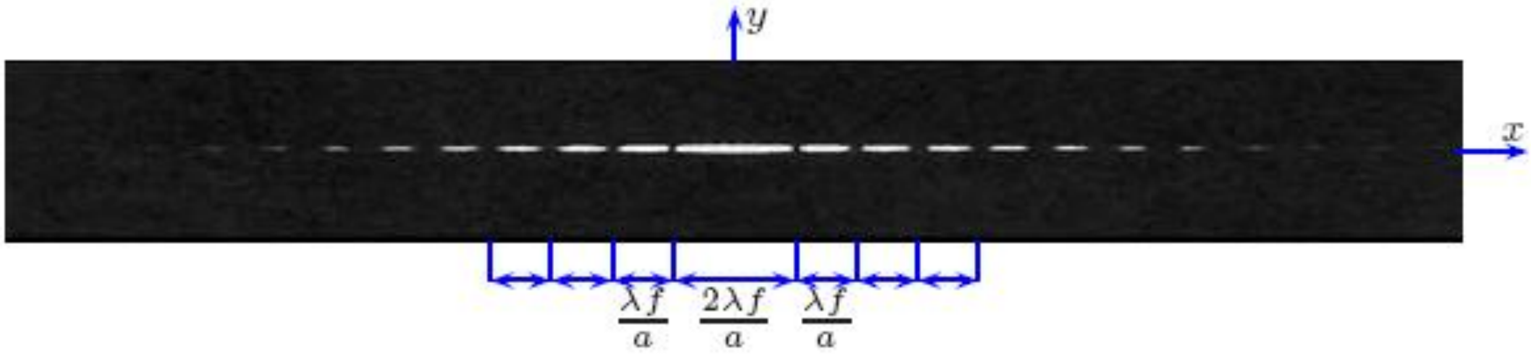
Diffraction par quelques pupilles particulières

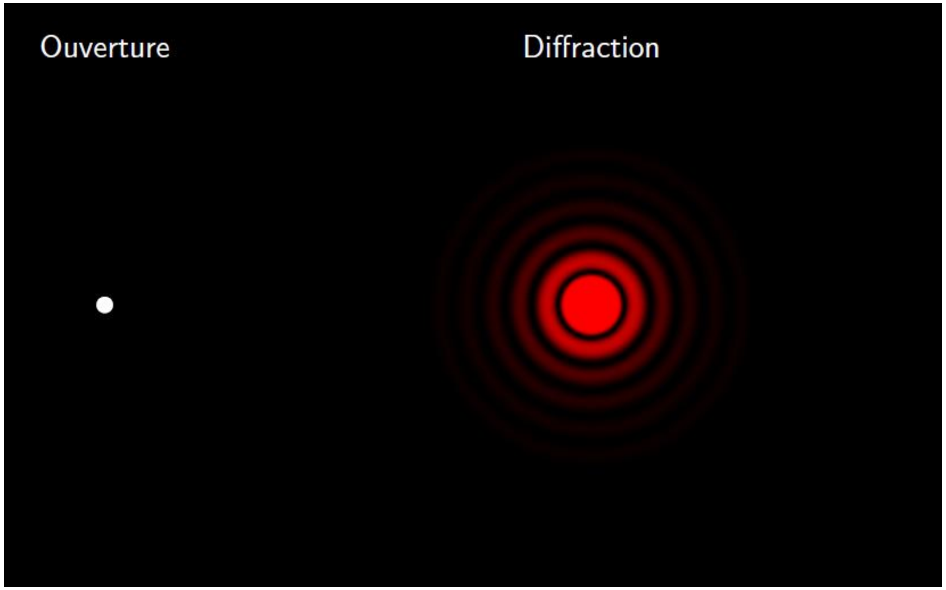


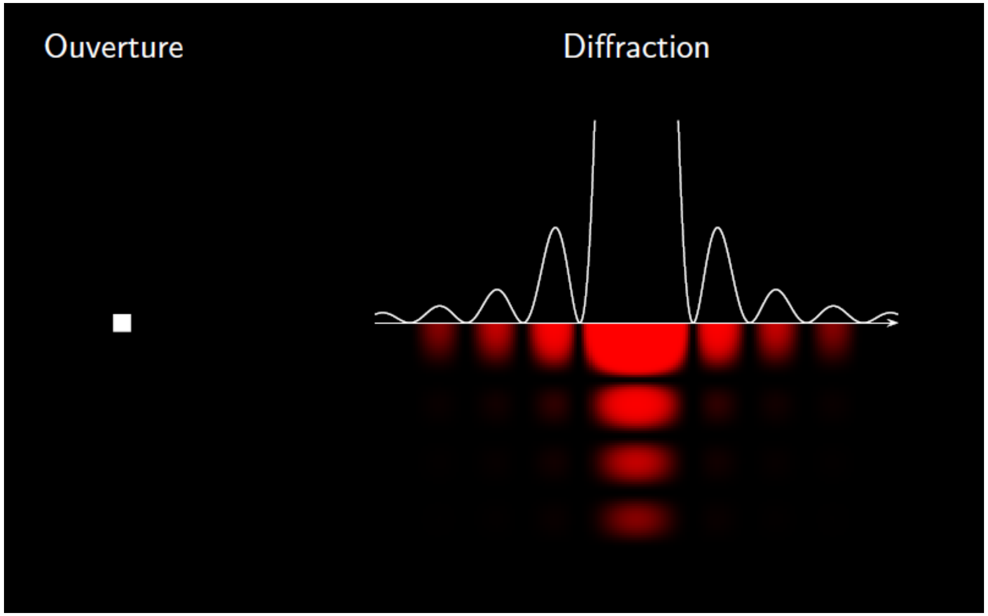
Diffraction d'un faisceau laser par une fente fine.

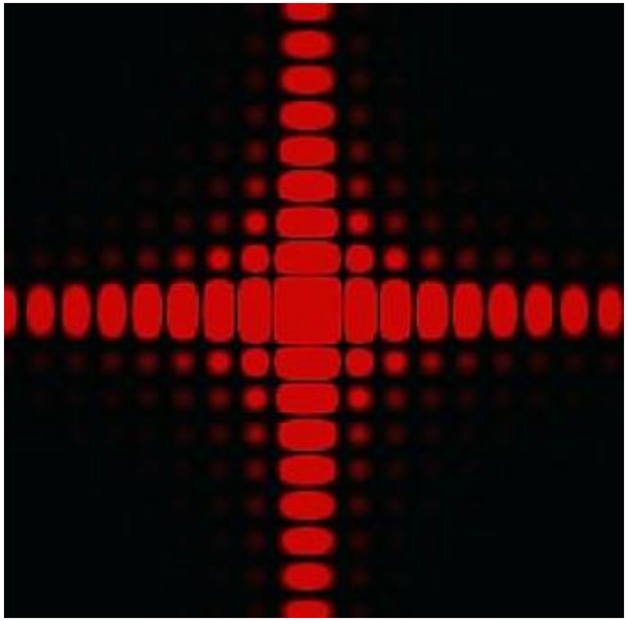


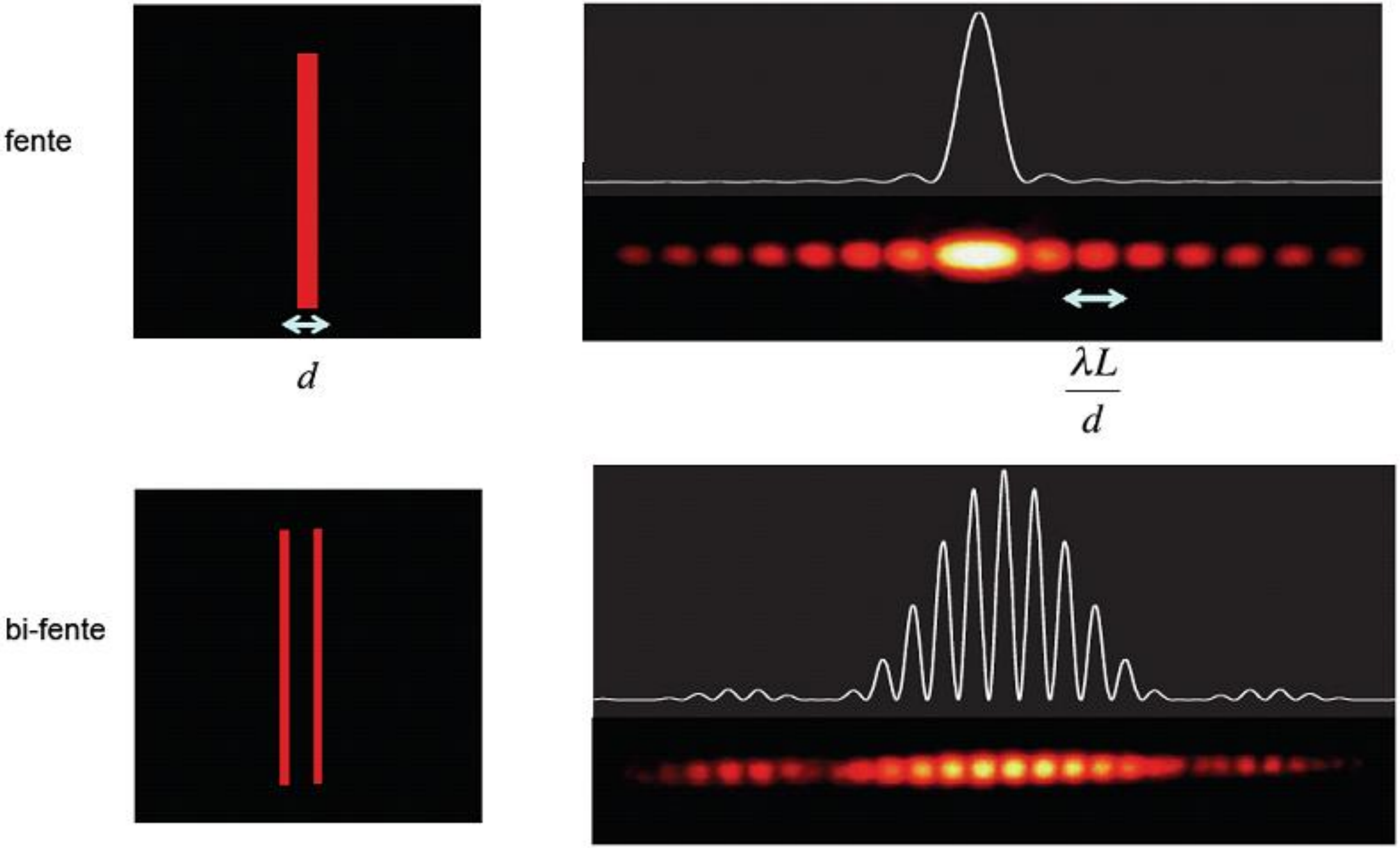
Diffraction d'un faisceau laser par une fente.




Ouverture
Diffraction


Ouverture
Diffraction

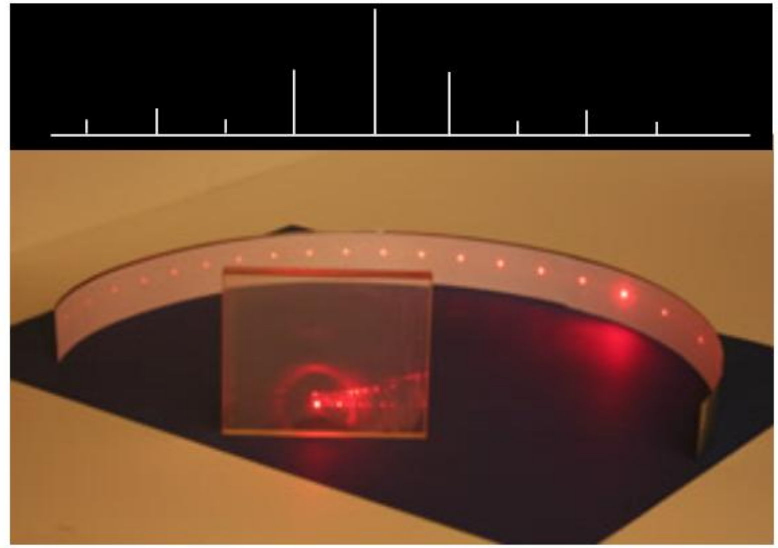



fente
d
λL/d
bi-fente

Objet (de taille $\approx \lambda$)

Figure de Diffraction

réseau



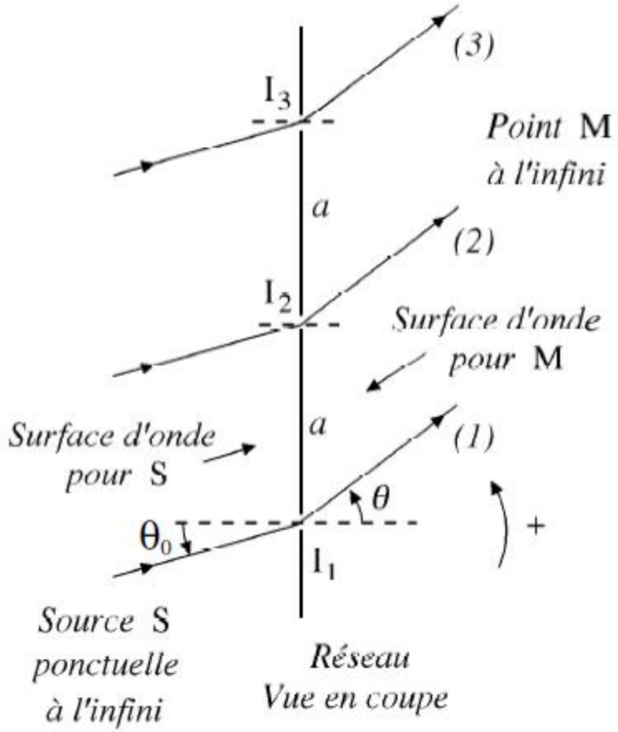
↗ Nb de traits/mètre

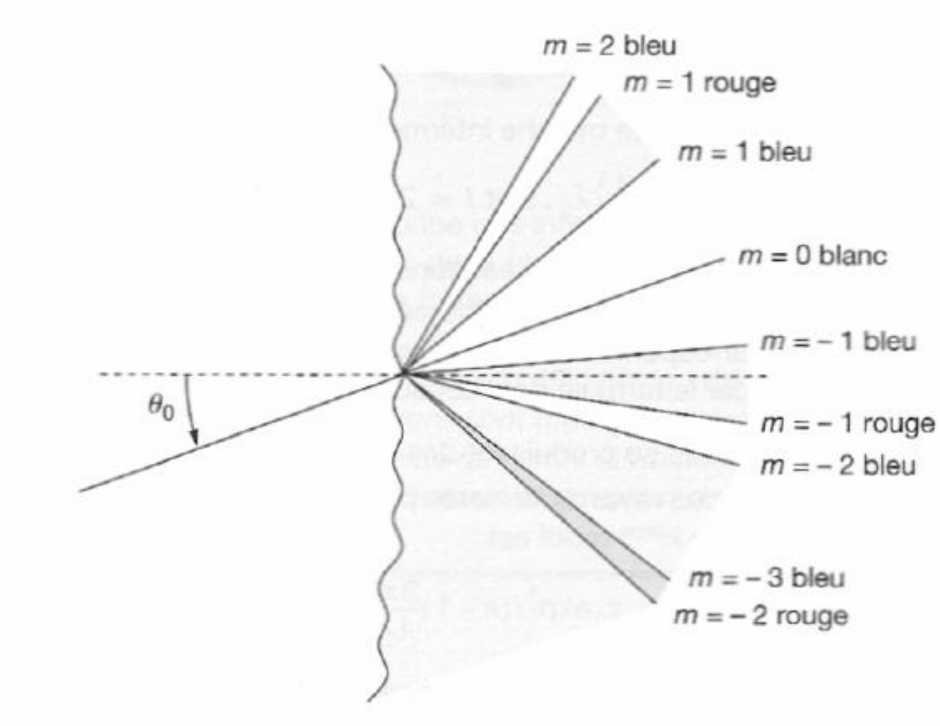
⇕

↗ Dispersion angulaire

Voilage (ensemble d'ouvertures carrées)

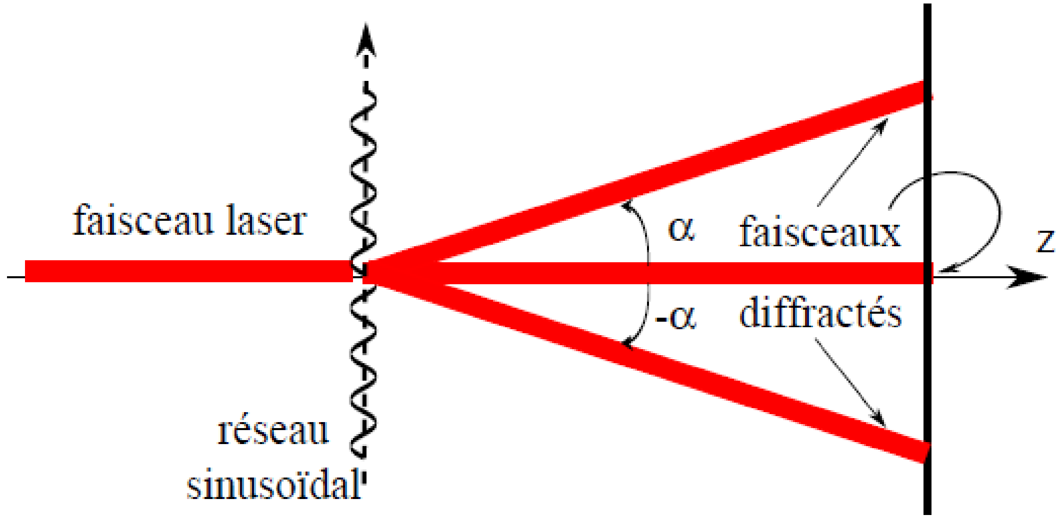
Réseau de fentes





$$\boxed{\sin\theta - \sin\theta_0 = m\frac{\lambda_0}{a}}$$

Réseau à transmittance sinusoïdale



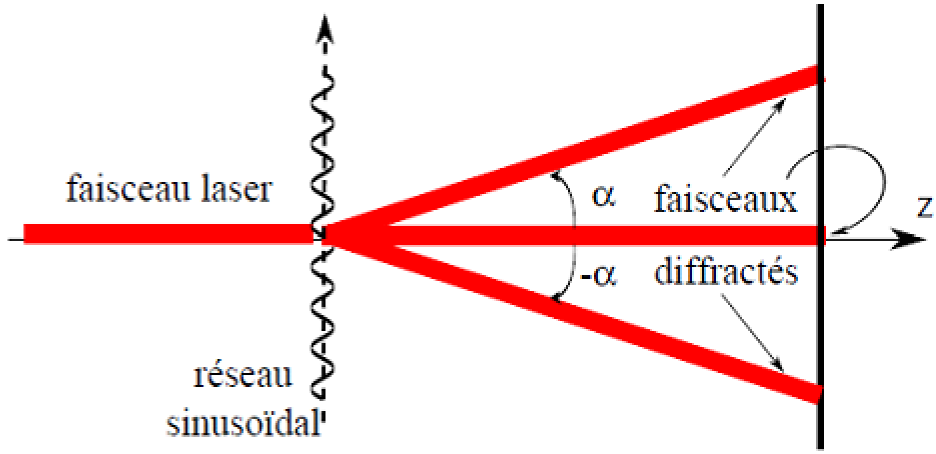
$$t(x) = t_0 + t_1 \cos\left(2\pi \frac{x}{a}\right) = t_0 + t_1 \cos\left(2\pi U x\right)$$

a est le pas du réseau (période spatiale).

U = 1 / a est la fréquence spatiale du réseau.

On obtient en sortie trois faisceaux diffractés :

l'un est non dévié et les deux autres déviés de α et – α.

