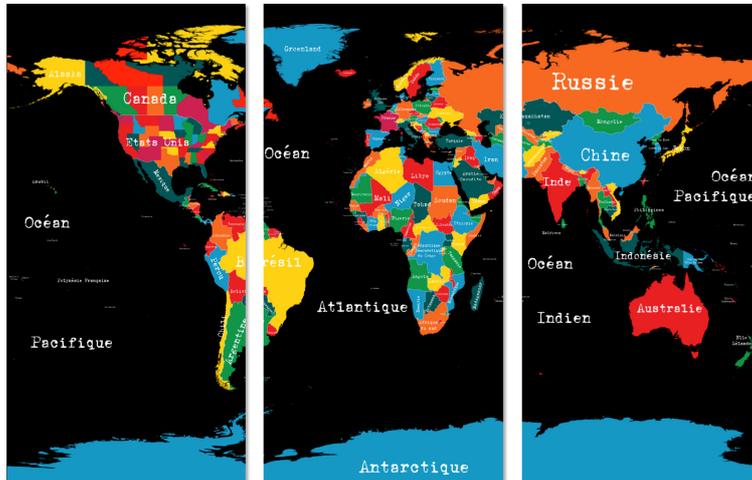


Travaux dirigés (PC*)



Lycée Jacques Decour

Olivier Granier

Site perso : olivier.granier.free.fr

Chaîne YouTube : « [La Physique animée](#) »

Thermodynamique

Théorie cinétique du gaz parfait monoatomique :

a) Effusion (calcul approché) : un récipient de volume $V_0 = 1 \text{ L}$, maintenu à température constante égale à 0°C , contient de l'hélium sous la pression $P_0 = 1 \text{ mm Hg}$. A l'extérieur du récipient règne le vide. On note $n = N / V_0$ le nombre de particules par unité de volume. Le récipient est percé d'un petit trou d'aire $s = 1 \mu\text{m}^2$.

Calculer le temps au bout duquel la pression a diminué de moitié. On confondra vitesse moyenne (en module) et vitesse quadratique moyenne. On supposera de plus que les particules ne peuvent aller que dans trois directions possibles.

b) Le récipient précédent ne communique plus avec le vide mais avec un récipient de même volume V_0 , initialement vide et maintenu à la température constante de 0°C . Déterminer les densités particulières n_1 et n_2 dans les deux récipients en fonction du temps. Les tracer en fonction du temps et déterminer leurs valeurs lorsque l'équilibre est atteint.

Distribution de Maxwell – Boltzmann :

a. Atmosphère isotherme – facteur de Boltzmann :

L'atmosphère terrestre est assimilée à un gaz parfait constitué de molécules de masse molaire $M = 29 \text{ g mol}^{-1}$ et plongé dans un champ de pesanteur \vec{g} uniforme et dirigé vers le bas avec $\|\vec{g}\| = 10 \text{ ms}^{-2}$. On suppose que ce gaz parfait est à l'équilibre thermodynamique à une température $T = 300 \text{ K}$.

- 1) Établir la loi donnant la pression $P(z)$ en fonction de l'altitude.
- 2) Évaluer l'épaisseur caractéristique de l'atmosphère dans ce modèle. Donner un ordre de grandeur de la pression au sommet de l'Everest.
- 3) Montrer que, dans ce modèle, la densité volumique $n(z)$ des molécules est donnée par

$$n(z) = n(0) \exp\left(-\frac{E_p(z)}{E_0(T)}\right) \quad (1)$$

où $E_p(z)$ est l'énergie potentielle d'une molécule d'altitude z et où $E_0(T)$ est une énergie caractéristique dépendant de la température mais indépendante du gaz considéré. Donner l'expression de E_0 en fonction de T et de la constante de Boltzmann.

b. Distribution de Maxwell – Boltzmann :

On veut maintenant décrire la distribution d'équilibre des vitesses des molécules dans un gaz à la température T lorsque l'on néglige l'influence de tout champ extérieur.

- 1) Justifier que $\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$, où $\langle - \rangle$ représente la valeur moyenne sur toutes les molécules du gaz et où (v_x, v_y, v_z) sont les trois composantes de la vitesse en coordonnées cartésiennes.

Par analogie avec l'équation (1), on admet que la densité des molécules dans l'espace des vitesses est proportionnelle à $\exp[-E_c(\vec{v})/E_0(T)]$, où $E_c(\vec{v})$ est l'énergie cinétique d'une molécule. C'est la distribution de Maxwell – Boltzmann.

2) Montrer que la loi de distribution de probabilité de chacune des composantes (v_x, v_y, v_z) de la vitesse est décrite par une loi « gaussienne » ou « normale », et écrire la probabilité pour que les composantes de la vitesse soient respectivement comprises entre v_x et $v_x + dv_x$, entre v_y et $v_y + dv_y$ et entre v_z et $v_z + dv_z$.

3) Montrer que la « vitesse quadratique moyenne » $v_q = \sqrt{\langle \vec{v}^2 \rangle}$ vérifie $v_q^2 = 3k_B T / m$, où m est la masse d'une molécule.

On s'intéresse maintenant à la distribution de probabilité de la norme de la vitesse $v = \|\vec{v}\|$.

4) Déterminer la probabilité $p(v)dv$ que cette norme soit comprise entre v et $v + dv$. La fonction $p(v)$ est appelée densité de probabilité de v .

5) En déduire que la valeur moyenne de la norme de la vitesse d'une molécule est donnée par :

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad (2)$$

6) Est-il étonnant que $v_q / \langle v \rangle$ soit un simple facteur numérique qui ne dépende pas des caractéristiques du gaz ?

c. Chocs sur une surface :

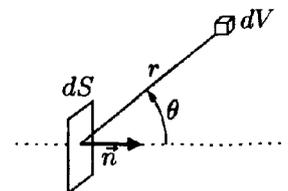
On considère une petite surface dS et l'on veut compter le nombre moyen de chocs de molécules du gaz sur un côté donné de cette surface pendant un temps τ . On note \vec{n} le vecteur unitaire sortant normal à l'élément de surface.

Dans un premier temps, on ne compte que les chocs des molécules ayant une vitesse comprise entre v et $v + dv$.

1) De quelle région de l'espace peuvent venir les molécules du gaz susceptibles de frapper la surface pendant le temps τ ? On repère les points de ce volume par leurs coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'axe \vec{n} (voir la figure). Quelles sont les valeurs pertinentes de (r, θ, φ) ?

On considère un petit volume dV dans cette région de l'espace.

2) Exprimez le nombre total de molécules dans le volume dV en fonction de la pression et de la température du gaz, puis le nombre de molécules avec une vitesse entre v et $v + dv$. On exprimera le résultat à l'aide de la fonction $p(v)$ introduite à la question 1.2.4. Quelle approximation faisons-nous ? Est-elle justifiée si l'on veut appliquer ces résultats au microscope ?



3) Quelle est la proportion des molécules dans le volume dV qui vont dans la bonne direction pour heurter la surface dS ?

4) En déduire le nombre moyen de chocs sur la surface dS pendant le temps τ par des molécules ayant une vitesse entre v et $v + dv$.

5) On tient maintenant compte de toutes les vitesses possibles. Montrer que le nombre total moyen de chocs sur la surface dS pendant le temps τ est de la forme $\tau n_c dS$ avec

$$n_c = \frac{P}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \quad (3)$$

Préciser la dimension et l'ordre de grandeur de n_c .

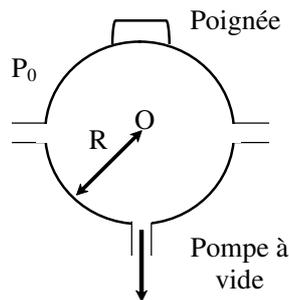
Pression sous la mer :

On considère une mer en équilibre isotherme. La masse volumique de l'eau de mer varie avec la pression selon la loi $\mu = \mu_0 [1 + a(P - P_0)]$, où $a = 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$. La profondeur est notée z . Pour $z = 0$, $P = P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ et $\mu = \mu_0 = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

- Déterminer la loi de variation de la pression avec la profondeur, $P(z)$.
- Que devient cette loi pour de faibles profondeurs.
- Calculer P_{exacte} et $P_{\text{approchée}}$ pour $z = 1 \text{ km}$. Quelle est l'erreur relative commise en utilisant la loi approchée ?

Hémisphères de Magdeburg :

Soit une sphère constituée de deux hémisphères dits « de Magdeburg », en contact suivant un cercle de rayon R . L'hémisphère inférieur, supposé fixe, est relié à une pompe à vide destinée à rendre la pression intérieure très faible (par rapport à la pression atmosphérique P_0).



- Exprimer en fonction de P_0 et de R la force F qu'un opérateur doit exercer sur la poignée de l'hémisphère supérieur dans le but de séparer les deux hémisphères.
- Calculer numériquement cette force avec $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ et $R = 5 \text{ cm}$.

Aérostat à hydrogène

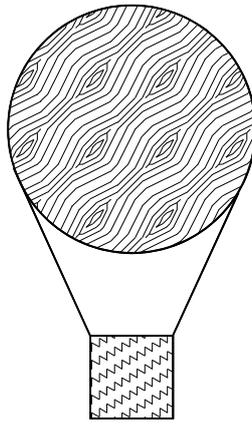
L'enveloppe d'un aérostat (dirigeable) a un volume constant V . Elle est remplie de dihydrogène de masse molaire M_1 . Une valve y maintient une pression toujours égale à la pression extérieure. Les gaz sont considérés parfaits.

La nacelle, l'enveloppe et les deux passagers ont une masse m_1 .

La pression au voisinage du sol est P_0 , la température est T_0 . Dans ces conditions, la masse volumique de l'air (de masse molaire M_2) vaut ρ_0 .

Données : $V = 700 \text{ m}^3$; $M_1 = 2 \text{ g.mol}^{-1}$; $M_2 = 29 \text{ g.mol}^{-1}$; $m_1 = 447 \text{ kg}$; $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$; $T_0 = 300 \text{ K}$; $\rho_0 = 1,18 \text{ kg.m}^{-3}$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$; $R = 8,314 \text{ S.I.}$

- Quelle masse m_2 de lest faut-il emporter pour que le ballon se maintienne en équilibre au niveau du sol ?



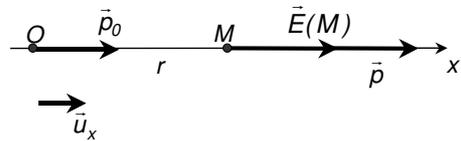
- b) On suppose l'atmosphère isotherme. Déterminer la relation qui existe entre la masse volumique ρ de l'air à l'altitude z et cette altitude.
- c) Déterminer l'altitude maximale h_m que peut atteindre le ballon en se délestant au maximum.

Equation d'état de VDW :

On considère une mole de gaz réel suffisamment dense pour que la prise en compte de l'interaction moléculaire soit nécessaire, régie par l'équation d'état de Van der Waals, $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$, où P , T et V désignent la pression, la température et le volume de la mole de gaz. Le but de cet exercice est d'obtenir des ordres de grandeur des constantes a et b figurant dans cette équation d'état.

1. Estimer l'ordre de grandeur de b . Conclure si $T = T_0 = 300$ K et $P = P_0 = 1$ bar.

2. On cherche à établir l'ordre de grandeur des forces d'interaction de Van der Waals. On rappelle que ces forces d'interaction dipôle-dipôle sont attractives et de la forme $F = A/r^7$, où r est la distance séparant les deux dipôles. On souhaite déterminer un ordre de grandeur de la constante A dans le cas de l'interaction entre un dipôle permanent et le dipôle qu'il induit. Pour simplifier, on considère qu'un dipôle permanent immobile de moment dipolaire $\vec{p}_0 = p_0 \vec{u}_x$ est placé à l'origine O . Une molécule placée au point M acquiert sous l'effet du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par le dipôle permanent, un moment dipolaire induit $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}(M)$, où α est la polarisabilité de la molécule égale à $\alpha = 4\pi a_0^3$, où a_0 représente le rayon de la molécule. Pour les applications numériques, on choisira $p_0 = 1,07$ D¹ (cas de la molécule HCl) et $a_0 = 0,1$ nm.



En déduire une expression de A puis son ordre de grandeur. On pourra supposer, par soucis de simplification, que le dipôle induit ne peut se déplacer que sur l'axe (Ox) .

3. Pour une assemblée de molécules ayant un moment dipolaire (permanent ou non), on admettra que l'interaction intermoléculaire se réduit encore à une force d'attraction $F = A/r^7$, où A est de l'ordre de grandeur trouvé à la question précédente. Dans cette question, on souhaite évaluer l'énergie moyenne d'interaction U_{int} d'une mole de molécules enfermées dans une enceinte de volume V . Pour cela, on suppose qu'une molécule donnée M_1 n'interagit qu'avec une seule molécule notée M_2 , dont la probabilité de présence $d\Pi(r)$ à la distance $[r, r + dr]$ de M_1 est précisée sur la figure ci-contre.

¹ D désigne le Debye : 1 D = $3,33 \cdot 10^{-30}$ C.m.

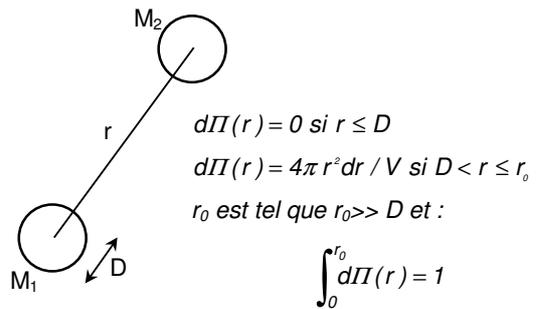
a) Commenter le modèle proposé. En déduire que l'énergie moyenne d'interaction est pratiquement

$$U_{int} \approx -\frac{\pi N_A^2 A}{9 V D^3}.$$

b) Montrer que l'on peut en déduire une expression du coefficient a et donner son ordre de grandeur (on utilisera la valeur numérique de A obtenue à la question (2)). On rappelle que l'énergie interne d'un gaz de Van der Waals (expression déterminée en thermodynamique macroscopique) vaut

$$U(T, V) = C_V T - a/V, \text{ où } C_V \text{ est la capacité calorifique molaire à volume constant.}$$

Données : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ (nombre d'Avogadro) et $\epsilon_0 = 1/(36\pi \cdot 10^9) \text{ SI}$.



Calorimétrie : (avec débit)

Un serpentin est immergé dans un calorimètre ; on fait passer dans le serpentin un courant d'eau. A l'entrée, l'eau est à la température de 15°C , à la sortie elle est à la température du calorimètre qui, grâce à un chauffage électrique, est maintenue à 40°C .

a) Calculer la quantité d'énergie que doit fournir la résistance chauffante si le débit d'eau dans le serpentin est de $60 \text{ g} \cdot \text{min}^{-1}$.

b) La résistance est de 10Ω ; calculer l'intensité du courant.

c) On fait passer un autre liquide dans le serpentin et pour avoir les mêmes conditions (températures et intensité), on doit assurer un débit de $180 \text{ g} \cdot \text{min}^{-1}$. Calculer la chaleur massique du liquide.

Chauffage d'une plaque électrique :

Une plaque électrique, de capacité calorifique totale C , est initialement en équilibre thermique avec une pièce à la température ambiante T_0 . On fait débiter dans la résistance de la plaque électrique un courant tel que la puissance dissipée par Effet Joule, P , reste constante au cours du temps. On supposera que le transfert thermique communiqué à l'air ambiant, par la plaque à la température T et par intervalle de temps dt , s'écrit $aC(T - T_0)dt$, où a est une constante.

a) Etablir la loi de variation de la température T en fonction du temps.

b) Montrer que T atteint une valeur limite T_{lim} . Retrouver cette valeur limite par un raisonnement simple.

c) AN : $T_0 = 293 \text{ K}$; $P = 1 \text{ kW}$; $a = 0,1 \text{ s}^{-1}$; $C = 20 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$; calculer T_{lim} .

Remplissage d'un récipient initialement vide :

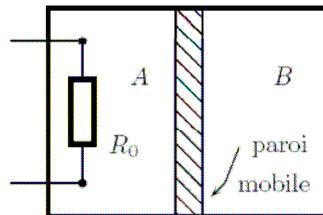
Un récipient de volume V_1 , fermé par une vanne, dont les parois (ainsi que la vanne) sont supposées athermanes, est initialement vide. Il est placé dans l'air ambiant (assimilable à un GP) à la température T_0 et à la pression P_0 . On ouvre la vanne, l'air pénètre très rapidement dans le récipient, on referme la vanne lorsque l'équilibre de pression est réalisé. Après un certain temps, l'air dans le récipient se retrouve dans un état d'équilibre à la température T_1 .

Calculer la température T_1 ainsi que la variation d'énergie interne ΔU de l'air entré dans le récipient en fonction des données et du rapport γ .

Données : $P_0 = 1 \text{ bar}$; $V_1 = 5 \text{ L}$; $T_0 = 293 \text{ K}$; $\gamma = 1,4$.

Utilisation de la loi de Laplace :

Un récipient à parois rigides et calorifugées contient deux gaz parfaits diatomiques séparés par une paroi intérieure adiabatique pouvant se déplacer sans frottements. Les volumes occupés par chaque gaz A et B peuvent donc varier. Initialement les gaz sont dans le même état : 1 bar, 300 K et 1 L. Un générateur électrique fait passer un courant de 1 A dans la résistance $R_0 = 10 \Omega$ pendant une durée τ . A ce moment le volume de A est de 1,1 L.



- Calculer la pression finale dans chacun des compartiments.
- Calculer la température finale en B.
- Calculer la température finale en A.
- Calculer τ .
- Calculer le travail reçu par le gaz du compartiment B.
- Calculer la variation d'entropie du gaz dans le compartiment A.

Etude d'un compresseur à deux étages :

Les transformations envisagées dans cet exercice sont réversibles.

a) Un compresseur amène une mole de gaz parfait de l'état initial (P_1, T_1) à l'état (P_2, T_2) par une compression adiabatique. Le gaz est ensuite refroidi de manière isobare de la température T_2 à T_1 .

* Calculer T_2 , que l'on écrira sous la forme $T_2 = aT_1$.

* Etablir l'expression du travail total W_T reçu par une mole de gaz en fonction de R , γ , T_1 et a .

b) La compression précédente est réalisée en deux étages. Dans le premier étage, on comprime de manière adiabatique le gaz de la pression P_1 à la pression $P'_1 = bP_1$, avec b constante comprise entre 1 et P_2/P_1 . A la sortie du premier étage, le gaz est refroidi de façon isobare jusqu'à T_1 , puis introduit et comprimé de manière adiabatique de la pression P'_1 à P_2 dans le deuxième étage. Le gaz est enfin ramené à la température initial T_1 par un refroidissement isobare.

* Quelle est l'expression du travail noté W'_T reçu par une mole de gaz dans la compression bi-étagée ? Exprimer W'_T en fonction de R , γ , T_1 , a et $x = b^{1/\gamma}$. Comparer le travail W'_T à W_T .

Quelle valeur faut-il donner à b pour que W'_T soit minimal ? Quelle est la valeur W'_m correspondante ?

Transformation irréversible :

Deux solides de même masse m , de même capacité calorifique massique c et de températures initiales T_1 et T_2 , sont placés dans une enceinte adiabatique. Ils sont alors mis en contact. Calculer la température finale T_f à l'équilibre et la variation d'entropie ΔS de l'ensemble. Quel est le signe de ΔS ?

Cycle de gaz parfaits :

Une mole d'un gaz parfait diatomique subit le cycle donné sur la figure, tracé en coordonnées de Clapeyron (V, P) :

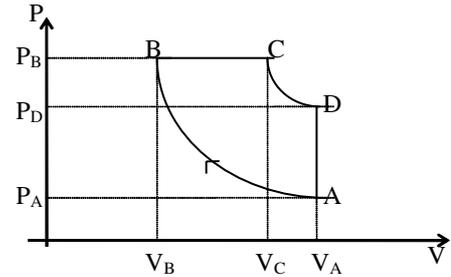
*** Transf (AB) et (CD) : adiabatiques réversibles.

*** Transf (BC) : isobare (pression P_B)

*** Transf (DA) : isochore (volume V_A)

On donne :

$$P_A = 1 \text{ bar} ; T_A = 300 \text{ K} ; V_A/V_B = 8 ; V_C/V_B = 3$$



Calculer la température du gaz dans les états B, C et D. Quel est le rendement du cycle ?

Transformation polytropique :

On considère n mole d'un GP. Ce gaz subit une transformation « polytropique » d'un état (P_1, V_1, T_1) à un état (P_2, V_2, T_2) si, lors de la transformation supposée réversible, $PV^k = cste$ ($k > 0$).

a) Montrer que la différentielle de l'entropie peut s'écrire : $dS = nC \frac{dT}{T}$. Exprimer C en

fonction de R , γ et k . Calculer alors la variation d'entropie lors de la transformation totale, en fonction de n , R , k , γ , T_0 et T_1 .

b) Calculer directement le travail W reçu par le gaz au cours de la transformation et montrer que le transfert thermique Q est proportionnel à W .

c) Dans chacun des cas suivants, indiquer quelle est l'évolution particulière observée et évaluer C : $k = 0$, $k = 1$, $k = \gamma$ et $k \rightarrow \infty$.

Turboréacteur :

Tracer en coordonnées de Clapeyron le cycle d'un turboréacteur, composé d'une compression adiabatique AB, d'un chauffage isobare BC, d'une détente adiabatique CD et d'un refroidissement isobare DA. Exprimer le rendement en fonction du rapport de compression $a = P_B / P_A$ et de γ (le gaz est supposé parfait).

Pompe à chaleur :

Une pompe à chaleur réversible fonctionne entre un lac à la température constante de 10°C et une masse M d'eau thermiquement isolée. On chauffe ainsi cette masse d'eau.

a) Quelle est la relation entre la température de l'eau T et le travail W fourni à la pompe ? Calculer W pour $M = 1 \text{ t}$ quand $T = 40^\circ\text{C}$ (la température initiale de la masse d'eau est 20°C).

b) Quelle aurait été l'élévation de température si la même énergie W avait été utilisée dans une résistance chauffante ?

Tracé d'un diagramme entropique :

Une mole de gaz parfait subit un cycle de transformations composé d'une compression isotherme, d'un chauffage isobare, d'une détente adiabatique réversible et d'un refroidissement isochore.

Représenter ce cycle dans le diagramme de Clapeyron (P,V) et dans le diagramme entropique (T,S). Comparer les surfaces des deux cycles.

Détente dans une tuyère :

Une masse d'air assimilé à un gaz parfait arrive à l'entrée d'une tuyère avec une température $T_0 = 293 \text{ K}$ et une vitesse d'ensemble v . La tuyère la conduit dans un très grand réservoir où elle se disperse et où sa température est $T_f = 500 \text{ K}$. La tuyère et le réservoir sont parfaitement calorifugés. L'air sera assimilé à un gaz parfait diatomique de coefficient $\gamma = 1,40$. La constante massique des gaz parfaits est $r = R / M_{air} = 287 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Calculer la vitesse v de l'air à l'entrée de la tuyère.

Travail maximum fourni par un moteur :

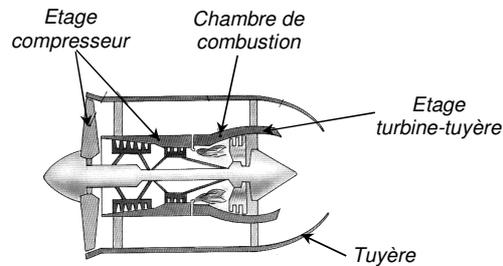
Deux corps identiques, de capacité calorifique totale C constante, sont respectivement à des températures T_1 et T_2 ($T_1 > T_2$). Ils sont utilisés comme réservoir de chaleur pour faire fonctionner un moteur thermique. A la fin de l'opération, les deux corps atteignent la même température T_f .

Calculer le travail maximum que peut fournir ce moteur.

Moteur à réaction :

Dans un moteur à réaction, un gaz (assimilé à l'air supposé parfait) parcourt un cycle que l'on considérera tout d'abord comme étant réversible. Il pénètre dans le réacteur à la pression P_1 et à la température T_1 (état (1)). Il est ensuite comprimé adiabatiquement jusqu'à la pression P_2 et la température vaut alors T_2 (état (2)). Il rentre alors dans une chambre de combustion où sa température passe de T_2 à T_3 , la pression restant égale à P_2 (la sortie de la chambre de combustion est représentée par l'état (3)). Le gaz subit ensuite une détente adiabatique dans une turbine jusqu'à P_4 et T_4 (état (4)). Cette détente est telle que la puissance fournie à la turbine compense exactement celle que consomme le compresseur entre les états (1) et (2). Enfin, le gaz se détend dans une tuyère adiabatique sans parties mobiles jusqu'à P_1 et T_5 (état (5)). Le gaz est rejeté avec la vitesse c (ce qui assure la propulsion) dans l'atmosphère extérieure où il se refroidit à la pression constante P_1 de T_5 à T_1 . On considère que la vitesse du gaz est partout négligeable sauf à la sortie de la tuyère.

Données numériques : $T_1 = 290 \text{ K}$, $P_1 = 1 \text{ bar}$, $P_2 / P_1 = 5$. La température du gaz à l'entrée de la turbine est $T_3 = 1300 \text{ K}$. L'air est considéré comme étant un gaz diatomique de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$. La constante R des gaz parfaits vaut $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.



Les applications numériques demandées sont relatives à l'unité de masse (ici, 1 kg) et les grandeurs extensives correspondantes seront notées par des lettres minuscules (s_m pour l'entropie, h_m pour l'enthalpie, e_{cm} pour l'énergie cinétique macroscopique,...).

Dans les questions suivantes, on établira d'abord l'expression littérale puis on donnera la valeur numérique des résultats demandés.

a) Déterminer l'expression de T_2 en fonction des données. Quelle est l'énergie fournie à l'unité de masse de gaz qui traverse le compresseur ?

b) Quels sont les échanges d'énergie par unité de temps et par unité de masse dans la chambre de combustion ?

c) Déterminer T_4 et T_5 . Quelle est la vitesse c du gaz à la sortie de la tuyère ?

d) Quel est le rendement ρ du moteur ?

e) En réalité, la tuyère n'a pas un fonctionnement réversible. Le gaz sort de la tuyère à une température T'_5 . On définit le rendement de la tuyère par rapport à l'isentropique par $\eta = (h'_{m,5} - h_{m,4}) / (h_{m,5} - h_{m,4}) = 90\%$.

*** Quelle est alors la nouvelle température de sortie T'_5 des gaz de la tuyère ?

*** Quelle est la nouvelle vitesse de sortie c' des gaz ? Calculer le nouveau rendement ρ' du cycle.

*** Quelle est la variation d'entropie massique du gaz à la traversée de la tuyère ?

Variation d'entropie au cours d'un changement d'état :

Un récipient parfaitement calorifugé contient une masse $M = 1$ kg d'eau liquide à la température $\theta_1 = 10^\circ\text{C}$. On place, dans ce récipient, un bloc de glace de masse $m = 500$ g, à la température $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$.

a) Caractériser l'état final.

b) Calculer :

*** La variation d'entropie de l'eau initialement à l'état liquide.

*** La variation d'entropie de l'eau initialement à l'état de glace.

Données : chaleur massique de l'eau liquide: $c = 4,18 \text{ J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$

chaleur latente de fusion de la glace : $L_f = 334,4 \text{ J}\cdot\text{g}^{-1}$

Compression isotherme d'un mélange Air-Vapeur d'eau :

Un récipient de volume $V_0 = 2$ L contient un mélange d'air et de vapeur d'eau à la température $T_0 = 323$ K. Les pressions partielles de l'air et de la vapeur d'eau sont respectivement

$P_1 = 1 \text{ bar}$ et $P_2 = 0,1 \text{ bar}$. Le mélange subit une compression réversible isotherme, amenant le volume du récipient à $V_f = 1 \text{ L}$.

a) Quelle est la pression finale du mélange ?

b) Calculer le travail reçu par le mélange.

c) Quelle est la variation d'énergie interne du contenu du cylindre lors de cette transformation ? Représenter la transformation effectuée par l'eau dans un diagramme d'Andrews.

Données : la pression de vapeur saturante de l'eau vaut $P_v = 0,12 \text{ bar}$ à 50°C . La vapeur d'eau sèche et l'air sont des gaz parfaits. Le mélange est idéal.

Surfusion du phosphore :

On place dans un récipient adiabatique une masse $m = 40 \text{ g}$ de phosphore en état de surfusion à la température T_1 et sous la pression $P_0 = 1 \text{ bar}$. La surfusion cesse brutalement. Déterminer la température T_2 et la composition du système à l'équilibre dans les deux cas suivants : $T_1 = 40^\circ\text{C}$ et $T_1 = 15^\circ\text{C}$.

On donne, pour le phosphore :

* Température de fusion sous 1 bar : $T_f = 44^\circ\text{C}$.

* Chaleur massique du solide : $c_s = 0,79 \text{ J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$

* Chaleur massique du liquide : $c_l = 0,84 \text{ J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$

* Chaleur latente massique de fusion : $L_f = 20,9 \text{ J}\cdot\text{g}^{-1}$

Marmite sous pression :

Une marmite sous pression, de volume 10 L , est remplie à la température $T_0 = 20^\circ\text{C}$ d'une masse d'eau m et d'air, sous pression normale $P_0 = 1 \text{ bar}$. On la ferme et on porte sa température à $T_1 = 120^\circ\text{C}$. Déterminer, dans les deux cas suivants, la pression à l'intérieur de la marmite : $m = 6 \text{ g}$ puis $m = 12 \text{ g}$.