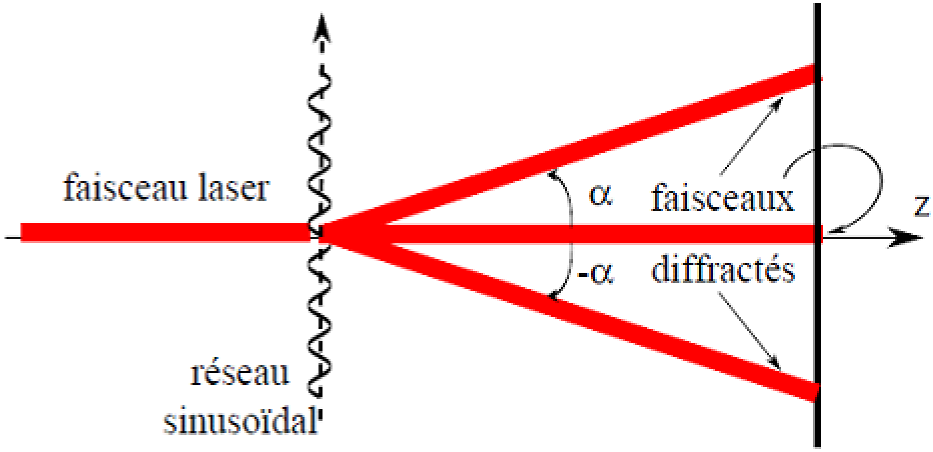


$$\underline{t}(x) = t_0 + \frac{t_1}{2}e^{i2\pi Ux} + \frac{t_1}{2}e^{-i2\pi Ux} \qquad et \qquad \underline{s}_i(x,0^-,t) = s_0 e^{i(\omega t - k_0 z)}$$

$$\underline{s}_t(x,0^+,t) = \underline{t}(x)s_0 e^{i\omega t} = s_0 t_0 e^{i\omega t} + s_0\frac{t_1}{2}e^{i2\pi Ux}e^{i\omega t} + s_0\frac{t_1}{2}e^{-i2\pi Ux}e^{i\omega t}$$

3 ondes planes en sortie (elles vérifient les conditions aux limites) :

$$\underline{s}_t(x,z,t) = s_0 t_0 e^{i(\omega t - k_0 z)} + s_0\frac{t_1}{2}e^{i(\omega t - (-k_x\vec{u}_x + k_z\vec{u}_z).\vec{r}} + s_0\frac{t_1}{2}e^{i(\omega t - (k_x\vec{u}_x + k_z\vec{u}_z).\vec{r}}$$



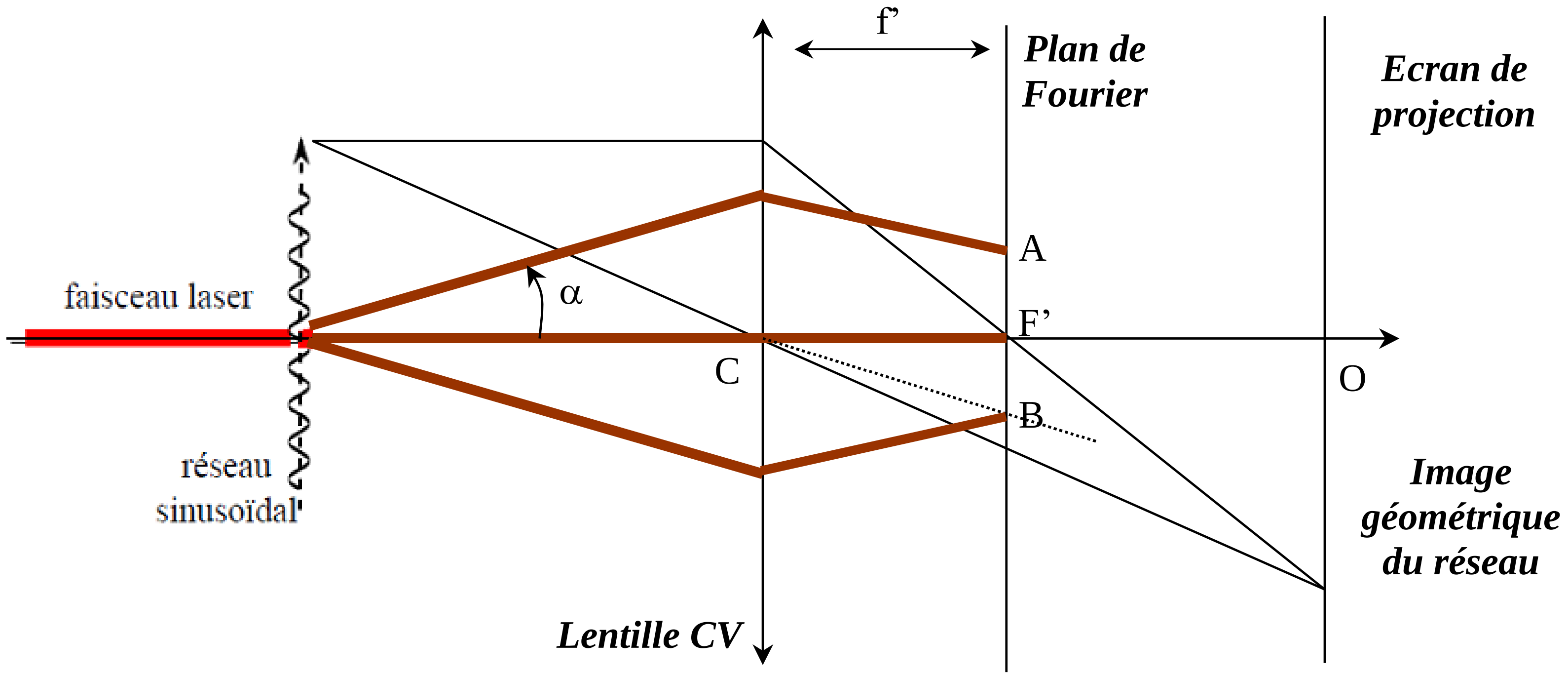
$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad ; \quad k_x = 2\pi U = \frac{2\pi}{a} = k_0 \sin\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sin\alpha \quad : \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda_0}\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{\lambda_0}{a} = \lambda_0 U \qquad (\text{Avec } a > \lambda_0)$$

Une onde ne « voit » pas les détails inférieurs à sa longueur d'onde.

Dans le domaine visible, il n'est pas nécessaire de polir des miroirs à mieux que 1 μm.

Filtrage spatial



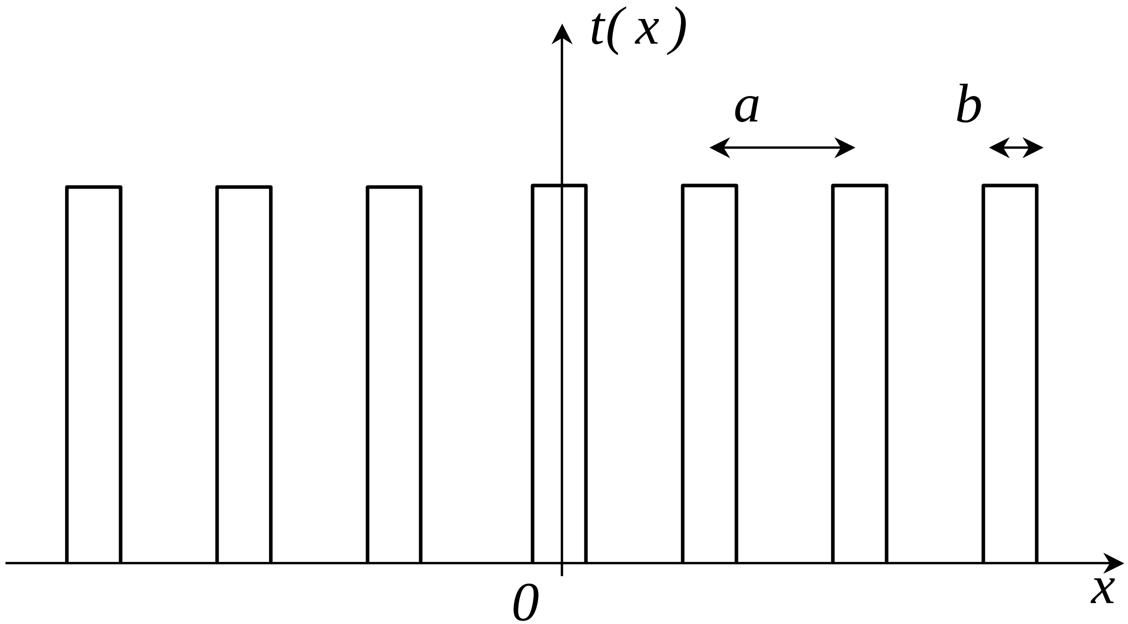
On met un petit cache en F' (dans le plan de Fourier de la lentille) :

On supprime la composante continue

On met un petit cache en A et en B (dans le plan de Fourier de la lentille) :

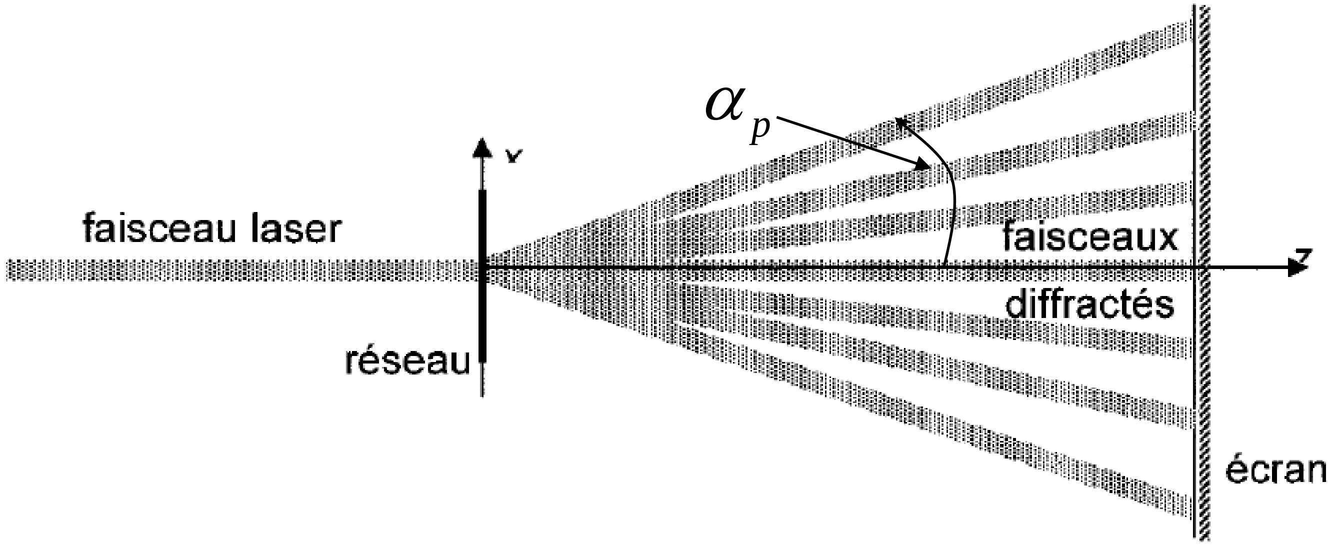
On supprime les détails de fréquence spatiale celle du réseau : U = 1 / a

Diffraction d'un faisceau LASER par un réseau de fentes



Le facteur de transmission du réseau, de fréquence spatiale U = 1 / a, peut se décomposer en séries de Fourier :

$$\underline{t}(x) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} A_p e^{i2\pi p\frac{x}{a}} = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} A_p e^{i2\pi pUx} \qquad \left(Avec : A_p = \frac{b}{a} \operatorname{sinc}\left(\pi p \frac{b}{a} \right) \right)$$



Diffraction d'un faisceau LASER par un réseau de fentes.

On obtient en sortie un ensemble d'ondes planes dans des directions données par :

$$\sin\alpha_p = p\frac{\lambda_0}{a} = pU\lambda_0 \qquad (p \in Z)$$

Avec la condition :

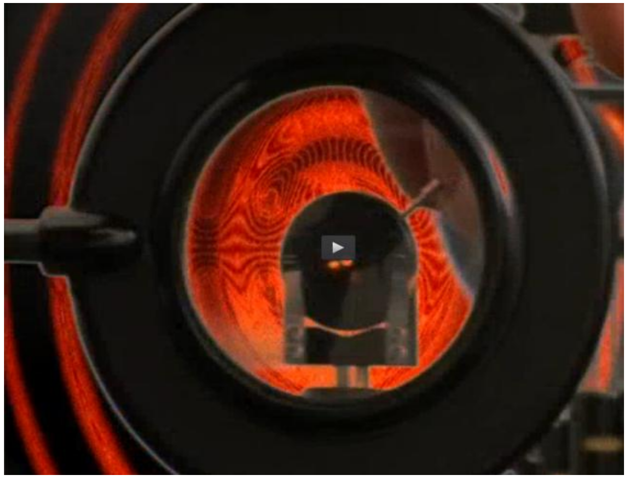
$$\sin\alpha_p = p\frac{\lambda_0}{a} < 1$$

Propriété importante de la figure de diffraction

La **figure de diffraction** de l' objet correspond à la **Transformée de Fourier** du facteur de transmission de l' objet

Qu' est-ce que la Transformée de Fourier ?

Comment peut-on en tirer profit?



Analyse d'images par traitement de Fourier optique (Vidéo : cliquer sur l'image)

Qu'est-ce que la Transformée de Fourier ?

Un signal f(x) peut s'écrire comme une somme de sinus (ou cosinus) de fréquence de + en + élevée:

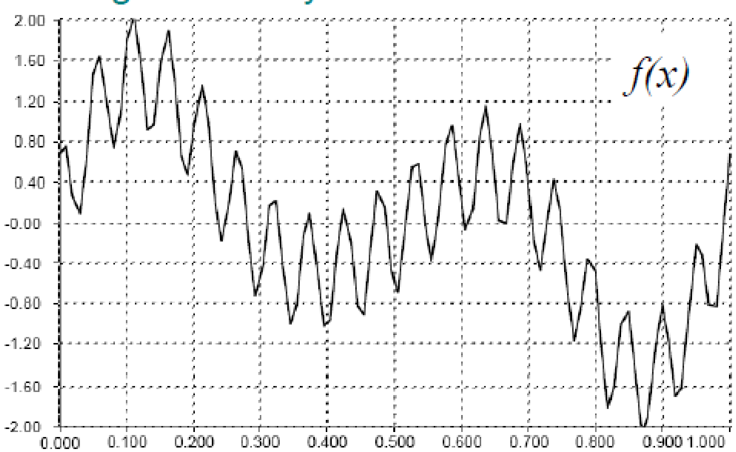
$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nkx + \varphi_n)$$

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(kx + \varphi_1) + A_2 \sin(2kx + \varphi_2) + A_3 \sin(3kx + \varphi_3) + \ldots$$

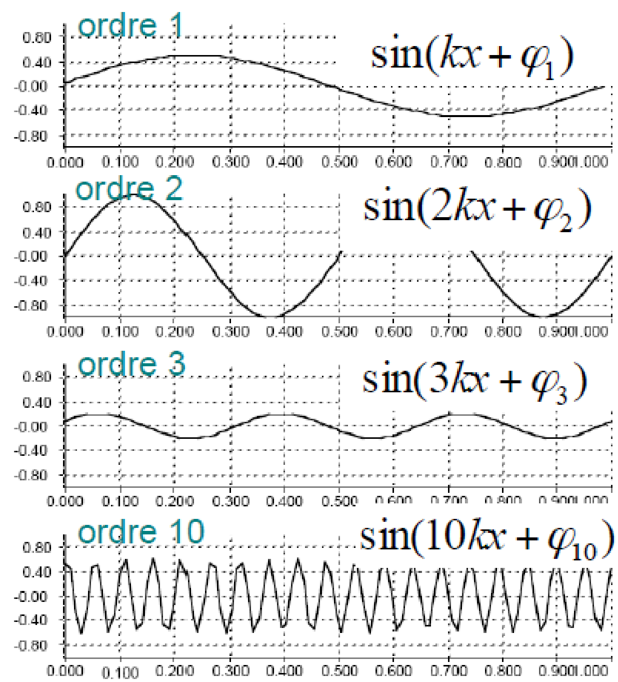
Composante continue = valeur moyenne (ordre 0)	Harmonique d'ordre 1	Harmonique d'ordre 2	Harmonique d'ordre 3

Exemple de Décomposition de Fourier

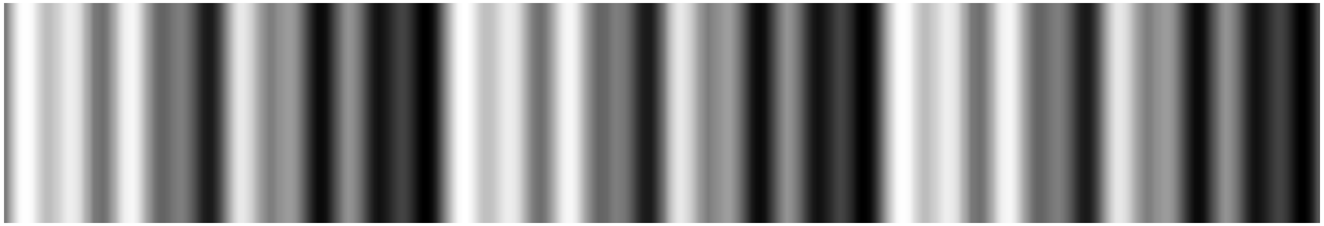
signal à analyser



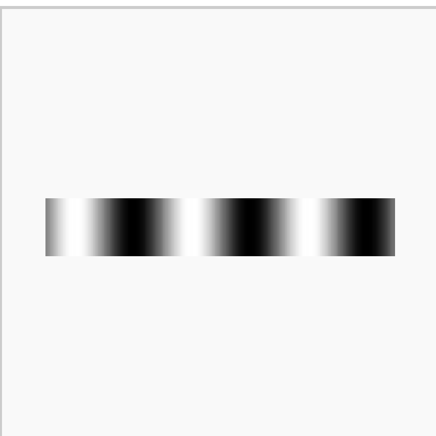
harmoniques



Exemple de décomposition

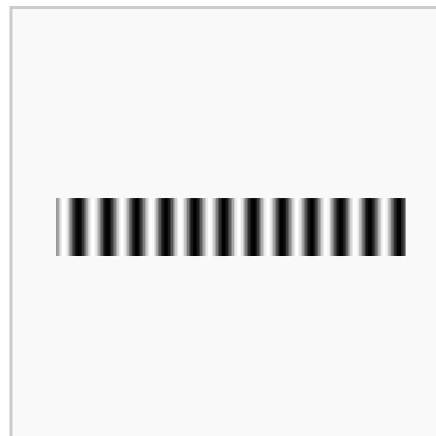


Cette image présente des détails de petite taille, de taille intermédiaire et de larges zones. Analyser cette image en termes de **fréquences spatiales** permet d'isoler telle ou telle composante.