La pression de vapeur saturante de l'eau, dans le domaine $100^\circ\text{C} < T < 200^\circ\text{C}$ vaut (formule de Duperray) :

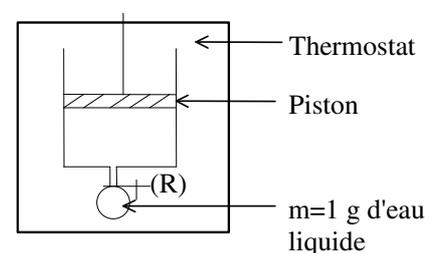
$$P_v = (T / 100)^4 \quad (T \text{ en } ^\circ\text{C} ; P_v \text{ en bar})$$

et la vapeur d'eau sèche se comporte comme un gaz parfait. On néglige le volume de l'eau liquide.

Vaporisation dans le vide :

Un récipient diatherme, dont on peut faire varier le volume à l'aide d'un piston diatherme, est plongé dans un thermostat de température $T_0 = 100^\circ\text{C}$. Une petite ampoule, de volume négligeable, communique avec le récipient à l'aide d'un robinet et contient une masse $m = 1 \text{ g}$ d'eau liquide.

Initialement le volume du récipient est nul. A partir de cet état initial, on réalise deux expériences :



a) On ouvre le robinet et on augmente lentement le volume du récipient jusqu'au volume V_f pour lequel tout le liquide a disparu. Le récipient contient alors de la vapeur, sous une pression égale à la pression de vapeur saturante à la température T_0 .

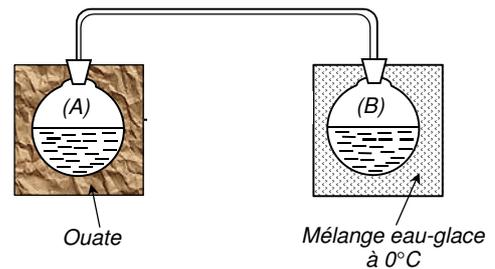
b) On fixe le piston à la position finale obtenue précédemment, puis on ouvre le robinet.

Etablir, dans les deux cas, le bilan entropique de la transformation.

Cryophore de Wollaston :

Deux boules de verre A et B, en partie remplies d'eau, sont réunies par un tube vide d'air. Le compartiment A, parfaitement calorifugé, contient initialement une masse $m_1 = 1 \text{ kg}$ d'eau liquide, à la température $T_1 = 100^\circ\text{C}$. Le liquide qui s'évapore dans A se condense dans le compartiment B, maintenu à la température de 0°C : il y a donc élimination, au fur et à mesure de sa formation, de la vapeur d'eau formée.

Déterminer la masse m_2 de glace formée dans le compartiment A lorsque toute l'eau liquide de ce compartiment a disparu. Faire l'application numérique.



Données :

- $c = 4,18 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$ (capacité calorifique massique de l'eau liquide).
- La chaleur latente massique de vaporisation de l'eau dépend de la température selon la loi $L_v(T) = A - BT$ (où $A = 3330 \text{ J.g}^{-1}$ et $B = 2,9 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$).
- $L_f = 334 \text{ J.g}^{-1}$ (chaleur latente massique de fusion de la glace, qui est supposée indépendante de la température et de la pression).

Détente de Joule-Kelvin d'un fréon dans une machine frigorifique :

Dans une machine frigorifique, un fréon (chlorofluoroalcane) subit une détente de Joule-Kelvin de l'état A à l'état B (voir le diagramme de Clapeyron).

On désigne par x le titre en vapeur et on donne :

$$T_A = 303 \text{ K} ; P_A = f(T_A) = 7,5 \text{ bar} ; x_A = 0 ; T_B = 263 \text{ K} ; P_B = f(T_B) = 2,2 \text{ bar}$$

L'enthalpie massique de vaporisation à $T = 263 \text{ K}$ vaut : $\ell_{263} = 159 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

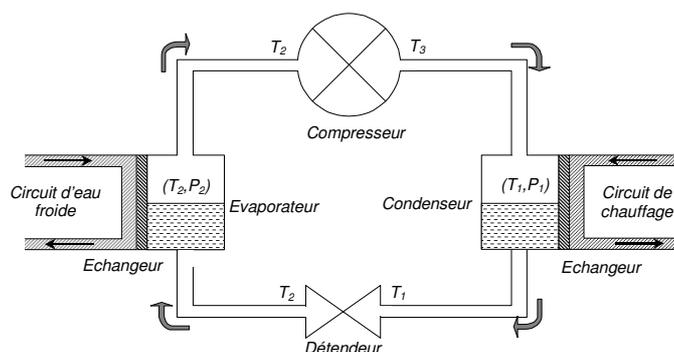
La capacité thermique massique du fréon liquide, supposée indépendante de la température est : $c = 0,96 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

a) Déterminer le titre massique en vapeur x_B dans l'état final.

b) Calculer la création d'entropie massique lors de la détente envisagée, commenter son signe.

Pompe à chaleur avec changement d'état :

Le principe d'une pompe à chaleur fonctionnant selon un « cycle à compression » est le suivant :



Un liquide réfrigérant sous haute pression P_1 passe à travers une petite ouverture (un détendeur) vers une zone de pression plus faible P_2 . Le liquide y subit une détente de Joule-Thomson durant laquelle une partie se vaporise. Le réfrigérant, partiellement vaporisé, entre ensuite dans un évaporateur (et se trouve en contact avec un circuit d'eau froide qui constitue la « source froide », dont la température est néanmoins plus élevée que celle du réfrigérant), où il absorbe de la chaleur et s'évapore complètement à température et pression constantes. La vapeur toujours à basse pression P_2 est ensuite comprimée dans un compresseur et ressort à l'état de vapeur chaude à la même haute pression P_1 . Il est alors temps de mettre en contact dans le condenseur (par l'intermédiaire d'un échangeur) cette vapeur chaude avec l'eau du circuit de chauffage (qui circule dans le sol de l'habitation et qui constitue la « source chaude », dont la température est cependant plus faible que celle du réfrigérant sortant juste du compresseur). L'eau de chauffage reçoit de l'énergie thermique alors que la vapeur chaude se condense entièrement à pression constante P_1 . Le liquide, sortant du condenseur, rencontre de nouveau le détendeur et le cycle se poursuit...

Les fluides réfrigérants les plus utilisés sont les fréons (comme le fréon 22, CHF_2Cl , dans le cadre de cet exercice), l'ammoniaque, le dioxyde de carbone ou de soufre, ... L'utilisation des fréons comme liquides réfrigérants est soumise à caution actuellement car les fréons ont une influence néfaste sur la couche d'ozone atmosphérique. Ils tendent à être remplacés désormais par des alcanes.

Notations et données (les calculs seront réalisés pour une masse $m = 1 \text{ kg}$ de fréon) :

- En traversant le détendeur, le fréon liquide subit une détente adiabatique passant de (P_1, T_1) à (P_2, T_2) .

On donne : $T_1 = 305 \text{ K}$, $T_2 = 273 \text{ K}$, $P_1 = 12,65 \text{ bar}$ et $P_2 = 5 \text{ bar}$.

- Dans l'évaporateur, il subit une évaporation complète sous la pression de vapeur saturante P_2 et à la température T_2 .
- Le fréon gazeux sort du compresseur à la température T_3 et sous la pression P_1 .
- Dans le condenseur, le fréon gazeux se refroidit, puis se liquéfie complètement sous la pression de vapeur saturante P_1 et à la température T_1 .
- $\ell_v(T)$ représente la chaleur latente massique de vaporisation du fréon à la température T .

On donne : $\ell_v(T_1) = 219 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $\ell_v(T_2) = 244,5 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

- La capacité thermique massique c_ℓ du fréon liquide est indépendante de T et de P et vaut $c_\ell = 1,38 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.
- Le fréon gazeux est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 86,5 \text{ g.mol}^{-1}$, pour lequel $\gamma = 1,20$ (la constante des gaz parfaits est $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$).

• L'énergie cinétique macroscopique ainsi que l'énergie potentielle de pesanteur sont négligées dans tout l'exercice et l'installation fonctionne en régime permanent.

a) Passage dans le détendeur à parois adiabatiques : démontrer que la détente est isenthalpique. En déduire la fraction massique x_v de fréon gazeux à la sortie du détendeur. Calculer la variation d'entropie Δs_1 du fréon.

b) Passage dans l'évaporateur : évaluer le transfert thermique q_2 reçu par le fréon. Calculer sa variation d'entropie Δs_2 .

c) Etude de la compression : en supposant la compression adiabatique réversible, déterminer T_3 puis le travail reçu w_3 par le fréon en fonction des données. Calculer la variation d'entropie Δs_3 du fréon.

d) Passage dans le condenseur : calculer le transfert thermique q_4 reçu par le fréon puis sa variation d'entropie Δs_4 .

e) Le compresseur est entraîné par un moteur électrique de rendement électro-mécanique $\rho_m = 0,8$. Définir l'efficacité e de cette pompe à chaleur et l'évaluer numériquement. Quel avantage présente ce chauffage par rapport au chauffage électrique ?

Altitude des cumulus.

Par beau temps, les masses d'air s'élèvent depuis le sol en suivant une évolution isentropique, on observe alors la formation de nuages appelés « cumulus », dont les bases sont pratiquement planes et toutes à la même altitude. Pour cette évolution isentropique, on admettra que $\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{g}{c_p}$ où c_p est une grandeur massique.

Exprimer l'altitude des bases des cumulus en fonction de grandeurs mesurables au sol.



Transferts thermiques et diffusion de particules

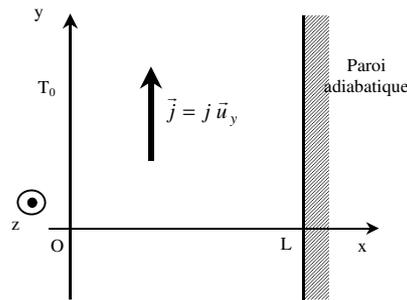
Conductions thermique et électrique :

On considère un milieu conducteur de la chaleur et de l'électricité (de conductivité thermique λ , de chaleur massique c , de masse volumique ρ et de conductivité électrique σ).

Le milieu, infini dans les directions (Oy) et (Oz), est limité par les plans $x = 0$ et $x = L$:

*** En $x = 0$: on a un thermostat de température T_0 .

*** En $x = L$, on a placé une paroi adiabatique.



Le milieu est parcouru par un courant électrique dont la densité volumique de courant est uniforme :

$$\vec{j} = j \vec{u}_y \quad (\vec{u}_y \text{ est le vecteur unitaire de l'axe (Oy)}).$$

Les seuls transferts de chaleur considérés ici sont de nature conductif.

a) La température entre les deux plans $x = 0$ et $x = L$ est *a priori* une fonction de x, y, z et du temps t . Montrer que T ne dépend que de x et du temps, $T(x,t)$. Déterminer, en régime quelconque, l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(x,t)$, appelée équation de la chaleur.

b) Calculer la température $T(x)$ en régime permanent en un point M compris entre les plans $x = 0$ et $x = L$. Tracer la courbe $T(x)$. En quel point la température est-elle extrême ?

Combustible nucléaire :

Un barreau cylindrique d'Uranium a un diamètre $d_2 = 29$ mm. En son sein, la réaction nucléaire dégage une puissance thermique volumique $q = 700 \text{ MW.m}^{-3}$. La conductivité thermique de l'uranium est $k = 27 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Déterminer, en régime permanent, la répartition des températures dans le barreau. A la périphérie, la température a pour valeur $\theta_0 = 200^\circ\text{C}$. Que vaut θ_{\max} ?

Résistance thermique :

On considère deux sphères concentriques S_1 et S_2 , de rayons R_1 et R_2 , qui sont portées aux températures T_1 et T_2 . L'espace entre les deux sphères est un milieu de conductivité thermique k .

Calculer, en régime permanent, la puissance calorifique J (flux thermique) passant de S_1 vers S_2 . Montrer que le rapport $(T_1 - T_2) / J$ est une constante R_{th} (résistance thermique).

Une résolution de l'équation de la chaleur :

On considère la diffusion thermique dans un solide suivant la direction (Ox) ; on suppose qu'il n'y a ni production, ni absorption de chaleur dans le milieu. On appelle $T(x,t)$ la température au sein du solide et K le coefficient thermique.

Pour certaines conditions initiales (que l'on suppose réalisées ici), il est possible de chercher une solution de l'équation de la chaleur de la forme (méthode de séparation des variables):

$$T(x,t) = T_0 + f(x).g(t)$$

où T_0 désigne une constante, $f(x)$ une fonction de x uniquement et $g(t)$ une fonction du temps seulement.

a) Déterminer l'expression générale des fonctions $f(x)$ et $g(t)$.

b) On suppose qu'à $t = 0$, $T(x,0) = T_1 + T_2 \sin(px)$ (T_1 , T_2 et p désignant des constantes). Montrer que la solution trouvée ci-dessus convient et déterminer complètement cette solution.

Onde de température :

Le sous-sol est considéré comme un milieu semi-infini, homogène, de conductivité thermique K , de masse volumique ρ , de capacité thermique massique c , situé dans le demi-espace $x > 0$. On suppose que la température de la surface du sol (plan $x = 0$) est soumise à des variations sinusoïdales :

$$T_s(t) = T_0 + \theta_0 \cos \omega t$$

a) Déterminer la température $T(x,t)$ à la profondeur x (se placer en notation complexe) en régime permanent.

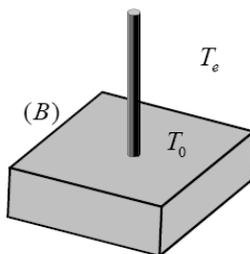
b) Exprimer la vitesse v de l'onde thermique ainsi obtenue.

c) On considère des variations journalières de la température, la température au niveau du sol variant entre 0°C la nuit et 16°C le jour. A partir de quelle profondeur les variations de température sont-elles inférieures à 1°C ? Calculer la vitesse v . On donne :

$$a = \frac{K}{\rho c} = 6.10^{-7} \text{ m}^2 .\text{s}^{-1}$$

On considère des variations annuelles de température, la température variant de -10°C à 26°C . Répondre aux mêmes questions.

Ailette de refroidissement :



On considère un corps solide (B), qui peut être le boîtier d'un transistor de puissance. Les phénomènes dissipatifs dont il est le siège le portent à une température supérieure à la température ambiante. Pour faciliter le transfert thermique du boîtier vers l'extérieur, on prolonge (B) par un barreau cylindrique mince, de longueur L et de section S .

On prendra $S = \pi a^2$; par ailleurs, le barreau est suffisamment mince pour que sa température ne dépende que de la variable x , comptée dans le sens de sa longueur.

Le régime sera **stationnaire**.

L'ailette (de conductivité thermique λ) n'étant pas calorifugée, elle présente des pertes thermiques conducto-convectives égales à : $\boxed{h[T(x) - T_e]}$ (en $W.m^{-2}$)

($T(x)$ est la température locale du barreau et T_e est la « température extérieure », suffisamment loin de l'ailette pour que le milieu y soit à l'équilibre thermique et sans turbulences ; h est le coefficient de transfert thermique de surface, en $W.m^{-2}.K^{-1}$)

Rq : cette loi est appelée « loi de Newton », et régit (dans beaucoup de cas) les échanges thermiques complexes entre un solide et un fluide.

- 1) Déterminer la répartition de température $T(x)$ au sein du barreau.

(on pourra poser $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$ et $\beta = \frac{\alpha h}{\lambda}$)

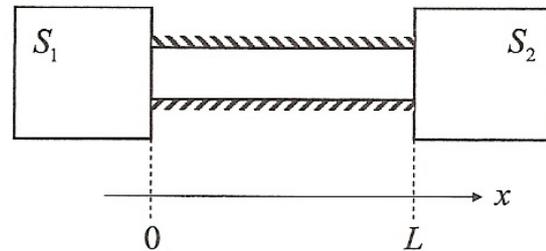
- 2) Calculer le rapport ρ des puissances évacuées par le corps (B) à travers la surface $S = \pi a^2$, en présence du barreau et sans le barreau : dans ce dernier cas, on supposera que les pertes thermiques de surface du boîtier obéissent à la loi de Newton, avec le même coefficient h que pour le barreau. A quelle inégalité doit satisfaire la grandeur β pour que l'ailette joue pleinement son rôle ?

Commenter le résultat obtenu en fonction des paramètres a , h et λ .

- 3) Compte tenu de la réponse à la question précédente et pour simplifier les calculs, nous allons considérer que $L \rightarrow \infty$.
 - a) Reprendre alors la question 1).
 - b) Calculer de deux manières différentes la puissance P_F fournie par le boîtier au barreau.

Transfert thermique dans une barre :

Une barre cylindrique homogène, de masse volumique ρ , de capacité thermique massique c , de conductivité thermique λ , a une longueur L et une section droite Σ . Ses parois latérales sont calorifugées de telle sorte que les pertes thermiques sont négligées ; en revanche, chaque extrémité



de la barre, en $x = 0$ et $x = L$, est en contact avec un thermostat, respectivement S_1 et S_2 , qui impose la température $T_1 = T(0, t)$ et $T_2 = T(L, t)$.

1. Bilan énergétique

- a) Rappeler la loi de Fourier en notant $\vec{j}_{th} = j_{th}(x, t)\vec{u}_x$ le vecteur densité de courant thermique dans la barre. Puis effectuer un bilan d'énergie sur une tranche élémentaire du conducteur, comprise entre les abscisses x et $x + dx$, et établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T(x, t)$:

$$D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Expliciter D et donner son unité.

- b) Dans cette seule question les deux thermostats ont des capacités thermiques infinies. En déduire :
 - que les thermostats imposent alors des températures T_1 et T_2 constantes

- la distribution de température $T(x)$ dans la barre en régime permanent (on peut supposer $T_1 > T_2$)
- la résistance thermique R_{th} de la barre métallique.

Dans les deux questions qui suivent, les deux thermostats de conductivité thermique infinie, ont la même capacité thermique C , non infinie, mais très grande devant la capacité thermique totale de la barre ; l'ensemble constitué par les thermostats et la barre est parfaitement calorifugé. Le thermostat S_1 a une température initiale T_1^0 et le thermostat S_2 a une température initiale T_2^0 .

c) Quelles conséquences, sur les températures des thermostats et de la barre, les différentes hypothèses faites à propos des thermostats entraînent-elles ? Donner $T(x, t)$.

d) Montrer que $\frac{dT_1}{dt} = -\frac{dT_2}{dt}$ et établir les expressions des températures $T_1(t)$ et $T_2(t)$

des thermostats au cours du temps en fonction des températures initiales, de C et de la résistance thermique de la barre (on peut supposer $T_1^0 > T_2^0$ et écrire $T_1(t)$ et $T_2(t)$ sous des formes physiquement pertinentes à l'aide de T_1^0 , T_2^0 , t et d'un temps τ à exprimer).

Dessiner le circuit électrocinétique équivalent à cette étude et indiquer à quelles grandeurs thermiques correspondent la tension et le courant.

2. Bilan entropique

On considère d'abord entre les instants t et $t + dt$ une tranche élémentaire de la barre comprise entre les abscisses x et $x + dx$.

a) Exprimer successivement :

- la variation d'entropie d^2S de la tranche élémentaire (supposée indilatable) pendant dt en fonction, entre autres, de $\frac{\partial T}{\partial t}$

- l'entropie échangée $\delta^2 S_{éch.}$ par la tranche élémentaire pendant dt en fonction de $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{j_{th}}{T} \right)$

- l'entropie créée $\delta^2 S_{créée}$ par la tranche élémentaire pendant dt si l'on note $\sigma(x, t)$, la quantité d'entropie créée par unité de volume et de temps.

b) En déduire la relation entre les grandeurs spatio-temporelles précédentes traduisant le bilan d'entropie local.

La fin du problème concerne la totalité de la barre, uniquement dans le régime permanent de la question 1.b).

c) Exprimer $\sigma(x)$, l'entropie créée par unité de volume et de temps, en fonction de x et des données. En déduire la quantité totale $\frac{dS_{créée}}{dt}$ d'entropie créée dans la barre par unité de temps et commenter son signe.

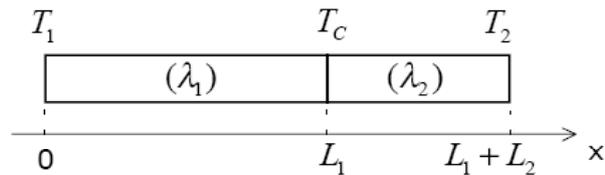
d) Évaluer directement l'entropie échangée $\frac{dS_{éch.}}{dt}$ par la barre avec les thermostats par unité de temps et commenter.

- e) Déduire des questions précédentes la variation $\frac{d\Delta S}{dt}$ d'entropie de la barre par unité de temps. Ce résultat était-il prévisible ? En quoi cependant est-il original vu le système et la transformation étudiés ?

Température de contact entre deux corps :

On met en contact deux conducteurs thermiques cylindriques, calorifugés latéralement.

On se place en régime permanent (en chaque extrémité, la température est maintenue constante). Les cylindres sont suffisamment minces pour que l'on puisse considérer la température comme une fonction de x seulement.



- a) Déterminer la température de contact T_c en $x = L_1$ (on fera apparaître les conductances thermiques de chaque barreau en notant S leur section commune) ; quelle est l'allure de $T(x)$?
- b) On choisit : $L_1 = L_2$; $T_1 = 305 \text{ K}$ et $T_2 = 373 \text{ K}$. L'un des barreaux modélise un conducteur organique (un doigt par exemple) de conductivité thermique $\lambda_1 = 0,5 \text{ USI}$; le deuxième est le manche d'une casserole remplie d'eau bouillante. Calculer T_c pour les deux cas suivants :
- manche en bois : $\lambda_2 = 0,2 \text{ USI}$
 - manche en cuivre : $\lambda_1 = 390 \text{ USI}$. Conclure.

Formation d'une couche de glace :

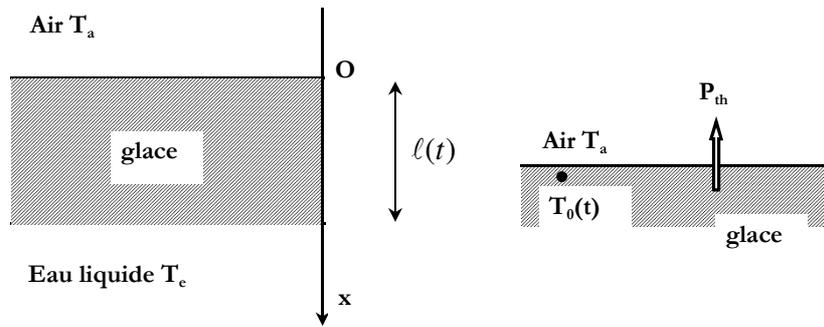
L'eau liquide d'un lac est à la température de congélation $T_e = 273 \text{ K}$. L'air au-dessus du lac est à la température constante $T_a = 263 \text{ K}$. Libre de glace à $t = 0$, le lac se couvre progressivement d'une couche de glace dont l'épaisseur est notée $\ell(t)$. La glace possède une masse volumique μ , une conductivité thermique K , une chaleur latente massique de fusion L_f et une capacité calorifique que l'on négligera.

D'autre part, la puissance thermique échangée à l'interface glace-air est donnée, pour une surface S de glace, par (loi de Newton) $P_{th} = \alpha(T_0(t) - T_a)S$, où $T_0(t)$ est la température de la glace en $x = 0$.

- a) Déterminer l'épaisseur de glace $\ell(t)$ formée à l'instant t , ainsi que la température $T_0(t)$. On posera :

$$\ell_0 = \frac{K}{\alpha} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{KL_f\mu}{2\alpha^2(T_e - T_a)}$$

- b) Tracer les graphes donnant $\ell(t)$ et $T_0(t)$. On exprimera $\ell(t)$ en cm et t en heures. On donnera également le taux d'accroissement $d\ell(t)/dt$ de l'épaisseur $\ell(t)$ de la couche de glace. Que vaut ce taux à $t = 0^+$?



Données :

$$\mu = 9.10^2 \text{ kg.m}^{-3} ; K = 5.10^{-4} \text{ kcal.m}^{-1}.\text{s}^{-1}.\text{K}^{-1} ; L_f = 80 \text{ kcal.kg}^{-1} ; \alpha = 10^{-2} \text{ kcal.m}^{-2}.\text{s}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

Un exemple en régime non stationnaire ; la sensation de chaud :

« Qui du bois ou de l'acier, à la même température, semble le plus chaud ? »

$$t < 0 ; T = T_1 = 37 \text{ °C (main) uniforme pour } x < 0$$

$$T = T_2 = 20 \text{ °C (table) uniforme pour } x > 0$$

Le contact a lieu à l'instant $t = 0$ dans le plan $x = 0$ et on adopte le modèle suivant :

- le problème est unidimensionnel, on cherche $T(x, t)$
- l'expérience est de courte durée, les solides peuvent être considérés comme illimités, soit pour $t > 0$, $T(-\infty, t) = T_1$ et $T(+\infty, t) = T_2$
- on admet qu'à l'interface s'établit instantanément une température stationnaire T_0 .

a) Vérifier que $f_D(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-y^2} dy$ où $u = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$ avec $f_D(\pm\infty) = \pm 1$ est solution

de l'équation de diffusion (revoir les indications à la fin de « Conseils à suivre »).

b) On cherche $T(x, t) = a_i + b_i f_{D_i}(x, t)$; donner a_i et b_i en fonction de T_0 et T_i ($i = 1, 2$) où D_i est le coefficient de diffusion du milieu i .

c) Exprimer T_0 en fonction de T_1 , T_2 et des effusivités E_1 et E_2 ($E = \sqrt{\rho c \lambda}$).

AN : Calculer T_0 sachant que $E_1 = 1,8.10^3 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}.\text{s}^{1/2}$ (main) ; $E_2 = 0,4.10^3$ (bois) ou $E_2 = 14.10^3$ (acier) ; conclusion.

d) Justifier « à l'interface s'établit instantanément une température stationnaire T_0 ».

Fonte d'un glaçon :

Un glaçon sphérique, de centre fixe O, de rayon initial R_0 est immergée dans de l'eau liquide et fond lentement. On note respectivement λ la conductivité thermique du liquide, μ_s et c la masse volumique et la capacité calorifique massique du solide, L_f et M l'enthalpie molaire de fusion et la masse molaire de l'eau.

On suppose la conductivité thermique du solide infinie, ce qui lui permet d'avoir à chaque instant une température uniforme, et la capacité calorifique massique du liquide négligeable.

Au cours de la fusion, le glaçon reste sphérique (on note $R(t)$ son rayon à l'instant t) à la température de fusion T_f et, loin du solide, le liquide conserve une température constante $T_0 > T_f$. Il n'y a pas de convection.

a) Déterminer la température $T(r, t)$ dans le liquide en fonction de r et de $R(t)$.

b) Effectuer un bilan d'énergie pour le glaçon entre les instants t et $t + dt$ et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $R(t)$.

c) Déterminer $R(t)$ et exprimer la durée nécessaire τ à la fusion complète du glaçon. AN :

$$\lambda = 0,609 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} ; \mu_s = 917 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} ; c = 2,09 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$$

$$L_f = 6,03 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1} ; T_f = 0^\circ\text{C} ; T_0 = 15^\circ\text{C} ; R_0 = 5 \text{ mm}$$

Etres vivants.

Un être vivant a une température T . Il rayonne une puissance donnée par la loi de Stéfán: $P = \sigma T^4 S$, $\sigma = 5,77\cdot 10^{-8}$ SI. S est la surface de contact entre l'être vivant et l'atmosphère. L'atmosphère est à la température $T_0 < T$ et l'animal reçoit de la part de l'atmosphère une puissance $P_0 = \sigma T_0^4 S$.

L'animal reçoit d'autre part de l'énergie du fait de l'absorption de nourriture. On appelle G la gloutonnerie de l'animal $G = P_a/m$, si P_a est la puissance absorbée. On suppose l'animal sphérique de rayon r et de masse volumique $\rho \approx 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

1. Calculer G en fonction de σ , ρ , r , T et T_0 . Comparer G pour la souris, le chat, le serpent. Conclure.

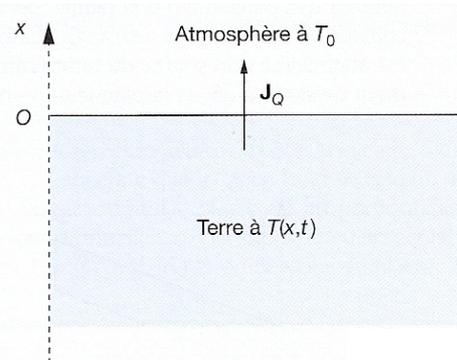
2. Pour G fixé, les hommes des pays froids sont plus grands que ceux des pays chauds. Est-ce en accord avec la question précédente ?

3. Un homme de 80kg mange quotidiennement 1 kg de nourriture. Il reçoit ainsi un énergie de 12 MJ. Calculer G en $\text{W}\cdot\text{kg}^{-1}$.

4. Un lilliputien a une hauteur $h = 2\text{mm}$ et une section $s = 0,5 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$. Calculer G pour $T - T_0 = 20^\circ\text{C}$. Un homme ordinaire prend 1 h 30 par jour pour s'alimenter. Qu'en est-il pour le lilliputien ?

L'âge de la Terre mesuré par lord Kelvin :

Pour estimer l'âge de la Terre, lord Kelvin a proposé le modèle suivant (Fig.) : la Terre est assimilée à un demi-espace $x < 0$ et l'atmosphère maintient $T(x = 0, t) = T_0 = 300 \text{ K}$ à tout instant ; la Terre s'est formée par solidification de roches à la température $T_F = 2300 \text{ K}$ de telle sorte qu'à l'instant initial on avait $T(x < 0, t = 0) = T_F$; depuis, la Terre se refroidit lentement en évacuant vers l'atmosphère un flux de chaleur qui vaut actuellement $j_Q(x = 0, t) = 0,08 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. On donne pour la Terre les chiffres moyens : $\mu = 2700 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $c = 1000 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et $\lambda = 2 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.



a) On admet que la fonction ³ :

$$f(x, t) = \int_0^u \exp(-v^2) dv \quad \text{avec} \quad u = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$$

est solution de l'équation de la chaleur $\partial T / \partial t = D \Delta T$. Justifier qu'alors $T(x, t) = a + b f(x, t)$ est aussi solution et déterminer a et b en fonction de T_F et T_0 . On donne $\int_0^\infty \exp(-v^2) dv = \sqrt{\pi}/2$.

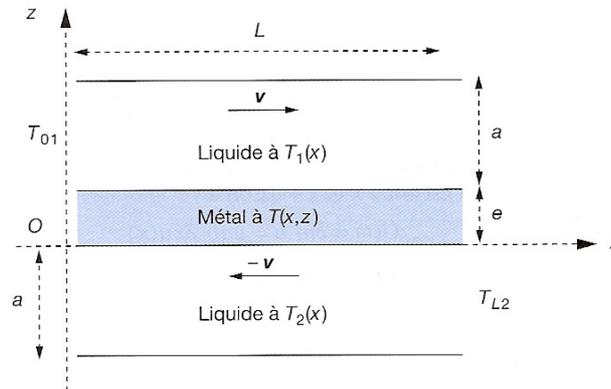
b) En déduire l'expression de $j_Q(x = 0, t)$, puis une estimation de l'âge de la Terre. On pourra utiliser la propriété mathématique suivante de la fonction $f(x, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{du} \left(\int_0^u \exp(-v^2) dv \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_t = \exp(-u^2) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_t = \frac{1}{2\sqrt{Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right).$$

c) La découverte postérieure de la radioactivité a permis une nouvelle évaluation de l'âge de la Terre cent fois plus élevée. En évaluant numériquement une distance caractéristique δ des variations spatiales du champ de température, montrer que l'approximation d'une Terre plate n'est pas en cause

Echangeur thermique :

Un échangeur thermique est constitué (Fig. 9) de deux canalisations d'axe Ox de longueur L et de même section rectangulaire de côtés b selon \mathbf{u}_y et a selon \mathbf{u}_z , séparées par une paroi métallique d'épaisseur $e \ll L$. Dans la conduite (1), un liquide entre en $x = 0$ à la température $T_1(x = 0) = T_{01}$ et s'écoule à vitesse constante $v \mathbf{u}_x$. Dans la conduite (2), le même liquide entre en $x = L$ à la température $T_2(x = L) = T_{L2}$ et s'écoule à vitesse constante $-v \mathbf{u}_x$. On note $T_1(x)$ et $T_2(x)$ la température dans les deux conduites, supposée uniforme dans une section. Données : capacité thermique massique c , masse volumique μ et conductivité thermique λ du liquide ; conductivité thermique λ_m de la paroi métallique. On suppose la pression uniforme.



1. Dans la paroi, comparer en ordre de grandeur le flux thermique selon \mathbf{u}_x et selon \mathbf{u}_z . Dans toute la suite on néglige le flux thermique selon \mathbf{u}_x . Exprimer le flux thermique $\delta\phi$ traversant un élément de surface $b\delta x$ de la paroi, de (1) vers (2) en fonction de b , δx , λ_m , e , $T_1(x)$ et $T_2(x)$.

2. On isole le système fermé constitué à l'instant t du liquide contenu dans la canalisation (1) entre les plans d'abscisses x et $x + \delta x$. À l'instant $t + dt$, ce système est compris entre $x + v dt$ et $x + \delta x + v dt$.

a) Montrer que sa variation d'énergie interne vaut :

$$U(t + dt) - U(t) = \mu c v a b \delta x \frac{dT_1}{dx}.$$

b) En déduire l'équation différentielle dont est solution $T_1(x)$. Déterminer sans calculs l'équation dont est solution $T_2(x)$.

c) Montrer que ces équations peuvent se mettre sous la forme approchée :

$$\delta \frac{dT_1}{dx} = T_2 - T_1 = -\delta \frac{dT_2}{dx}$$

à condition que la vitesse v soit suffisante. Exprimer δ en fonction des données. Quelle est la dimension de δ ?

d) Compte tenu des conditions à l'entrée des deux conduites, les solutions de ces équations sont de la forme :

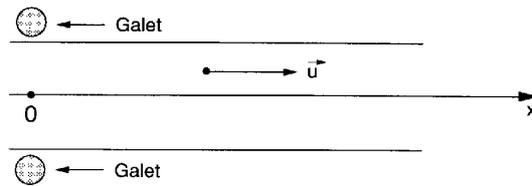
$$T_1(x) = \frac{(L + \delta)T_{01} + x(T_{L2} - T_{01})}{L + \delta}; \quad T_2(x) = \frac{(L + \delta)T_{01} + (x + \delta)(T_{L2} - T_{01})}{L + \delta}.$$

Discuter l'optimisation industrielle du rapport L/δ , puis du choix de λ_m . Montrer qu'il faut trouver un compromis sur la vitesse v .

Un transfert conductif axial :

Un fil métallique cylindrique de section droite circulaire de diamètre D défile à grande vitesse u (dans le référentiel de l'atelier entre deux galets. On désigne par μ la masse volumique du métal, par c sa chaleur massique et par λ sa conductivité thermique supposée isotrope. T_a est la température constante de l'air ambiant.

h désigne le coefficient de transfert conducto-convectif de sorte qu'à l'abscisse x où la température du fil est $T(x)$ (le régime étant supposé stationnaire), le flux thermique latéral est ainsi : $j_{cc} = h(T_a - T(x))$.



1) a) On isole une tranche de fil d'épaisseur dx et d'abscisse x à l'instant t . Quelle est son abscisse à l'instant $t + dt$? En déduire que sa température varie de $dT = u \frac{\partial T}{\partial x} dt$.

b) En négligeant le rayonnement, écrire l'équation traduisant le bilan thermique local en régime stationnaire.

2) En déduire le champ de température $T(x)$ en régime stationnaire. On précisera la condition aux limites pour $x \rightarrow \infty$, le fil ayant une longueur 1 très grande (hypothèse qu'on précisera plus loin). On posera $T_0 = T(0)$.

3) Simplifier l'expression précédente dans le cas où

$$u \gg \frac{1}{\mu c} \sqrt{\frac{\lambda h}{D}}$$

En déduire une longueur caractéristique a qu'on exprimera en fonction de μ , c , h , u et D .

A.N. On donne : $\mu = 8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ $c = 460 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ $\lambda = 15 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (acier) ;
 $h = 30 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ (convection forcée), $D = 10^{-2} \text{ mm}$, $u = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Exprimer numériquement la condition sur u . Calculer numériquement a .

4) Calculer la puissance thermique perdue par le fil. Commenter

Chauffage d'un avion :

On modélise un avion par un cylindre de diamètre $D = 3 \text{ m}$ et de longueur $L = 20 \text{ m}$. Ce cylindre est recouvert d'un matériau de conductivité K et d'épaisseur $e = 6 \text{ cm}$. On donne $T_i = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ et $T_e = -30 \text{ }^\circ\text{C}$. Calculer la puissance P nécessaire au chauffage de l'avion.

Température d'un astéroïde :

Un astéroïde solide, sphérique de rayon R , est placé dans l'espace vide. L'astéroïde, de conductivité thermique λ , est radioactif de telle sorte qu'une énergie $P dt$ est créée pendant dt dans un élément de volume $d\tau$, où P est une constante.

Déterminer le champ de température à l'équilibre dans l'astéroïde, en supposant qu'il évacue à sa surface par rayonnement une puissance surfacique σT_s^4 où T_s est sa température de surface et σ la constante de Stephan.

Diffusion de neutrons dans un réacteur nucléaire :

On considère, dans un réacteur nucléaire fonctionnant en régime stationnaire, un boulet sphérique de rayon R , jouant le rôle de source de neutrons. Cette source est supposée seule. Un processus de production fait apparaître σ neutrons par unité de volume et par unité de temps. On admet que la fonction σ est constante à l'intérieur du boulet et nulle en dehors de celui-ci.

- a) Exprimer, en fonction de σ , R , r et du coefficient de diffusion D , la densité particulaire $n_V(r)$ de neutrons à la distance r du centre du boulet.
- b) Donner une représentation graphique de la fonction $n_V(r)$ et de la norme du vecteur densité de courant de particules $\mathbf{j}_N(r)$ en fonction de r , lorsque r varie de 0 à l'infini.

Diffusion de neutrons en présence de sources de particules :

On étudie la diffusion unidirectionnelle de neutrons dans un barreau de plutonium cylindrique d'axe Ox et de section droite d'aire S , s'étendant entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$. On note $n(M, t)$ le nombre de neutrons par unité de volume. Cette diffusion satisfait à la loi de Fick, avec un coefficient de diffusion $D = 22 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

D'autre part, du fait de réactions nucléaires entre les neutrons et la matière, des neutrons sont produits : pendant une durée dt , dans un élément de volume $d\tau(M)$, il apparaît $\delta^2 N_p = Kn(M, t) d\tau(M) dt$ neutrons, où $K = 3,5 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ est une constante positive homogène à l'inverse d'un temps et caractéristique des réactions nucléaires.

On admettra en première approximation que n doit s'annuler à tout instant aux extrémités du cylindre ($x = 0$ et $x = L$). En revanche on supposera que $n(x, t)$ ne s'annule pas à l'intérieur du cylindre.

1. Montrer que $n(x, t)$ est solution de l'équation :

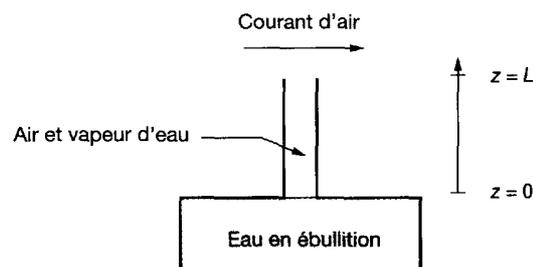
$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + Kn.$$

2. Déterminer $n(x)$ à une constante multiplicative près en régime stationnaire. Montrer que ce régime n'est possible que pour une valeur particulière L_s de la longueur L du barreau et calculer L_s .

3. En régime quelconque, on cherche une solution de la forme $n(x, t) = h(x) \exp(-t/\tau)$. Déterminer $h(x)$ et τ . En déduire que $n(x, t)$ diverge si L est supérieure à L_s .

Diffusion de vapeur d'eau dans l'air :

De l'eau est portée juste à ébullition dans un bûcher, de telle sorte qu'à sa surface de cote $z = 0$, la densité moléculaire prenne pendant la durée de l'étude la valeur fixée $n(z = 0, t) = n_0 = \Pi / k_B T$ où $\Pi = 1 \text{ bar}$ est la pression de vapeur saturante à la température $T = 100^\circ\text{C}$. Le bûcher est fermé et surmonté d'un tube vertical de section S et de hauteur L dans lequel on note $n(z, t)$ la densité moléculaire de vapeur d'eau qui diffuse dans l'air qui joue le rôle de fluide-support.



À l'extrémité supérieure du tube, de cote $z = L$, un courant d'air emporte par convection des molécules d'eau et impose une relation entre la densité de flux de particules et la densité moléculaire de la forme $j_N(z = L, t) = k \cdot n(z = L, t)$ où k est une constante.

Déterminer $n(z)$ et j_N en régime stationnaire en fonction de z , k , D , n_0 et L .

Etude de la diffusion d'atomes dans un solide :

On utilise très souvent les phénomènes de diffusion pour la fabrication des transistors dans l'industrie micro-électronique. La diffusion d'atomes tels que le bore dans un substrat de silicium permet par exemple de modifier considérablement les propriétés électriques de ce

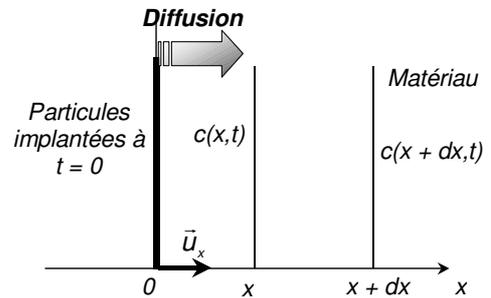
dernier. Le plus souvent, les processus de diffusion ont lieu à des températures élevées. Ainsi, les atomes se trouvent « figés » lorsque le dispositif est ramené à température ambiante.

On se propose dans cet exercice d'établir les lois expliquant la diffusion des atomes dans les solides.

On suppose que la diffusion a lieu suivant l'axe (Ox) dans le sens positif et qu'aucune diffusion n'a lieu suivant les directions (Oy) et (Oz).

1) Montrer que la concentration $c(x,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles : (D : coefficient de diffusion)

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} \quad (\text{Equation de la diffusion})$$



A l'instant initial, la concentration de particules est nulle partout sauf sur une faible épaisseur située en $x = 0$. Soit Q le nombre de particules implantées à la surface du matériau par unité de surface sur cette très faible épaisseur. Au cours du processus de diffusion, la quantité de particules Q présentes dans le matériau reste constante (aucun atome ne quitte le matériau). On montre alors que la concentration de particules dans le matériau au cours de la diffusion est de la forme :

$$c(x,t) = B(t) \exp\left[-\frac{x^2}{A(t)}\right]$$

2) A l'aide de l'équation de la diffusion et en utilisant les conditions initiales et la conservation de la quantité de particules pendant la diffusion, établir les expressions de $B(t)$,

$A(t)$ et celle de $c(x,t)$ en fonction de Q , D , t et x . (On rappelle que : $\int_0^{+\infty} \exp(-u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

3) Déterminer la profondeur de diffusion h , pour laquelle $c(h,t) = c(0,t)/e$, où e est tel que $\ln(e) = 1$. Au bout d'un temps $t_1 = 1$ heure, la profondeur de diffusion des atomes considérés est $h = 5 \mu\text{m}$. Donner la valeur du coefficient de diffusion D des atomes de bore dans le silicium. Tracer l'allure du profil de concentration des atomes diffusés à $t_1 = 1$ heure puis au bout de 3 heures, 20 heures et 100 heures.

Evaporation :

Une soucoupe de rayon $R = 5 \text{ cm}$ et de hauteur $L = 2 \text{ cm}$ contient de l'eau sur une hauteur $h = 3 \text{ mm}$. Elle est placée dans une pièce à $T = 298 \text{ K}$, l'ensemble est initialement à cette température .

Au bout de quelle durée n'y a-t-il plus d'eau dans la soucoupe ?

On donne : $D =$ coefficient de diffusion de l'eau dans l'air à $25^\circ\text{C} \approx 2.10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, pression de vapeur saturante de l'eau à 25°C : $P_s \approx 3200 \text{ Pa}$.

Etude du modèle prédateur - proie et portrait de phase :

1) Interpréter l'équation de l'évolution de la population des proies en l'absence de prédateurs, $\frac{dn}{dt} = \alpha \left(1 - \frac{n}{M}\right) n$, $\alpha > 0$, et celle des prédateurs, en l'absence de proies,

$$\frac{dp}{dt} = -\beta p, \beta > 0.$$

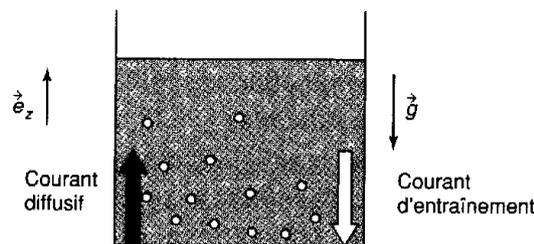
2) En présence les unes des autres, ces équations deviennent :

$$\frac{dn}{dt} = \alpha \left(1 - \frac{n}{M} - \delta p \right) n \quad ; \quad \frac{dp}{dt} = (-\beta + \gamma n) p$$

Quelle valeur a-t-on à l'équilibre? En étudiant les variations autour de l'équilibre, tracer le portrait de phase.

Diffusion en présence d'un champ extérieur :

On étudie un équilibre de sédimentation mettant en jeu la diffusion, mais aussi un champ extérieur, en l'occurrence celui de pesanteur. Des particules sphériques de rayon R , de masse volumique ρ , sont en suspension dans un fluide de masse volumique ρ_0 . Leur densité volumique n ne dépend que de la hauteur z par rapport au fond du récipient. Au cours de leur chute, les particules sphériques sont soumises à une force visqueuse $-6\pi\eta R \vec{v}$ où η est la viscosité du liquide.



Les particules sont aussi soumises au poids et à la poussée d'Archimède, de résultante $\frac{4\pi}{3} R^3 (\rho_0 - \rho) g \vec{e}_z$. On souhaite déterminer la distribution à l'équilibre de la densité volumique $n(z)$.

- 1) Au cours de leur chute dans le liquide, les particules atteignent rapidement une vitesse limite. La déterminer.
- 2) En déduire l'expression de la densité de courant d'entraînement.
- 3) Quelle est celle de la densité de courant diffusif ?
- 4) Déduire des deux questions précédentes l'expression de la densité volumique $n(z)$ en régime permanent.
- 5) Cette expression peut aussi s'interpréter à l'aide du facteur de Boltzmann. En déduire une relation entre le coefficient de diffusion D , la constante de Boltzmann k_B , la température T , le rayon R et la viscosité η .

Ecrantage nucléaire :

On modélise un écran de plomb destiné à se protéger de particules α par un demi-espace $x > 0$ recevant en $x = 0$ un flux surfacique ϕ constant de particules α . Dans le plomb, ces particules diffusent avec un coefficient D . Par ailleurs, dans un élément de volume dV où leur densité particulaire vaut $n(x, t)$, un nombre $\delta^2 N_a = n(x, t) dV dt / \tau$ sont absorbées pendant dt , où τ est une constante caractéristique. On suppose le régime stationnaire.

1- Montrer que $n(x)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 n}{dx^2} - \frac{n}{\delta^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{D\tau}$$

2- En déduire l'expression de $n(x)$ et l'ordre de grandeur de l'épaisseur optimale d'un écran.

Approche probabiliste de la diffusion :

Dans un tube cylindrique compris entre $x = -L/2$ et $x = L/2$, des neutrons sont répartis à un instant $t_p = p\tau$ avec p entier sur des sites discrets d'abscisses $x_p = na$ avec n entier. Entre les instants t_p et t_{p+1} , chaque neutron a une probabilité $\alpha\tau$ de disparaître. S'il ne disparaît pas, il a une même probabilité d'effectuer un saut vers l'un ou l'autre des deux sites voisins situés à sa gauche et à sa droite.

1- On note $p(x_n, t_p)$ la probabilité pour un neutron donné d'être en x_n à l'instant t_p . Exprimer $p(x_n, t_p)$ en fonction de $p(x_{n-1}, t_p)$ et de $p(x_{n+1}, t_p)$.

2. On fait l'approximation des milieux continus. Montrer que $p(x, t)$ est solution d'une équation aux dérivées partielles de la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\alpha p + D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

et exprimer D en fonction des données. Vérifier son homogénéité. De quelle équation aux dérivées partielles est solution la densité linéique $n(x, t)$ de neutrons ?

3. On suppose que le matériau reçoit en $x = \pm L/2$ un flux stationnaire de neutrons. Déterminer $n(x)$ en régime stationnaire.



Electrostatique

Segment chargé de manière linéique : on considère une distribution linéaire de charges avec une densité linéique de charges λ constante et de longueur $FF' = 2\ell$. Calculer le champ créé au point A situé sur l'axe (Ox) et au point B sur l'axe (Oy), avec $OA = OB = a > \ell$ (O est le milieu de FF' et les axes sont respectivement parallèle et perpendiculaire à FF').

Quadripôle électrostatique : soit un ensemble de trois charges alignées : $-2q$ en O, $+q$ en A(+ a,0) et $+q$ en B(- a,0). Calculer le potentiel puis le champ en un point M de l'espace situé à la distance r de O, en supposant $r \gg a$.

Anneau chargé équivalent à un dipôle : soit un anneau fin (A) de centre O et de rayon R, divisé en deux parties égales chargées uniformément $+\lambda$ et $-\lambda$. En utilisant la notion de dipôle électrostatique, déterminer le potentiel V puis le champ \vec{E} en un point M très éloigné de O ($r = OM \gg R$).

Superposition d'un champ uniforme et d'un dipôle : soit un champ uniforme \vec{E}_0 créant en un point O un potentiel V_0 . En O, on place un dipôle de moment dipolaire \vec{p} parallèle à \vec{E}_0 et de même sens. Calculer le potentiel créé en un point M situé à grande distance de O. En déduire qu'il existe une équipotentielle sphérique dont on déterminera le rayon. Calculer le champ en M.

Charges volumiques positives entre deux plans : des charges positives sont contenues entre deux plans $x = +a$ et $x = -a$, avec une densité volumique ρ uniforme. Calculer le champ et le potentiel en tout point de l'espace On admet que le plan $x = 0$ est au potentiel V_0 .

Charges volumiques positives et négatives entre deux plans : on considère la distribution volumique de charges suivantes :

$$+\rho \text{ pour } 0 < x < +a \quad ; \quad -\rho \text{ pour } -a < x < 0$$

Calculer le champ et le potentiel en tout point de l'espace en fonction de x. Le potentiel est nul pour $x = 0$.

Champ constant à l'intérieur d'une sphère chargée : on considère une répartition volumique de charges électriques à symétrie sphérique, contenue à l'intérieur d'une sphère Σ (O,R). Soit M un point intérieur à la sphère ($r = OM < R$). Déterminer cette répartition caractérisée par la densité volumique de charges $\rho(r)$ pour que le champ ait un module constant à l'intérieur de la sphère ($\vec{E}(M) = E_0 \vec{u}_r$, où E_0 est une constante). Calculer la charge totale Q de la sphère et caractériser le champ à l'extérieur de la sphère.

Potentiel de Yukawa : on considère une distribution de charge ayant la symétrie sphérique autour d'un point fixe O. Le potentiel est donné à une distance r par l'expression (Potentiel de Yukawa) :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad (q \text{ et } a \text{ sont des constantes positives})$$

- a) Calculer le champ E à une distance r de O ; examiner les cas particuliers $r \ll a$ et $r \gg a$; quelle est la signification de a ?
- b) Calculer le flux $\Phi(r)$ sortant d'une sphère de rayon r et en déduire que la distribution de charges est équivalente à une charge ponctuelle placée en O et à une répartition volumique de charges caractérisée par $\rho(r)$, que l'on déterminera.

Principe de superposition : on considère un plan infini percé d'un trou circulaire de rayon R, et chargé uniformément en surface σ . A l'aide du principe de superposition, calculer le champ électrostatique en un point situé sur l'axe du trou.

Ecrantage du champ électrostatique dans un électrolyte :

Le demi-espace métallique $z < 0$ est porté au potentiel uniforme $V_0 > 0$. Le demi-espace $z > 0$ est rempli d'un électrolyte constitué de cations K^+ et d'anions A^- . Le problème étant invariant par translation selon \vec{u}_x et \vec{u}_y , le potentiel $V(z)$ ne dépend que de z. À l'équilibre thermodynamique à la température T, les densités volumiques d'ions dans l'électrolyte sont données par des facteurs de Boltzmann :

$$n_+(z) = n_0 \exp\left(-\frac{eV(z)}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad n_-(z) = n_0 \exp\left(\frac{eV(z)}{k_B T}\right).$$

- 1) Citer un autre contexte où on voit apparaître un facteur de Boltzmann . Préciser la signification physique de cette loi.
- 2) Exprimer la densité volumique de charges $\rho(z)$ en fonction de e, $V(z)$, n_0 , k_B et T. En déduire que le potentiel $V(z)$ est - sous réserve que $e|V(z)| \ll k_B T$ - solution d'une équation de la forme :

$$\frac{d^2V}{dz^2} - \frac{V}{D^2} = 0$$

où D est une constante qu'on explicitera en fonction de ϵ_0 , k_B , T, n_0 et e.

- 3) Déterminer $V(z)$ en fonction de V_0 , z et D sachant que $V(\infty) = 0$. En déduire l'expression du champ électrostatique \vec{E} dans l'électrolyte en fonction de V_0 , z et D. Pourquoi parle-t-on d'écrantage du champ \vec{E} ?

Modèle de cristal : on considère un ensemble de charges + q et - q placées alternativement aux sommets d'un cube de sommet a. Calculer l'énergie électrostatique du système.

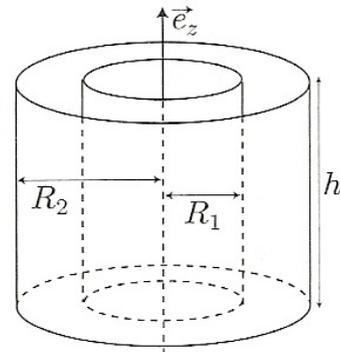
Energie électrostatique d'un électron : un électron est considéré comme une sphère de rayon a dans laquelle la charge est uniformément répartie. On suppose en outre que toute l'énergie est sous forme électrostatique. On donne $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C et $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg. Calculer l'énergie électrostatique de l'électron ; en déduire un ordre de grandeur de a.

Vitesse limite d'électrons :

Trois électrons sont retenus au sommet d'un triangle équilatéral de côté a (chaque électron a une masse m et une charge $-e$), puis sont abandonnés simultanément. Déterminer la vitesse limite de chaque électron. AN $a = 2.10^{-10}$ m.

Condensateur cylindrique :

On considère un condensateur cylindrique formé de deux armatures coaxiales de hauteur h et de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $h \gg R_2$. L'armature interne porte la charge électrique Q . Les potentiels des armatures sont respectivement V_1 et V_2 . Soit un point M situé à la distance r de l'axe tel que $R_1 < r < R_2$.

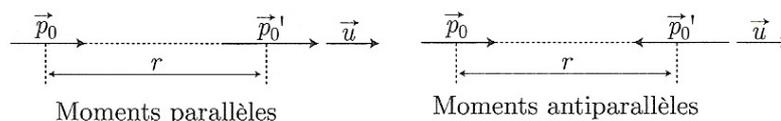


1. Calculer la composante $E(r)$ du champ \vec{E} entre les armatures.
2. Calculer la circulation du champ électrique entre les armatures en fonction de Q , ϵ_0 , h , R_2 et R_1 .
3. Exprimer la capacité C du condensateur en fonction de ϵ_0 , h , R_2 et R_1 .
4. Calculer C pour $R_1 = 0,1$ cm, $R_2 = 0,2$ cm, $\epsilon_0 = 8,8.10^{-12}$ u.s.i et $h = 10$ cm.
5. Que devient l'expression de C si les rayons des armatures sont très voisins c'est à dire si $R_2 - R_1 = e \ll R_1$.
6. Le champ électrique ne doit pas dépasser la valeur E_0 afin d'éviter le claquage du condensateur. Calculer la valeur U_{max} de la différence de potentiel pouvant être appliquée entre les armatures en fonction de E_0 , R_1 et R_2 . Faire l'application numérique pour $E_0 = 3 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$.
7. Exprimer l'énergie électrostatique stockée par le condensateur, retrouver alors l'expression de sa capacité.

Sphère gravitationnelle creuse ou pleine : utiliser le théorème de Gauss pour calculer le champ gravitationnel créé par une sphère de masse M en tout point de l'espace, dans les deux cas suivants : sphère creuse (densité surfacique $\sigma = \text{cste}$) puis sphère pleine (masse volumique $\rho = \text{cste}$).

Dipôles électrostatiques :

On considère deux dipôles permanents, dont les moments \vec{p}_0 et \vec{p}'_0 (de normes éventuellement différentes) sont portés sur un même axe de vecteur unitaire \vec{u} , sont à la distance r l'un de l'autre. Nous nous plaçons dans l'hypothèse restrictive où il n'y a que deux orientations possibles : \vec{p}_0 et \vec{p}'_0 peuvent être soit parallèles soit antiparallèles.



1. Calculer, dans chaque cas, la force qui s'exerce entre les dipôles, en fonction de $p_0 = \|\vec{p}_0\|$, $p'_0 = \|\vec{p}'_0\|$, r et \vec{u} .

On donne, pour $\varepsilon \ll 1$:

$$(1 + \varepsilon)^{-2} \simeq 1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon^2$$

2. On rappelle que l'énergie potentielle d'un dipôle rigide de moment \vec{p} , dans un champ électrostatique \vec{E} , est :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Nous supposons que l'agitation thermique est assez forte pour faire passer sans cesse les dipôles de moments \vec{p}_0 et \vec{p}'_0 d'une position à l'autre. Calculer la force moyenne qui s'exerce entre les deux dipôles.

On utilisera la loi de répartition statistique de Boltzmann qui donne le nombre de dipôles $n(\mathcal{E}_p)$ d'énergie \mathcal{E}_p en fonction de la température :

$$n(\mathcal{E}_p) = A e^{-\mathcal{E}_p/kT}$$

où A est une constante et k est la constante de Boltzmann. On supposera ici que

$$\left| \frac{\mathcal{E}_p}{kT} \right| \ll 1.$$

Disque portant des dipôles :

- On considère un disque (D) de rayon R et d'axe Oz ; il porte à sa surface, régulièrement répartis, des dipôles électrostatiques de moment dipolaire \vec{p} parallèle à Oz .
- On note $\mu = \frac{dp}{dS}$ la densité surfacique de moment dipolaire ($p = \|\vec{p}\|$).

Calculer le champ électrostatique créé par la distribution en un point de l'axe du disque.



Magnétostatique

Effet Hall : un ruban de cuivre (1,5 cm de large et 1,25 mm d'épaisseur) est placé perpendiculairement à un champ magnétique ($B = 1,75 \text{ T}$). Le ruban est parcouru dans sa longueur par un courant d'intensité $I = 100 \text{ A}$. Calculer :

- a) La vitesse de déplacement des électrons.
- b) Le champ électrique transversal dû à l'effet Hall.
- c) La tension Hall.