Composante à basse fréquence spatiale

Composante à fréquence spatiale intermédiaire



Composante à fréquence spatiale intermédiaire

Composante à haute fréquence spatiale

Décomposition d'un signal en série de Fourier

✓ + le nb de termes est élevé, + le signal recomposé est fidèle au signal initial

✓ Les 1ers termes (fréquences basses) correspondent aux variations lentes du signal (motifs de grand taille)

✓ Les termes d'ordre élevé (fréquences hautes) correspondent aux variations rapides du signal (le bruit, les détails, les contours)

Applications de la transformée de Fourier

- Compression des images
- Traitement du signal
- Filtrage fréquentiel (spatial ou temporel)

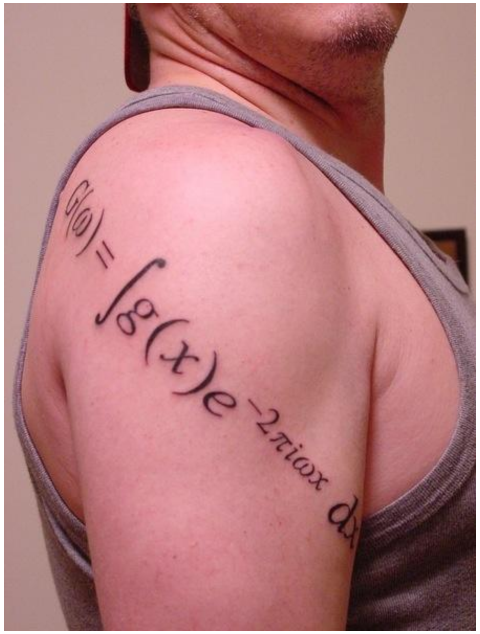
Quelques définitions mathématiques

Pour une transmittance t(x) non périodique (transformée de Fourier) :

$$\underline{t}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(U)\, e^{-i2\pi Ux} dU \qquad \left(\textit{séries de Fourier} : \underline{t}(x) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} A_p e^{i2\pi pUx} \right)$$

Où les coefficients A(U) valent :

$$A(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{t}(x)\, e^{i2\pi Ux} dx$$

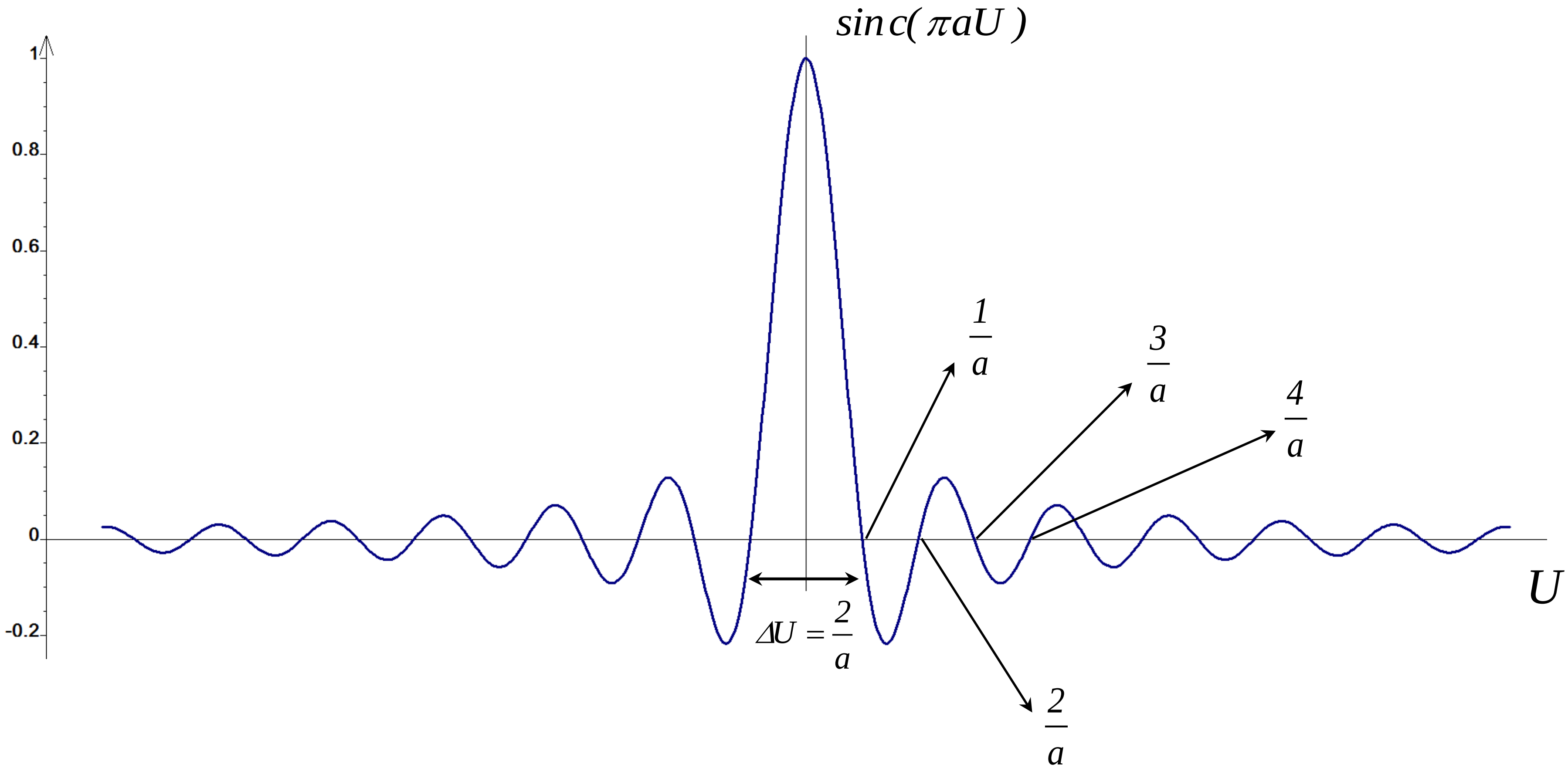


Exemple : « fonction rectangle »

$$A(U) = \int_{-a/2}^{+a/2} e^{i2\pi Ux} dx = a\,\frac{\sin(\pi aU)}{\pi aU} = a\,\mathrm{sinc}(\pi aU)$$

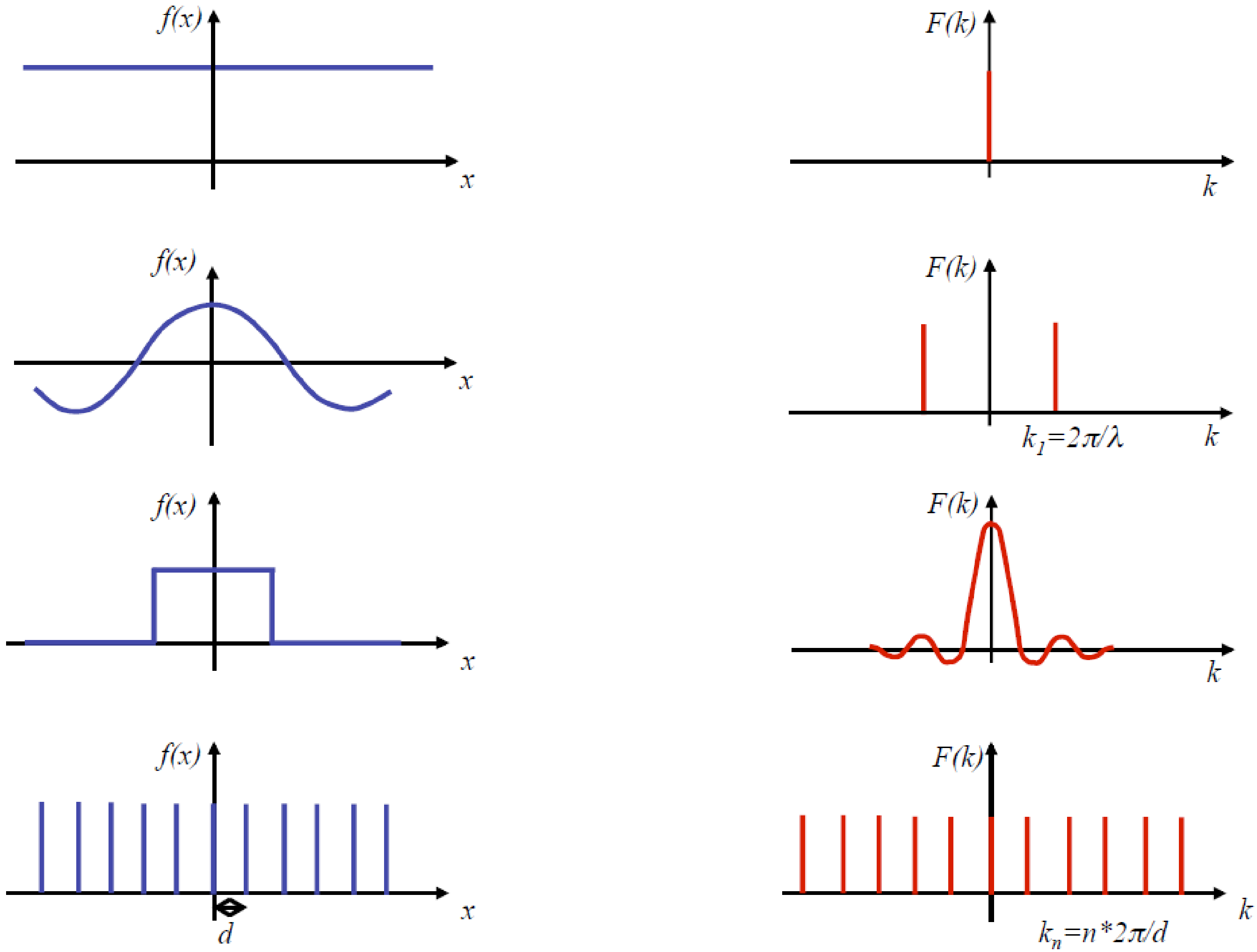
Le spectre de fréquences spatiales d'une fente de largeur a est centré sur 0 et possède une largeur :

$$\Delta U \approx \frac{2}{a}$$

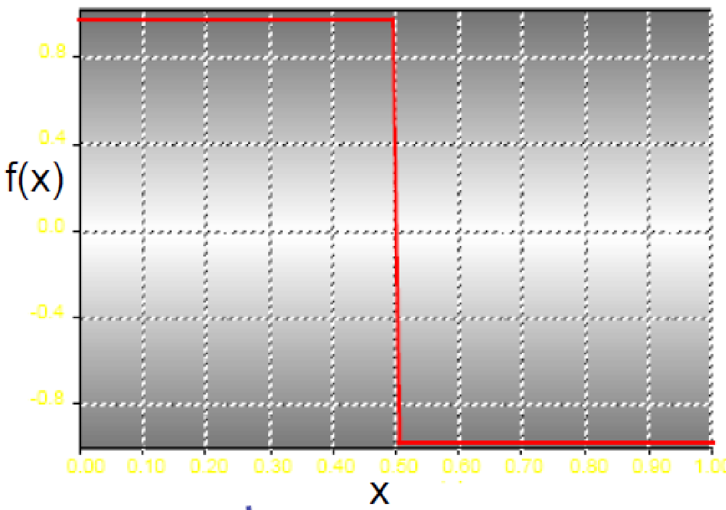


Spectre de fréquences spatiales d'une fente de largeur a.

Spectre de Fourier de quelques fonctions simples



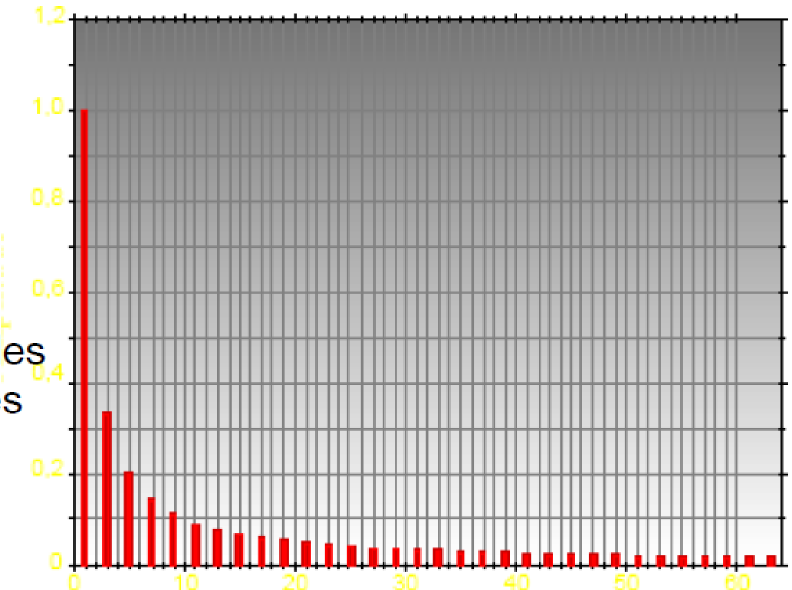
Transformée de Fourier d'un signal en créneau



Transformée de Fourier

Spectre de Fourier

Amplitude des harmoniques (A_n)



Fréquence spatiale des harmoniques (k_n)

Un calcul de transformée de Fourier : le cas de la fente de diffraction

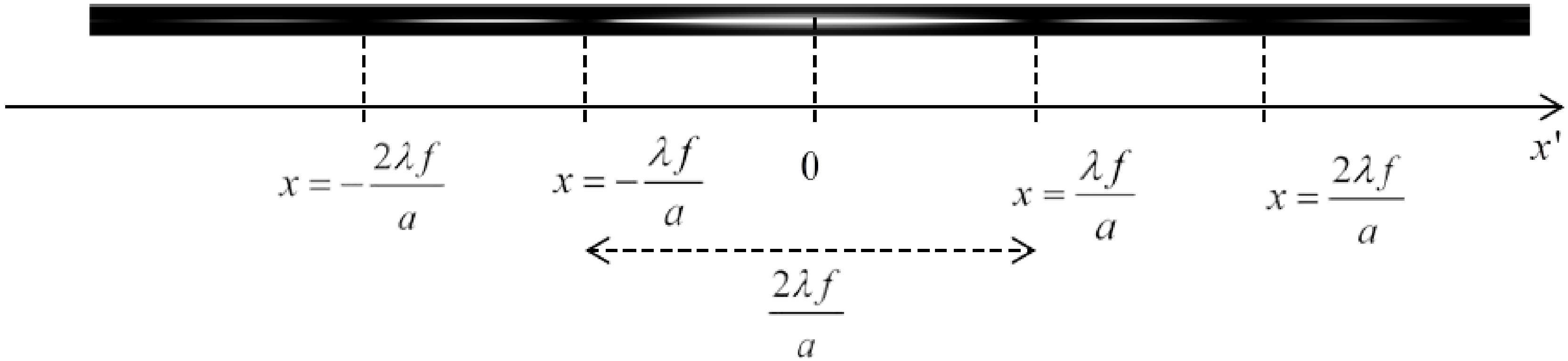


Figure de diffraction d'une fente fine

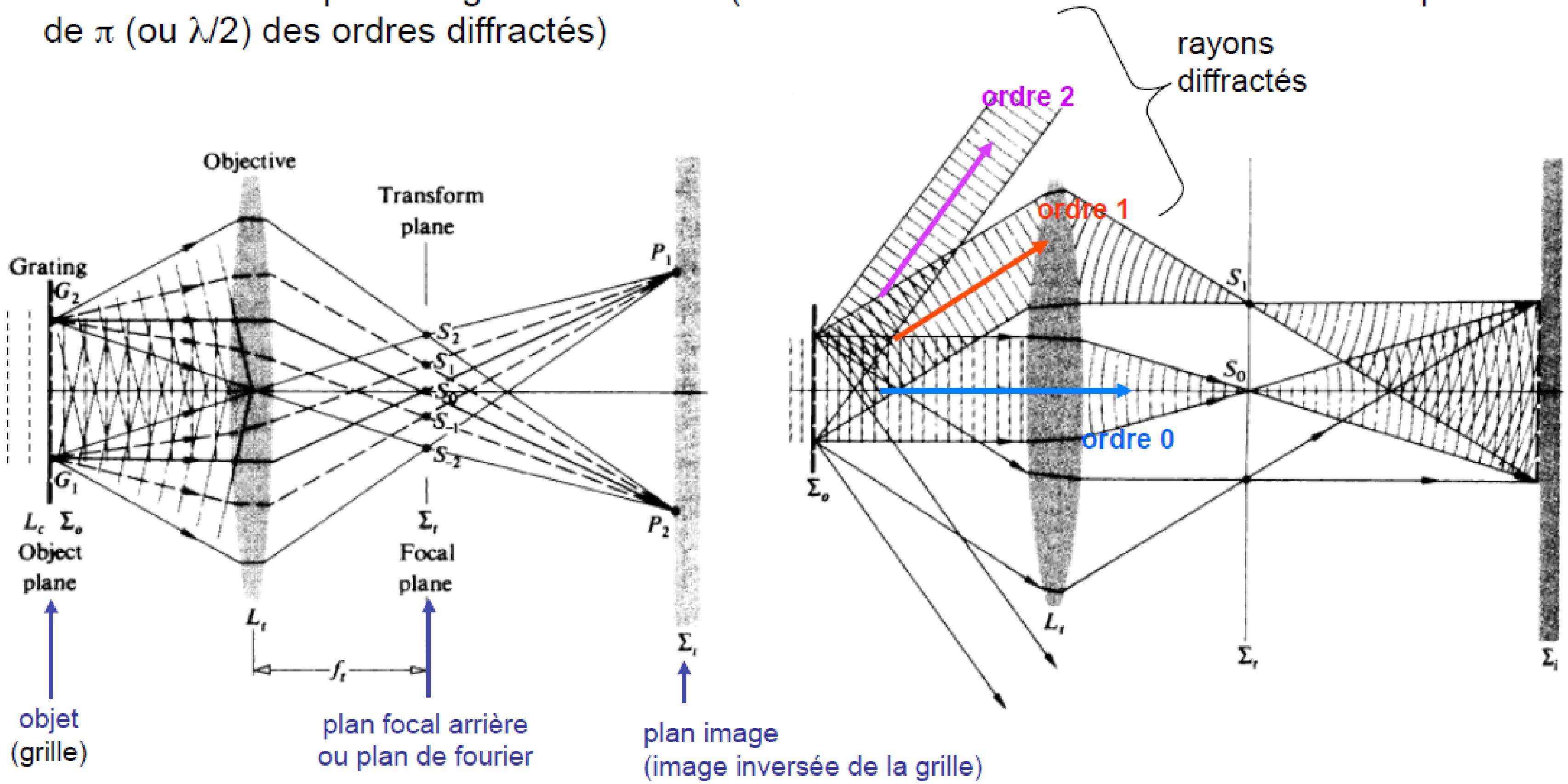
Bilan : Il y a étalement de la lumière dans la direction orthogonale à la fente. Presque toute la puissance lumineuse se retrouve dans la tache centrale qui est deux fois plus large que les autres taches

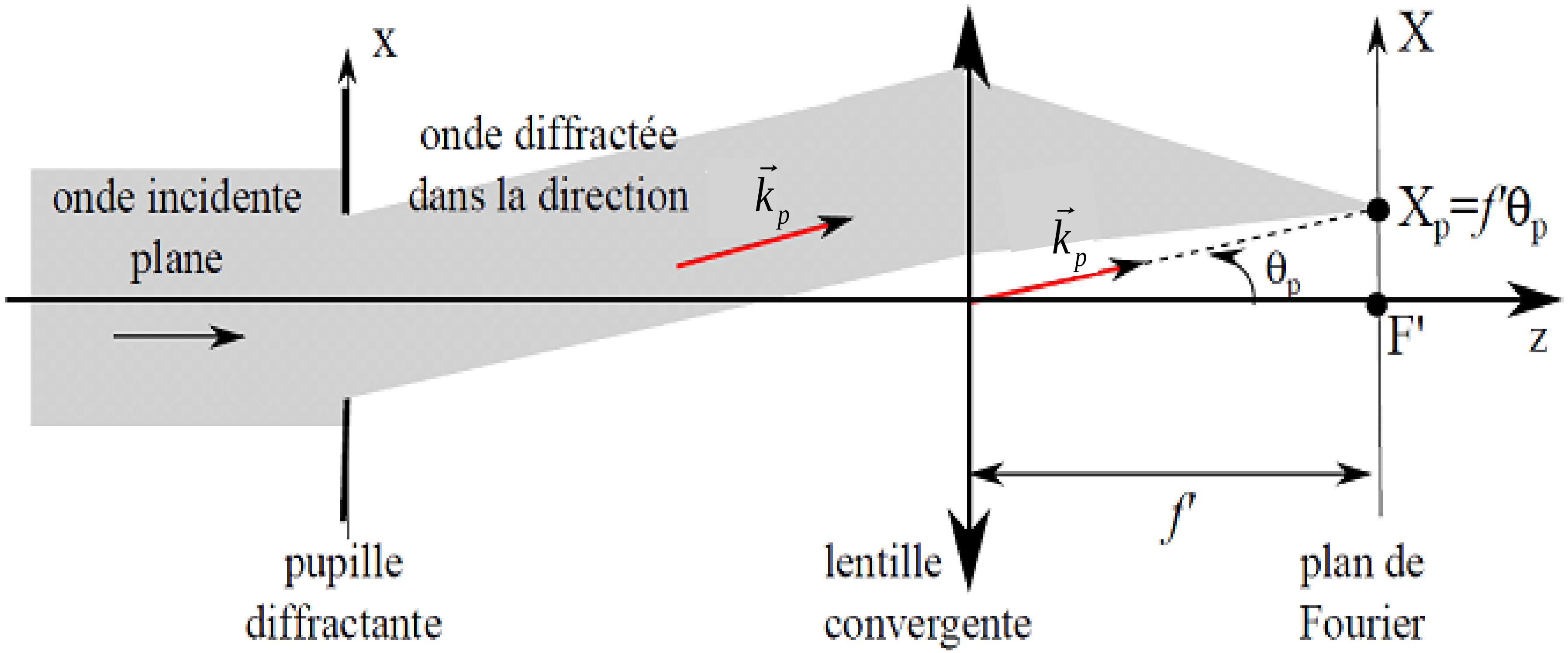
Théorie de Abbe sur la formation des images (1873)

L'image provient de l'interférence entre les différents ordres de diffraction:

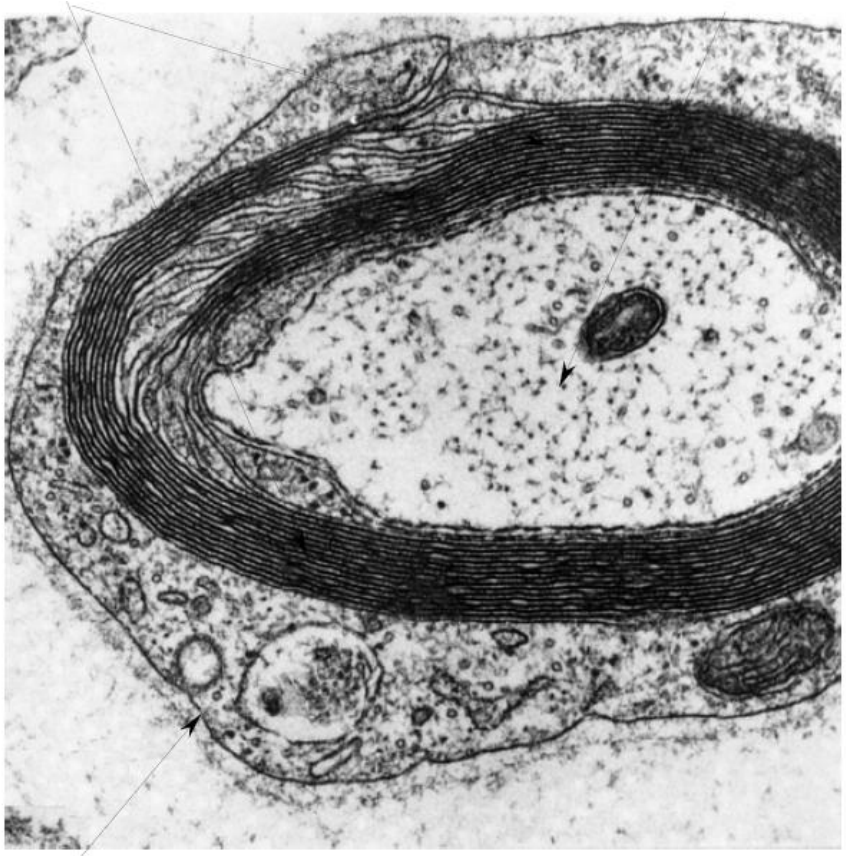
- Sans objet: faisceaux non déviés => pas d'interférence sur le plan image: illumination uniforme

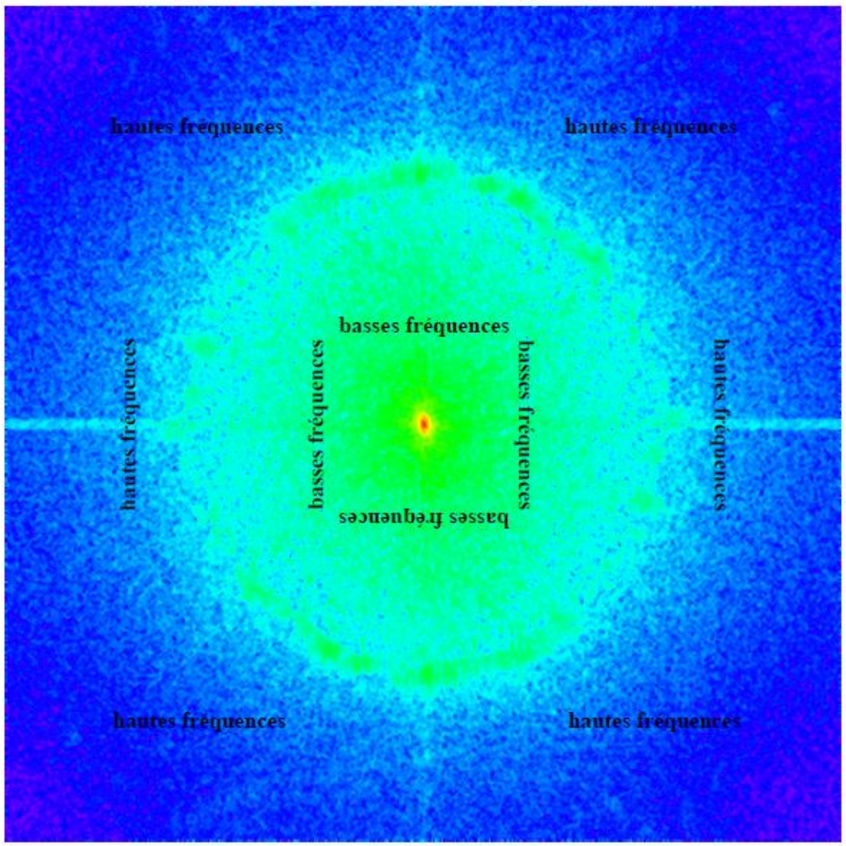
- Objet : dévie la lumière (diffracte) et change son parcours. On peut voir chaque rayon diffracté (chaque ordre) comme une onde plane se propageant avec une inclinaison différente. Sur le plan image: interférence (somme de sinusoïdes avec différence de phase de π (ou $\lambda/2$) des ordres diffractés)



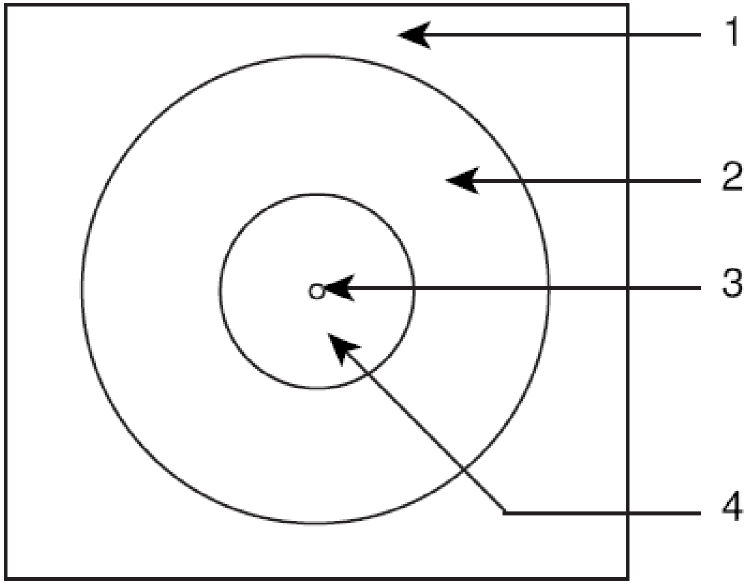


Observation des ondes diffractées dans le plan de Fourier



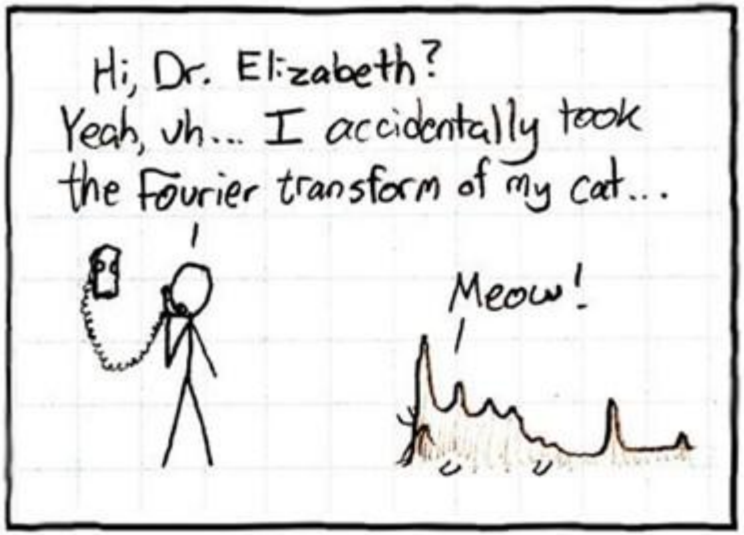


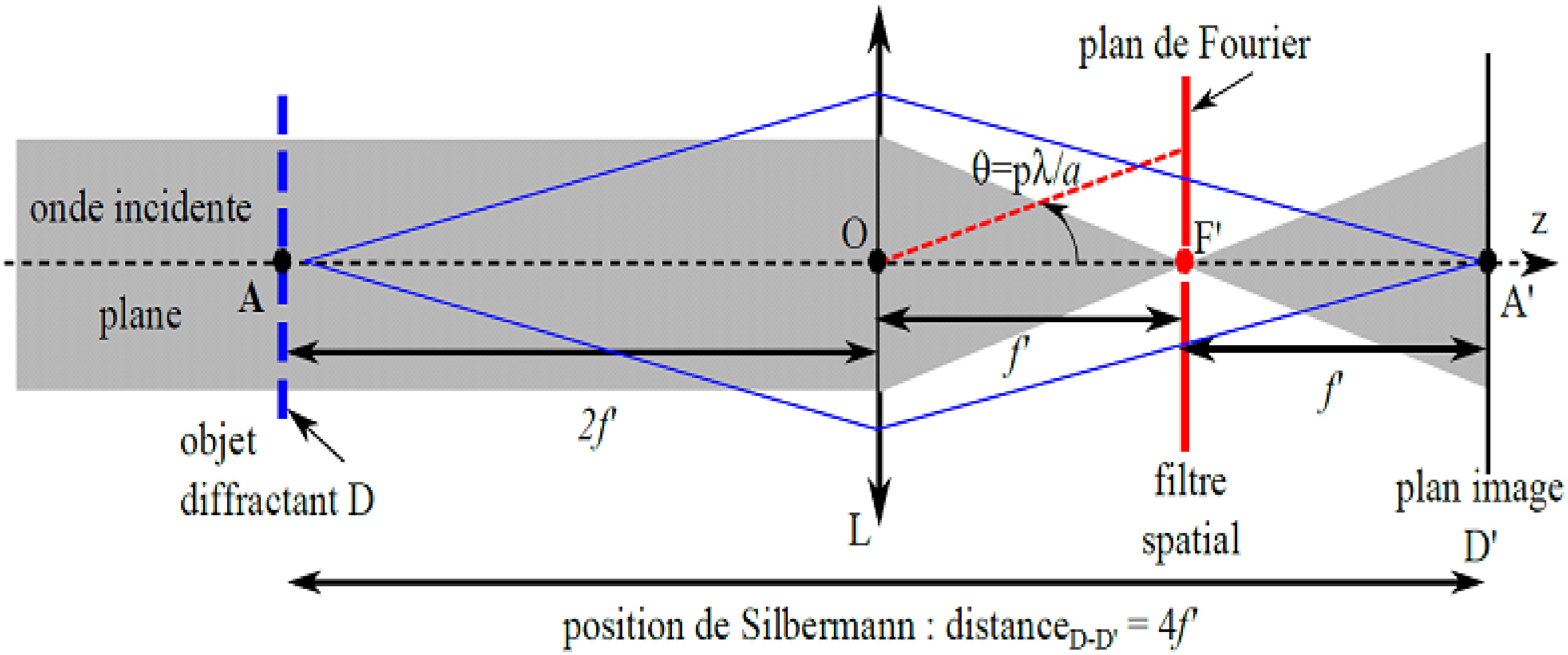
Passage du domaine spatial au domaine fréquentiel (de Fourier)



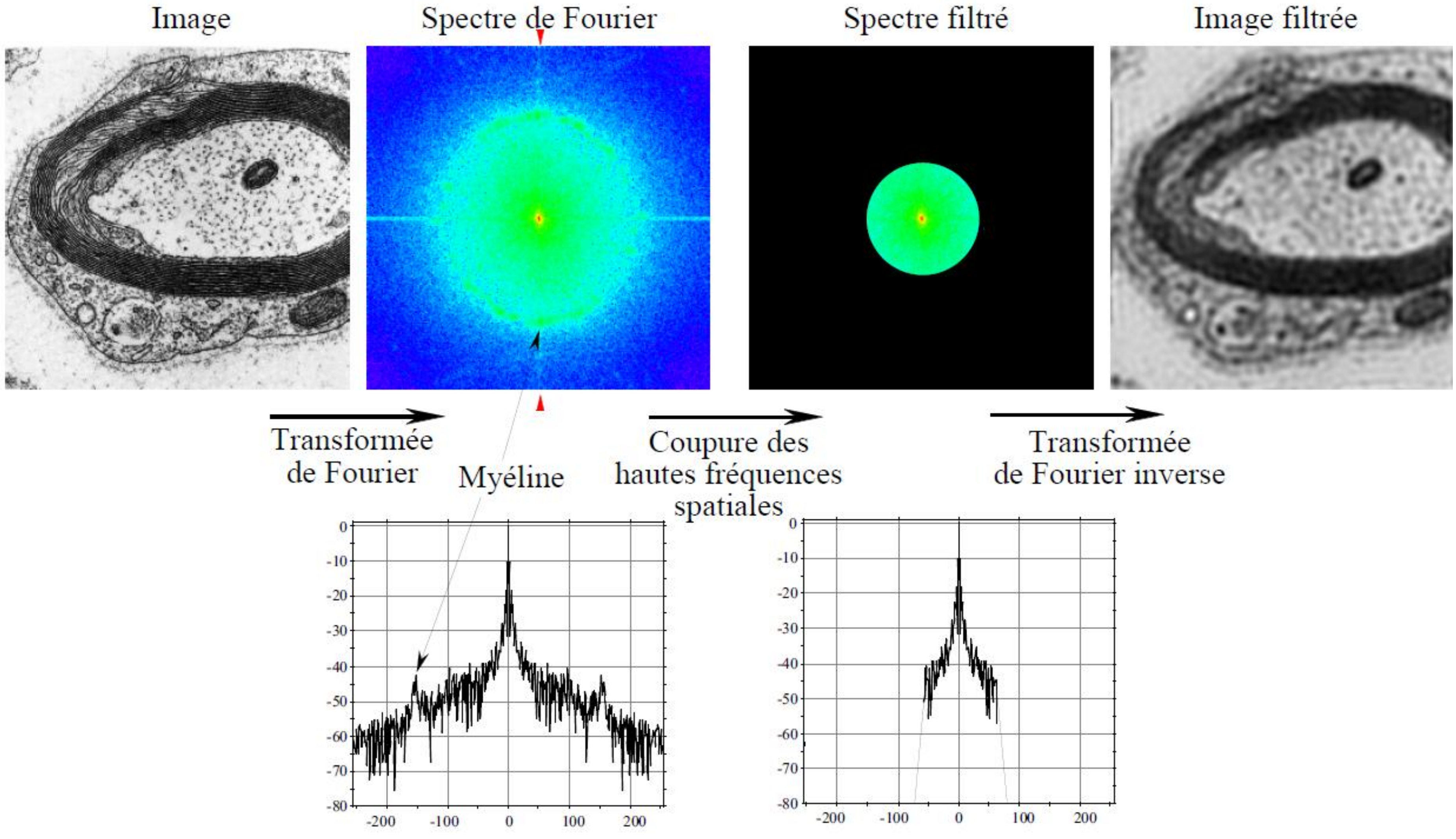
À quels types de fréquences spatiales correspond chaque zone du spectre représentée figure ci-contre ?

Expliquez à quoi cela correspond sur une image.





Filtrage spatial passe – bas (expérience d'Abbe)



Principe du filtrage dans le domaine de Fourier

Image brute

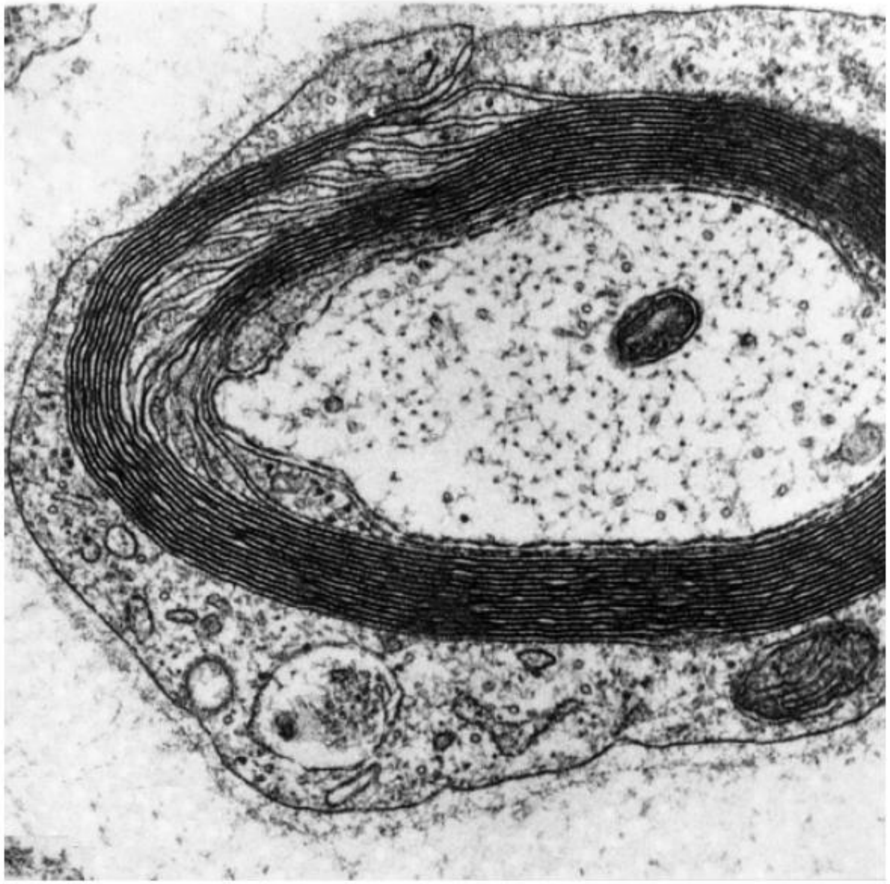
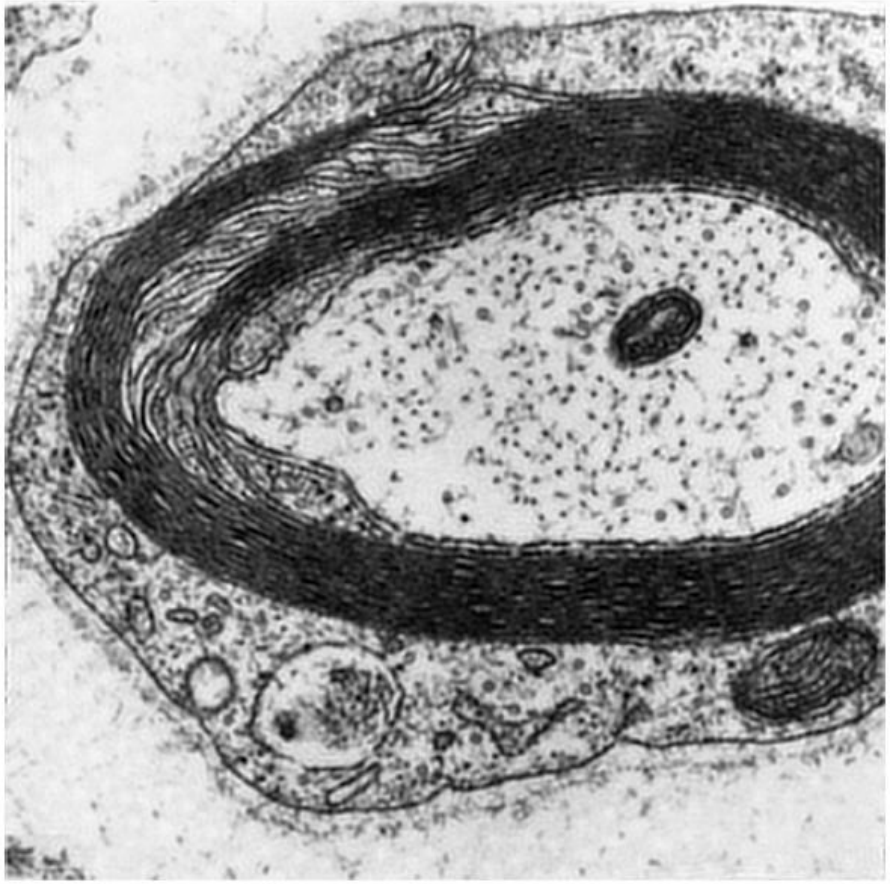


Image filtrée



Filtrage passe-bas: suppression des fréquences spatiales hautes (> 128$^{\text{è}}$ harmonique)