Données : masse volumique du cuivre : $\rho = 8\,800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$; masse atomique : $63,6 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$

Le cuivre libère un électron de conduction par atome

Cadre plongé dans un champ magnétique :

Un cadre rectangulaire $ABCD$ indéformable peut pivoter autour d'un axe médian MN . La surface du cadre est S . Il est parcouru par un courant I dans le sens $ABCD$. Il est placé dans un champ magnétique uniforme B_0 placé dans un plan horizontal perpendiculaire à MN . On note J le moment d'inertie du cadre par rapport à l'axe MN . Voir la figure 1. On donne $AB = a$ et $BC = b$. La normale au cadre est représentée en pointillés.

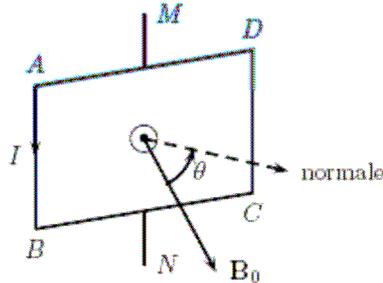


FIG. 1 – Cadre

1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement du cadre.
2. Quelles sont les positions d'équilibre ?
3. A quels endroits peut-on observer des oscillations de petites amplitudes dont on calculera la période ?

Force de Laplace :

Une spire circulaire de rayon R et d'axe Oz est parcourue par un courant I constant.

1. Le champ en un point M n'appartenant pas à la spire s'écrit :

$$\vec{B}(M) = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta + B_z \vec{e}_z$$

Montrer en utilisant le théorème d'Ampère que : $B_\theta = 0$.

2. Démontrer que pour tout point M au voisinage de l'axe de révolution de la spire :

$$B_r \simeq -\frac{r}{2} \frac{dB_r}{dz}$$

3. On place à la cote $z = z_0$ une spire de rayon $a \ll R$ parcourue par un courant i . Calculer la force exercée par la grande spire sur la petite. Dans quels cas cette force est-elle attractive ou répulsive ? Faire une analogie remarquable.

Bande de courant :

On considère une bande plane illimitée de largeur $2a$, définie en coordonnées cartésiennes par les équations $z = 0$ et $-a < y < a$. Cette bande est parcourue par un courant continu d'intensité I , distribuée de façon uniforme sur toute section de la bande par un plan $x = \text{cste}$. Les lignes de courant sont des droites parallèles à (Ox) ; I est comptée positivement dans le sens positif de (Ox) . Soit \vec{B} le champ magnétique en un point M de coordonnées $(0,0,h)$.

a) Prédire la direction et le sens de \vec{B} .

b) calculer \vec{B} .

c) La bande n'est plus parcourue par un courant, mais est désormais chargée avec une densité uniforme σ . Montrer que le champ électrostatique au même point s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \text{Arc tan} \frac{a}{h} \vec{u}_x$$

d) Montrer que le champ magnétique peut se mettre sous la forme :

$$\vec{B} = k\vec{u}_x \wedge \vec{E}$$

Exprimer k en fonction des données et interpréter le résultat obtenu.

Champ magnétique dans la zone commune :

Deux cylindres infinis (C_1) et (C_2) sont parcourus par des courants de densités $\vec{j}_1 = \vec{j} = j\vec{u}_z$ et $\vec{j}_2 = -\vec{j}$. Les deux cylindres sont identiques, de rayon R et leurs axes, parallèles à (Oz) , sont distants de $a < 2R$.

a) Calculer le champ magnétique dans la zone commune.

b) On considère les deux cylindres précédents, possédant maintenant les densités de charges uniformes $\rho_1 = \rho$ et $\rho_2 = -\rho$. Ils sont animés d'une vitesse constante $\vec{v} = v\vec{u}_z$ par rapport au laboratoire. Calculer, en tout point de la zone commune, les champs \vec{E} et \vec{B} créés dans le laboratoire. Donner la relation entre ces deux champs.

Câble coaxial :

On considère un câble coaxial infini cylindrique, de rayons $R_1 < R_2 < R_3$. Le courant d'intensité totale I passe dans un sens dans le conducteur intérieur et revient dans l'autre sens par le conducteur extérieur.

a) Calculer le champ magnétique en tout point.

b) Représenter B en fonction de la distance r du point considéré à l'axe du cylindre.

Effet « pincement » dans une colonne de plasma :

On peut obtenir le confinement d'une colonne de plasma en utilisant, au lieu de champs magnétiques externes, le champ magnétique créé par un courant intense traversant le plasma.

On se propose d'étudier l'équilibre d'une colonne de plasma de symétrie cylindrique d'axe (Oz) et de rayon R . Le plasma est traversé par un courant I dirigé suivant (Oz) et uniformément réparti dans la section de la colonne. Le plasma est en équilibre thermodynamique à la température T . On désigne par $n(r)$ la densité totale de particules à la distance r de l'axe et par $P(r)$ la pression en ce point. On a $P(r) = n(r)kT$ où k est la constante de Boltzmann. La colonne de plasma est placée dans le vide.

1. Calculer le champ magnétique créé par le courant I en un point de la colonne de plasma situé à la distance r de l'axe ($r < R$).
2. Calculer la force magnétique $d\vec{F}_m$ due au courant I qui s'exerce sur un élément de volume $d\tau$ de plasma défini par r et $r + dr$, θ et $\theta + d\theta$, z et $z + dz$. Montrer que cette force tend à s'opposer à l'expansion radiale du plasma.
3. Rappeler l'expression générale de la résultante des forces de pression $d\vec{F}_p$ qui agit sur un élément de volume $d\tau$ d'un gaz autour d'un point où la pression est P .
4. De la condition d'équilibre de l'élément de volume de plasma, déduire l'expression de la pression $P(r)$.
5. On désigne par N le nombre total de particules par unité de longueur de la colonne de plasma. Ecrire la relation entre N et I qui traduit la condition d'équilibre de la colonne de plasma (condition de Bennett).
6. Application numérique : calculer le courant I nécessaire pour confiner une colonne de plasma de 10 cm de rayon. L'énergie cinétique moyenne des particules est égale à 100 keV et la densité moyenne de particules dans la colonne vaut 10^{15} cm^{-3} . On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$ (perméabilité du vide).

Rotation uniforme d'un cylindre chargé en volume :

Soit C un cylindre de révolution d'axe (Oz) , de rayon a et de longueur très grande devant a . C , chargé uniformément avec la densité volumique ρ , est mis en rotation autour de (Oz) avec la vitesse angulaire ω (supposée indépendante du temps jusqu'à la dernière question) sans que cette rotation affecte la répartition des charges dans C .

- a) Déterminer dans tout l'espace le champ électrique \mathbf{E} .
- b) Déterminer dans tout l'espace le champ magnétique \mathbf{B} .



Equations de Maxwell

Effet de peau :

On considère un métal de conductivité σ pour lequel on cherche une solution des équations de Maxwell correspondant à des champs sinusoïdaux de pulsation ω . On sait que, dans un métal,

le courant de déplacement $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant le courant de conduction $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

De façon plus précise, on cherche pour le champ électrique une expression de la forme : $\vec{E} = E_0 f(x) \exp i(kx - \omega t) \vec{u}_z$, où \vec{u}_z désigne le vecteur unitaire de l'axe Oz parallèle à la surface du métal et $f(x)$ une fonction de la profondeur x à l'intérieur du métal que l'on va déterminer.

a) A partir de l'expression du champ \vec{E} , déterminer le champ magnétique \vec{B} . Vérifier que $\text{div} \vec{E} = 0$ et $\text{div} \vec{B} = 0$.

b) En négligeant le courant de déplacement, déterminer une équation différentielle vérifiée par $f(x)$ et montrer que : $f(x) = A \exp(-x / \delta)$. Donner les expressions de δ puis de k .

Pour le cuivre : $\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Calculer δ pour différentes fréquences (10^2 Hz, 10^3 Hz, 10^4 Hz et 10^5 Hz).

Etude énergétique d'un câble en régime statique :

Un câble électrique est assimilé à un cylindre de longueur L , d'axe Oz et de rayon a , conducteur ohmique de conductivité σ , parcouru par des courants indépendants du temps, de densité volumique $\vec{j} = j \vec{u}_z$ uniforme dont l'intensité totale vaut $I = j \pi a^2$.

a) On néglige les effets de bord. Calculer en un point de la surface du conducteur le champ électrique, le champ magnétique et le vecteur de Poynting. En déduire la puissance électromagnétique reçue par le câble à travers sa surface latérale (S) et commenter.

b) A l'extérieur du câble, on admet les expressions des champs :

$$\vec{E} = \frac{I}{\sigma \pi a^2} \vec{u}_z \quad ; \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Vérifier la compatibilité de ces expressions avec les relations de passage à la surface du câble. Montrer que la puissance électromagnétique traversant un cylindre d'axe (Oz), de hauteur L et de rayon r supérieur à a est indépendante de r et commenter.

Condensateur alimenté à haute fréquence :

Un condensateur plan, constitué de deux plaques circulaires d'axe (Oz) et de rayon R , séparées par une distance e faible devant R , est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω .

a) Pour ce système à symétrie cylindrique, on écrira le champ électrique sous la forme :

$$\vec{E} = E(r) \cos \omega t \vec{u}_z$$

Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la fonction $E(r)$? Déterminer la solution sous la forme d'une série entière développée en puissances de la variable sans dimension $x = \frac{r\omega}{c}$.

b) Pour $\omega = 20 \pi \text{ MHz}$ et $R = 5 \text{ cm}$, que peut-on dire de la fonction $E(r)$ à l'intérieur du condensateur ? L'ARQS est-elle convenable ?

c) Que vaut le champ magnétique à l'intérieur du condensateur ?

Donnée : en coordonnées cylindriques, le laplacien d'une fonction $f(r, \theta, z)$ est :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Bilan énergétique de la charge d'un condensateur plan :

Les armatures d'un condensateur plan, constituées de deux disques conducteurs, de surface $S = \pi a^2$ et de rayon a , de même axe Oz et séparés d'une distance e sont reliées (Fig. 7) à un générateur de f.é.m. \mathcal{E} par une résistance R . Initialement le condensateur est déchargé. À un instant quelconque où la tension à ses bornes vaut $V(t)$, ses armatures portent respectivement les charges $q(t) = CV(t)$ et $-q(t)$ où $C = \epsilon_0 S/e$ est la capacité du condensateur. On néglige les effets de bords, de telle sorte qu'en coordonnées cylindriques le champ électromagnétique dans le condensateur est en première approximation de la forme :

$$\mathbf{E} = E(t) \mathbf{u}_z ; \quad \mathbf{B} = B(r, t) \mathbf{u}_\theta$$

et le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur.

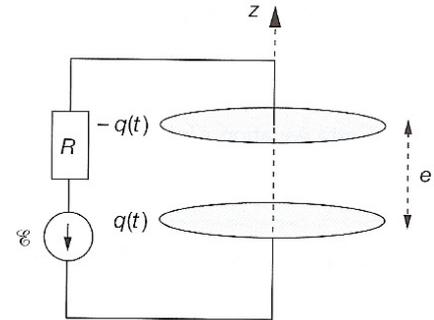


Figure 7

1. En utilisant les lois de l'électrocinétique, déterminer $V(t)$ et montrer que le condensateur reçoit au cours de l'opération une énergie $U_c = (1/2) C \mathcal{E}^2$.

2. À un instant quelconque, déterminer $E(t)$ en utilisant le théorème de Gauss sur la surface (Σ) représentée en pointillés sur la figure 8 et $B(r, t)$ en appliquant le théorème d'Ampère généralisé au contour (C) représenté en pointillés sur la figure 9 (cercle de rayon $r < a$ et d'axe Oz).

3. En déduire la puissance électromagnétique \mathcal{P} reçue par l'intérieur du condensateur, puis l'énergie électromagnétique U_{em} emmagasinée par le condensateur au cours de sa charge. Comparer avec l'énergie U_c déterminée à la question 1.

4. Retrouver U_{em} en utilisant la densité d'énergie électromagnétique u_{em} dans l'état initial et dans l'état final.

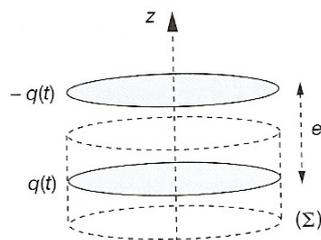


Figure 8

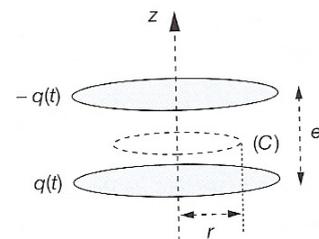


Figure 9

5. En appliquant la loi de Faraday au contour rectangulaire (C) représenté en pointillés sur la figure 10, montrer que les champs déterminés à la question 1. ne peuvent convenir que si $\ddot{q}(t) = 0$.

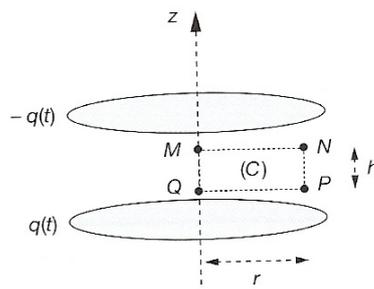


Figure 10

Energie magnétique stockée dans une bobine :

Une bobine, de longueur l , de rayon a et d'axe (Oz) , est constituée par un enroulement de n spires circulaires jointives par unité de longueur. On utilisera pour l'étude qui suit l'approximation du solénoïde infini pour décrire cette bobine et l'on se placera dans le cadre de l'A.R.P.Q.

1) Quel est, dans ces conditions, le champ magnétique engendré par la bobine lorsqu'elle est parcourue par le courant I ?

2) Quelle est l'énergie magnétique \mathcal{E}_m associée à la bobine ? Quelle valeur du coefficient d'induction L de la bobine peut-on en déduire ?

A.N. : $I = 1 \text{ A}$, $l = 10 \text{ cm}$, $a = 10 \text{ cm}$, $n = 5\,000 \text{ m}^{-1}$ (cette valeur élevée peut être obtenue par superposition d'enroulements : le modèle du solénoïde à une couche

d'enroulement est alors simpliste, mais les ordres de grandeur sont tout de même convenables).

3) La bobine est mise en charge par un générateur de force électromotrice e , de résistance interne R grande par rapport à celle de l'enroulement. Quelle est la loi d'évolution du courant dans le circuit, fermé à l'instant $t = 0$?

4) Calculer les champs magnétique et électrique engendrés par la bobine à l'instant t en tout point.

Comparer les ordres de grandeur des densités volumiques d'énergies magnétique et électrique (on pourra prendre des valeurs numériques raisonnables pour mener à bien ce calcul).

5) Quelle est l'expression du flux du vecteur de POYNTING à travers la surface délimitant le volume où la bobine crée un champ non négligeable (cylindre de rayon a et de longueur l) ? Interpréter ce résultat.

Mise en rotation d'une sphère chargée :

Une sphère de centre O , de rayon R et de masse m , porte une charge Q (la charge Q et la masse m sont réparties uniformément en volume).

La sphère peut tourner librement autour d'un axe (Oz) et on appelle J le moment d'inertie de cette sphère par

rapport à (Oz) : $J = \frac{2}{5} mR^2$.

La sphère est placée dans une bobine, d'axe (Oz) , constituée par un enroulement de n spires circulaires

jointives par unité de longueur (on utilisera pour l'étude qui suit l'approximation du solénoïde infini pour décrire cette bobine).

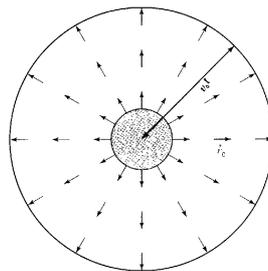
- 1) À l'instant $t = 0$, le courant circulant dans le solénoïde, passe très rapidement de 0 à la valeur I_0 . Pourquoi la sphère se met-elle à tourner ?
- 2) Exprimer la vitesse de rotation finale de la sphère en fonction de sa charge, de sa masse, et du champ magnétique $B_0 = \mu_0 n I_0$ créé par le solénoïde.
- 3) Évaluer numériquement cette vitesse de rotation en proposant des valeurs raisonnables pour réaliser cette expérience. Commenter.
- 4) Quelle est la relation liant le moment magnétique de la sphère en rotation au champ auquel elle est soumise ?
- 5) Lorsque la sphère se met en rotation, elle crée un champ magnétique variable négligé jusqu'ici. Évaluer ce champ magnétique au centre O de la sphère. À quelle condition est-il effectivement négligeable devant celui du solénoïde ?

Emission de charges par une petite sphère radioactive :

Une bille de cuivre fixe de rayon a suffisamment faible par rapport aux autres dimensions pour que cette bille soit confondue avec son centre O , initialement neutre, émet des électrons de manière isotrope à partir de l'instant $t = 0$: le nombre d'électrons émis par unité de temps est une constante α et les électrons sont émis avec un vecteur-vitesse $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{u}_r$, où v_0 est une constante. On néglige les forces électromagnétiques subies par les électrons (approximation d'ordre le plus bas).

1. Déterminer la densité volumique de charges $\rho(r, t)$ en exprimant la charge comprise entre les sphères de centre O et de rayons r et $r + dr$. En déduire que la densité de courants $\mathbf{j}(r, t)$ vaut :

$$\mathbf{j}(r > v_0 t, t) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{j}(r < v_0 t, t) = \frac{-\alpha e}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r .$$



2. Déterminer le champ électrique \mathbf{E} supposé isotrope et vérifier qu'il dérive d'un potentiel scalaire $V(r, t)$. Montrer que les équations de Maxwell sont compatibles avec un champ magnétique \mathbf{B} nul. Dans la suite, on admet que les champs obtenus sont l'unique solution des équations de Maxwell.
3. En déduire les grandeurs énergétiques locales u_{em} , $\mathbf{\Pi}$ et $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ et commenter.

Transparence ultraviolette des métaux :

On adopte le modèle de conduction de Drude dans un métal : la force exercée par le réseau sur les électrons de conduction est de la forme $-(m/\tau) \vec{v}$. On travaille en notation complexe. On note n^* le nombre volumique d'électrons libres.

- 1) Montrer que le métal possède une conductivité complexe :

$$\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + j\omega\tau} \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{n^* e^2 \tau}{m}$$

2- On rappelle que le métal est localement neutre. En déduire la relation de dispersion des OPPH* :

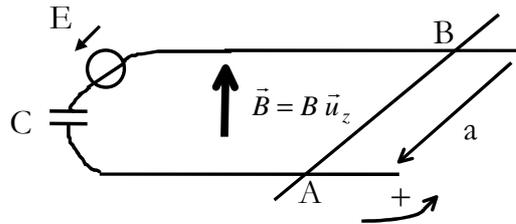
$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \underline{\sigma} j\omega$$

3- Comment se simplifie la relation de dispersion pour $\omega\tau \gg 1$? Interpréter alors le fait que certains métaux sont transparents dans l'ultraviolet, sachant que $n^* = 10^{28} \text{ m}^{-3}$, $m = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $\tau = 10^{-14} \text{ s}$.



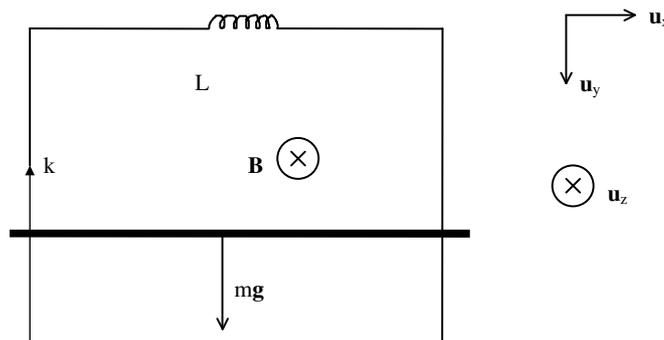
Induction électromagnétique

Mouvement d'une barre sur deux rails: une tige conductrice, de résistance R et de masse m , est mobile sans frottement sur deux rails parallèles situés dans un même plan horizontal et distants de a . Elle reste de plus perpendiculaire aux deux rails. Ceux-ci sont reliés à un circuit électrique comprenant un générateur de fém E et un condensateur de capacité C . On néglige la résistance des rails et des fils de jonction. L'ensemble est placé dans un champ magnétique $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ uniforme. Le signe de E est tel que le courant circule dans le sens positif (cf figure).



- a) Déterminer la vitesse $v(t)$ de la barre, l'intensité $i(t)$ dans le circuit et la charge $q(t)$ du condensateur. A $t=0$: $v=0$; $q=0$
- b) Etablir un bilan d'énergie au bout d'un temps infini.

Chute d'une tige horizontale dans un champ magnétique : une tige (T) rectiligne de longueur a , de masse m et de résistance R effectue un mouvement de translation le long de la verticale descendante \mathbf{u}_y en restant parallèle à une direction horizontale \mathbf{u}_x et tout en fermant un circuit rectangulaire C situé dans le plan vertical $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$ qui comporte une bobine d'inductance L . On confond la résistance totale de C avec R et son inductance propre avec L . C est orienté positivement par le vecteur horizontal \mathbf{u}_z . L'ensemble du dispositif est plongé dans un champ magnétique uniforme et permanent $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$. (T) est abandonnée à $t=0$ avec une vitesse $v = \dot{y} = 0$, son glissement sur C s'effectue sans frottements.



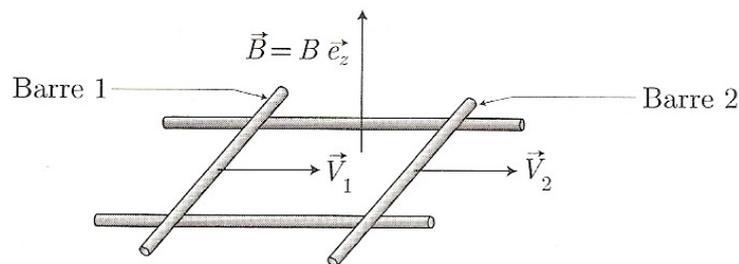
- a) En notant i l'intensité du courant qui circule dans C à l'instant t , déduire des lois de l'électrocinétique une équation différentielle (E) reliant i et di/dt à $v = \dot{y}$.
- b) Déduire des lois de la mécanique une équation différentielle (M) reliant dv/dt à i .
- c) En combinant convenablement (E) et (M), faire apparaître une équation (P) dont les termes ont les dimensions de puissances. On écrira le premier membre de (P) comme la dérivée d'une somme d'énergies que l'on identifiera et l'on commentera la signification physique de (P).
- d) Ecrire une équation différentielle (I) relative à la seule fonction $i(t)$.

e) Dans le cas d'une résistance "assez grande" (préciser), décrire qualitativement l'évolution des fonctions $i(t)$ et $v(t)$. Mettre en évidence un couple de valeurs particulières (i_0, v_0) dont l'on expliquera la signification physique et que l'on exprimera en fonction des données.

f) Dans l'hypothèse inverse d'une résistance R négligeable, calculer explicitement les fonctions $i(t)$ et $y(t)$. Analyser la situation obtenue d'un point de vue énergétique.

Tiges sur des rails :

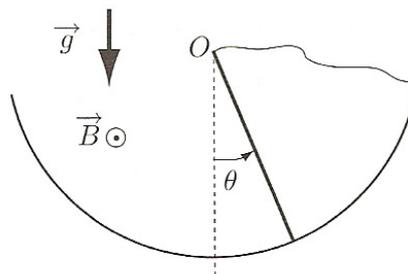
Sur deux rails conducteurs parallèles à l'axe (Ox) , dans un même plan horizontal, séparés d'une distance d , peuvent glisser deux barres conductrices parallèles, perpendiculaires aux rails. On négligera les frottements entre les barres et les rails. L'ensemble constitue un circuit fermé de résistance totale R_0 que l'on admettra indépendante de la position des barres. Ce dispositif est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, orthogonal au plan du circuit. À $t = 0$, on lance la barre 1, avec la vitesse $\vec{V} = V_0 \vec{e}_x$, la barre 2 étant immobile.



1. Par une étude qualitative, montrer que la barre 2 se met en mouvement. Comment vont évoluer les vitesses des deux barres ?
2. Exprimer l'intensité du courant induit dans le circuit.
3. Exprimer $\vec{V}_1(t)$ et $\vec{V}_2(t)$
4. Montrer qu'entre $t = 0$ et t très grand, la puissance dissipée par effet Joule correspond à la variation d'énergie cinétique. Conclure.

Pendule pesant conducteur dans un champ magnétique :

Une barre conductrice peut tourner sans frottement autour d'un axe horizontal Oz tout en étant en contact par son autre extrémité avec un fil conducteur circulaire. Le circuit est fermé par un fil. La barre, de masse m , et de longueur l , est lâchée à l'instant $t = 0$, l'angle $\theta(0)$ étant petit, dans le champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$. La résistance de la barre est R , les résistances des autres éléments du circuit sont négligeables.



Déterminer le mouvement de la barre et effectuer le bilan énergétique entre les instants t et $t + dt$.

On supposera que le champ magnétique est assez faible pour que le mouvement soit pseudopériodique.

On donne : $J_{Oz} = \frac{ml^2}{3}$ et $J_{Gz} = \frac{ml^2}{12}$ (G est le centre d'inertie de la barre).

Principe du Bêatron : on considère une particule dont la masse est m et la charge électrique q . Cette particule est déposée sur un plateau horizontal circulaire, de diamètre $D=0,2$ m, induit d'un vernis isolant. La particule étant au repos et située à la distance $R=D/4$ du centre O du plateau, on applique au dispositif un champ magnétique \vec{B} supposé spatialement uniforme et normal au plan du plateau.

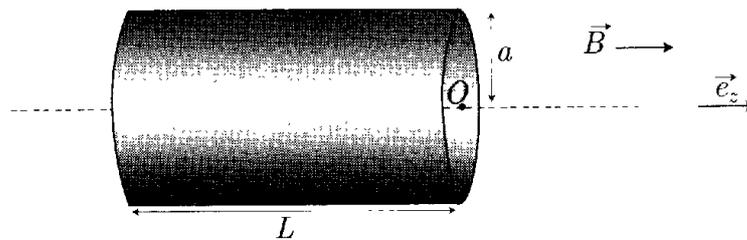
1) Montrer, à partir d'une des équations de Maxwell, que le passage d'un champ magnétique nul ($B=0$) à un champ vertical d'intensité B , crée pendant un temps très bref un champ électrique \vec{E} que l'on supposera orthoradial. Exprimer E en fonction de R et de dB/dt .

2) Quelle est la vitesse « initiale » ainsi communiquée à la particule supposée quasi-ponctuelle, tout frottement étant négligé. Déterminer le rayon R' de la trajectoire. Quelle est la période T du mouvement ?

3) Application numérique : $m = 4.10^{-15}$ kg ; $q = 2e$; $B = 2,5.10^{-2}$ T. Calculer la période T . Le mouvement peut-il être détecté ?

Puissance Joule associée à des courants de Foucault :

On place un cylindre de rayon a , de longueur L , d'axe (Oz) et de conductivité γ dans un champ magnétique uniforme : $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$.



- 1- Quel dispositif permet d'obtenir un tel champ ?
- 2- Justifier qu'il va apparaître dans le milieu un champ électrique.
- 3- En admettant que ce dernier est orthoradial, l'exprimer en fonction de B_0 , r et ω pour $r < a$.
4. Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le matériau.



Ondes EM dans le vide

Effet Doppler :

Une onde plane progressive monochromatique de fréquence ν est émise par un objet s'éloignant à la vitesse $v \ll c$ (c est la célérité de l'onde) d'un observateur immobile (la direction observateur – source est prise colinéaire à la vitesse de la source).

- Quelle est la forme de l'onde émise ? Par un changement de référentiel pour les coordonnées, trouver la période T' de l'onde perçue par l'observateur.
- Retrouver le résultat en supposant que la source émet un bip tous les T , en évaluant l'intervalle T' entre deux réceptions successives de bips par l'observateur. Quelles sont des applications de ce phénomène ?

Laser, pression de radiation :

Un laser en continu émet en permanence $P = 100 \text{ W}$ dans un faisceau lumineux monochromatique (de longueur d'onde $\lambda = 632,6 \text{ nm}$), de section $s = 0,25 \text{ cm}^2$.

- Trouver les valeurs numériques des amplitudes des champs électrique et magnétique associés aux ondes planes.
- Déterminer le nombre de photons par unité de volume dans le faisceau.
- En déduire la pression de radiation, en pascals, sur un miroir parfait.
(On donne $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$).

Onde plane progressive harmonique polarisée circulairement :

Une onde EM plane progressive harmonique est polarisée circulairement. Elle se propage dans le vide suivant l'axe (Oz) dans le sens des z croissants.

- Expliciter les champs électrique et magnétique.
- Calculer le vecteur de Poynting.
- On superpose deux ondes identiques à celle étudiée précédemment, l'une étant circulaire gauche et l'autre circulaire droite. Étudier l'onde résultante dans l'hypothèse de composantes en phase suivant (Oy).

Propagation dans un milieu chiral :

- Rappeler l'équation de propagation du champ électrique dans le vide
- On suppose que dans un milieu transparent, le champ EM se propage exactement de la même manière que dans le vide, à la condition de remplacer c par c/n , où n est l'indice du milieu. Quelle est alors l'équation de propagation du champ électrique ? Quelle est la relation entre k et ω pour une onde plane progressive harmonique ?
- Un milieu chiral est un milieu transparent dans lequel les ondes circulaires droites et gauches ne se propagent pas à la même vitesse. Pour les ondes circulaires gauches (resp. droites), l'indice est n_g (resp. n_d). On envoie dans un tel milieu une onde initialement polarisée rectiligne selon \vec{u}_x et se propageant dans la direction \vec{u}_z . On supposera qu'à l'interface vide-milieu chiral, la pulsation de l'onde ne varie pas. Quelle est l'expression de l'onde dans le milieu chiral ?

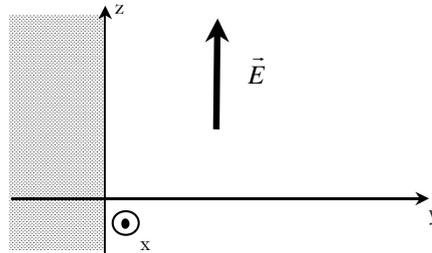
d) Quelle est, après la traversée d'une cuve de longueur e , la polarisation de l'onde ?
Caractériser le changement observé.



Ondes EM dans les métaux

Ondes à la surface d'un métal :

Une onde progressive électromagnétique se propage parallèlement à un plan conducteur parfait. La surface plane du conducteur est le plan (Oxz). Le métal est semi-infini et occupe la zone $y < 0$.



Le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = f(y) \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

- Caractériser la forme générale acceptable du champ EM correspondant à des solutions de ce type.
- Quels sont les charges et les courants portés par le conducteur parfait ?
- Définir et calculer la vitesse de propagation de l'énergie.

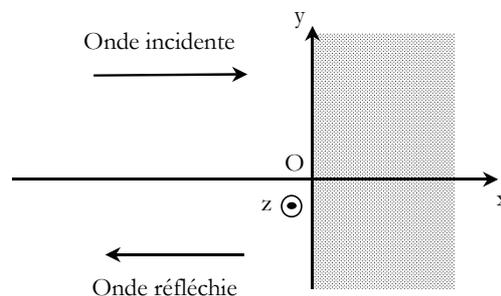
Réflexion d'une onde sur un métal "parfait", pression de radiation :

Une OPPM, à polarisation rectiligne, se propage dans le vide dans la direction (Ox), dans le sens des x croissants :

$$\vec{E}_i = E_0 e^{j(\alpha x - kx)} \vec{e}_y \quad (\text{on supposera } E_0 \text{ réel positif})$$

En $x = 0$, elle arrive sur la surface plane d'un miroir métallique parfaitement conducteur, dans lequel les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont nuls, et donne naissance à une onde réfléchie se propageant dans le sens des x décroissants :

$$\vec{E}_r = E_{0r} e^{j(\alpha x + kx)} \vec{e}_y$$



a) En écrivant les conditions aux limites que doivent vérifier les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} en $x = 0$, déterminer :

* L'amplitude E_{0r} du champ réfléchi en fonction de E_0 .

* La charge surfacique σ et le courant surfacique \mathbf{j}_s qui peuvent se trouver sur la surface métallique en $x = 0$.

b) Déterminer le champ électromagnétique résultant de l'onde incidente et de l'onde réfléchie dans le demi-espace $x < 0$. Caractériser brièvement l'onde résultante. Calculer la valeur moyenne de son vecteur de Poynting.

c) Le champ électromagnétique exerce sur une surface dS du miroir une force $d\vec{F}$ dont l'expression est, en notation réelle :

$$d\vec{F} = \frac{1}{2} (\sigma \vec{E} + \vec{j}_s \wedge \vec{B}) dS$$

* Proposer une explication de la présence du facteur $1/2$.

* En déduire que l'onde exerce une pression P sur le miroir dont on calculera la valeur moyenne $\langle P \rangle$ en fonction de la densité volumique moyenne d'énergie $\langle e_i \rangle$ de l'onde incidente, puis en fonction de la densité volumique d'énergie totale $\langle e_{\text{totale}} \rangle$ au voisinage immédiat du plan ; P est appelée pression de radiation.

* Calculer $\langle P \rangle$ pour une onde incidente fournie par un laser de puissance moyenne $\langle W_i \rangle = 3$ mW, dont la section droite est $s = 0,4 \text{ mm}^2$.

Réflexion sur un métal :

Une OPPM est envoyée normalement à un plan parfaitement conducteur. La polarisation de cette onde est circulaire et le champ électrique associé peut s'écrire en notation réelle :

$$E_{xi} = E_0 \cos(\omega t - k_i z + \pi/2) \quad ; \quad E_{yi} = E_0 \cos(\omega t - k_i z)$$

Déterminer la structure de l'onde résultante.

7) Réflexion d'une onde EM sur un métal (*) : (Centrale)

Un conducteur ohmique de conductivité γ occupe le demi-espace $x > 0$, le demi-espace $x < 0$ étant vide. Une onde incidente de la forme :

$$\underline{E}_i = E_0 \exp(j\omega t - j\omega x/c) \underline{u}_z$$

se propage dans le vide. Elle donne naissance à une onde transmise de la forme ² :

$$\underline{E}_{tr} = \underline{t} E_0 \exp(j\omega t - jkx) \underline{u}_z \quad \text{avec} \quad k = \frac{(1-j)}{\delta} \quad \text{et} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

et à une onde réfléchie de la forme : $\underline{E}_r = \underline{r} E_0 \exp(j\omega t + j\omega x/c) \underline{u}_z$.

1. Déterminer les champs magnétiques correspondants.

2. On suppose l'absence de courants superficiels³. En traduisant les relations de passage pour \underline{E} et \underline{B} , établir l'expression de \underline{t} en fonction de $\alpha = \omega \delta / c$. Vérifier que pour $\alpha \ll 1$ – ce qu'on suppose dans la suite – on a $\underline{t} = \alpha(1 + j)$ en limitant les calculs à l'ordre un en α .

3. En réalité le conducteur a une surface S dans le plan $x = 0$.

a) Calculer la moyenne temporelle du flux du vecteur de Poynting en $x = 0 +$. Que représente cette grandeur ?

b) Montrer que la moyenne temporelle de la puissance dissipée par effet Joule dans un élément de volume $S dx$ du conducteur vaut :

$$\langle d\mathcal{P}_J \rangle = \gamma \alpha^2 E_0^2 \exp(-2x/\delta) S dx .$$

En déduire la moyenne temporelle de la puissance dissipée par effet Joule dans tout le conducteur. Comparer avec le résultat de **3.a)** et commenter.

Onde se propageant entre deux plans :

Une onde électromagnétique se propage dans le vide, dans la direction de l'axe Ox, entre deux plans $z = 0$ et $z = a$. Le champ électrique de cette onde vaut :

$$\mathbf{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kx) \mathbf{u}_y$$

- 1) Établir la relation de dispersion. A quelle condition sur ω une telle onde peut-elle exister ? Que vaut la vitesse de phase v_ϕ ?
- 2) Calculer le champ magnétique, en éliminant tout champ statique.
- 3) Calculer la moyenne - dans l'espace et dans le temps - de la densité volumique d'énergie électromagnétique, ainsi que la moyenne temporelle du vecteur de Poynting. En déduire la vitesse de propagation de l'énergie, v_e .
- 4) On superpose deux ondes du type précédent, de même amplitude, de pulsations voisines $\omega_1 = \omega - \frac{\Delta\omega}{2}$ et $\omega_2 = \omega + \frac{\Delta\omega}{2}$ avec $\Delta\omega \ll \omega$. Exprimer le champ électrique de l'onde résultante. A quelle vitesse l'enveloppe du signal se propage-t-elle ?



Ondes dans les plasmas

Effet Faraday dans un plasma :

On étudie la propagation d'ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques polarisées circulairement de vecteur d'onde $\mathbf{k} = k \mathbf{u}_z$ dans un plasma localement neutre comportant n électrons et n ions par unité de volume, et où règne un champ statique uniforme $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{u}_z$ très supérieur au champ magnétique de l'onde. Les ions sont supposés fixes.

1. Montrer que le plasma possède une conductivité complexe σ .
2. En déduire les expressions des nombres d'ondes k_g et k_d correspondants. Exprimer $k_d - k_g$ à l'ordre un en $ne^2/m\epsilon_0\omega^2$.
3. Le plasma est confiné entre les plans $z = 0$ et $z = L$. Quelle est la polarisation dans le plan $z = L$ d'une onde engendrée par une onde incidente polarisée rectilignement selon \mathbf{u}_x dans le plan $z = 0$?

Réflexion sur un plasma :

Un plasma neutre dilué est constitué d'électrons considérés comme libres (on note n_0 leur densité volumique) et d'ions positifs supposés fixes.

- a) Montrer qu'on peut lui associer une conductivité complexe γ quand, à l'intérieur du plasma, le seul champ auquel sont soumis les électrons est un champ uniforme sinusoïdal d'expression complexe $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$ où \vec{E}_0 est l'amplitude complexe. Commenter.
- b) On cherche à propager dans le plasma une onde plane progressive harmonique (OPPH) dont le vecteur champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

On note $\vec{v}(z, t)$ la vitesse des électrons.

* On traite le problème dans le cadre d'une étude linéaire. En déduire que la densité volumique de courant et le champ électrique sont liés par la relation :

$$\vec{J} = \underline{\gamma} \vec{E} \quad (\text{en notation complexe})$$

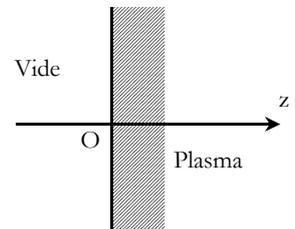
* On suppose que la pulsation est différente de $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}}$. Montrer que l'OPPH est transverse. En donner la relation de dispersion. Que se passe-t-il pour $\omega > \omega_p$ puis pour $\omega < \omega_p$?

* On assimile le plasma à un milieu diélectrique non chargé d'indice $n(\omega)$. Donner l'expression de $n(\omega)$ pour $\omega > \omega_p$ puis pour $\omega < \omega_p$.

c) Le plasma occupe le demi-espace $z > 0$. Une OPPH incidente se propage dans le vide et atteint le plasma sous incidence normale.

* Définir les coefficients (éventuellement complexes) \underline{r} et $\underline{\tau}$ de réflexion et de transmission en amplitude (pour le champ électrique). Les exprimer en fonction de $n(\omega)$.

* Définir et calculer les coefficients réels R et T de réflexion et de transmission en intensité. Tracer la courbe donnant $\frac{\omega}{\omega_p} \rightarrow R(\omega)$. Commenter.



Réflexion sur un plasma (bis) :

On suppose que le plasma précédent occupe le demi-espace $z > 0$; le demi-espace $z < 0$ est occupé par un gaz non ionisé d'indice égale à 1.

Une OPPHR de champ électrique $\underline{E}_1 = E_{01} \exp[i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \mathbf{u}_y$ arrive sur l'interface $z = 0$ sous un angle d'incidence θ et est réfléchi, sous l'angle $-\theta$, en une OPPHR de champ électrique $\underline{E}'_1 = E'_{01} \exp[i(\mathbf{k}'_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \mathbf{u}_y$.

On admet que se propage dans le plasma une onde électromagnétique dont le champ électrique est de la forme $\underline{E}_2 = E_{02} \exp[i(k'x + k''z - \omega t)] \mathbf{u}_y$.

Calculer k' et k'' en fonction de ω , ω_p et θ . Calculer E'_{01} en fonction de ces quantités et de E_{01} . Discuter les résultats obtenus suivant les valeurs de ω et θ .

Correction d'ionosphère sur le temps de parcours d'un train d'onde.

Le plasma ionosphérique a une densité n en électrons et en ions positifs, fonction de l'altitude. Depuis un satellite artificiel à la distance D de la terre, un émetteur radio émet simultanément vers la terre deux trains d'onde étroits centrés sur les pulsations ω_1 et ω_2 .

On mesure l'intervalle de temps entre les instants de réception sur terre des deux trains d'onde. Les pulsations considérées ont une fréquence très supérieure à la pulsation de plasma de l'ionosphère.

En déduire le temps de parcours d'un troisième train d'onde de pulsation centrale ω émis au même moment que les deux autres.



Mécanique quantique et LASER

Longueur d'onde de quelques particules :

Les particules généralement utilisées pour étudier la matière sont : les photons, les électrons ou les neutrons.

Les **photons** sont généralement émis en bombardant un matériau (par exemple du cobalt) avec des électrons. Ainsi certains électrons du cortège électronique du cobalt sont éjectés ($E_{K\alpha}(Co) = 7713eV$). Le retour à l'équilibre conduit à la génération de photons X d'énergies bien précises. Les appareils de laboratoire fonctionnent sur ce principe. De telles techniques ne permettent néanmoins de disposer que d'une ou deux longueurs d'onde spécifiques. Des appareillages plus gros appelés synchrotron (on parle de grands instruments) permettent d'obtenir des photons X sur une gamme continue de longueur d'onde, outil indispensable pour déterminer la structure de grosses molécules par diffraction.

Les **électrons** sont faciles à produire par thermo-émission d'un filament de tungstène par exemple. Ils sont accélérés par une haute tension V_{HT} et ensuite monochromatisés par des lentilles électrostatiques. Cette haute tension varie de 100 V pour des appareillages de diffraction sous vide jusqu'à 300 kV pour des microscopes électroniques.

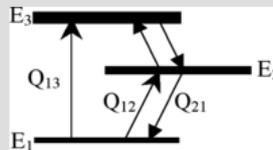
Les **neutrons** sont produits par réaction nucléaire dans un réacteur. Ils s'échappent de la source avec une loi de distribution des vitesses comme un gaz de Boltzmann. Ils sont produits à des températures élevées et sont refroidis ensuite. On dispose de neutrons de température entre 20 et 2000K. On supposera qu'ils n'interagissent pas entre eux. On donne

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s } m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg } m_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg } k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$$

- 1- Cas des photons - Donner l'énergie des photons émis en bombardant le cobalt
- 2- Cas des photons - Donner la longueur d'onde correspondante
- 3- Cas des électrons - Donner la vitesse des électrons pour les 2 tensions d'accélération proposées, dans le cadre classique. Qu'en concluez-vous
- 4- Cas des électrons - Donner alors la vitesse des électrons dans le cas relativiste. On posera pour simplifier les écritures $\alpha = eV_{HT} / m_0 c^2$
- 5- Cas des électrons - Donner l'expression de la longueur d'onde des électrons et la calculer dans les deux cas proposés.
- 6- Cas des neutrons - Donner l'expression de l'énergie du gaz de neutron, puis de la vitesse des neutrons et la calculer pour les deux températures, en se plaçant dans le cas classique. Cette dernière hypothèse est-elle justifiée ?
- 7- Cas des neutrons - En déduire alors la longueur d'onde des neutrons produits

LASER à 3 niveaux :

4 - On considère un système à 3 niveaux comme indiqué sur le dessin suivant, ou sont également indiqués les flux entre niveaux possibles.

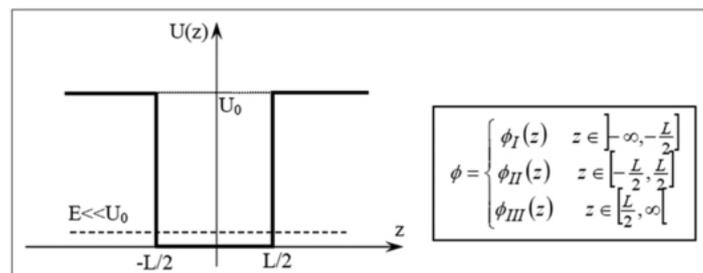


On considère que le flux Q12 est obtenu par un apport d'énergie extérieur et s'écrit sous la forme $Q_{12} = CN_1$ où C est une constante.

- a) Ecrire le flux Q12
- b) Donner l'expression du flux total Q21
- c) Ecrire l'équation cinétique et en déduire l'expression du rapport des populations entre les niveaux 1 et 2
- d) Montrer qu'il est alors possible d'avoir inversion de population et donner la condition à remplir.

Puits de potentiel fini :

Nous reprenons l'exercice précédent mais cette fois pour un potentiel fini. Le potentiel est pris égal à zéro dans le puits de largeur L et égal à U_0 à l'extérieur. Soit une fonction d'onde $\psi(x, t) = \phi(x) \exp(-iEt/\hbar)$ décrivant un état stationnaire d'énergie E.



- 1- Trouver les solutions mathématiques générales (sans déterminer les constantes) de l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans le puits et à l'extérieur du puits.
- 2- Montrer qu'il existe des solutions physiques symétriques ou antisymétriques en amplitude qui s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} z \in]-\infty, -L/2] & \phi_I(z) = Ae^{qz} \\ z \in]-L/2, L/2[& \phi_{II}(z) = B \cos kz \\ z \in [L/2, \infty[& \phi_{III}(z) = Ae^{-qz} \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} z \in]-\infty, -L/2] & \phi_I(z) = Ae^{qz} \\ z \in]-L/2, L/2[& \phi_{II}(z) = B \sin kz \\ z \in [L/2, \infty[& \phi_{III}(z) = -Ae^{-qz} \end{cases}$$

3- Existe-t-il une possibilité de trouver la particule hors de la boîte ?

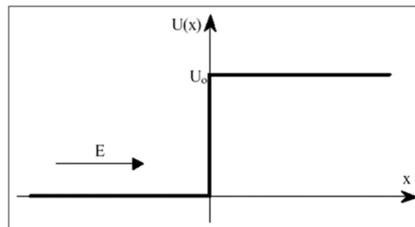
4- Déterminer la condition de quantification des niveaux d'énergie.

5- On se place dans le cas où $E \ll U_0$. Que deviennent les conditions de quantification ? Montrer alors qu'on retrouve les énergies du puits infini.

6- Pourquoi la solution antisymétrique, alors que le problème est symétrique, doit-elle être envisagée ? Tracer l'allure des fonctions d'onde et des probabilités de présence dans les deux cas.

Métal et barrière de potentiel :

La façon la plus simple de modéliser un métal est de considérer que les électrons les moins liés à chaque atome sont libres de se mouvoir dans le matériau (les autres électrons étant plus liés au noyau restent donc sur l'atome). Pour continuer la simplification, négligeons les variations spatiales du potentiel du réseau en considérant que le potentiel est constant dans le métal pour ces électrons libres. Enfin, considérant que les électrons ne peuvent pas sortir du métal, imposons une variation de potentiel à la surface du métal. On représente donc la jonction métal-vide par une marche de potentiel supérieur à l'énergie E des électrons libres comme indiqué sur la figure. On simplifie le problème en prenant un potentiel nul dans la boîte.



1- Résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans chaque région, donner les solutions générales pour $E < U_0$, et déterminer les solutions physiques du problème (à une constante près, l'amplitude de l'onde incidente).

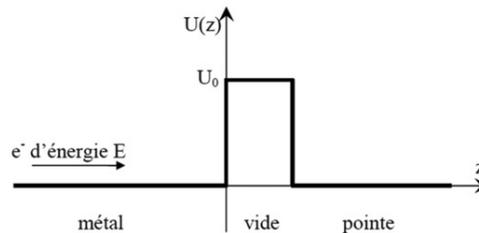
2- Pourquoi ne peut-on normer la fonction d'onde ici ? Que faudrait-il faire ?

3- Est-il possible de trouver l'électron en dehors du métal ?

4- On suppose que $U_0 - E \approx 1 \text{ eV}$, à quelle distance s_0 de la barrière la probabilité de trouver l'électron a chuté d'un facteur 100 ?

Microscopie tunnel :

On place une pointe métallique proche d'une surface conductrice afin de faire passer un courant. On simplifie le problème en terme de potentiel de la façon suivante :



1- Qualitativement, à quelle distance doit être placée la pointe pour espérer voir un courant significatif ?

2- Ecrire les solutions mathématiques et donner le système d'équations permettant de déterminer les solutions physiques du problème (on ne cherchera pas à le résoudre). On considérera qu'il n'y a pas d'onde provenant de z infini positif.

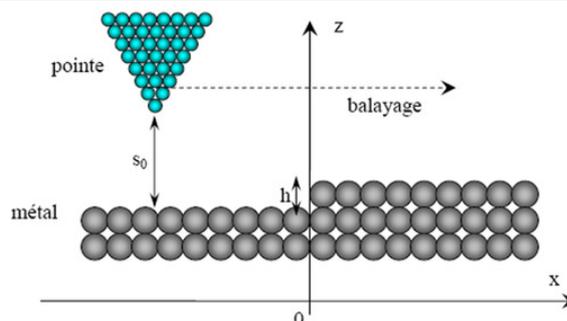
3- Montrer que la résolution de ce système d'équations permet d'obtenir l'amplitude de l'onde transmise $E \exp ikz$ par rapport à l'onde incidente $A \exp ikz$ comme :

$$\frac{E}{A} = \frac{4ia e^{-iks} e^{-qs}}{(a+i)^2 \alpha - (i-a)^2} \quad \text{avec} \quad a = \frac{q}{k} \quad \text{et} \quad \alpha = e^{-2qs}$$

4- Déterminer le coefficient de transmission comme :

$$T = \frac{1}{1 + \left(\frac{k^2 + q^2}{2kq} \right)^2 sh^2 qs}$$

5- En déduire l'expression classique du transport tunnel : $T \propto \exp - 2qs$



6- On suppose que la pointe « survole » une surface à une distance constante. Sur cette surface se trouvent des marches dues à des plans atomiques non complets, comme le montre la figure ci-après. Sachant que la hauteur d'une marche est de l'ordre de 0,1 nm, calculer de combien varie le courant lorsque la pointe passe au dessus de la marche pour $U_0 = E = 1\text{eV}$. Que dire alors de la sensibilité verticale d'un microscope à effet tunnel ?

7- On maintient le substrat à la masse, et on met un potentiel positif V sur la pointe. Comment la courbe de potentiel est-elle modifiée ? Peut-on résoudre notre problème aussi "simplement" que précédemment ?

Conformations de la molécule d'ammoniac :

La molécule d'ammoniac $^{14}\text{NH}_3$ se présente sous la forme d'une pyramide symétrique, l'atome d'azote étant à son sommet. Les trois atomes d'hydrogène définissent le plan de référence. La position de l'atome d'azote est repérée par l'abscisse x telle que $|x|$ soit la distance de l'atome au plan de référence Oyz (figure 8).

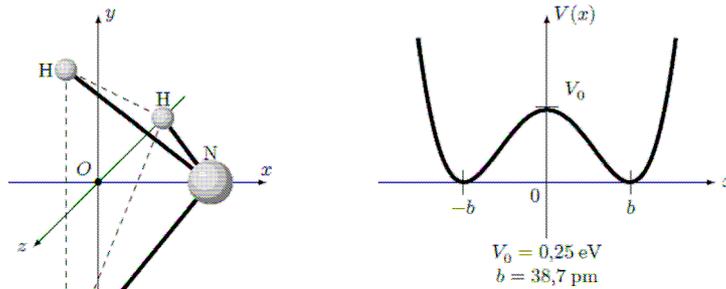


Figure 8 Géométrie et énergie potentielle de la molécule d'ammoniac

III.A.1) Interpréter la forme, la symétrie et les points particuliers de la courbe d'énergie potentielle $V(x)$.

La molécule d'ammoniac peut se trouver dans deux états de conformation, selon que l'atome se trouve du côté $x > 0$ (conformation D, figure 9) ou du côté $x < 0$ (conformation G). Les deux états sont séparés par une barrière de potentiel $V_0 = 0,25\text{eV}$. On appelle inversion le passage d'une conformation à l'autre, lorsque l'atome d'azote traverse la barrière d'énergie due aux trois atomes d'hydrogène.

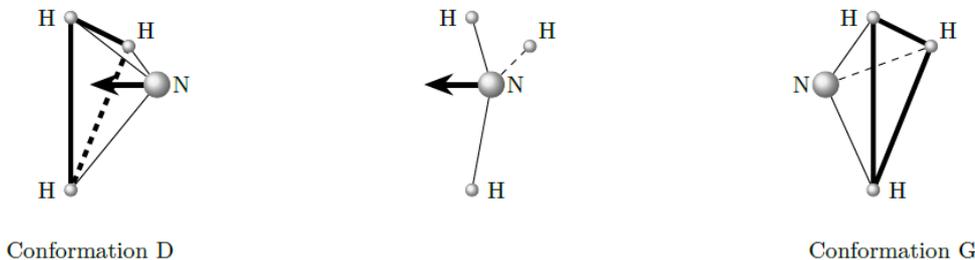


Figure 9 Inversion de la molécule d'ammoniac

III.A.2) L'énergie $k_B T$ est-elle suffisante pour que la molécule puisse s'inverser si la température est celle du point triple de l'eau T_{PT} ?

À partir de quelle température cette inversion peut-elle s'effectuer ? Commenter.

III.B – Inversion quantique de la molécule d'ammoniac

On se propose de montrer que l'inversion de la molécule d'ammoniac est possible du point de vue quantique, indépendamment de la température. La fonction d'onde décrivant le mouvement relatif de l'atome d'azote et des trois atomes d'hydrogène est notée $\psi(x, t)$; elle vérifie l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) + V(x)\psi(x, t)$$

où m est la masse réduite du système composé de l'atome d'azote et des trois atomes d'hydrogène (on prendra $m \approx 2,5 m_H$).

III.B.1) On s'intéresse aux états stationnaires d'énergie E et on pose $\psi(x, t) = \varphi(x) \exp(-iEt/\hbar)$.

Montrer que $\varphi(x)$ vérifie l'équation III.1

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2} \varphi(x) = 0 \quad (\text{III.1})$$

On considère dans un premier temps un modèle de potentiel $V_1(x)$ à double puits infini symétrique rectangulaire (figure 10).

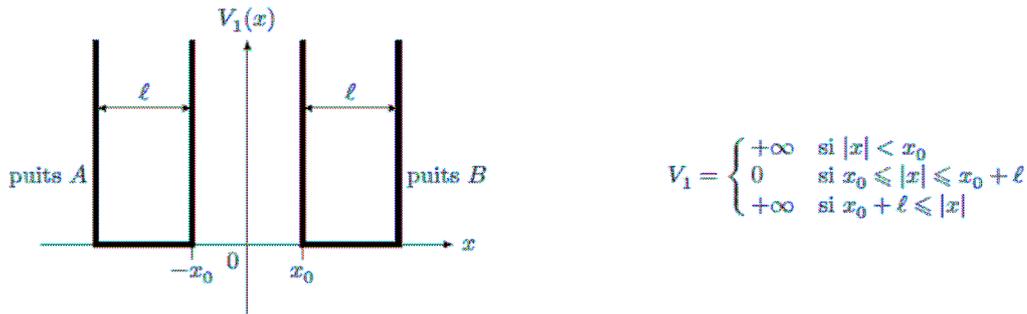


Figure 10 Profil en double puits infini symétrique rectangulaire

Les fonctions d'onde localisées dans le puits A sont notées $\psi_A(x, t)$, celles localisées dans le puits B , $\psi_B(x, t)$. Les fonctions $\varphi(x)$ associées sont notées respectivement $\varphi_A(x)$ et $\varphi_B(x)$.

III.B.2)

- Que veut dire qu'une fonction d'onde est localisée sur un domaine ?
- Pourquoi doit-on considérer les fonctions d'onde identiquement nulles pour $|x| < x_0$ et $|x| > x_0 + \ell$? Quelles sont les conditions aux limites de $\varphi_A(x)$ et $\varphi_B(x)$?
- Donner, sous forme intégrale, sans les calculer, les conditions de normalisation pour $\varphi_A(x)$ et $\varphi_B(x)$.

III.B.3)

- Résoudre l'équation III.1 pour le potentiel $V_1(x)$ dans l'intervalle $[-x_0 - \ell, -x_0]$ correspondant au puits A . On donnera les solutions normalisées $\varphi_{A,n}(x)$ indicées par un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et les énergies E_n^A associées.
- Quelles sont, sans calculs, les solutions $\varphi_B(x)$ et les énergies E_n^B ?
- Soit une molécule d'ammoniac dans un état décrit par $\psi_{A,n}(x, t)$ d'énergie E_n^A à un instant t donné. Quelle est la probabilité de trouver l'atome d'azote dans l'intervalle $[x_0, x_0 + \ell]$ à l'instant $t' > t$? Conclure.

On modélise cette fois le profil d'énergie potentielle par un double puits infini rectangulaire à saut fini, $V_2(x)$ (figure 11).

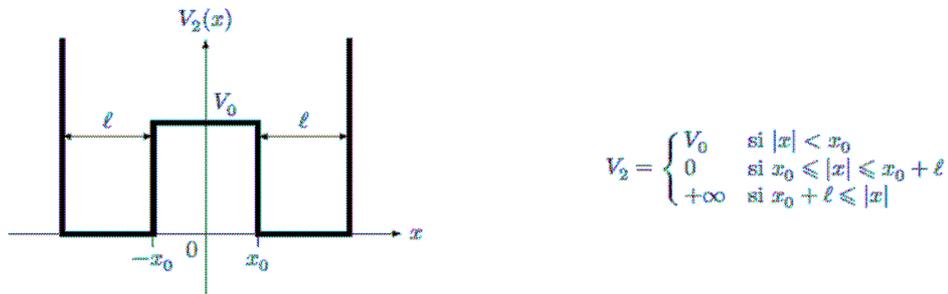


Figure 11 Profil en double puits à saut fini

On donne $V_0 = 0,25 \text{ eV}$, $x_0 = 10 \text{ pm}$. On considère $0 \leq E \leq V_0$.

III.B.4) Justifier que dans le domaine $x_0 \leq x \leq x_0 + \ell$, la solution de l'équation III.1 s'écrit

$$\varphi_B(x) = \mathcal{B} \sin(k(x - x_0 - \ell)) \quad \text{avec } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

où \mathcal{B} une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer. En déduire une forme de solution $\varphi_A(x)$ dans le domaine $-x_0 - \ell \leq x \leq -x_0$.