Image brute

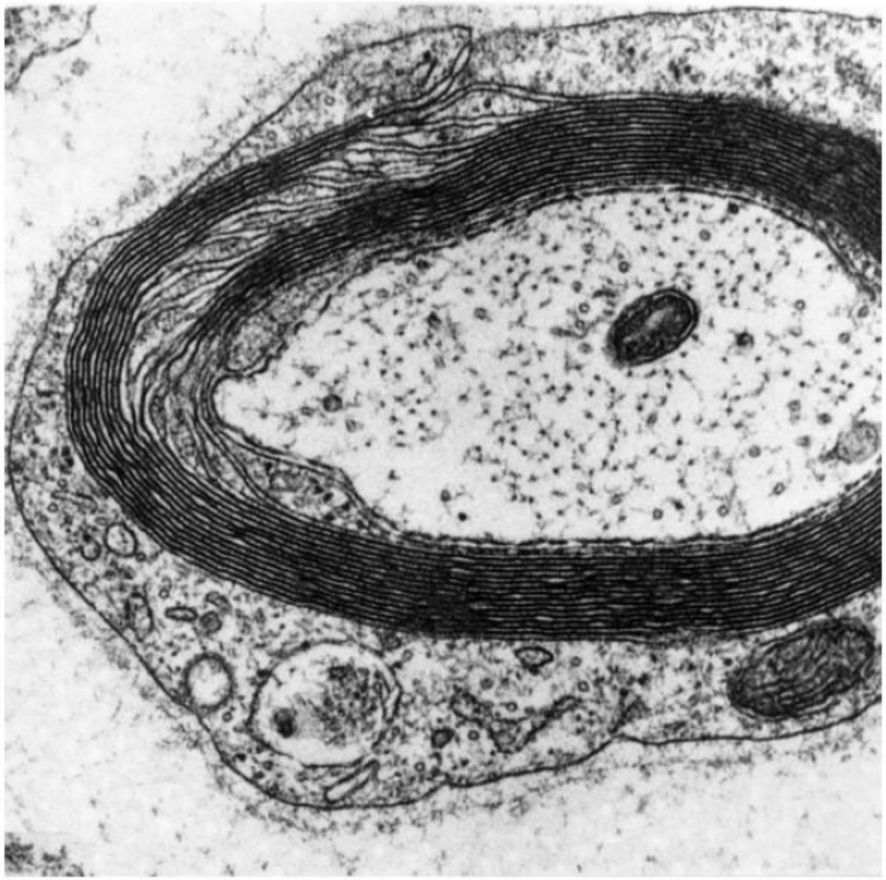


Image filtrée

Filtrage passe-bas: suppression des fréquences spatiales hautes (> 64è harmonique)

Image brute

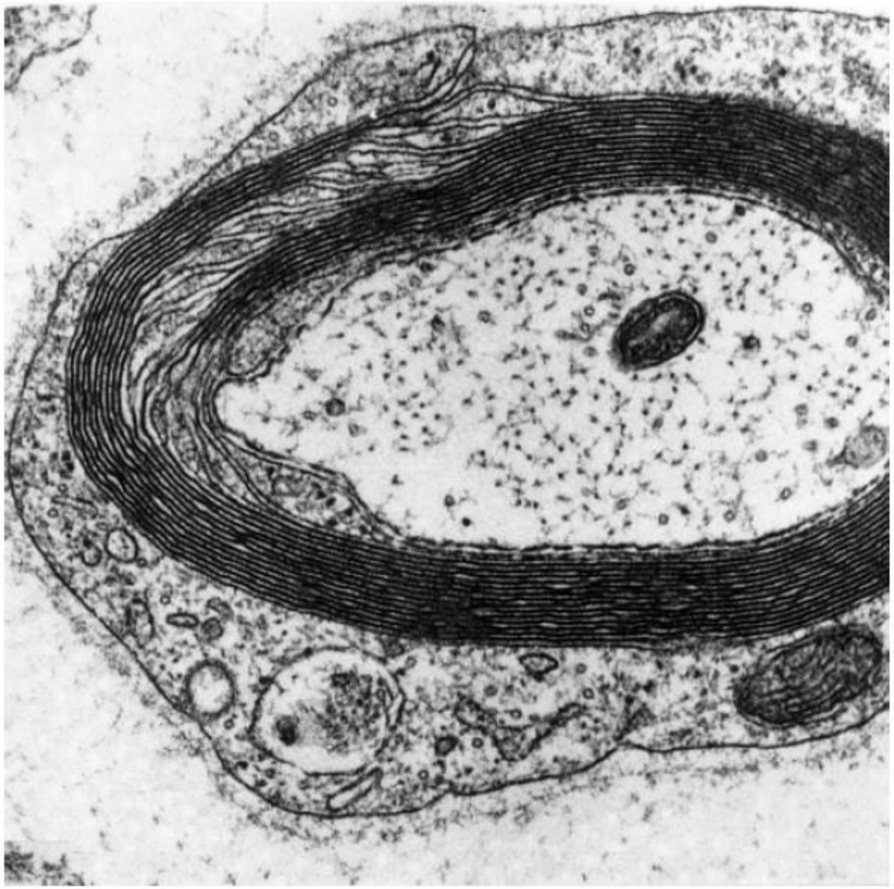
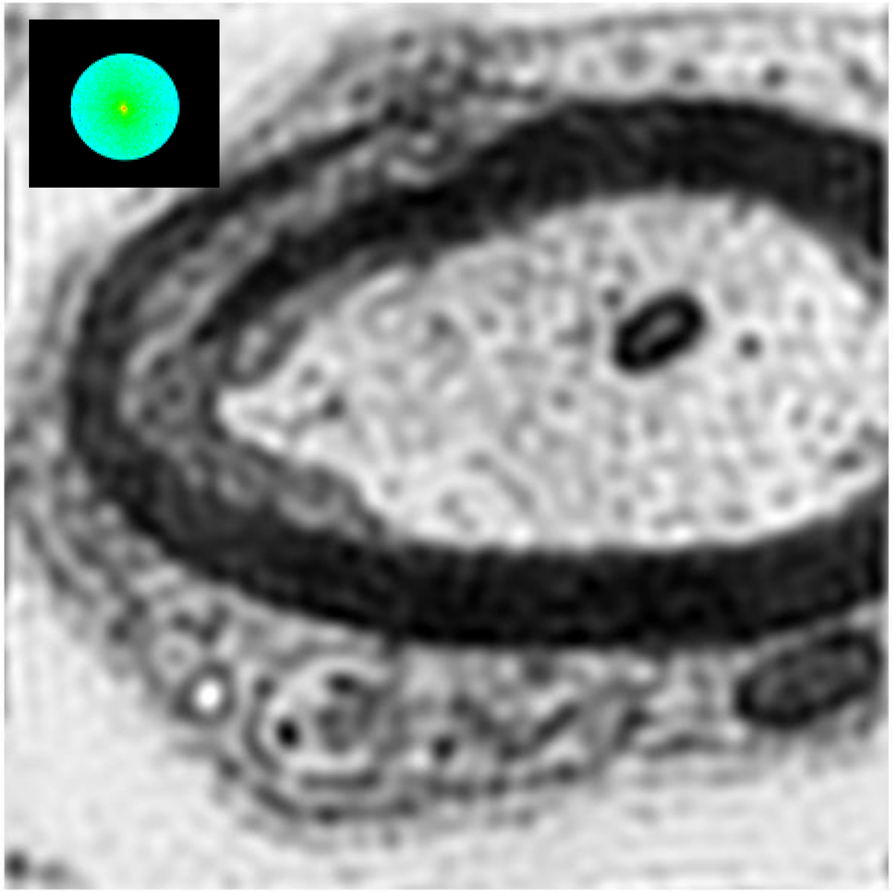


Image filtrée



Filtrage passe-bas: suppression des fréquences spatiales hautes (> 32è harmonique)

Image brute

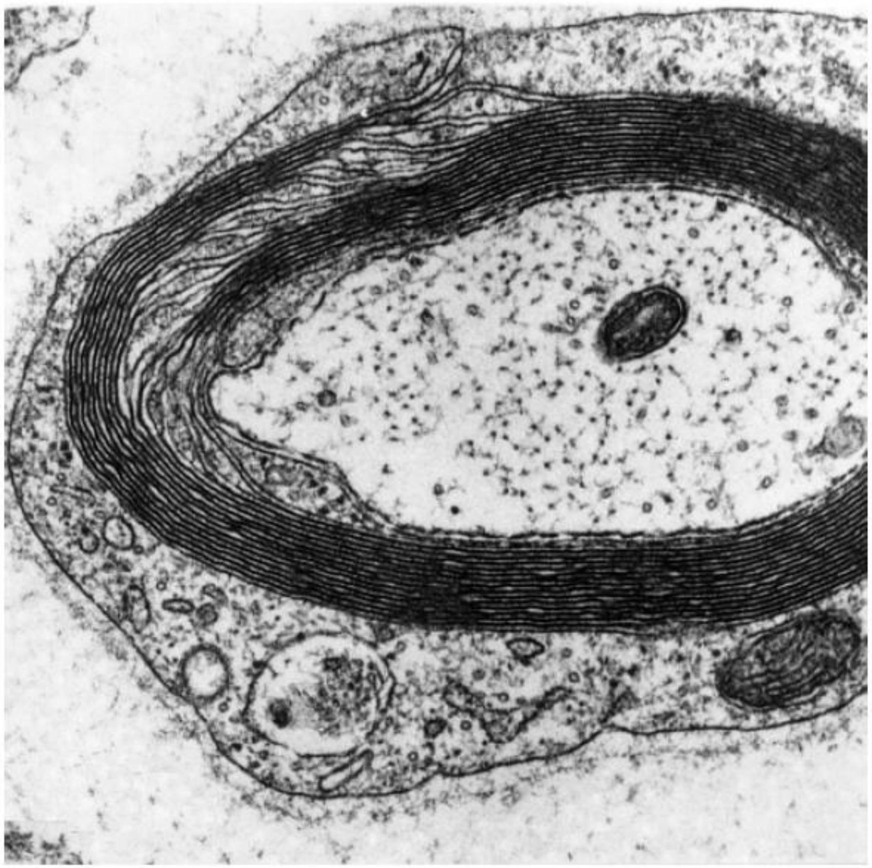
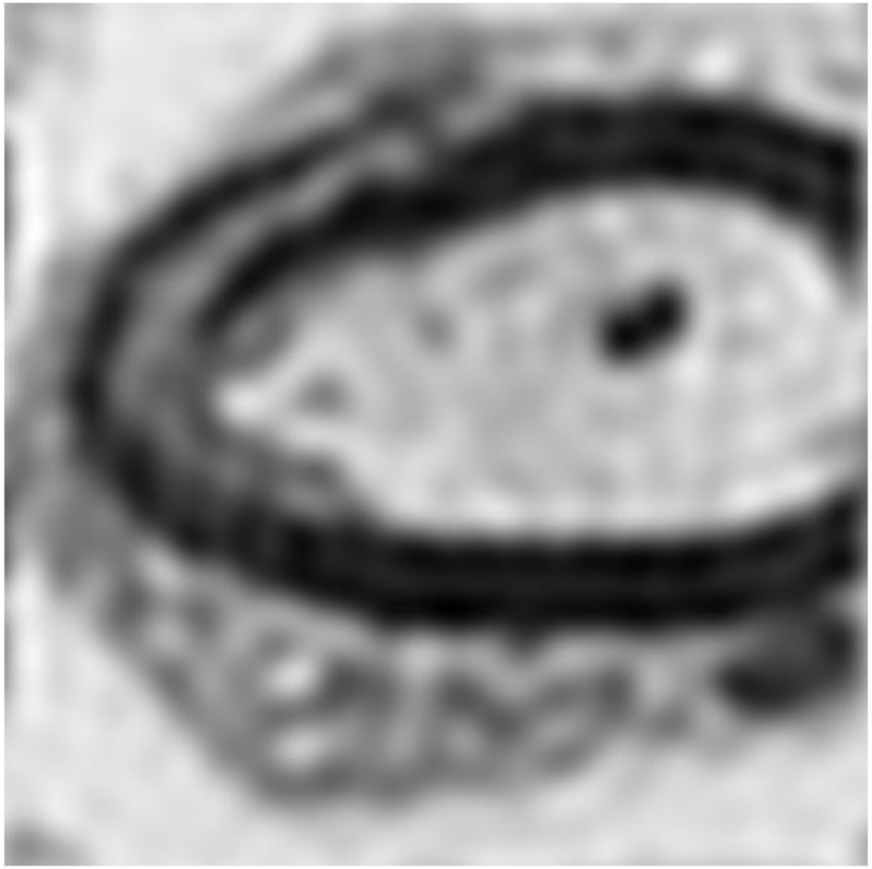


Image filtrée



Filtrage passe-bas: suppression des fréquences spatiales hautes (> $16^{è}$ harmonique)

Image brute

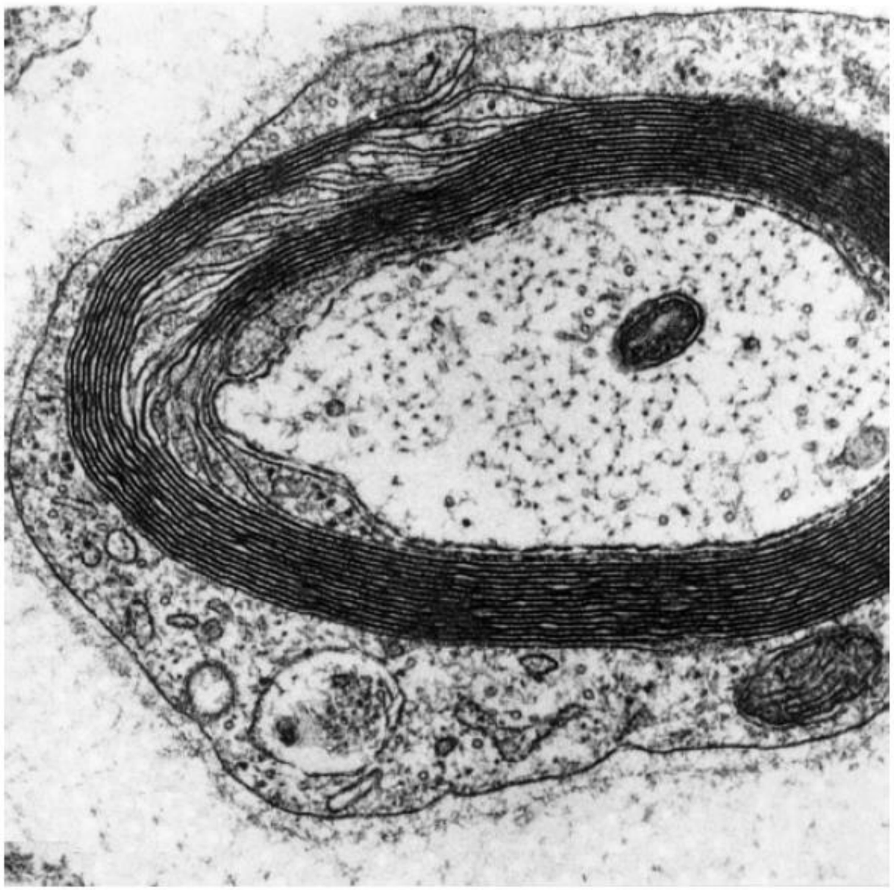


Image filtrée

Filtrage passe-bas: suppression des fréquences spatiales hautes (> 8^{è} harmonique)

Image brute

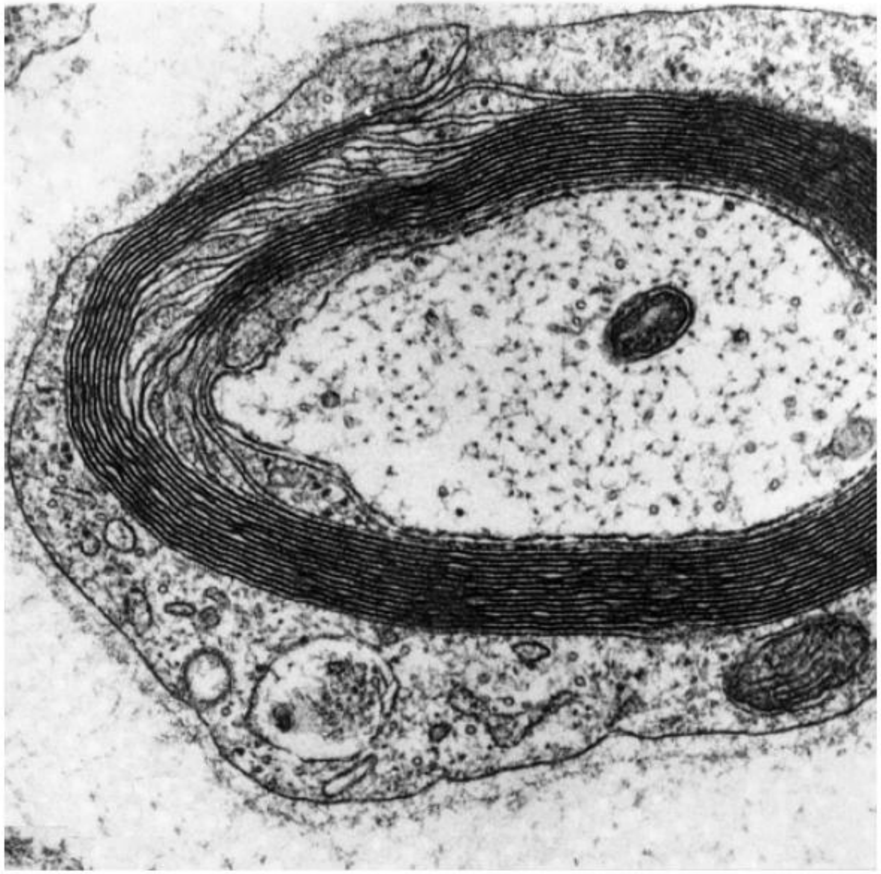
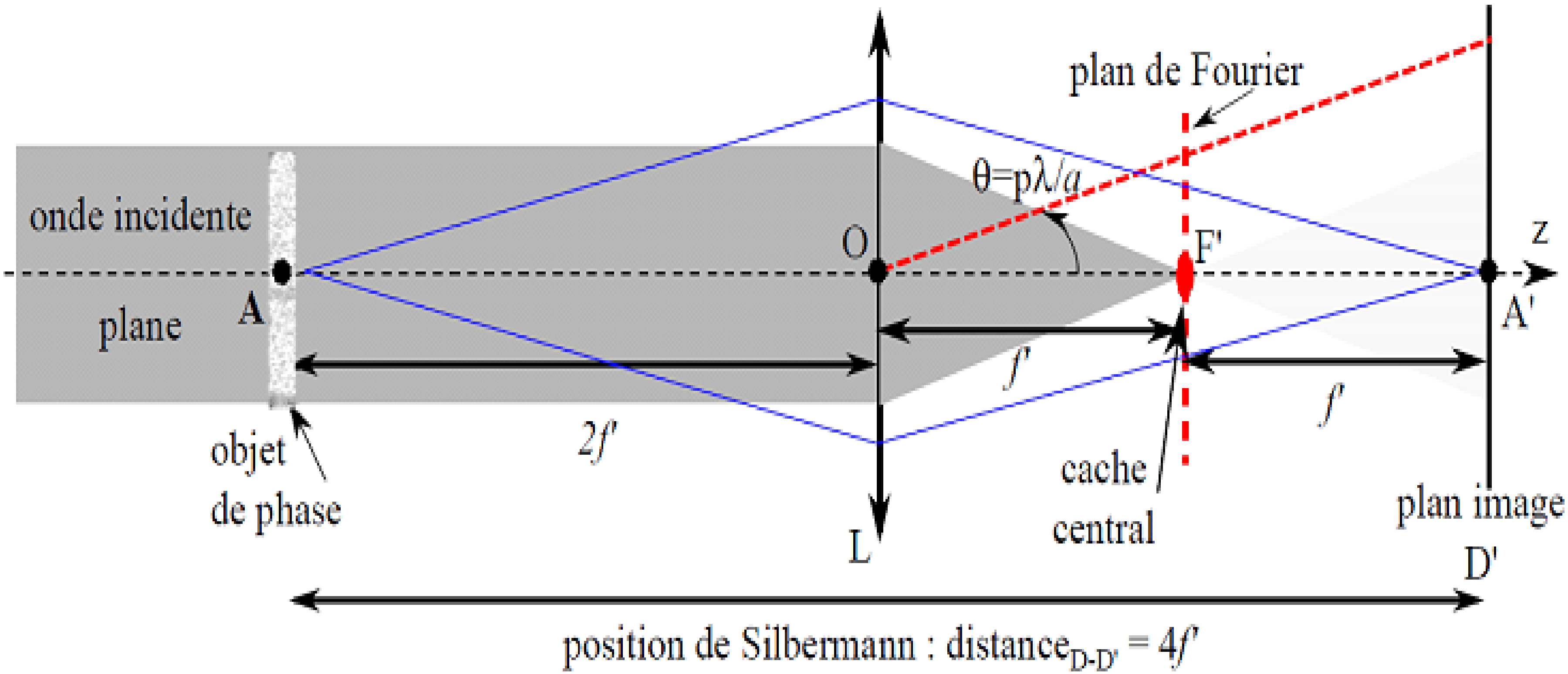