III.B.5) Dans le domaine $-x_0 < x < x_0$, les solutions de l'équation III.1 s'écrivent

$$\varphi_C(x) = C_1 \cosh(Kx) + C_2 \sinh(Kx)$$

où C_1 , C_2 et K sont des constantes.

- Exprimer K en fonction de E , V_0 , m et \hbar .

b) Quelles conditions doivent être vérifiées par la fonction d'onde $\psi(x, t)$ en tout point où le potentiel est borné ?
 En déduire deux relations entre $\varphi_C(x_0^-)$, $\varphi_B(x_0^+)$, $\frac{d\varphi_C}{dx}(x_0^-)$ et $\frac{d\varphi_B}{dx}(x_0^+)$.

À partir de ces relations qui relient K à k , il est possible de déterminer l'énergie E de l'état stationnaire $\varphi(x)$, selon qu'il est symétrique (ou pair en x , ce qui conduit à $C_2 = 0$) ou antisymétrique (ou impair en x , donc $C_1 = 0$).

III.B.6) La première solution symétrique $\varphi_1^{\text{sym}}(x)$ d'énergie E_1^{sym} et la première solution antisymétrique, impaire en x , $\varphi_1^{\text{anti}}(x)$ d'énergie E_1^{anti} sont représentées figure 12. Dans le cas où les énergies de ces deux états sont très petites devant V_0 , leur différence est

$$\delta E = E_1^{\text{anti}} - E_1^{\text{sym}} = \frac{4\pi^2 \hbar^3 \exp(-2x_0 \sqrt{2mV_0}/\hbar)}{m\ell^3 \sqrt{2mV_0}}$$

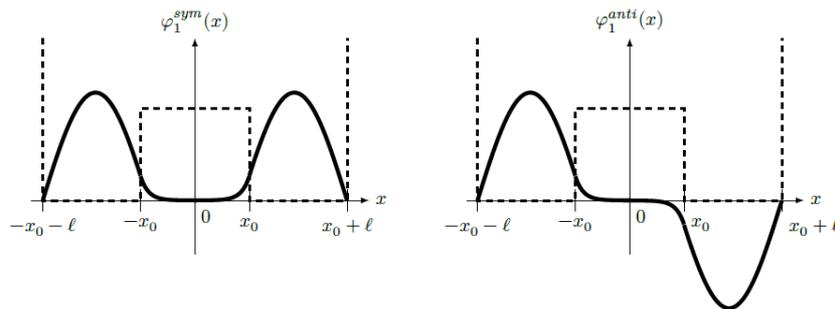


Figure 12 Solutions φ_1^{sym} et φ_1^{anti}

À l'instant $t = 0$, la molécule d'ammoniac est dans une conformation G (figure 13), décrite par la fonction d'onde

$$\psi(x, 0) = \varphi_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1^{\text{sym}}(x) + \varphi_1^{\text{anti}}(x))$$

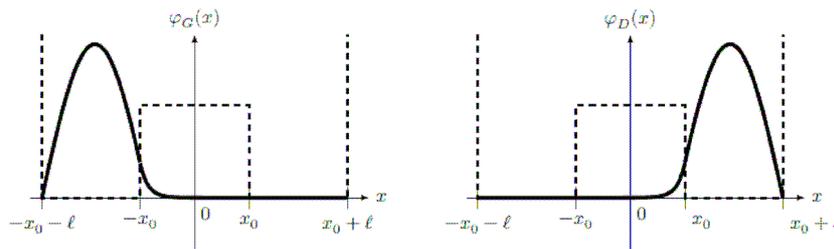


Figure 13 Fonctions φ_G et φ_D

a) Écrire l'expression de la fonction d'onde $\psi(x, t)$ de la molécule d'ammoniac à un instant t quelconque, en fonction de φ_1^{sym} , φ_1^{anti} , des énergies E_1^{anti} et E_1^{sym} et de \hbar .

b) Pourquoi deux fonctions d'onde ψ_1 et ψ_2 telles que $\psi_1 = \psi_2 \exp(i\alpha)$, où $\exp(i\alpha)$ est un nombre complexe de module 1, décrivent-elles le même état physique ?

c) En déduire que la fonction d'onde $\psi(x, t)$ décrit une évolution périodique de l'état de la molécule d'ammoniac, dont on exprimera la période τ en fonction de δE et de \hbar . Calculer la fréquence f correspondante si $\delta E = 9,85 \times 10^{-5}$ eV. Dans quel domaine spectral se situe une onde électromagnétique de fréquence f ?

C'est sur cette transition que fonctionna le premier maser construit par C. Townes, J. Gordon et H. Ziegler en 1954.

d) Décrire l'état de la molécule d'ammoniac à l'instant $t = \tau/2$. En quoi ce changement d'état entre les instants $t = 0$ et $t = \tau/2$ permet-il d'illustrer l'effet tunnel ?

e) Quelle est l'influence de la barrière de potentiel V_0 et de la largeur x_0 sur la fréquence d'oscillation f ? Pour l'arsine, de formule AsH_3 , de même structure que NH_3 , la hauteur de la barrière de potentiel est multipliée par six et sa largeur par cinq. Calculer la fréquence f' d'inversion de l'arsine ainsi que la période τ' . Commenter.

Stabilité de l'atome d'hydrogène :

L'atome d'hydrogène est constitué d'un proton immobile en O et d'un électron de masse m et de charge $-e$, placé au point M. L'électron gravite autour du proton, sur une trajectoire circulaire uniforme de rayon $r = OM$.

1) Par analogie avec l'optique et en utilisant la notion d'interférences constructives, montrer qu'il existe une condition de quantification entre la longueur d'onde λ de De Broglie de l'électron et le rayon r donnée par :

$$2\pi r = n\lambda$$

En déduire que le moment cinétique de l'électron par rapport au proton est quantifié et qu'il peut s'écrire :

$$L_o = n\hbar \quad (n \text{ entier naturel})$$

2) Une « action » (écrite A) est une quantité physique d'un système qui a, pour unité, celle de la constante de Planck réduite \hbar . Par exemple, dans le cas de l'atome d'hydrogène, le moment cinétique correspond à une action.

Une montre constitue t'elle un système classique ou quantique ?

3) On se place en mécanique classique. On note v la vitesse de l'électron ; déterminer une relation entre v et le rayon r .

4) L'électron possède une accélération a : il va émettre un rayonnement électromagnétique. La formule de Larmor donne la puissance P émise par l'électron :

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} a^2$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

L'électron est supposé être dans son état fondamental $n = 1$.

- Quel est l'ordre de grandeur de l'énergie perdue par l'électron lors d'une révolution ?
- On note $r(t)$ le rayon de la trajectoire de l'électron au cours du temps. Montrer que ce rayon vérifie l'équation différentielle suivante, moyennant une approximation que l'on précisera :

$$\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{4}{3} \frac{1}{m^2 c^3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r(t)^2}$$

Pouvez - vous estimer le temps nécessaire à l'électron pour tomber sur le proton ?

Etoile à neutrons :

Une étoile à neutrons se forme à la suite de l'explosion d'une supernova (forme ultime de l'évolution d'une étoile très massive). Elle est caractérisée par un faible diamètre (de l'ordre de la dizaine de kilomètres) et une masse comparable à celle du Soleil. Il en résulte qu'elle forme un astre assez dense.

On considère une étoile à neutrons de masse $M = 2.10^{30} \text{ kg}$, exclusivement constituée de neutrons de masse $m = 1,67.10^{-27} \text{ kg}$. On suppose que la densité de neutrons est uniforme à l'intérieur de l'étoile, qui est assimilée à une boule de rayon R . Les neutrons forment un gaz de particules quantiques sans interaction.

1) Calculer le nombre N de neutrons dans l'étoile.

2) On admet que l'énergie cinétique de chaque neutron peut être évaluée en supposant qu'il est confiné dans un volume V/N , où V est le volume de l'étoile.

a) Exprimer l'échelle de longueur caractéristique r du confinement d'un neutron en fonction de V et de N . Faire l'application numérique.

b) Retrouver l'expression de l'énergie de confinement d'une particule quantique dans un puits de potentiel infini. On pourra proposer deux méthodes de résolution.

En déduire que l'énergie cinétique totale des neutrons s'écrit, à une constante multiplicative près, sous la forme :

$$E_c \approx \frac{\hbar^2 N^{5/3}}{mR^2}$$

3) Du fait de l'attraction gravitationnelle que les neutrons exercent entre eux, l'étoile possède une énergie de cohésion gravitationnelle E_g , qui s'exprime simplement en fonction de la constante de gravitation universelle G , de sa masse M et de son rayon R .

Déterminer, par analyse dimensionnelle, une expression de E_g (à une constante multiplicative près).

4) Représenter l'allure de l'énergie totale de l'étoile $E = E_c + E_p$. L'équilibre de l'étoile est atteint lorsque cette énergie est minimale. Montrer qu'il existe un rayon d'équilibre pour l'étoile et en déduire sa masse volumique.

5) Comparer cette masse volumique à celle d'un noyau atomique.

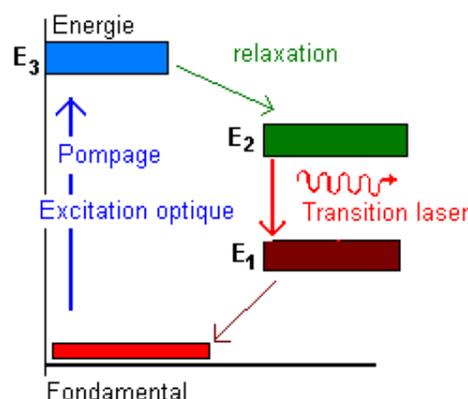
Laser :

On réalise un laser à l'aide d'un système atomique présentant 4 niveaux d'énergie tels que $E_0 < E_1 < E_2 < E_3$. On souhaite obtenir l'effet laser entre les niveaux (1) et (2).

On note $N_0(t)$, $N_1(t)$, $N_2(t)$ et $N_3(t)$ les nombres d'atomes dans les différents niveaux à la date t .

- On néglige les émissions spontanées entre le niveau (3) et le niveau (0) et entre le niveau (3) et le niveau (1).
- On note $u_\nu(T, \nu)$ la densité d'énergie électromagnétique par unité de fréquence, correspondant à la fréquence de l'effet laser.
- On réalise un pompage optique du niveau (0) au niveau (3). On désigne par C le taux de pompage : le nombre d'atomes de l'état (0) pompés pendant dt vers le niveau (3) est $CN_0(t)dt$.

1) Définir les coefficients d'Einstein A_{21} et B associés aux niveaux (1) et (2).



2) Etablir le système d'équations différentielles auquel satisfont les nombres d'atomes $N_0(t)$, $N_1(t)$, $N_2(t)$ et $N_3(t)$ en fonction des coefficients d'Einstein A_{10} , A_{20} , A_{21} , A_{32} , B , de $u_\nu(T, \nu)$ et du taux de pompe C .

3) On suppose que N_0 est constant.

a) Quelle équation relie alors $N_1(t)$ et $N_2(t)$?

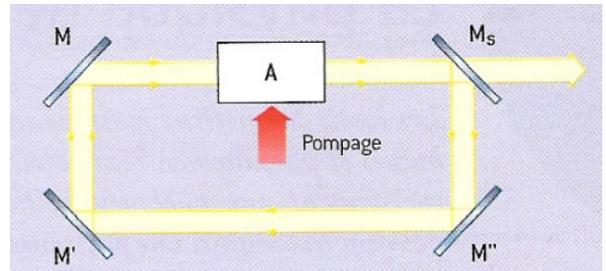
b) Trouver la loi d'évolution de $N_3(t)$ sachant que $N_3(0) = 0$. En déduire sa valeur limite qu'on supposera atteinte dans la suite. A quel instant peut – on considérer que cette valeur est atteinte ?

4) On se place dans la suite en régime indépendant du temps. Pouvez – vous justifier cette hypothèse ? Déterminer alors les expressions des populations N_1 et N_2 en fonction de N_0 et de coefficients d'Einstein.

5) Quelle est la condition à vérifier pour que l'inversion de populations puisse se produire ?

6) Un laser en anneau (voir figure suivante) est composé de 4 miroirs identiques de coefficient de réflexion en énergie égal à 0,99. Quelle est la valeur minimale du gain du milieu amplificateur pour obtenir l'effet laser ?

7) La longueur totale de l'anneau est $L = 60$ cm. Le laser fonctionne en multi-modes (on en observe 3) et sa longueur d'onde moyenne est $\lambda_0 = 1060$ nm. Calculer la longueur de cohérence de ce laser.

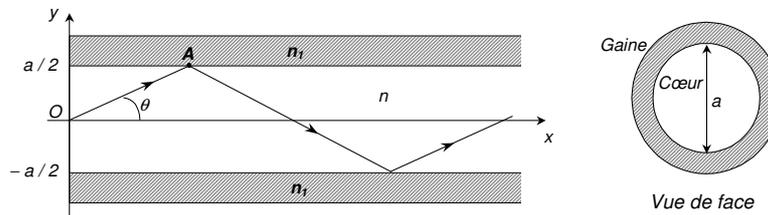


Optique géométrique

Etude d'une fibre à saut d'indice :

Une fibre optique est un guide de lumière qui permet un guidage de l'information par l'intermédiaire de la lumière qui peut s'y propager. Elle est constituée d'un cœur (en matériau transparent comme le verre ou le quartz) entouré d'une gaine d'indice optique plus faible afin que tout rayon lumineux rentrant à l'intérieur du cœur y reste piégé (phénomène de réflexion totale).

Le signal à transmettre par l'intermédiaire de la fibre est souvent un signal électrique ; celui-ci est alors transformé en signal lumineux par l'intermédiaire, par exemple, d'une diode électroluminescente et d'un dispositif modulateur. Ce signal est alors transmis au récepteur situé au bout de la fibre optique, dont la longueur peut être très grande (plusieurs milliers de km lors de la transmission d'informations d'un continent à un autre !) où il doit être transformé en courant électrique, par l'intermédiaire par exemple d'une photodiode ou d'un phototransistor, puis amplifié et traité.



Cet exercice propose l'étude d'une fibre optique appelée fibre optique à saut d'indice, constituée d'un fil cylindrique transparent d'indice n entouré d'une gaine transparente d'indice de réfraction n_1 plus faible. On donne $n = 1,500$, $n_1 = 1,490$ et $a = 50 \mu\text{m}$ (voir figure).

On considère un rayon lumineux qui se réfléchit alternativement sur les deux dioptries en restant dans le plan (Oxy) ; on note θ l'angle (Ox, OA) .

a) Montrer qu'il n'y a absence de rayon réfracté dans le milieu d'indice n_1 que si $\theta < \theta_1$. Exprimer θ_1 en fonction de n et de n_1 . Calculer θ_1 .

b) Le rayon lumineux est émis en O à l'instant $t = 0$. Il se propage dans la fibre optique selon le trajet représenté sur la figure et est perçu par un détecteur placé à l'abscisse x à l'instant τ . Exprimer τ en fonction de θ , n , x et c (vitesse de la lumière dans le vide, égale à $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$).

c) L'angle θ peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et θ_1 ; par conséquent, τ est compris entre deux valeurs τ_0 et $\tau_0 + \Delta\tau$. Exprimer $\Delta\tau$ en fonction de c , θ_1 , n et x .

Zone d'ombre et fibre optique :

1) Une source $S(x = 0, y = 0, z = b)$ émet des rayons lumineux dans les directions $\vec{u}_0 = \sin\theta_0 \vec{u}_x + \cos\theta_0 \vec{u}_y$, avec $0 \leq \theta_0 \leq \pi$.

Ces rayons se propagent dans un milieu inhomogène où l'indice lumineux vaut :

$$n(z) = n_0 \sqrt{1 + \frac{z}{a}} \quad \text{avec} \quad a > 0$$

a) En découpant le milieu en tranches d'épaisseur dz comprises entre $z - dz/2$ et $z + dz/2$ et quasi-homogènes d'indice $n(z)$, montrer que les rayons lumineux restent dans le plan Sxz . θ

désignant l'angle du rayon lumineux avec Oz, montrer que $n(z) \cdot \sin \theta(z)$ est constant le long d'un rayon lumineux et évaluer la constante en fonction de n_0 , a , b et θ_0 .

b) En déduire que l'équation du rayon lumineux issu de $S(x = 0, y = 0, z = b)$ dans le plan xOz est solution de :

$$\sin^2 \theta_0 \left(1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right) = \frac{z+a}{b+a} \quad (E)$$

c) En déduire que :

$$z = \frac{x^2}{4(a+b)\sin^2 \theta_0} + x \cot \theta_0 + b$$

(Aussi bizarre que cela puisse paraître, il est conseillé de dériver l'équation (E) et d'intégrer ensuite deux fois).

d) Soit $M(x, z)$ un point donné de l'espace. Montrer que les valeurs possibles de $u = \cot \theta_0$ pour les rayons lumineux passant par M sont données par une équation du second degré en u .

En déduire qu'il existe une zone d'ombre, lieu des points M de l'espace ne pouvant pas être atteints par les rayons lumineux issus de S .

2) Pour modéliser une fibre optique, on suppose désormais qu'une source S ($x = 0, y = 0, z = 0$) émet des rayons lumineux de manière isotrope dans un milieu inhomogène où l'indice vaut :

$$n(|z| \leq d) = n_0 \sqrt{1 - \frac{|z|}{a}} \quad \text{et} \quad n(|z| \geq d) = n_0 \sqrt{1 - \frac{d}{a}}$$

a) En exploitant les calculs faits dans la partie 1, montrer que les rayons lumineux sont guidés par le domaine $|z| \leq d$ si $|\cos \theta_0|$ est inférieur à une valeur critique qu'on exprimera en fonction de a et d .

b) Peut-on former une image de la source S à travers la fibre optique si on se limite aux rayons paraxiaux, pour lesquels $\theta_0 = \pi/2$?

Rayon d'une tache lumineuse :

Une source ponctuelle (S) est placée sur l'axe d'une lentille convergente de distance focale image f' . Le rayon de la lentille est R . Calculer, en fonction de f' , R et $\sigma = \overline{FS}$, le rayon de la tache lumineuse qui se forme sur un écran confondu avec le plan focal image.

Foyers d'un doublet :

Un doublet est formé d'une lentille convergente de distance focale 15 cm et d'une lentille convergente de distance focale 10 cm, les centres optiques des deux lentilles étant distants de 5 cm. Déterminer les positions des foyers du doublet.

Lunette de Galilée :

Une lunette de Galilée comprend un objectif constitué par une lentille convergente de distance focale $f'_1 = 25$ cm, un oculaire constitué par une lentille divergente de distance focale $f'_2 = -5$ cm. Ces deux lentilles sont placées à 20 cm l'une de l'autre, leurs axes optiques coïncidant.

a) Faire un schéma du dispositif et tracer la marche d'un rayon lumineux, passant par le centre optique O_1 et faisant un angle θ avec l'axe optique.

b) Quel angle θ' fait le rayon émergent de la lunette avec l'axe optique ?

En déduire le grossissement $G = \theta' / \theta$ de la lunette.

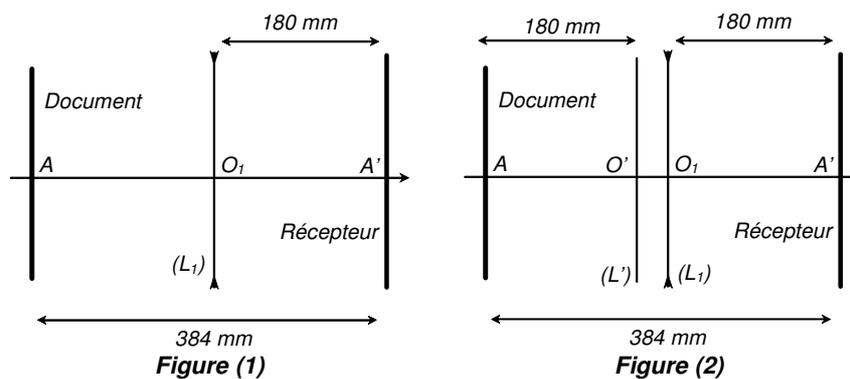
c) Un observateur, à vue normale, peut distinguer deux objets séparés d'un angle de 3.10^{-4} rad. Il observe, à 6 km (distance suffisante pour considérer que l'objet est à l'infini) les phares d'une voiture séparés de 1,20m.

Peut-il distinguer les deux phares à l'œil nu ? Avec la lunette précédente, sous quel angle θ' aperçoit-il les phares ? Peut-il les distinguer ?

Objectif de photocopieur :

Les procédés actuels de reprographie nécessitent la formation de l'image du document sur une surface photosensible par l'intermédiaire d'un objectif de reproduction. On désire reproduire un document de format A4 soit en A4 (même format), en A3 (format double en surface) ou en A5 (format moitié en surface). On réalise ces différents tirages à l'aide d'un objectif en modifiant la position respective des lentilles à l'intérieur du système.

La distance entre le document et le récepteur photosensible est de 384 mm et l'on positionne une première lentille mince divergente (L_1) de distance focale image $f'_1 = -90$ mm à 180 mm du récepteur (figure (1)).



a) La lentille (L_1) peut-elle donner une image du document sur le récepteur ?

b) On ajoute alors une lentille mince (L') devant la lentille (L_1) à 180 mm du document (figure (2)). Calculer la distance focale image f' de cette lentille pour obtenir une image réelle du document sur le récepteur.

En déduire le grandissement γ_1 de l'association des deux lentilles et indiquer quel type de tirage permettra cet objectif : transformation de A4 en A3 ou de A4 en A5.

c) En fait la lentille (L') est constituée de deux lentilles accolées (L'_2) et (L_3), (L'_2) étant identique à (L_1). Calculer la distance focale image f'_3 de la lentille (L_3). Quelle est la nature de cette lentille mince ?

d) On glisse alors la lentille (L_3) afin de l'accoler à (L_1). Montrer que l'image du document reste sur le récepteur et calculer le grandissement correspondant γ_2 correspondant à l'association de ces trois lentilles ; en déduire le type de tirage obtenu.

Lunette astronomique :

La lunette astronomique est constituée d'un objectif que l'on assimilera à une lentille mince convergente de distance focale f et d'un oculaire que l'on assimilera à une lentille convergente de distance focale f' avec $f' \ll f$, de même axe optique que l'objectif.

1) L'objectif forme dans son plan focal des images réelles très réduites d'objets immenses situés à de très grandes distances. Par exemple la Lune est vue sous un diamètre angulaire moyen $\alpha = 31,5'$ et la distance moyenne Terre-Lune a pour valeur $D_{TL} = 382.10^3$ km.

Calculer le diamètre d de l'image réelle de la Lune dans le plan focal d'un objectif de distance focale $f = 1,78$ m.

Calculer le grandissement γ de l'objet.

2) La distance entre le centre optique de l'objectif et le centre optique de l'oculaire est égale à la somme des distances focales f et f' . Le système résultant est afocal : expliquer ce que cela signifie.

3) On appelle grossissement angulaire G le rapport des angles sous lesquels sont vus l'image à l'infini derrière l'oculaire et l'objet à l'infini sans optique.

Donner l'expression du grossissement angulaire G de la lunette astronomique.

Application numérique : $f = 1,78$ m ; $f' = 12$ mm.

4) Calculer le diamètre du cercle oculaire pour un objectif de diamètre 100 mm. Comparer avec la dimension minimale de la pupille qui a un diamètre de 2 mm.

Téléobjectif d'appareil photographique :

On assimile l'objectif d'un appareil photographique à une lentille mince convergente (L) de centre O et de distance focale image f' . La distance d entre (L) et l'écran (E) où se trouve la pellicule sensible est variable, ce qui permet d'effectuer la mise au point.

On ne tiendra pas compte des effets de la diffraction et le problème sera traité dans le cadre de l'optique géométrique.

. Mise au point de l'objectif : on désire photographier des objets dont la distance à (L) varie de x à l'infini. Dans quel domaine doit pouvoir varier d ? Calculer numériquement les valeurs extrêmes, d_{\min} et d_{\max} , lorsque $x = 60$ cm et $f' = 50$ mm.

On se propose de photographier une tour (AB) haute de 50 m et distante de $D = 2$ km.

2. Encombrement de l'objectif standard : quelle serait la taille de l'image $A'B'$ sur la pellicule si la mise au point était faite avec l'objectif standard étudié à la question précédente ? Quelle serait alors la valeur numérique de « l'encombrement » de l'objectif, c'est-à-dire la distance de l'objectif à la pellicule ?

3. Agrandissement d'un téléobjectif : Pour agrandir l'image, on considère le système formé par la lentille convergente (L_1) de distance focale $f'_1 = \overline{O_1F'_1} = 50$ mm suivie d'une lentille divergente (L_2) dont la distance focale est $f'_2 = \overline{O_2F'_2} = -25$ mm, la distance entre les deux lentilles étant $\overline{O_1O_2} = 31,2$ mm. On note $A''B''$ l'image de la tour (AB) par le système optique des deux lentilles.

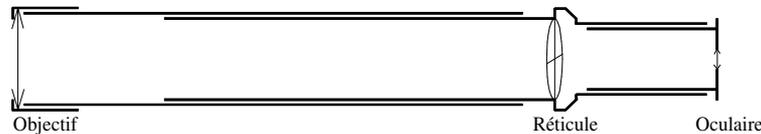
a) Déterminer la position de A'' par rapport à O_2 , puis la taille $\overline{A''B''}$ de l'image $A''B''$. Comparer cette dernière à la taille de l'image $A'B'$ obtenue à la question (1). Evaluer l'encombrement du téléobjectif ainsi monté.

b) Quelle serait la distance focale f'_M d'une lentille convergente unique qui donnerait de la tour la même taille d'image $\overline{A''B''}$ que le téléobjectif ? Comparer son encombrement à ceux calculés précédemment et conclure.

Lunette de goniomètre, goniomètre et lunette de visée :

1) Caractéristiques de la lunette :

Une lunette est constituée par un objectif, un réticule et un oculaire. On admettra pour simplifier qu'objectif et oculaire sont des lentilles minces convergentes de distances focales image respectives f_1' et f_2' .



a) L'utilisateur observe sans effort le réticule à travers l'oculaire ; quelle doit être la position du réticule par rapport à l'oculaire ? Où l'utilisateur doit-il placer son œil si l'on considère cet œil normal ?

b) Le réglage de la lunette nécessite l'observation sans fatigue de l'image nette d'un objet situé à grande distance. Quelle est la distance entre objectif et oculaire dans ce cas ? Comment peut-on qualifier la lunette ainsi réalisée ?

c) Donner l'expression du grossissement en fonction des distances focales de l'objectif et de l'oculaire.

2) Utilisation dans le goniomètre :

a) Quelle est la disposition relative du collimateur, du prisme et de la lunette ? On fera un schéma succinct et on détaillera le rôle du collimateur.

b) Indiquer l'observation faite lors de la décomposition de la lumière de la lampe à vapeur de mercure. Quel est le type de spectre obtenu ?

3) Déviation du prisme :

a) Définir, sur un schéma, ce que l'on appelle la déviation du prisme pour une lumière monochromatique.

b) Donner l'allure de la courbe donnant la déviation du prisme en fonction de l'angle d'incidence sur la face d'entrée.

4) Autre utilisation de la lunette ; transformation en « frontale fixe » :

a) La lunette étant réglée à l'infini, on place en avant de l'objectif une lentille supplémentaire convergente, la bonnette, de distance focale bien connue f_3' et assimilée à une lentille mince. Montrer qu'un tel dispositif permet de viser des objets à distance constante de la bonnette. La distance entre bonnette et objectif est-elle quelconque ?

b) On peut aussi obtenir le même résultat par déplacement de la lunette elle-même. On appelle tirage la distance d dont on peut déplacer l'objectif du réticule par rapport au réglage de la lunette à l'infini. Quelle est la conséquence d'éloigner l'objectif du réticule ?

Application numérique : $f_1' = 10$ cm ; $f_2' = 2$ cm et $d = 6$ cm.

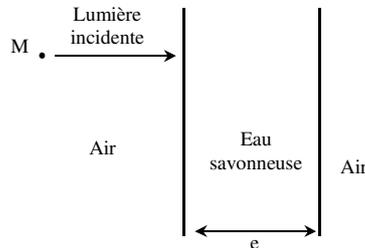
Soit l'image d'un objet A_1B_1 vu nette dans la lunette de tirage d . Un objet A_2B_2 est à la distance D de A_1B_1 et placé en avant. De combien doit-on déplacer la lunette pour que l'observateur voit nette l'image de A_2B_2 ?



Optique ondulatoire

Réflexion colorée d'une bulle de savon :

Une bulle de savon est assimilée localement à une lame à faces parallèles, d'épaisseur e et d'indice $n = 1,33$. La lame est éclairée sous incidence normale et on néglige les ondes issues de la lame après plus de deux réflexions.



- a) Exprimer le déphasage existant entre deux ondes réfléchies et qui se superposent en un point M situé en avant de la lame. L'indice de l'air est égal à 1.
- b) Montrer qu'il existe une condition sur la longueur d'onde λ_0 de l'onde dans le vide pour que la lumière soit réfléchie avec une intensité maximale.
- c) Lorsqu'un observateur regarde en hauteur et à la verticale de la bulle, celle-ci lui apparaît jaune. Déterminer les valeurs possibles de son épaisseur.

Les bilentilles de Billet :

La distance focale d'une lentille CV (L) est $f' = 0,60$ m pour la radiation $\lambda_0 = 546$ nm émise par une fente lumineuse horizontale (A) située à 1 m de (L), perpendiculaire à son axe et au plan de la figure.

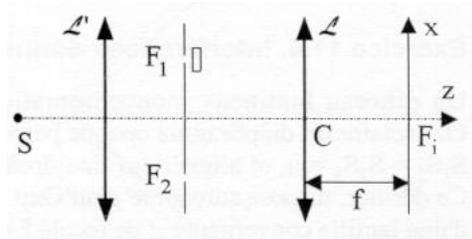
- a) La lentille est sciée suivant un diamètre horizontal et les deux demi-lentilles (L_1) et (L_2) sont écartées verticalement dans leur plan à la distance $b = 1,2$ mm. Calculer la position des images A'_1 et A'_2 de la fente donnée par la bilentille.
- b) Dessiner le contour du champ d'interférences en avant d'un écran (E) placé à 3 m en arrière de la lentille. Calculer le nombre de franges observables sur l'écran.

Fentes d'Young ; déplacement et brouillage des franges :

On considère le dispositif interférentiel des fentes d'Young, avec observation dans le plan focal d'une lentille mince convergente (L). On donne :

$$F_1 F_2 = a = 1 \text{ mm} ; \lambda = 600 \text{ nm} ; f = 50 \text{ cm}$$

- a) Décrire la figure d'interférences observée ainsi que la répartition d'intensité $I(x)$.



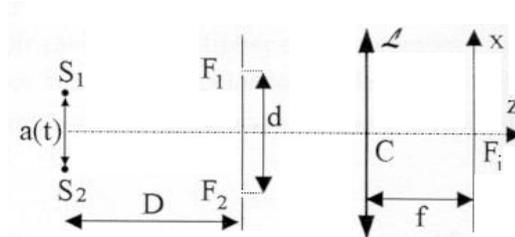
b) On intercale sur le trajet de l'un des faisceaux une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n . Les faces sont perpendiculaires à l'axe de symétrie. Déterminer le nombre N de franges qui ont défilées en F_i . On prendra $n_{\text{air}} = 1$, $n = 1,5$ et $e = 0,5$ mm.

c) A partir de cette position, on tourne la lame d'un angle θ . Sachant que l'on peut apprécier au mieux le déplacement de 0,1 frange, avec quelle précision peut-on régler la position de la lame ?

d) On supprime la lame à faces parallèles. Les fentes sont maintenant éclairées par le doublet jaune du sodium formé de deux radiations, supposées monochromatiques et de même intensité, de longueurs d'onde $\lambda_1 = 589,0$ nm et $\lambda_2 = 589,6$ nm. A quelle distance de la frange centrale les franges disparaissent-elles pour la 1^{ère} fois ?

Interférences données par deux sources en mouvement :

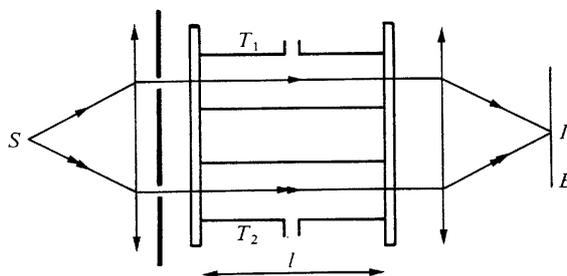
On observe la figure d'interférences des fentes d'Young dans le plan focal d'une lentille convergente (L). Les sources ponctuelles et monochromatiques, de même longueur d'onde λ , S_1 et S_2 se déplacent à vitesse constante V_0 perpendiculairement aux fentes et symétriquement par rapport à l'axe du système.



Montrer qu'il y a périodicité du brouillage du système de franges et donner la période T correspondante.

Interféromètre de Rayleigh, indice absolu de l'air :

L'interféromètre de Rayleigh (dérivé du dispositif d'Young) est représenté sur la figure. Lorsque les tubes T_1 et T_2 sont remplis d'air dans les conditions normales, le montage est symétrique, et on observe une frange brillante au centre I de l'écran. La source S émet la radiation $\lambda = 0,577$ μm , la longueur commune des tubes est $\ell = 0,20$ m. T_2 étant toujours rempli d'air dans les conditions normales, on fait progressivement le vide dans T_1 .



1) Dans quel sens défilent les franges en I ?

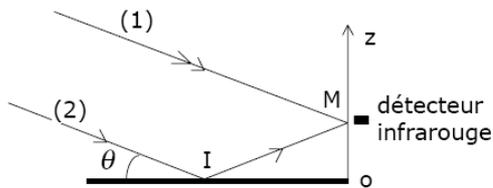
2) Pendant le pompage, 101 franges brillantes défilent en I et, lorsque la pression dans T_1 est quasi nulle on observe en I une frange sombre. En déduire l'indice absolu n de l'air dans les conditions normales.

Superposition d'une onde plane et d'une onde sphérique :

On utilise une lentille convergente (L), trouée en son centre, comme système interférentiel à deux ondes. Une source ponctuelle S, monochromatique de longueur d'onde λ , est placée au foyer principal objet de la lentille. Il en résulte que l'onde émergente de la lentille est plane et que celle directement transmise par le trou est sphérique. Le trou a un diamètre $2R = 10 \text{ mm}$ sur la face de sortie de (L) et une profondeur $e = 3 \text{ mm}$ sur l'axe.

- Donner les expressions analytiques des ondes qui se superposent ; on adoptera comme origine la phase des ondes en S et on supposera que ces deux ondes ont même amplitude.
- Quelle est l'intensité, dans le plan P situé à la même distance d de la face de sortie de (L) que S, en fonction de la coordonnée cylindrique ρ ? En déduire la nature des franges d'interférence.
- Calculer le rayon des franges brillantes extrêmes sachant que la longueur d'onde du rayonnement est $\lambda = 546 \text{ nm}$, $d = 20 \text{ cm}$ et $n = 1,52$ (indice du verre de (L)).

Miroir de Lloyd :

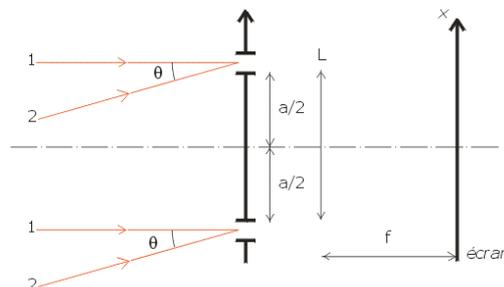


On considère un faisceau parallèle de lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence sur un miroir plan. La source est monochromatique, dans le domaine des infrarouges: $\lambda = 500 \mu\text{m}$. Un détecteur I.R, placé sur un axe Oz perpendiculaire au plan du miroir, peut donc superposer une onde "directe" (rayon 1) et une onde réfléchie (rayon 2), tout en donnant une détection quadratique.

- Le faisceau incident fait un angle $\theta = 10^\circ$ avec le plan du miroir.
- Dans cette question, le miroir est supposé parfaitement réfléchissant. Rappeler la condition que doit vérifier le champ électrique en $z = 0$; en déduire que l'onde incidente subit un déphasage de π lors de la réflexion sur le miroir. Déterminer l'ordre d'interférence $p(z)$ au point M. Quelle est la forme des franges ? Calculer l'interfrange i . Quel est l'intérêt de travailler en infrarouge ?
 - On suppose maintenant que le coefficient de réflexion en intensité du miroir vaut : $R = 0,85$. Calculer le contraste des franges obtenues et conclure.

Étoiles doubles :

Pour déterminer la distance angulaire de deux étoiles proches, on utilise l'interféromètre constitué de deux fentes très fines, disposées en $a/2$ et $-a/2$ par rapport à l'axe optique. On observe le système interférentiel sur un écran placé à la focale de la lentille (L).



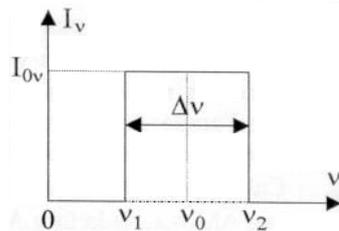
La lumière émise par les deux étoiles qui éclairent l'interféromètre est filtrée et on la considère monochromatique. Les rayons lumineux de la première étoile arrivent parallèles à

l'axe optique, ils sont indicés 1. Les rayons issus de la seconde sont indicés 2, ils font un angle θ petit avec ce même axe.

- Calculer l'éclairement diffracté pour la première puis la seconde étoile lorsque l'écart angulaire θ est petit.
- Les deux étoiles émettent-elles de la lumière incohérente. Pourquoi ?
- Quel est l'éclairement total observé sur l'écran ?
- La distance entre les fentes a est variable. Quelle est la valeur minimale de a pour laquelle l'écran est uniformément éclairé ? Donner alors la valeur de l'éclairement E .
- En faisant varier la distance qui sépare les deux fentes, on constate que la visibilité des franges d'interférences devient nulle lorsque la distance a atteint la valeur $a = 40$ cm. En déduire l'expression de l'écart angulaire θ entre les deux étoiles. Application numérique: $\lambda = 546$ nm .

Source à profil spectral rectangulaire :

Un dispositif interférentiel à deux ondes (de même amplitude) est éclairé par la raie rouge du cadmium, de longueur d'onde $\lambda_0 = 643,88$ nm et de faible largeur spectrale égale à $\Delta\lambda = 1,2 \cdot 10^{-3}$ nm ; la répartition de l'intensité spectrale de cette source est supposée à profil rectangulaire.



On désignera par δ la différence de marche optique entre les deux ondes qui interfèrent en M et $p = \delta / \lambda_0$ l'ordre d'interférence en ce point.

- Exprimer l'intensité au point M sous la forme $I(p) = 2I_0 [1 + \gamma(p) \cos(2\pi p)]$. On exprimera le degré de cohérence $\gamma(p)$ en fonction de l'ordre p en M et des données λ_0 et $\Delta\lambda$. Tracer l'allure du graphe $\gamma(p)$.
- Déterminer la largeur de la bande de fréquence $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ et la stabilité en fréquence $\Delta\nu / \nu_0$ de cette source. Déterminer la longueur de cohérence L_c , définie par la plus grande valeur de δ pour laquelle les franges ne sont plus observables. Montrer que le temps de cohérence τ_c est égal à $1 / \Delta\nu$.

Enregistrement d'un interférogramme :

On utilise un interféromètre de Michelson en lumière monochromatique, de longueur d'onde λ , dans la configuration lame à faces parallèles d'épaisseur e . Dans le plan focal image de la lentille d'observation (L), de focale f , située en sortie d'appareil, on place une photodiode diaphragmée. Le diaphragme, de diamètre $2R$, est centré sur F_i . Cette photodiode délivre un courant $I(e)$ proportionnel à la puissance lumineuse $P(e)$ reçue.

- Déterminer le signal $I(e)$ délivré par la photodiode en fonction de e , λ et Ω_0 , angle solide sous lequel on voit la face d'entrée du récepteur depuis le centre optique C de la lentille.
- Partant de la teinte plate, on fait varier e très lentement à l'aide d'un moteur relié au miroir mobile M_2 . Comment évolue le contraste défini par $V = \frac{I_{Max} - I_{min}}{I_{Max} + I_{min}}$?

Mesure de la largeur d'une raie :

Une source ponctuelle monochromatique éclaire un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air de telle sorte que l'un des miroirs M_1 soit fixe et que l'autre puisse se déplacer parallèlement à lui-même à partir de sa position initiale correspondant à une différence de marche nulle. Un détecteur P situé sur l'axe du faisceau donne un signal électrique proportionnel à l'intensité I du faisceau qu'il reçoit.

1. Exprimer I en fonction de la fréquence ν_0 de la radiation émise et de $\tau = 2x/c$, x étant le déplacement de M_2 et c la vitesse de la lumière dans le vide.
2. La source n'émet pas une onde monochromatique, comme cela est supposé précédemment, mais une onde quasi-monochromatique centrée sur la fréquence ν_0 . On note $\Delta\nu_{1/2}$ la largeur totale à mi-hauteur de l'intensité spectrale de la source. Trouver l'intensité $I(\tau)$ lorsque l'intensité spectrale de la raie I_ν est rectangulaire.
3. Un calculateur associé au détecteur fournit la fonction : $V(\tau) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$. Trouver $V(\tau)$. Tracer son graphe.
4. La raie rouge du cadmium ($\lambda_0 = 643,8$ nm) présente une intensité spectrale I_ν approximativement rectangulaire. On observe, pour la première fois $V(\tau) = 0$ pour $x = 15$ cm. En déduire $\Delta\nu_{1/2}$ et $\Delta\lambda_{1/2}$.

Interféromètre de Michelson en coin d'air :

On s'intéresse à un Michelson réglé en coin d'air, l'angle entre les deux miroirs étant θ . On observe les interférences créées par une lampe monochromatique large (de longueur d'onde λ) grâce à une lentille convergente de focale f' placée à une distance ℓ_1 des miroirs.

a) Comment éclairer les miroirs ?

b) Les interférences sont-elles localisées ? Où les observe-t-on grâce à la lentille (on donnera la distance ℓ_2 entre la lentille et le plan d'observation).

c) Quel est alors le grandissement γ du montage en fonction de f' et ℓ_1

d) Franges d'interférences : quelle est la forme des franges ? Que vaut l'interfrange i sur l'écran d'observation en fonction de λ , θ , f' et ℓ_1 ? Que se passe-t-il si les miroirs sont parallèles ?

Etude d'un coin d'air :

Un interféromètre de Michelson est monté en coin d'air. L'angle entre les deux miroirs est $\alpha = 5 \times 10^{-4}$ rad. Il est éclairé sous une incidence quasi-normale par une source étendue spatialement. Celle-ci émet deux radiations de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 d'égale intensité.

1. Donner l'expression de l'éclairement obtenu sur le coin d'air équivalent en fonction de x , coordonnée définie le long d'un des deux miroirs.
2. Les valeurs des longueurs d'onde sont $\lambda_1 = 486$ nm et $\lambda_2 = 434$ nm. Compte tenu de ces valeurs, donner une idée de l'allure de la courbe $E(x)$. Calculer la période de la visibilité (contraste).

Spectrométrie par transformée de Fourier :

On éclaire un interféromètre de Michelson monté en lame d'air d'épaisseur e avec une raie quasi monochromatique, caractérisée par son *profil spectral* :

$$\frac{d\mathcal{E}_0}{d\sigma} = f(\sigma) = C \exp\left(-\frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{a^2}\right)$$

où $\sigma = 1/\lambda$ et où σ_0 , C et $a \ll \sigma_0$ sont des constantes positives. Pour simplifier, on étendra la fonction f aux valeurs négatives de σ , domaine où elle prend des valeurs négligeables.

1. Quelle est la signification de σ_0 ? Calculer la largeur $\Delta\sigma$ du profil à mi-hauteur et interpréter la constante a .

2. On réalise un enregistrement de l'éclairement au centre de la figure d'interférences en fonction de l'épaisseur e qu'on fait varier en déplaçant un des miroirs à l'aide d'un moteur. Établir l'expression de l'éclairement $\mathcal{E}(e)$ en fonction de constantes et de la transformée de Fourier du profil spectral définie par :

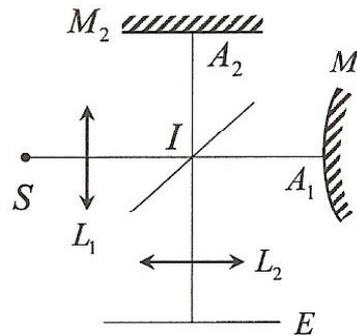
$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma) \exp(2j\pi\sigma x) dx .$$

3. Sachant que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2/a^2) \exp(2j\pi ux) du = a\sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 a^2 x^2)$

établir l'expression de $\mathcal{E}(e)$ et tracer l'allure de son graphe pour $\Delta\sigma \ll \sigma_0$. Comment évolue la visibilité des franges ? Comment peut-on mesurer $\Delta\sigma$? Quelle valeur de e doit-on pouvoir atteindre ? Retrouver l'ordre de grandeur de la longueur de cohérence ℓ^* de la source en fonction de $\Delta\sigma$.

Interféromètre de Twyman :

Le dispositif est un interféromètre de Michelson où le miroir M_1 est un miroir sphérique convexe de grand rayon R ; le miroir M_2 reste plan et au début $IA_1 = IA_2$. La source S , placée au foyer objet de L_1 , est peu étendue ; elle est monochromatique de longueur d'onde λ .



- Quel type de franges observe-t-on ? Où sont-elles localisées ? Quel est le rôle de la lentille L_2 ?
- Déterminer le rayon r_k de la $k^{\text{ième}}$ frange brillante.
- Le miroir M_1 est déplacé vers I ; que deviennent les franges d'interférences ?
- Comment un tel interféromètre peut-il être utilisé pour détecter les défauts d'usinage d'une lentille convergente placée convenablement entre I et A_1 ?

Réseau par transmission ; résolution du doublet du sodium :

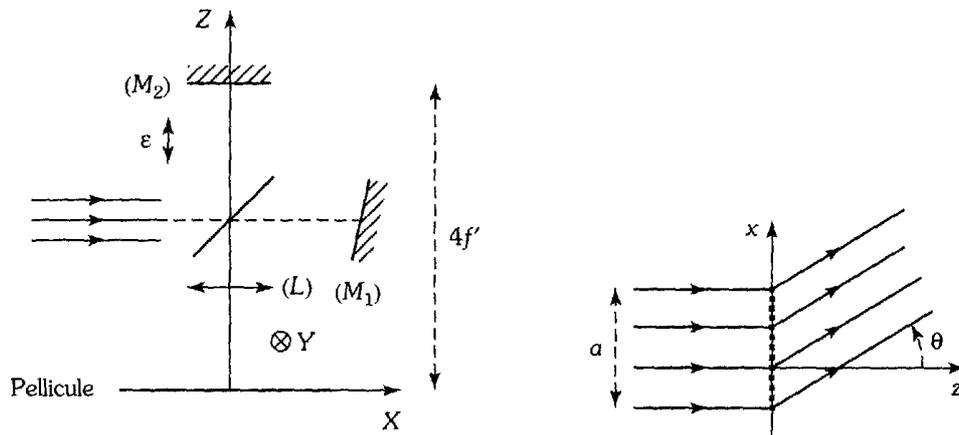
Afin de distinguer les deux raies D_1 et D_2 du doublet jaune du sodium, de longueurs d'onde respectives $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$, on réalise, à l'aide d'un réseau par transmission, un spectre normal d'ordre $k = 2$ que l'on observe dans le plan focal image d'une lentille convergente de focale $f' = 50 \text{ cm}$. Le réseau a une longueur $L = 2 \text{ cm}$.

- Quelle doit être la période (ou pas) minimale du réseau ? On pourra l'exprimer en nombre de traits par mm.
- Déterminer, dans le plan d'observation, la distance Δx qui sépare les deux raies lorsque le réseau présente un pas $a = 2 \mu\text{m}$. Quel est le pouvoir de résolution théorique de ce réseau ?
- Calculer l'angle d'incidence i pour le réseau initial.

Réseau holographique :

1) Un interféromètre de Michelson monté en coin d'air d'angle α est éclairé par un faisceau laser élargi de longueur d'onde $\lambda = 632,8 \text{ nm}$. On intercale une lentille convergente (L) de focale f' entre le miroir (M_2) et une pellicule photographique distants de $4f'$. Une fois développé, le négatif acquiert une transparence $t(P) = c - d\mathcal{E}(P)$, fonction affine de l'éclairement $\mathcal{E}(P)$ en un point P de coordonnées (X, Y) sur la pellicule.

Montrer que $t(P)$ est de la forme $t(P) = t_0 + 2 t_1 \cos(2X/d)$ et expliciter d .



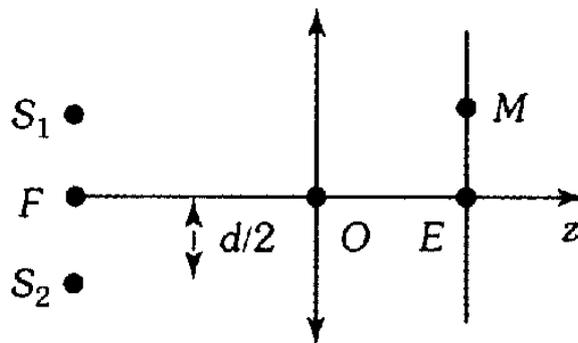
2) Le négatif, formant un carré de côté a selon \vec{u}_x et \vec{u}_y est ensuite éclairé sous incidence normale par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ' .

Montrer qu'à l'infini, tout se passe comme si on recevait trois ondes planes dans des directions θ à préciser.

Comparer le dispositif à un réseau plan.

Dispositif interférentiel atypique :

Soit une lentille mince convergente (L) de focale f' , dont on prend le centre optique O comme origine de l'espace et l'axe optique comme axe des z .



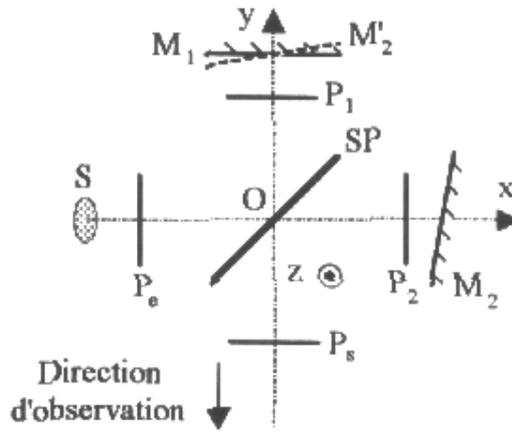
On place deux sources identiques en $S_1(d/2, 0, -f')$ et $S_2(-d/2, 0, -f')$. Ces sources sont monochromatiques de mêmes longueurs d'onde λ_0 ; elles sont cohérentes et émettent en phase. On observe l'éclairement sur un écran confondu avec le plan d'équation $z = z_0$ où on repère un point M par ses coordonnées (x, y, z_0) . On donne $f' = 1$ m et $d = 0,1$ mm. On mesure l'interfrange $\Delta = 5$ mm.

En déduire la longueur d'onde λ_0 .

Interférences en lumière polarisée avec interféromètre de Michelson :

Sur les bras d'un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air, et utilisé en lumière monochromatique de longueur d'onde λ , on introduit des lames polarisantes P_1, P_2, P_e, P_s ou des lames cristallines. On appelle "axe" d'une lame polarisante la direction du champ électrique de l'onde qui en sort. Pour simplifier, on suppose que la séparatrice et la compensatrice du Michelson sont sans action sur la polarisation.

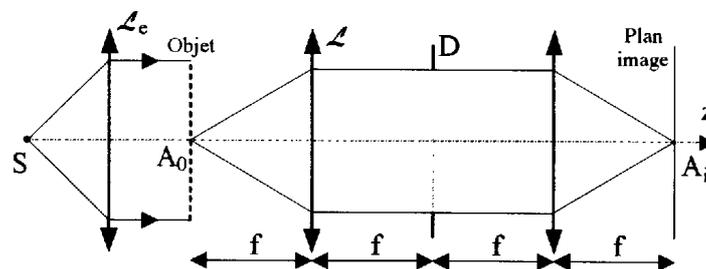
L'observation est faite dans la direction indiquée sur la figure, en notant $\alpha_e, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_s$ les angles que font les axes avec l'axe Oz (comptés positivement autour des directions Ox et Oy).



- 1- Au départ, on place uniquement les polariseurs P_1 et P_2 avec leurs axes parallèles à Oz , Que voit-on ?
- 2- On fait tourner P_1 de $\pi/2$ autour de Ox . Que voit-on ? On conserve cette disposition de polariseurs croisés dans la suite de l'exercice.
- 3- On introduit la lame P_s que l'on fait tourner autour de Oy tel que $\alpha_s = \pi/4$. Qu'observe-t-on ?
- 4- On place P_e que l'on fait tourner autour de Ox . Que voit-on ? Calculer le contraste en fonction de α_e . Pour quelles valeurs de α_e est-il maximal ?
- 5- On enlève P_s et on règle P_e tel que $\alpha_e = 0$. On remplace P_1 et P_2 par des lames quart d'onde à la longueur d'onde λ telles que Oz soit bissectrice des angles entre axes lent et rapide des lames, bissectrice intérieure pour l'une et bissectrice extérieure pour l'autre. Qu'observe-t-on ? Justifier le résultat.

Expérience de Abbe, filtrage spatial :

On réalise le montage $4f$ pour étudier la figure de diffraction de Fraunhofer donnée par un réseau d'amplitude. La lentille L_C permet d'obtenir des ondes planes à partir d'une fente source fine monochromatique S de longueur d'onde λ , et la lentille L , de focale $f = 20$ cm, permet d'observer, à distance finie, les phénomènes de diffraction de Fraunhofer. Toutes les lentilles travaillent dans les conditions de l'approximation de Gauss.



- 1- Quel est l'aspect du plan focal image de L ? On reliera les grandeurs observées aux caractéristiques du réseau : pas a , largeur totale L , largeur du motif ϵ , et on représentera graphiquement la répartition de l'intensité de l'onde lumineuse dans le plan focal si $N = 5$ et $a = 2\epsilon$.

2- Dans la suite de l'exercice, on néglige l'influence de ϵ .

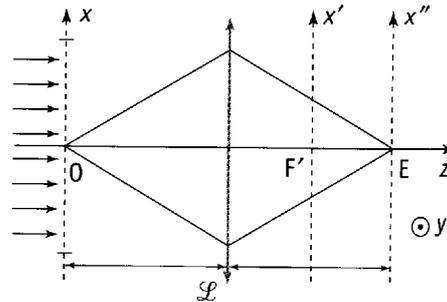
On place dans le plan focal image de L une fente de largeur b centrée sur l'axe optique. Quelle est la répartition de l'intensité dans le plan image du réseau si $\frac{1}{a} > \frac{b}{2\lambda f}$?

3- Même question lorsqu'on ouvre la fente de telle sorte que $\frac{1}{a} < \frac{b}{2\lambda f} < \frac{3}{2a}$.

4- On place dans le plan focal image de L un masque qui ne laisse passer que les pics $0, \pm 3, \pm 6, \dots$ Quel est l'aspect de l'image ? (Expérience de Abbe).

Filtrage spatial :

Un support pour pupilles diffractantes est disposé dans le plan Oxy . Il possède une largeur L selon Ox et une longueur suffisamment grande. Il est éclairé en incidence normale par une OPPH d'amplitude a_0 et de longueur d'onde λ_0 .



Une lentille convergente, de distance focale f' , est placée de telle manière que les plans $Ex''y''$ et Oxy soient conjugués avec un grandissement égal à -1 .

On place sur le support une pupille diffractante présentant une périodicité spatiale d selon Ox .

1. Quelle est l'amplitude diffractée dans le plan focal image de la lentille L ?

2. On suppose L grand devant le pas d du motif périodique.

Qu'observe-t-on sur un écran confondu avec le plan $Ex''y''$ quand on intercale dans le plan Fxy' :

a. une fente, centrée en F' et de largeur $\frac{2\lambda_0 f'}{L}$

b. deux fentes de même largeur $\frac{2\lambda_0 f'}{L}$ centrées en $\pm \frac{\lambda_0 f'}{d}$.

Analyse d'une vibration :

On considère une onde électromagnétique polarisée elliptiquement. Le grand axe dirigé selon Ox vaut $2a$ et le petit axe dirigé selon Oy vaut $2b$.

1- L'analyseur peut donner la direction du petit axe. Comment ?

2- L'analyseur étant placé selon la direction du 1), on place une lame quart d'onde entre la source et l'analyseur. L'axe lent est selon Oy . On obtient l'extinction de l'onde en tournant l'analyseur d'un angle α dans le sens antihoraire.

Déterminer 1- b/a .

2- si la vibration est gauche ou droite ?

Polarisation de la lumière :

1°) Une lame quart d'onde est taillée dans un matériau d'indices $n_2 = 1,456$ et $n_3 = 1,732$ pour une longueur d'onde $\lambda^\circ = 589$ nm. Quelle est l'épaisseur minimale qu'elle doit avoir ?

2°) Une lumière naturelle tombe sur un polariseur, analyseur croisés. On place une lame quart d'onde entre eux de telle sorte que la direction principale du polariseur soit à 45° par rapport aux directions principales de la lame. Décrire la lumière à la sortie de l'analyseur: état de polarisation et éclairement.

Mesure de la vitesse du son dans l'air :

Une onde plane de longueur d'onde $\lambda = 550 \text{ nm}$ dans le vide traverse une cuve K remplie d'eau et siège d'une onde ultrasonore stationnaire de fréquence $\nu = 4,7 \text{ MHz}$. Le dispositif est représenté sur la figure 5. La lame piézoélectrique émet une onde ultrasonore vers le haut, lorsqu'elle arrive à la surface de séparation entre l'eau et l'air une partie de l'onde est réfléchiée. C'est de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchiée que naît l'onde stationnaire. On observe dans le plan focal image d'une lentille L de distance focale $f = 35 \text{ cm}$.

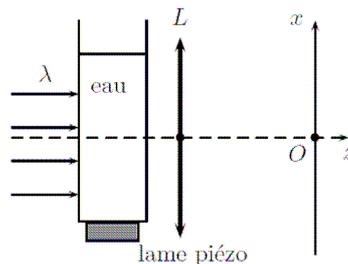


FIG. 5 – Mesure de la vitesse du son

1. Rappeler ce qu'est une onde stationnaire. Quelle est sa périodicité spatiale a ?
2. Qu'observe-t-on dans le plan focal image de la lentille L ?
3. Sachant que la distance de deux maxima consécutifs est $\Delta x = 1,20 \text{ mm}$, montrer qu'on peut en déduire la célérité des ondes sonores dans l'eau. Faire et commenter l'application numérique.
4. On peut modéliser de manière quantitative l'effet de l'onde stationnaire par une variation sinusoïdale de la transmittance complexe de la cuve d'eau, sous la forme $\underline{t}(x) = t_0 \left(1 + j\eta \cos\left(2\pi \frac{x}{a}\right) \right)$.
En déduire le nombre maximal d'ordres observables sur l'écran, et leur intensité lumineuse relative.