Image filtrée

Filtrage passe-bas: suppression des fréquences spatiales hautes (> 4è harmonique)



Filtrage spatial passe – haut (expérience de strioscopie)

Une vidéo sur la strioscopie

Image brute

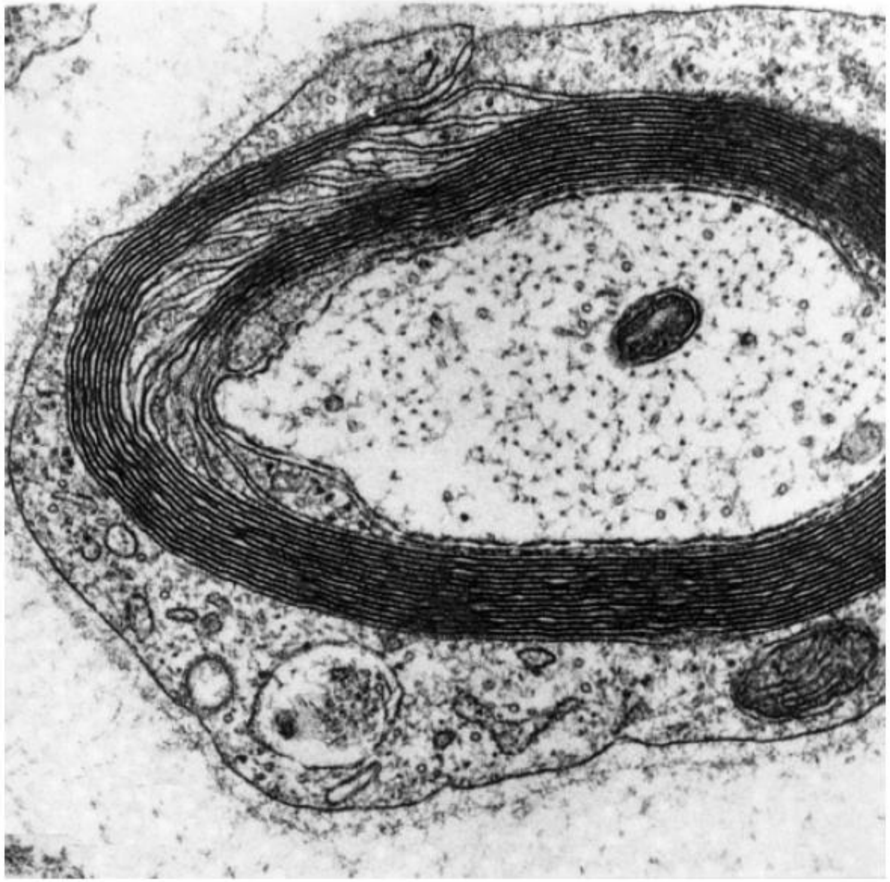
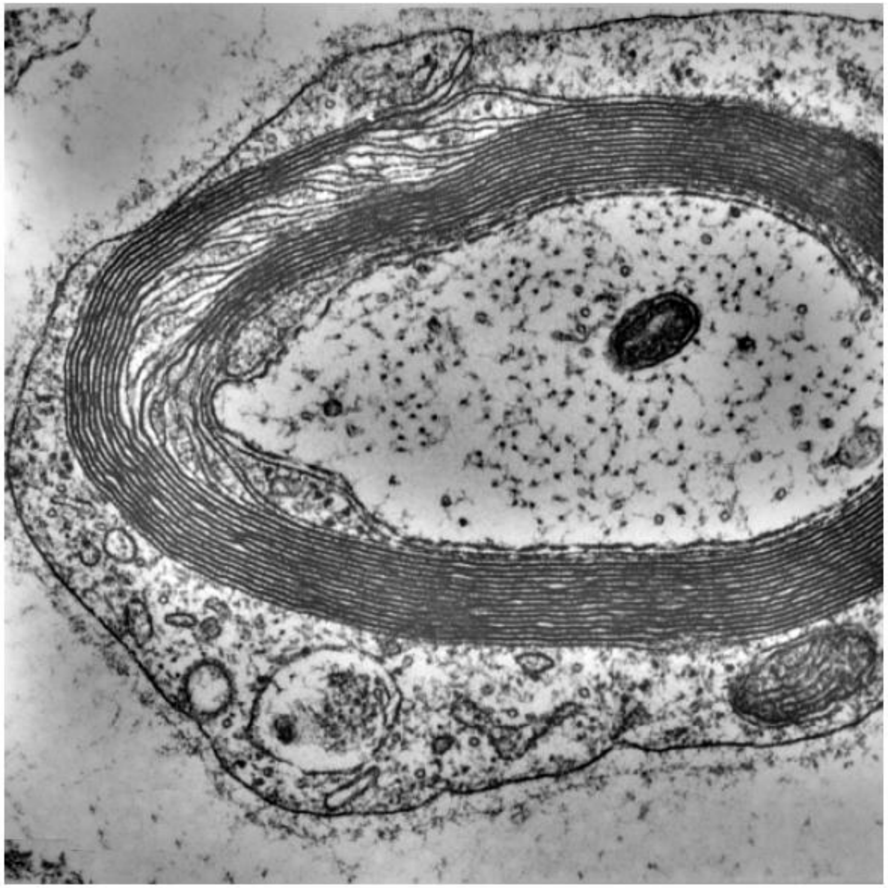


Image filtrée



Filtrage passe-haut: suppression des basses spatiales hautes (< 4$^{\text{è}}$ harmonique)

Image brute

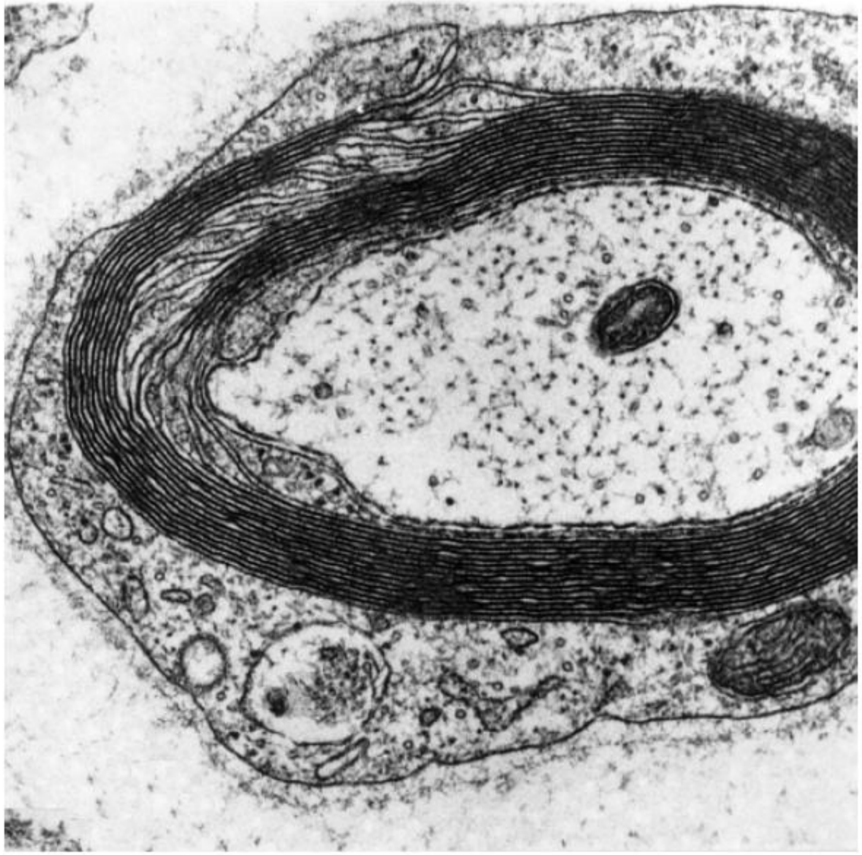


Image filtrée

Filtrage passe-haut: suppression des basses spatiales hautes (< 8^{è} harmonique)

Image brute

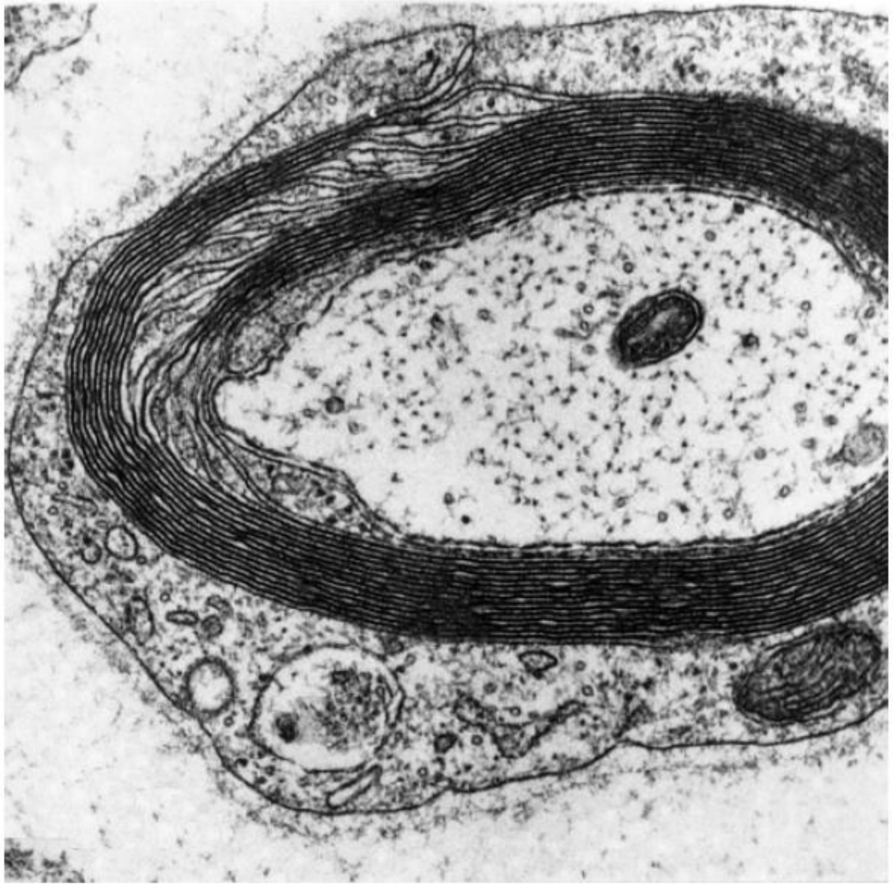
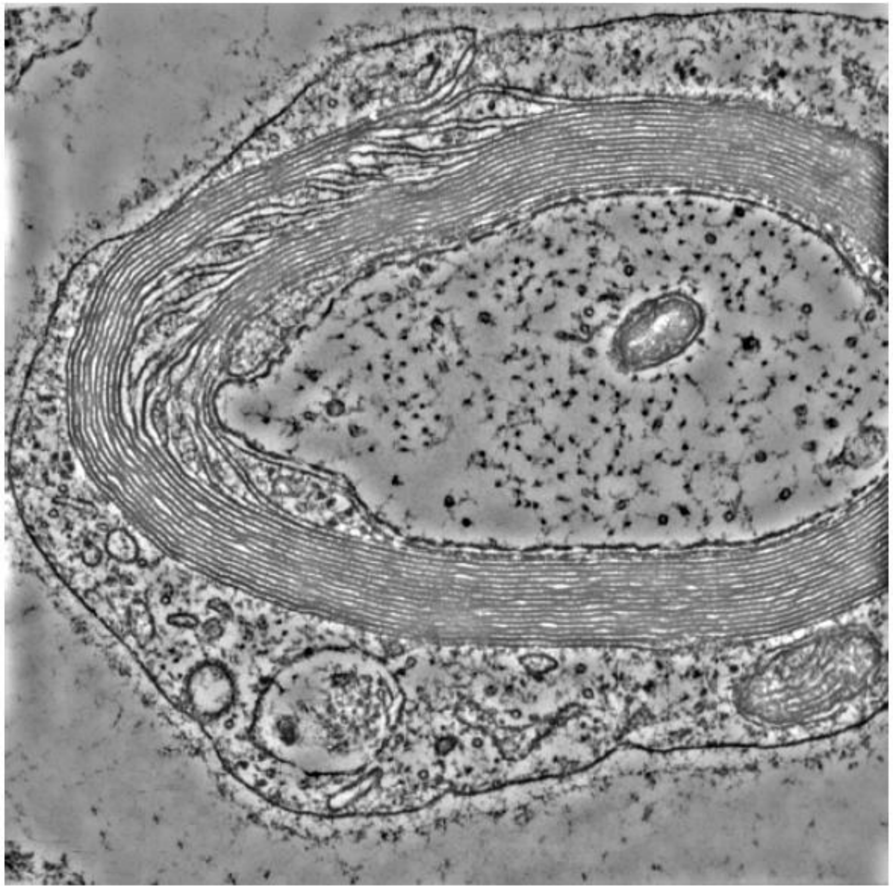


Image filtrée



Filtrage passe-haut: suppression des basses spatiales hautes (< 16è harmonique)

Image brute

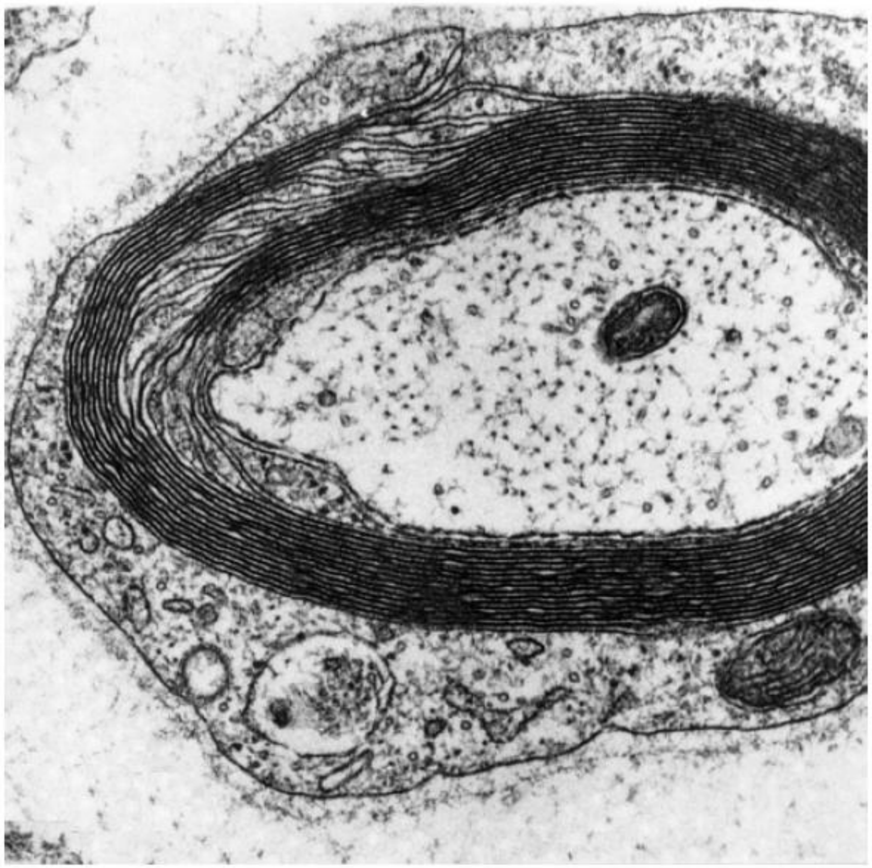
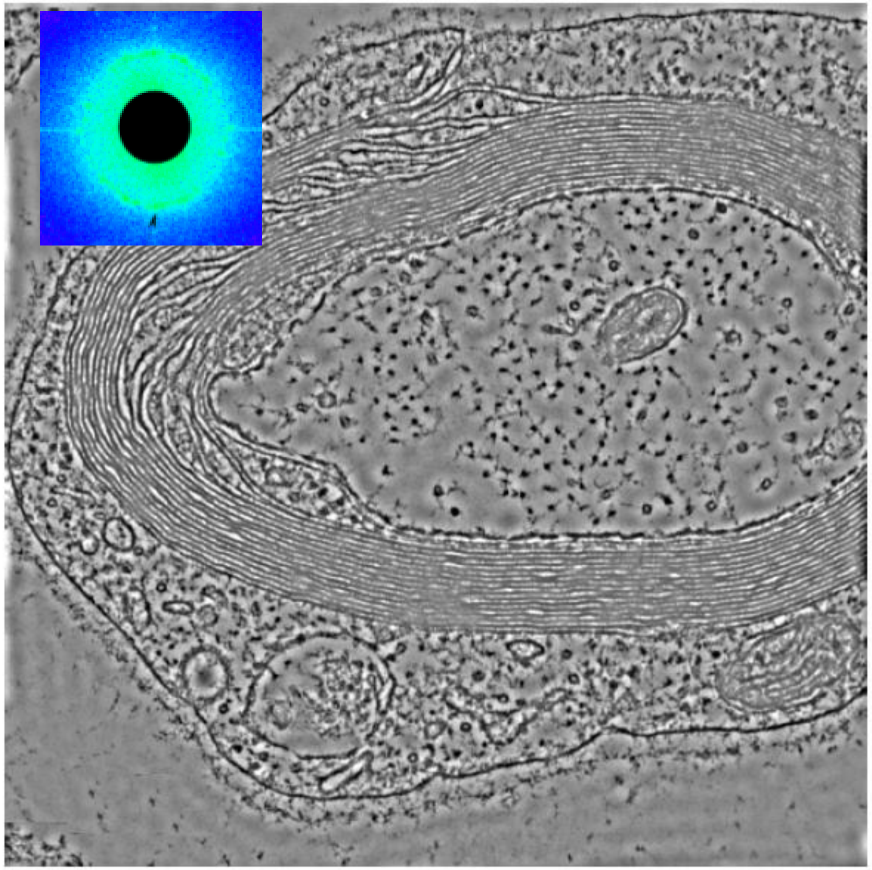


Image filtrée



Filtrage passe-haut: suppression des basses spatiales hautes (< 32^{è} harmonique)

Image brute

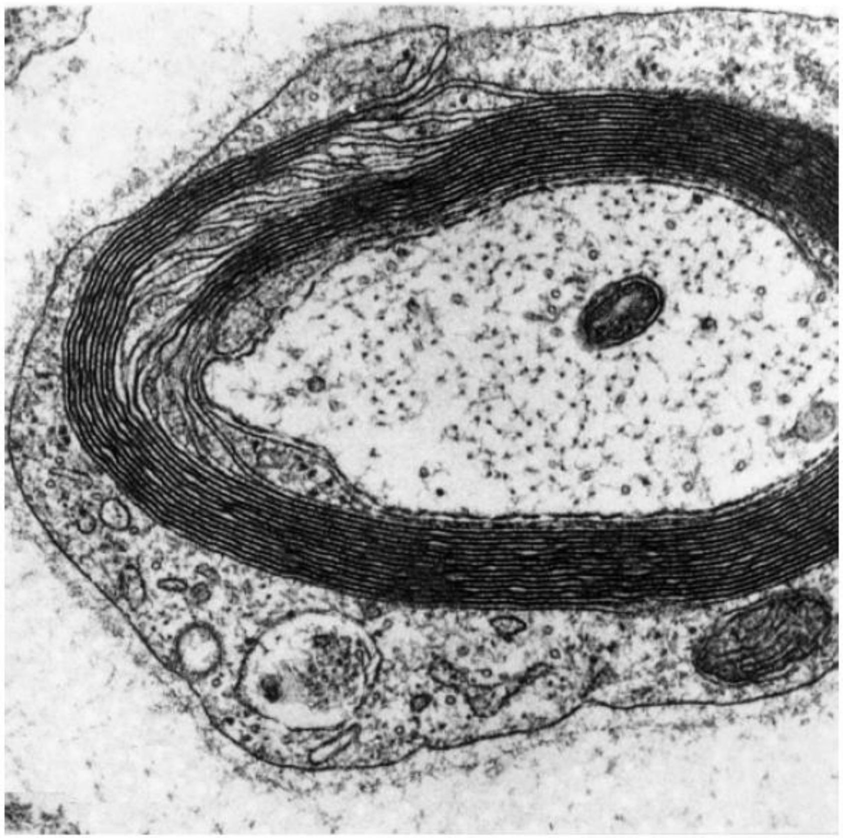
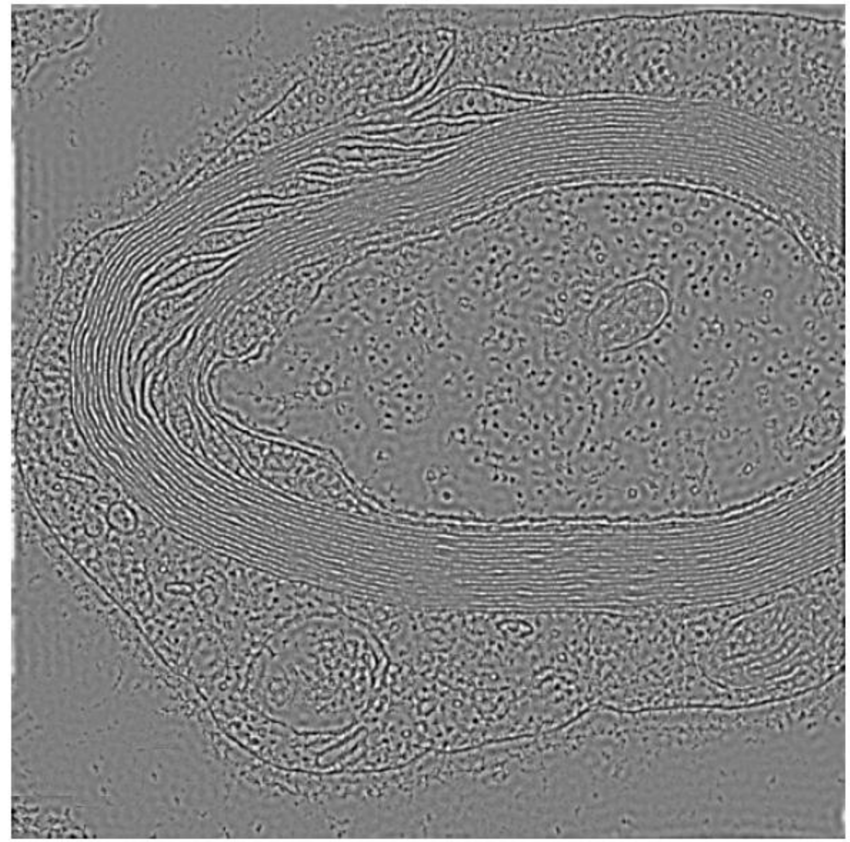


Image filtrée



Filtrage passe-haut: suppression des basses spatiales hautes (< 64$^{\text{è}}$ harmonique)

Image brute

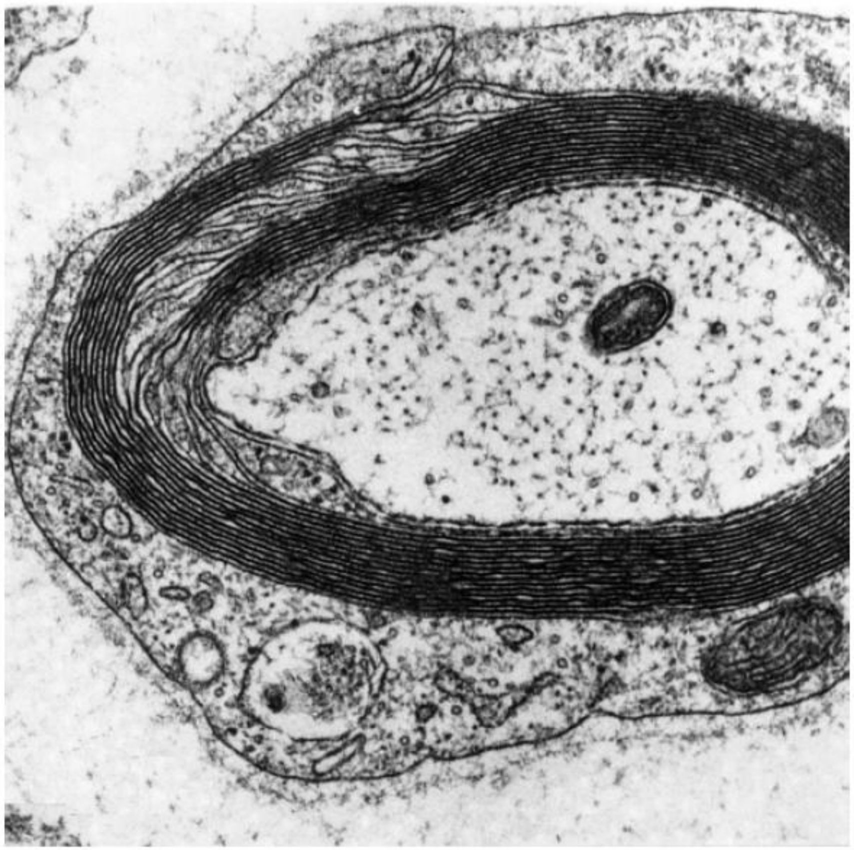
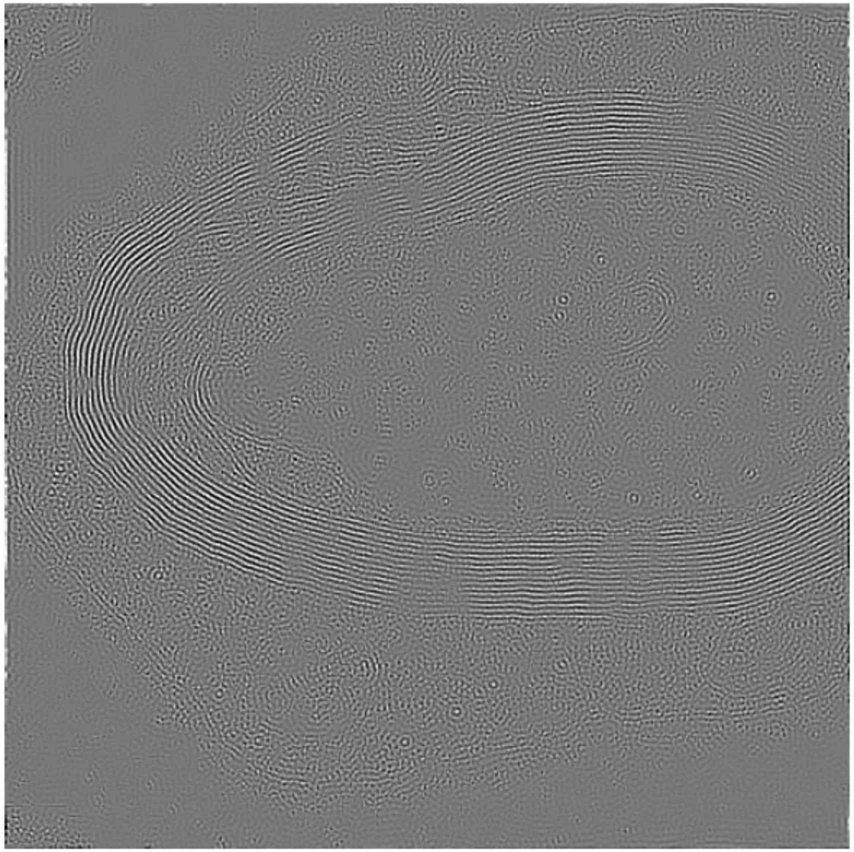
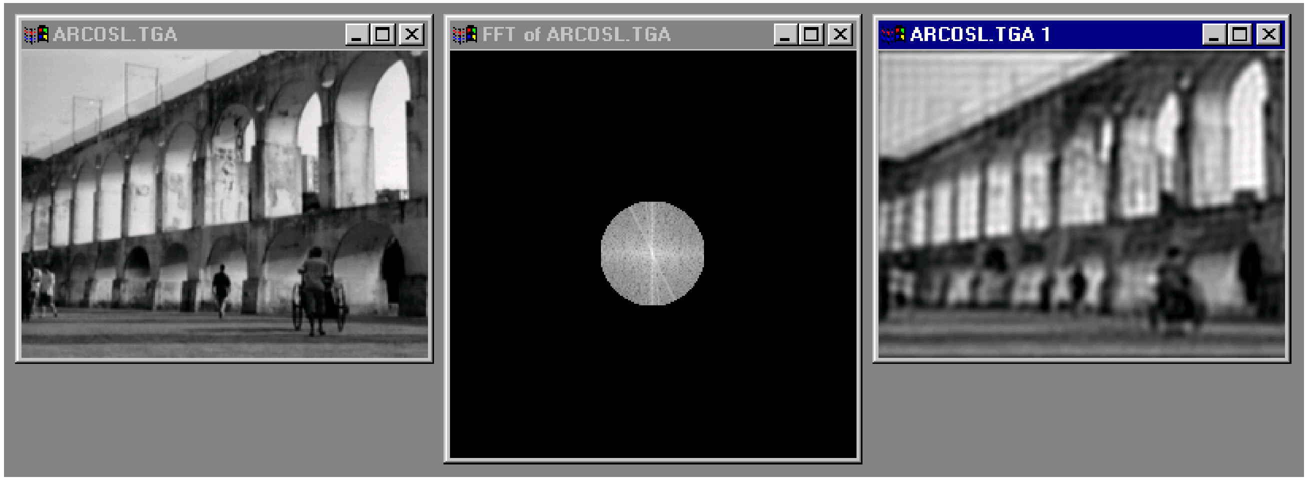


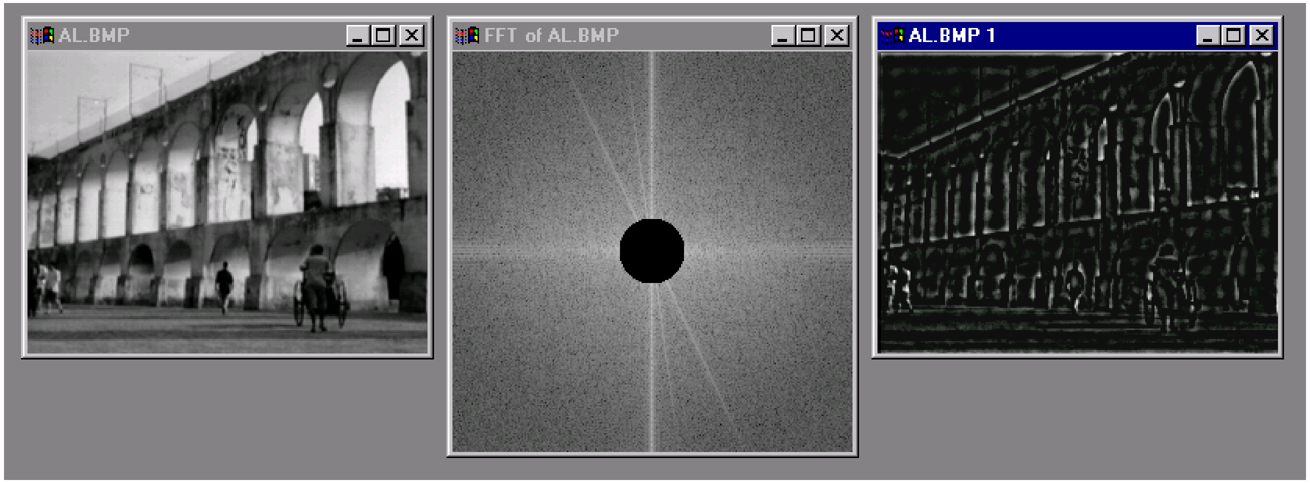
Image filtrée

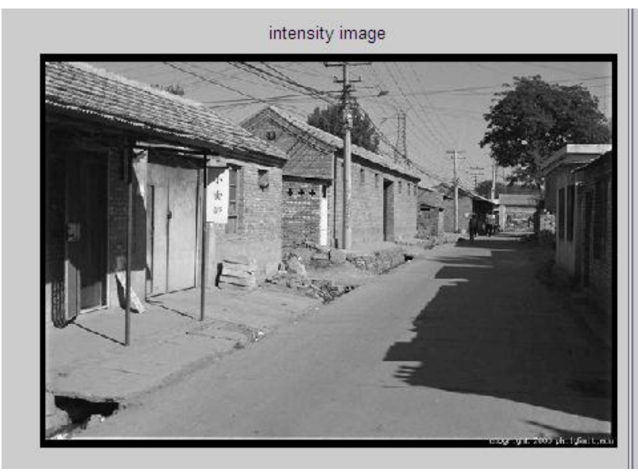


Filtrage passe-haut: suppression des basses spatiales hautes (< 128^{è} harmonique)

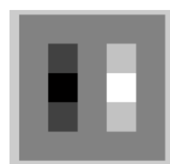
Filtrages passe-bas et passe-haut



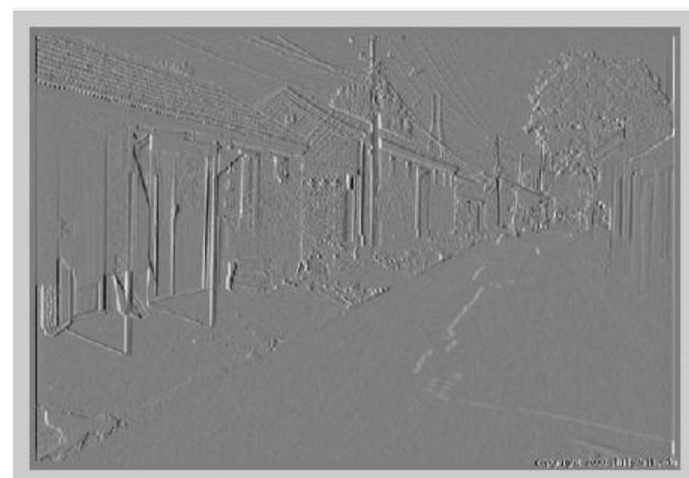



intensity image

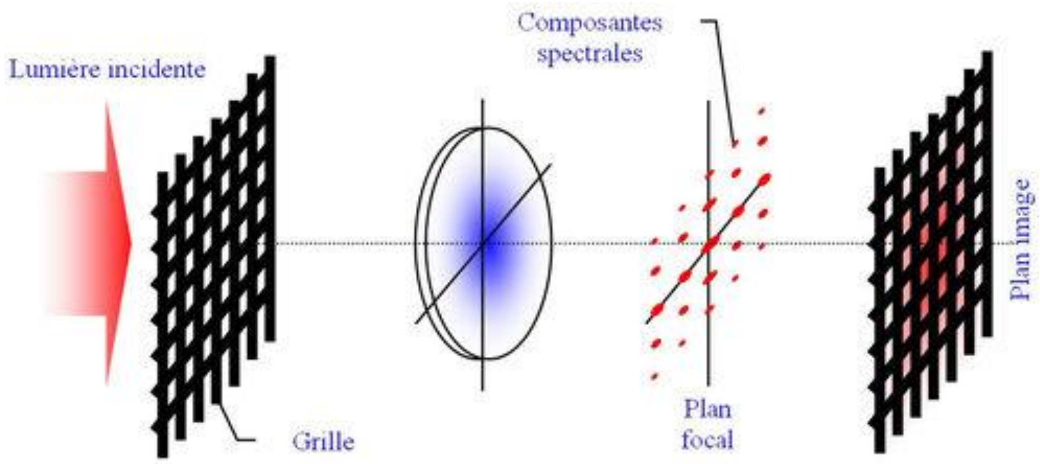
*

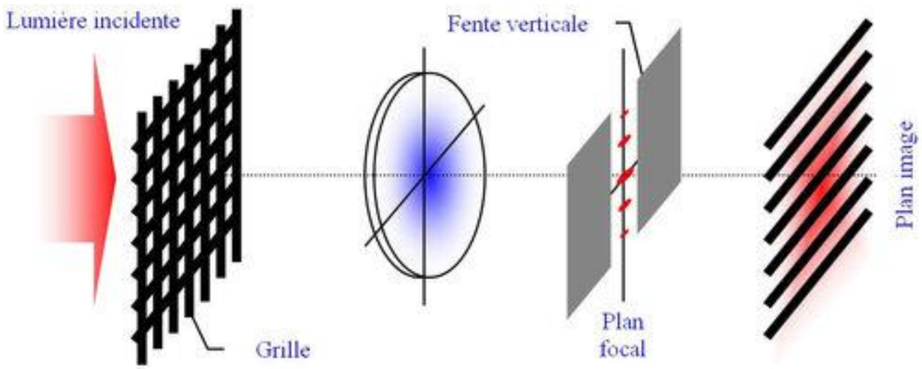


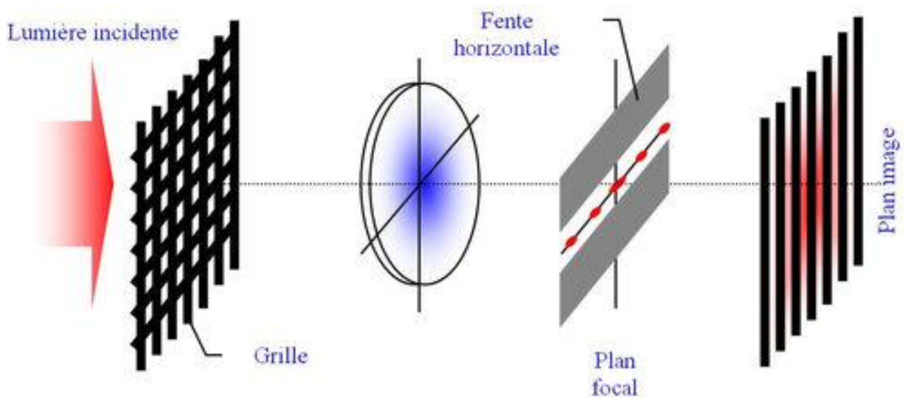
=



L'expérience d'Abbe et Porter (cliquer sur les images pour accéder au site Internet)

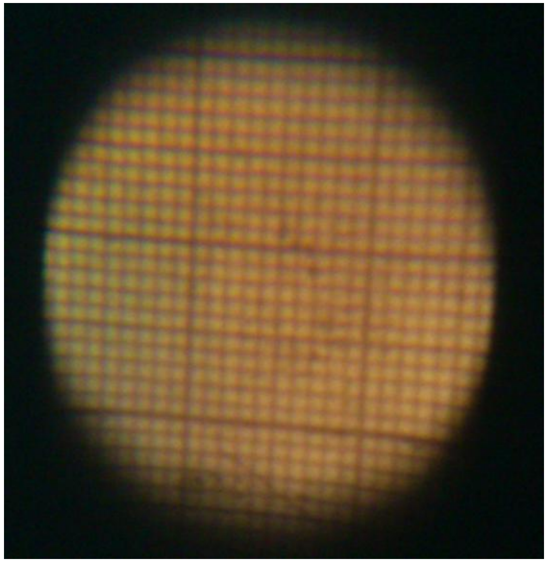


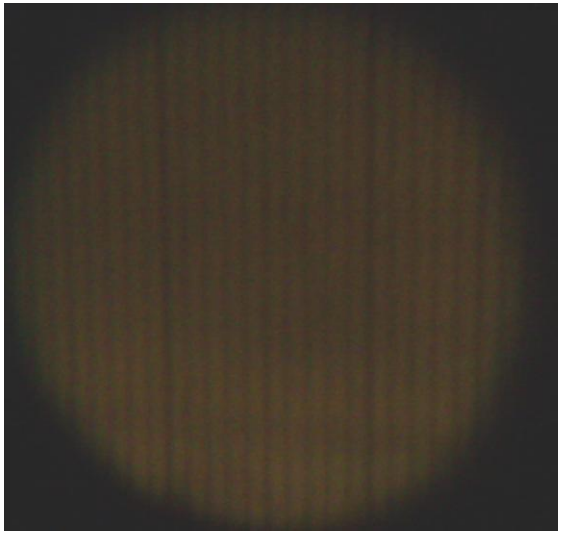




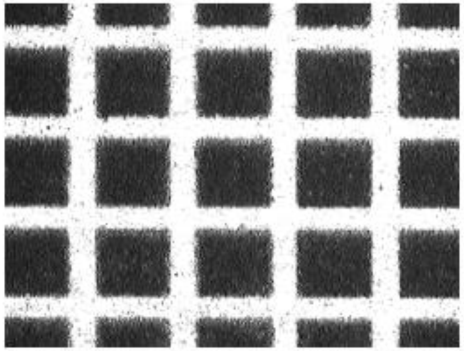
Voir exercice fait en classe

Expérience faite au lycée : détramage d'une feuille de papier millimétré

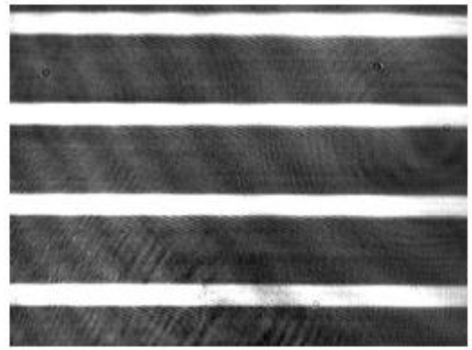




Expérience d'Abbe : filtrage d'une grille par une fente



Grille non filtrée



Grille filtrée par une fente verticale de 40 µm

Grille filtrée par une fente horizontale de 70 µm

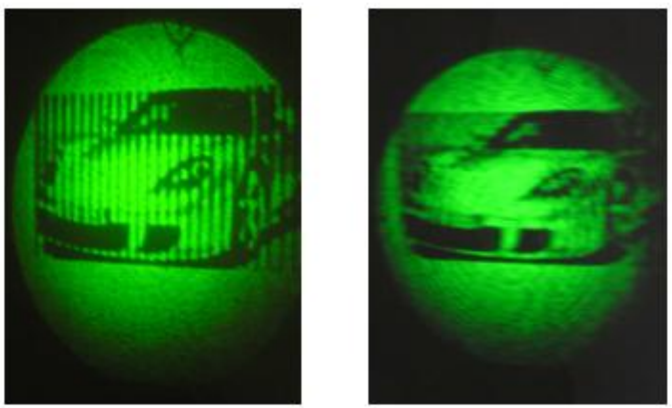


Photo détramée (fente verticale)

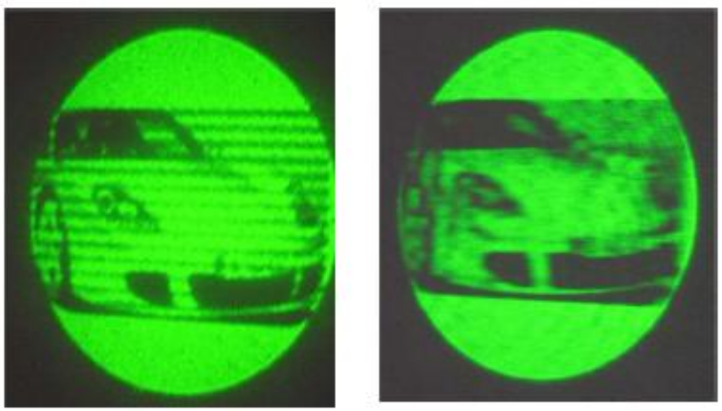


Photo détramée (fente horizontale)

Détramage d'une photographie par une fente

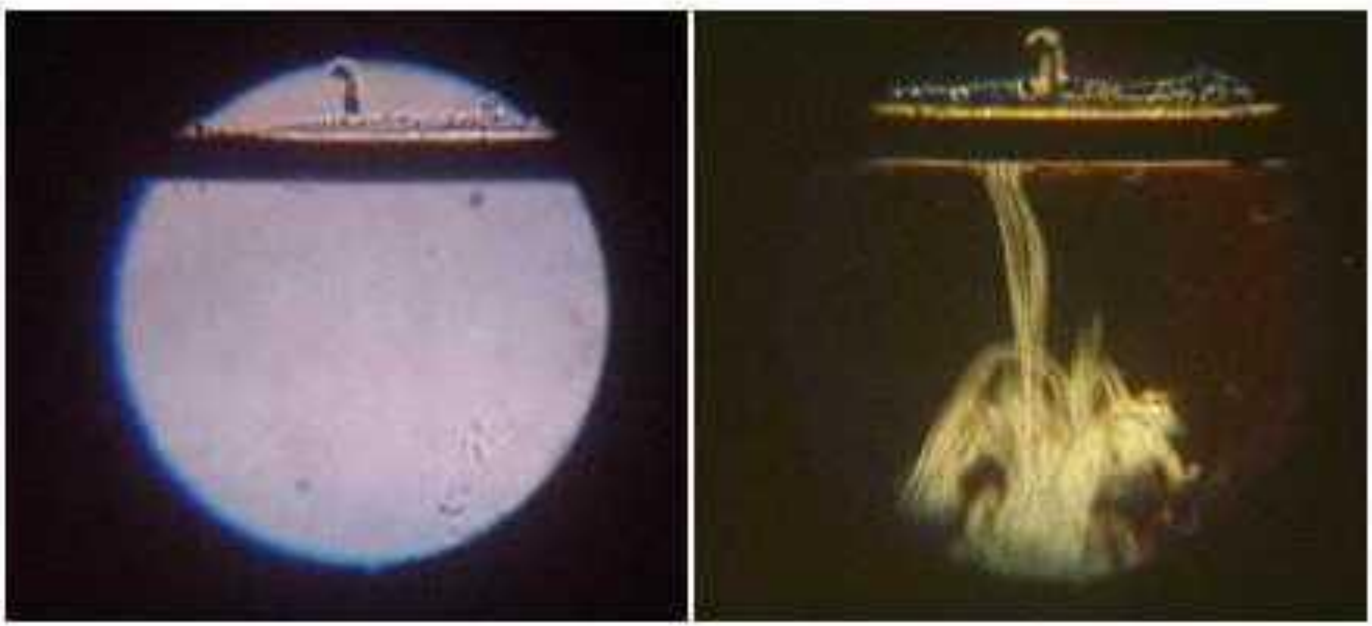
Contraste de phase

Un filtre passe-haut (petit cache circulaire noir) est placé au centre de la figure de diffraction de l'objet (cuve remplie d'eau dans laquelle on fait tomber une goutte de glycérol).

Sur l'écran, on observe l'image de la cuve : le glycérol (objet transparent) apparaît nettement (sur fond noir) grâce au filtrage.

L'expérience est réalisée en lumière blanche.

Une très belle vidéo



Interprétation :

La transmittance de l'objet de phase peut s'écrire :

$$\underline{t}(x) = e^{i\phi(x)} \qquad (\,avec : \phi(x) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n(x) e\,)$$

Si on suppose $\phi(x) << 1$:

$$\underline{t}(x) = e^{i\phi(x)} \approx 1 + i\phi(x)$$

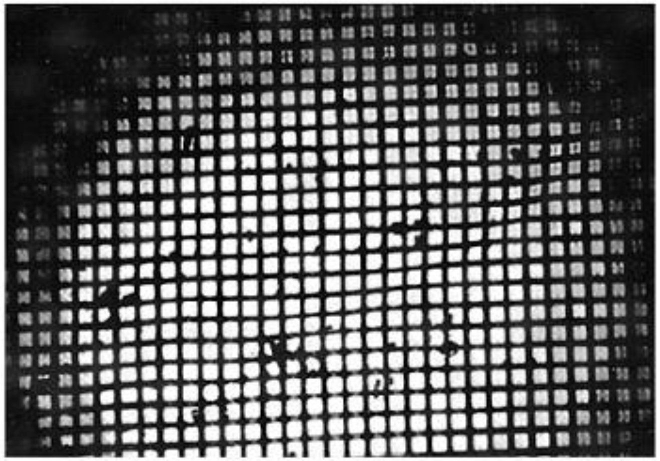
Un filtre passe-haut (petit cache circulaire noir) permet d'éliminer la composante de fréquence spatiale nulle.

L'éclairement dans le plan image devient alors :

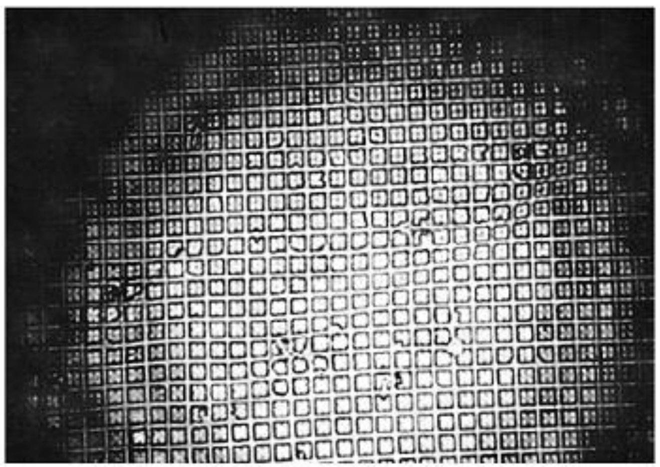
$$Eclairement \;\; \alpha \;\; \left|\underline{t}(x)\right|^2 = \phi(x)^2$$

L'éclairement est maintenant non homogène : il traduit la variation spatiale de la phase de l'onde due à la traversée de l'objet, qui devient visible grâce au déphasage qu'il produit.

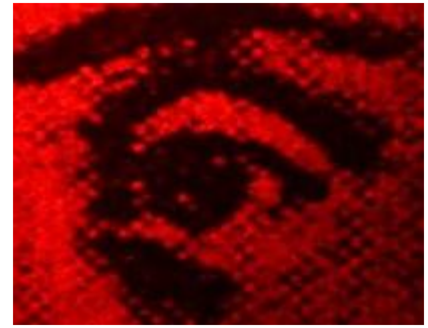
(a)



(b)



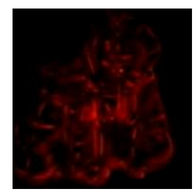
La partie (b) est une version filtrée de (a) où l'ordre zéro a été enlevé.



Des photos de filtrage spatial (cliquer sur l'image)

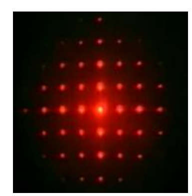
Quelques films pour conclure :

(Cliquer sur les images)

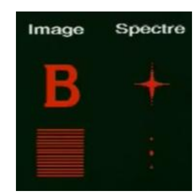


Passe haut

Passe bas

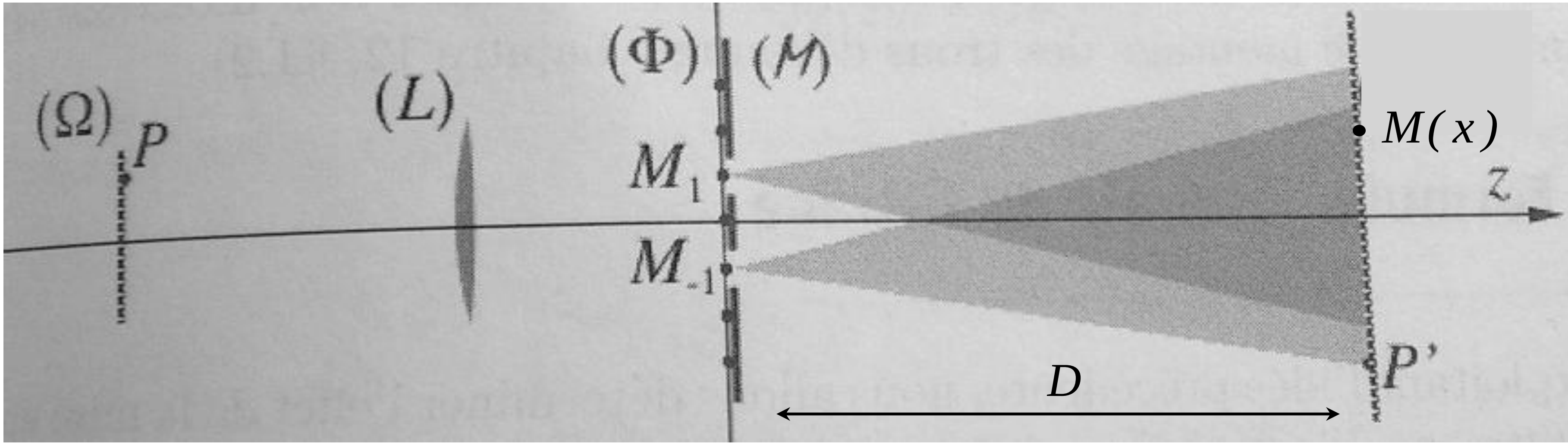


Spectre d'une grille



Multiplexage

Exercice : filtrage spatial et expérience des trous d'Young



(Ω) : réseau de fentes de fréquence spatiale U = 1 / a

(Φ) : plan de Fourier de la lentille CV (L)

(M) : plan opaque percé de deux trous qui ne laisse passer que les fréquences spatiales d'ordre + 1 et – 1.

L'intensité en un point M(x) de l'écran vaut :

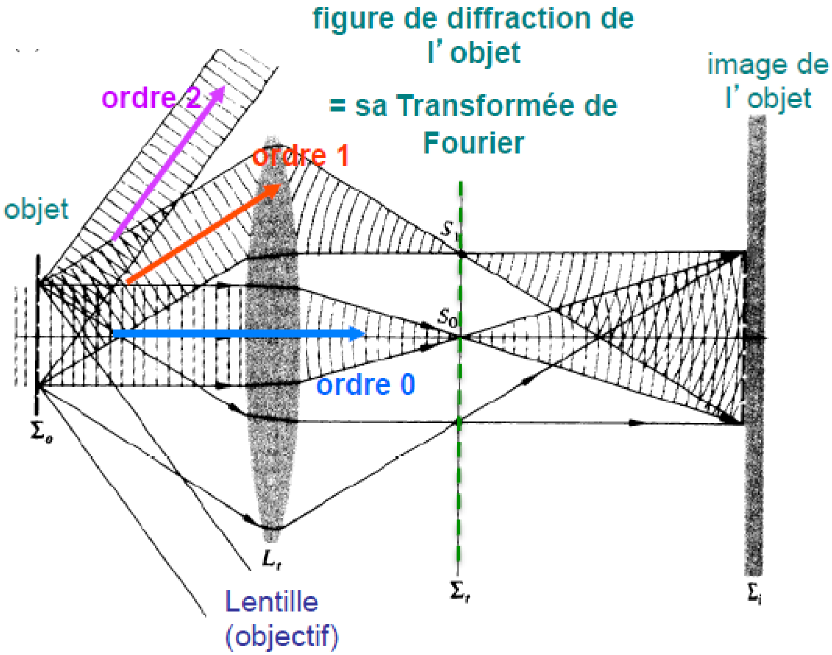
$$I(x) = 2I_0\left(1+\cos\left(4\pi f'U\frac{x}{D}\right)\right) = 2I_0\left(1+\cos\left(4\pi\frac{f'}{a}\frac{x}{D}\right)\right)$$

Effet moiré (cliquer sur les images pour lancer les films)

Pour en savoir plus sur le traitement du signal et des images (site « culture sciences physiques », ENS Lyon)

Cliquer ICI

La diffraction à l'origine de la limite de résolution d'un système optique



La lentille n' ayant pas une ouverture infinie, elle ne peut pas collecter la totalité des rayons diffractés. **Les ordres diffractés les plus élevés** (correspondant aux rayons diffractés les plus inclinés par rapport à l'axe optique) **seront perdus.**
Or, ces ordres élevés correspondent aux **fréquences spatiale élevées** de la transformée de Fourier de l'objet, c'est-à-dire les **détails** de l'objet.

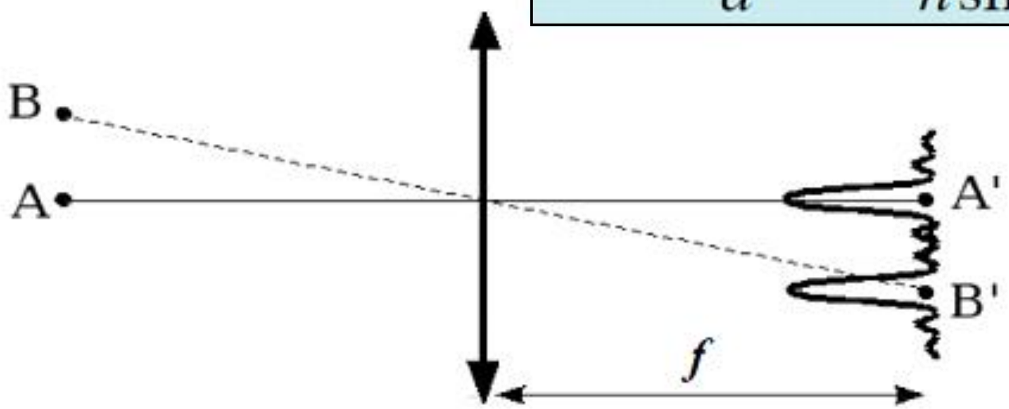
La lentille, comme tout système optique, fonctionne comme un **filtre passe-bas**: elle **rejette les fréquences spatiales supérieures à une certaine valeur** et laisse passer toutes les fréquences inférieures.

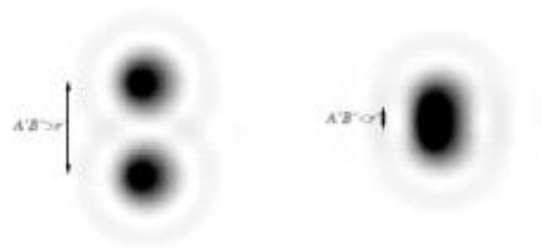
Critère de Rayleigh

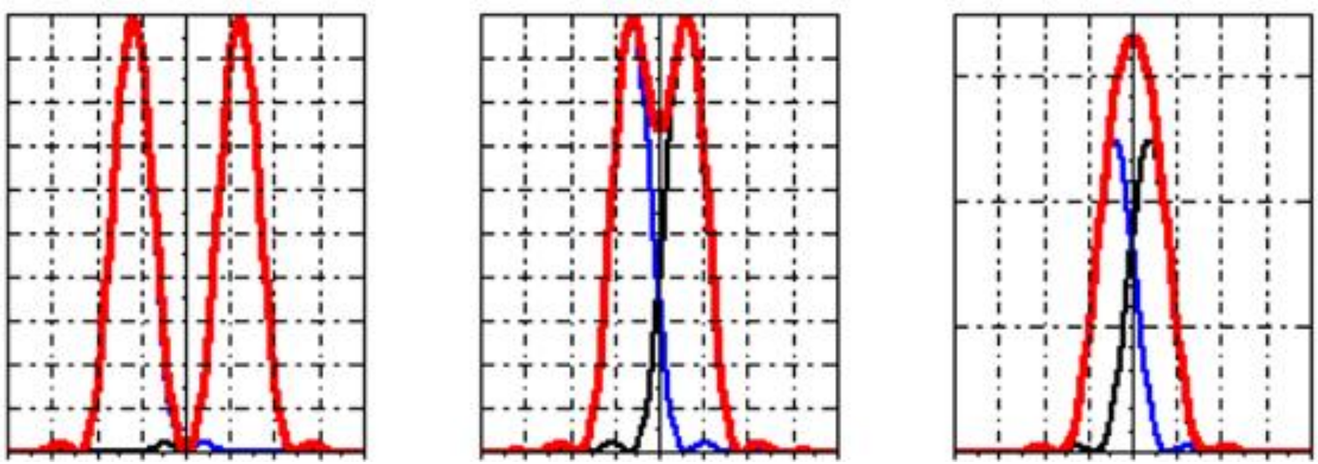
$$\delta = \frac{1.22\lambda f}{d} = \frac{0.61\lambda_0}{n\sin\theta}$$

f : focale de la lentille

d : diamètre d'ouverture de la lentille







Les idées essentielles

❑ La figure de diffraction de Fraunhofer (ou diffraction à l'infini) d'un objet partiellement transparent éclairé par une onde plane cohérente matérialise le spectre d'ondes planes du champ lumineux émergeant de l'objet.

❑ Ce spectre se forme dans le plan de Fourier du montage, matérialisé par le plan focal image d'une lentille convergente.

❑ L'image de l'objet donnée par la lentille résulte de l'interférence de ces diverses ondes planes (théorie d'Abbe).

❑ Si l'objet est unidimensionnel et périodique (réseau), le spectre est représenté dans le plan de Fourier par un ensemble de points lumineux discrets équidistants dont les coordonnées représentent les fréquences spatiales (fondamentale et harmoniques).

Dans le cas général, la distribution d'intensité dans le plan image est continue.

- Un « masque », constitué d’un diaphragme agissant sur l’amplitude et la phase de la lumière, disposé dans le plan de Fourier, permet de modifier le spectre d’ondes planes et par conséquent, l’image de l’objet étudié. C’est le principe du « filtrage spatial ».

- Le filtrage spatial est utilisé pour améliorer la visualisation des objets de phase, objets qui n’agissent pas sur l’intensité de la lumière mais seulement sur sa phase et ne sont pas visibles dans le plan de l’image.

- La strioscopie consiste à supprimer par un petit disque opaque disposé au centre du plan de Fourier, la fréquence nulle du spectre, fréquence qui correspond au fond continu lumineux dans le plan image.

- La méthode du contraste de phase remplace le disque opaque par une lame de phase, lame transparente qui impose, à la composante de fréquence nulle, une différence de phase par rapport aux autres.

- On réalise un filtrage passe – bas en plaçant dans le plan de Fourier un diaphragme opaque percé d’un trou centré sur l’axe optique. On supprime ainsi les détails fins dans le plan image, correspondant aux fréquences spatiales élevées.