Hauteur d'une colline :

Une antenne réceptrice se trouve au sommet d'une colline bordant un lac. La longueur d'onde avec laquelle travaille cette antenne est 400 m . La planète Vénus se lève au-dessus de l'horizon et l'antenne reçoit les signaux radioélectriques qu'elle envoie, directement ou réfléchis sur le lac. On constate qu'il y a un premier minimum du signal reçu quand Vénus est à 35° au-dessus de l'horizon.

Calculer la hauteur h de la colline relativement à la surface du lac.

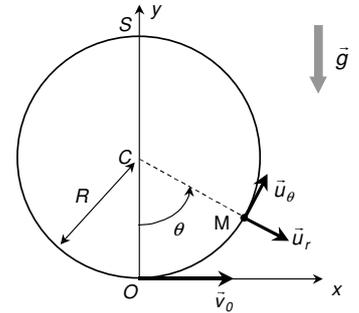


Mécanique du point matériel et des solides

Point matériel sur un cerceau :

Un point matériel de masse m , initialement au repos en A, peut se déplacer sans frottement dans la rainure d'un cerceau vertical et immobile, de rayon R . On lui communique une vitesse \vec{v}_0 horizontale.

Etudier les différents mouvements possibles du point matériel, en fonction des paramètres du problème (R, \vec{v}_0, \dots).



Force de frottement proportionnelle au carré de la vitesse :

Un point matériel de masse m est lancé sur une droite avec une vitesse initiale $v_0 = 2 \text{ m.s}^{-1}$. La seule force qui s'exerce sur lui est une force de frottement représentée par l'expression $f = Kmv^2$ et de sens opposé à la vitesse ($K > 0$). Le point met $T = 50 \text{ s}$ pour parcourir la distance $d = 50 \text{ m}$.

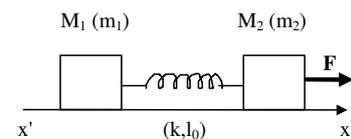
- Calculer numériquement K en précisant son unité.
- Combien de temps faut-il pour parcourir la distance $2d$?

Oscillations d'un pendule dans un champ électrique :

Déterminer l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple électrostatique, de masse m , de longueur ℓ , portant la charge $q > 0$, et placé dans un champ électrostatique \vec{E} orthogonal à \vec{g} . Le référentiel d'étude est galiléen. Déterminer ensuite la période des petites oscillations du pendule. (Equation différentielle : $\ell \ddot{\theta} = -g \sin \theta + (qE/m) \cos \theta$)

Oscillateurs soumis à une force constante :

Deux masses m_1 et m_2 sont reliées par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Elles peuvent se déplacer sans frottement sur un axe horizontal ($x'x$). Pour $t < 0$, le ressort est non tendu et les masses m_1 et m_2 sont au repos en M_{10} et M_{20} .



A partir de $t = 0$, on exerce sur m_2 une force horizontale constante $\vec{F} = F \vec{u}_x$. On note $x_1(t) = M_{10}M_1$ et $x_2(t) = M_{20}M_2$. Déterminer $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Limites de la trajectoire et énergie :

Une particule fixe, de charge électrique q , est placée à l'origine O d'un axe (Ox) : tout le problème se déroule sur cet axe. On néglige le poids des particules.

- On lance à une distance a de O une seconde particule, de charge $-q$ et de masse m , dans une direction tendant à l'éloigner de O . Quelle vitesse initiale v_0 doit-on lui communiquer pour qu'elle échappe à l'attraction de la particule fixe en O ?
- La particule mobile a maintenant la charge $+q$ et sa vitesse initiale est v_0 et est dirigée vers O . Montrer que cette particule ne peut atteindre O ; calculer la distance minimale d'approche b en fonction de v_0 .

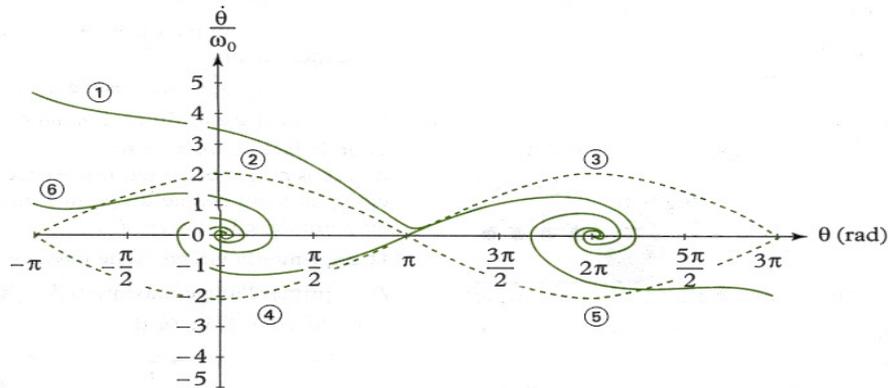
Période des oscillations d'un pendule simple et portrait de phase :

On considère un pendule simple de longueur ℓ que l'on écarte sans vitesse initiale de l'angle θ_0 par rapport à la verticale descendante.

a) On néglige les frottements dans cette question. Etablir l'équation différentielle du mouvement issue de l'application du principe de conservation de l'énergie mécanique. En déduire la période T_0 des petites oscillations.

b) Le pendule est soumis désormais à des frottements fluides et son équation différentielle devient : $\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$

Son portrait de phase est représenté sur la figure ci-dessous, avec $\omega_0 = 1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $h = 0,5 \text{ s}^{-1}$.



- * A quoi voit-on qu'il y a des frottements ?
- * Indiquer les positions d'équilibre stables et instables.
- * Commenter l'allure des différentes courbes.

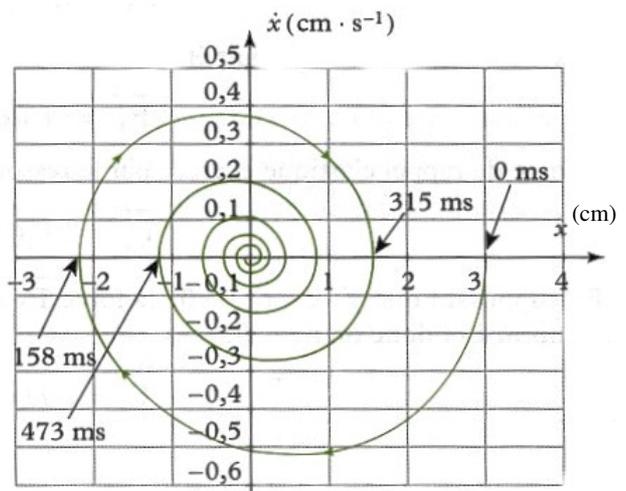
Lecture de portrait de phase :

On considère le portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti composé d'une masse $m = 500 \text{ g}$ soumise à une force de rappel élastique (ressort de raideur k) et à une force de frottement fluide ($-\lambda\vec{v}$, \vec{v} étant la vitesse de la masse m et on note x l'écart à la position d'équilibre). L'étude est réalisée dans le référentiel galiléen du laboratoire.

a) Déterminer la nature du régime de l'oscillateur.

b) Déterminer, par lecture graphique :

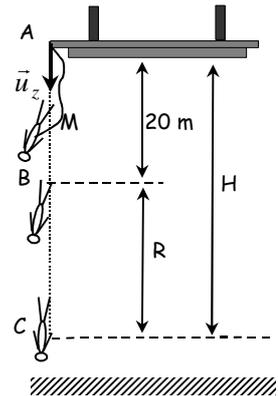
- * La valeur initiale de la position x_0 .
- * La valeur finale de la position x_f .
- * La pseudo période T_a .
- * Le décrétement logarithmique δ .



c) En déduire la pulsation propre ω_0 , le facteur de qualité Q de l'oscillateur, la raideur k du ressort et le coefficient de frottement fluide λ

Saut à l'élastique : un sauteur à l'élastique, modélisé par un point matériel M (de masse $m = 70 \text{ kg}$), tombe depuis un pont (au point A) avec un élastique accroché aux pieds. Pendant les 20 premiers mètres de chute (jusqu'en B), l'élastique n'est d'aucune utilité et le sauteur est donc en chute libre. A partir du point B , l'action de l'élastique est modélisé par un ressort, de masse négligeable, de longueur à vide $\ell_0 = 20 \text{ m}$ et de raideur $k = 120 \text{ N.m}^{-1}$. On suppose le référentiel terrestre galiléen et on néglige les frottements.

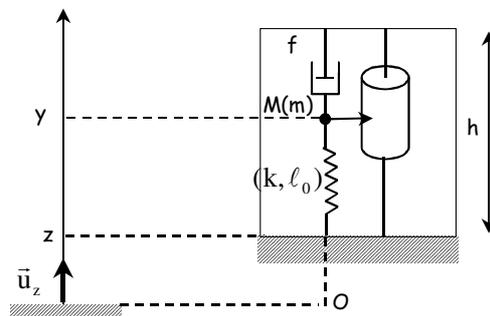
- Déterminer la vitesse du sauteur en B .
- Déterminer la hauteur totale de chute.
- Déterminer l'accélération maximale pendant le saut.



Un sismographe : un sismographe est constitué d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , d'un amortisseur de coefficient de frottement f et d'une masse ponctuelle m .

Le ressort et l'amortisseur sont fixés à un cadre rigide ; un stylo reproduisant les déplacements verticaux de la masse m par rapport au cadre est fixé au niveau de la masse m . Le cadre est mis en mouvement vertical sinusoïdal : $z(t) = Z_m \cos(\omega t) + z_{\text{eq}}$ (avec $z_{\text{eq}} = 0$). Le référentiel $R_g(O, z)$ est supposé galiléen.

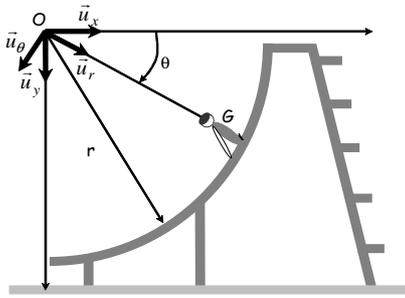
- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la grandeur x , écart entre la longueur ℓ du ressort à un instant t et sa longueur ℓ_{eq} à l'équilibre (obtenu lorsque $z = z_{\text{eq}} = 0$). On fera apparaître le facteur de qualité Q du système ainsi que sa pulsation propre ω_0 .



- Déterminer, en régime forcé, l'amplitude X_m de l'oscillation de la masse ainsi que la phase à l'origine.
- Comment choisir Q pour que la bande de pulsation reproduite soit la plus grande possible et que l'écart entre X_m et Z_m soit au maximum de 5% ?

Le toboggan :

Un enfant assimilé à un point matériel G de masse $m = 40 \text{ kg}$ glisse sur un toboggan décrivant une trajectoire circulaire de rayon $r = 2,5 \text{ m}$ depuis la position $\theta = \theta_0 = 15^\circ$ où il possède une vitesse nulle jusqu'à la position $\theta = 90^\circ$ où il quitte le toboggan. On néglige tous les frottements.



- a) Etablir l'équation différentielle du mouvement de l'enfant en utilisant le théorème du moment cinétique.
- b) En déduire l'expression de la vitesse v de l'enfant en fonction de θ . Calculer la vitesse maximale atteinte par l'enfant. Commenter cette valeur.

Satellite géostationnaire :

Calculer l'altitude d'un satellite géostationnaire. Ce satellite ayant pour masse $m = 1 \text{ t}$, on se propose d'augmenter son altitude de 50 km. Quelle énergie faut-il dépenser ($5,6 \cdot 10^6 \text{ J}$).

Lancement d'un satellite terrestre :

On veut qu'un satellite S décrive une orbite circulaire de rayon r_0 autour du centre de la Terre T (de masse M_T).

- a) Calculer la vitesse v_0 du satellite ainsi que son énergie mécanique.
- b) Une erreur a été commise lors de la satellisation. Le satellite a bien été lancé sur un rayon r_0 avec une vitesse v_0 mais la direction réelle de lancement fait un angle α avec la direction initialement prévue ($0 < \alpha < \pi / 2$). Déterminer la nature de la trajectoire réelle du satellite et construire son allure. Exprimer r_p et r_a les rayons aux périhélie et à l'apogée, ainsi que les vitesses correspondantes v_p et v_a .

La taille d'une planète :

Un astéroïde, gros caillou du système solaire, est appelé conventionnellement planète si la hauteur H de la plus haute montagne ne dépasse pas le 100ième du rayon moyen R du caillou.

1. Hauteur maximale d'une montagne

On constitue une colonne verticale de parpaings en les posant l'un sur l'autre. A un certain moment, l'adjonction d'un nouveau parpaing au sommet de la colonne provoque l'effondrement du parpaing le plus bas. La "montagne de parpaings" a atteint sa hauteur maximale H .

Montrer que H s'exprime uniquement en fonction de la chaleur de fusion L_f du matériau et du champ de gravitation g régnant à la surface de la planète.

Déterminer la hauteur maximum des montagnes terrestres en prenant $L_f = 200 \text{ kJ/kg}$ et $g = 10 \text{ m/s}^2$. Comparer à la hauteur réelle.

La hauteur des montagnes sur Mars est-elle plus grande que celle des montagnes terrestres ?

2. En supposant que le caillou soit homogène, de masse volumique ρ , montrer que le caillou devient une planète si son rayon $R > R_{\min} = 1,5 \sqrt{\frac{L_f}{G\rho}}$.

Applications :

Lune : $\rho = 3,34 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$; $L_f = 240 \text{ kJ/kg}$ (S iO₂) ; $R = 1700 \text{ km}$

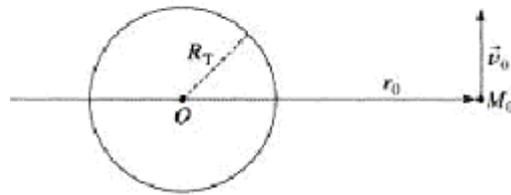
Astéroïde Vesta : $\rho = 3,15 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$; $L_f = 240 \text{ kJ/kg}$; $R = 260 \text{ km}$

La plus haute montagne de la Lune a une hauteur $H = 4,8 \text{ km}$. La plus haute montagne de Vesta a une hauteur $H \approx 70 \text{ km}$.

3. Comment expliquer que les petits astéroïdes ne sont pas sphériques ?

Condition de lancement d'un satellite :

Un satellite est injecté sur orbite en un point M_0 distant de r_0 du centre O de la Terre, avec une vitesse \vec{v}_0 orthogonale à $\overrightarrow{OM_0}$.



a) Que vaut, en fonction de G , M_T (masse de la Terre) et r_0 , cette vitesse si la trajectoire obtenue est un cercle de rayon r_0 ? Dans la suite, on note v_c cette vitesse particulière de v_0 .

b) On pose $\lambda = \frac{r_0}{R_T}$ où R_T est le rayon terrestre. Démontrer que le satellite n'échappera pas à

l'attraction terrestre et ne rencontrera pas la Terre si $\frac{2}{1+\lambda} < \left(\frac{v_0}{v_c}\right)^2 < 2$.

Tige tournant à vitesse angulaire constante :

Un point matériel M peut glisser sans frottement sur une tige (Or) , de masse négligeable, faisant un angle aigu constant α avec un axe vertical ascendant (Oz) . On pose $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

A l'instant initial, M est en M_0 tel que $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ et sa vitesse par rapport à la tige (Or) est nulle.

La tige (Or) , entraînée par un moteur, tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de (Oz) .

Déterminer le mouvement du point M sur l'axe (Or) . Discuter suivant les valeurs de r_0 , ω et α

Portière de voiture :

La portière d'une voiture est restée entrouverte par inadvertance au moment où la voiture se met à freiner créant une décélération constante a ($a < 0$). On veut étudier le mouvement de la porte pendant le freinage.

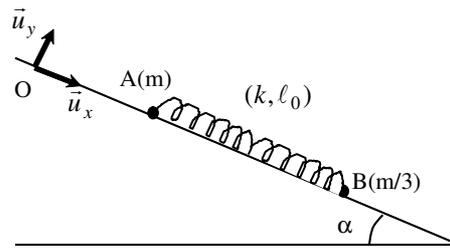
Pour cela, on modélise la porte par une tige rigide de masse négligeable de longueur ℓ et une masse m placée au bout (au point M). On suppose que le référentiel terrestre est galiléen.

a) Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la portière. (équation portant sur l'angle θ). Déterminer la vitesse de la porte quand $\theta = \frac{\pi}{2}$.

c) On étudie désormais une phase d'accélération constante a ($a > 0$). Au début du mouvement, la porte est ouverte d'un angle θ_0 (et $\dot{\theta}_0 = 0$). Pour que la porte se referme seule, il faut que $\dot{\theta}(\theta = 0) = \dot{\theta}_{\min}$. Déterminer la relation entre θ_0 et a pour que cela soit possible.

Deux masses et un ressort :

Deux masses m et $m/3$ (se trouvant aux points A et B) sont reliées par un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Ce système peut glisser sans frottement le long d'un axe (O, \vec{u}_x) incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, fixe dans le référentiel galiléen $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On abandonne le système dans vitesse initiale, le ressort ayant, à $t = 0$, un allongement x_0 et le point A se trouvant alors en O.



Déterminer, dans le référentiel d'étude (R), le mouvement des deux points A et B.

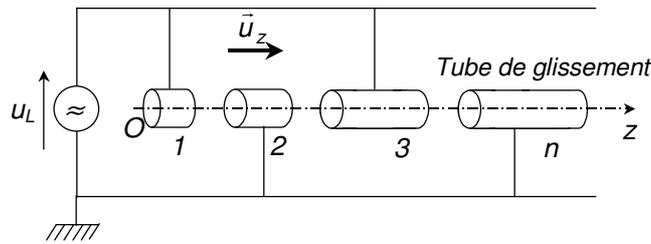
Accélérateurs linéaires de particules :

Tous les accélérateurs de particules ont les mêmes composants de base : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions. Dans les accélérateurs circulaires (cyclotrons et synchrotrons), les particules sont guidées par des champs magnétiques tout au long d'une trajectoire circulaire qui les fait passer de nombreuses fois à travers le même champ électrique accélérateur. Dans les accélérateurs linéaires, tels que celui étudié dans cet exercice, les particules effectuent un trajet en ligne droite passant à travers une succession de tubes où règnent des champs électriques qui augmentent leur énergie au fur et à mesure qu'elles avancent.

Des particules chargées (des protons par exemple, de charge $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C et de masse $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg) passent dans une série de tubes métalliques qui présentent la symétrie de révolution et de même axe (appelés « tubes de glissement ») et connectés à une source de tension alternative (voir figure) $u_L = U_L \sin(2\pi\nu t)$. Cette tension crée un champ électrique accélérateur axial dans les intervalles entre les tubes. On considère que le champ est nul à l'intérieur de ces tubes métalliques. Les protons sont injectés en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$ parallèle à l'axe de l'accélérateur.

On considère les protons qui pénètrent en O suivant l'axe (Oz) des tubes à l'instant $t = 0$, c'est-à-dire lorsque $u_L = 0$. On veut que ces protons soient accélérés par la tension maximale U_L toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. On considérera que la distance entre deux tubes est négligeable par rapport à la longueur des tubes.

a. Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins ? Sachant que les protons sont pré-accélérés sous une tension continue U_0 , exprimer leur énergie cinétique $E_{c,n}$ à la sortie du n ème tube en fonction de U_0 et U_L . Faire l'application numérique avec $U_0 = 140$ kV, $U_L = 100$ kV et $n = 20$. Les protons sont-ils relativistes ?



b. Quel doit être le temps mis par ces protons pour traverser le 1^{er} tube, le 2^{ème} tube et le n^{ème} tube, afin que soient réalisées les conditions d'accélération précédente ? Exprimer les longueurs L_1 , L_2 , L_n , respectivement des premier, deuxième et n^{ème} tubes en fonction de U_0 , U_L , v , e et m_p . Calculer ces trois longueurs pour $v = 25$ MHz, $n = 20$, $U_0 = 140$ kV et $U_L = 100$ kV.

Particule dans un champ EM :

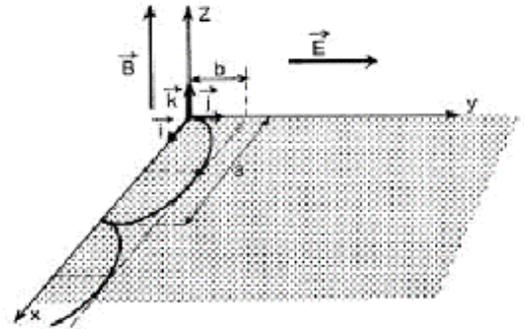
Dans le référentiel (R) de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une particule M, de masse m et de charge q , se trouve à la date $t = 0$ en O, animée d'une vitesse nulle, dans une région où règnent les champs uniformes et indépendants du temps :

$$\vec{E} = E \vec{j} \text{ et } \vec{B} = B \vec{k} .$$

1. Etudier le mouvement de M.
2. Calculer la vitesse moyenne de la particule suivant Ox,

appelée vitesse de dérive \vec{v}_D .

3. Interpréter la trajectoire dans Oxyz en écrivant la relation fondamentale de la dynamique du point matériel dans le référentiel (R') en translation rectiligne et uniforme de vitesse \vec{v}_D par rapport à (R).

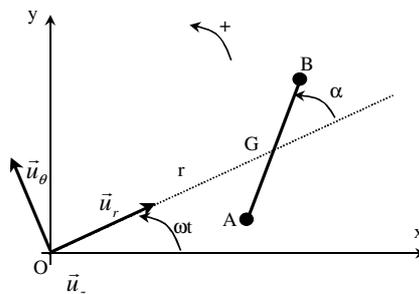


Oscillations d'un satellite terrestre sur sa trajectoire : la Terre, de centre O, exerce sur tout point matériel de masse m une force attractive :

$$\vec{F} = -Km \frac{\vec{OM}}{OM^3}, \quad \text{avec} \quad K = 4.10^{-14} \text{ m.s}^{-2}$$

Dans le référentiel géocentrique (Oxyz) galiléen, on considère un satellite dont le centre d'inertie G décrit une trajectoire circulaire de centre O et de rayon r autour de la Terre, à la vitesse angulaire constante ω , dans le plan (Oxy).

Le satellite est constitué de deux masses ponctuelles identiques A et B reliées entre elles par une tige rigide de masse négligeable ($AB = 2b$). On s'intéresse à la rotation de AB autour de G dans le plan (Oxy), définie par l'angle $\alpha = (\vec{u}_r, \vec{GB})$.



a) Pour quelles valeurs de α le moment en G des forces de gravitation exercées sur le satellite est-il nul ?

b) En effectuant un DVL en b / r , montrer que le terme principal du moment vaut :

$$\vec{M}_G = -\frac{3Km}{b} \left(\frac{b}{r}\right)^3 \sin 2\alpha \vec{u}_z$$

c) Calculer la période des oscillations du satellite autour de sa position d'équilibre stable.

Données : $r = 7\,000$ km ; $b = 5$ m ; $m = 4$ kg.

Vitesses supraluminiques :

Certains astres semblent se déplacer avec une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide, ce qui n'est pas conforme à la théorie de la relativité. Pour interpréter cette observation, on adopte le modèle suivant. On vise d'un point O de la Terre un astre quasi-punctuel S situé à une grande distance D et se rapprochant avec une vitesse \vec{v} faisant un angle α avec la ligne de visée $\vec{u} = \frac{\overline{SO}}{D}$.

1- À l'instant t, l'astre est en S à distance D du point d'observation O à la surface de la Terre et émet une impulsion lumineuse. À quel instant t_a cette impulsion arrive-t-elle sur Terre ?

2- À l'instant $t' = t + dt$, l'astre émet une nouvelle impulsion lumineuse. À quel instant t'_a cette impulsion arrive-t-elle sur Terre ? On limitera les calculs à l'ordre un en dt.

3- En déduire que la composante de la vitesse apparente de l'astre perpendiculairement à la ligne de visée vaut :

$$v_a = \frac{v \sin \alpha}{1 - \frac{v \cos \alpha}{c}}$$

Étudier les variations de v_a avec α et conclure.

Chute de la Terre sur le Soleil :

La Terre décrit autour du Soleil un cercle de rayon a en un temps $T_0 = 1$ an. Soit M la masse du Soleil grande devant la masse de la Terre. On imagine que la Terre perde brusquement toute sa vitesse orbitale.

1- Établir une équation différentielle du premier ordre relative à la chute de la Terre vers le Soleil. Exprimer la durée T de cette chute en fonction de T_0 .

2- Retrouver le résultat en considérant que le mouvement considéré est un cas particulier de mouvement képlérien et en utilisant la troisième loi de Kepler.

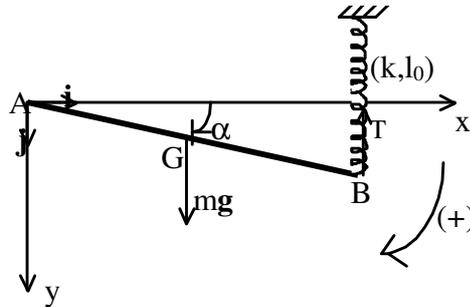
Mouvement d'une chaîne : une chaîne de longueur ℓ et de masse linéique constante λ peut glisser sans frottement sur le rebord d'une table. Initialement, une extrémité de la chaîne, de longueur y_0 , est verticale. L'autre extrémité est retenue par un expérimentateur. Celui-ci lâche la chaîne sans vitesse initiale. Déterminer le temps τ mis par la chaîne pour quitter la table.

A.N : $g=10$ m.s⁻² ; $l=20$ cm ; $y_0=1$ cm (Réponses : $ch\omega\tau = \frac{l}{y_0}$; $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$)

Barre tournant autour d'un axe fixe : une barre AB, de longueur 2l et de masse m, est mobile autour d'un axe horizontal passant par A. On abandonne, sans vitesse initiale, la barre de sa position d'équilibre verticale, instable. On note α l'angle entre la tige et la verticale. La liaison axe-barre est sans frottement. La barre est astreinte à se déplacer dans un plan.

- a) En utilisant le théorème du moment cinétique, déterminer les expressions de $\dot{\alpha}$ et de $\ddot{\alpha}$ en fonction de α .
- b) Calculer, en fonction de α , les coordonnées de la réaction exercée par l'axe sur la barre.

Mouvement d'une barre autour d'un axe fixe : une barre AB, de longueur $2l$ et de masse m , est mobile autour d'un axe Az horizontal. Le point B est fixé à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . L'autre extrémité du ressort est fixe. Dans sa position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical.



La barre est écartée légèrement de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale.

Déterminer la période des petites oscillations de la barre. On considère que le point B se déplace verticalement.

Oscillations de deux barres :

4. Oscillations d'un angle droit

On considère le système de deux barres identiques représenté sur la figure 3. L'extrémité d'une barre est accrochée à un ressort de raideur k . La liaison pivot en O est parfaite. La position d'équilibre stable du système correspond au cas où la seconde barre est verticale.

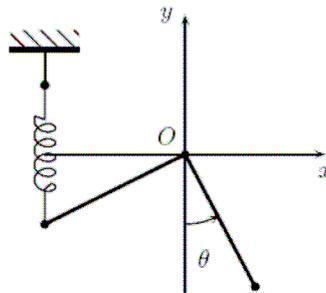


FIG. 3 – Petites oscillations d'un angle droit

1. Déterminer l'allongement du ressort lorsque le système est à l'équilibre.
2. Étudier les oscillations de petit angle θ autour de la position d'équilibre.
3. Dessiner le portrait de phase de cet oscillateur. Discuter.

Réponses : $\Delta l_{\text{éq}} = \frac{mg}{2k}$; $\ddot{\theta} + \frac{1}{3}[\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}] \theta = 0$; ellipse.

La tartine beurrée :

Un toast de longueur $2a$ est posé sur une table horizontalement, son centre d'inertie décalé de la table d'une distance δ . Coefficient de frottement f ; $J_{Gz} = ma^2/3$, $\eta = \delta/a$

- a) Au début de la chute il n'y a pas glissement (le justifier), montrer qu'alors :

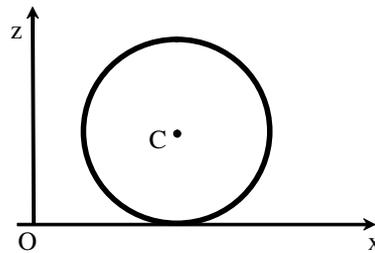
$$(d\theta/dt)^2 = (6g/a) (\eta/(1+3\eta^2)) \sin\theta$$

b) En supposant que le toast quitte la table sans avoir glissé pour $\theta = \pi/2$ avec $\delta \ll a$ déterminer le mouvement ultérieur du toast. Quel est l'angle limite pour lequel en moins d'un tour, il atterrisse coté pain? Calculer alors le temps de chute du toast.

On donne : $h = 75 \text{ cm}$, $2a = 10 \text{ cm}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Mouvement d'un cerceau : un cerceau de masse M et de rayon R est lancé avec les conditions initiales suivantes :

$$\vec{v}_C(0) = v_0 \vec{u}_x \quad (v_0 > 0) \quad \text{et} \quad \vec{\omega}(0) = -\omega_0 \vec{u}_y \quad (\omega_0 > 0)$$

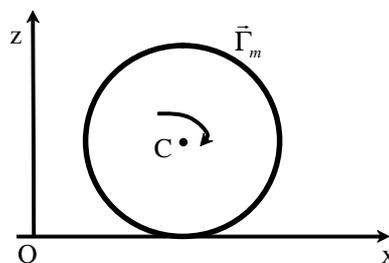


Il reste en contact avec le plan horizontal ; ce contact est caractérisé par un coefficient de frottement de glissement f .

a) Déterminer $\vec{v}(t)$ et $\vec{\omega}(t)$ pour la 1^{ère} phase du mouvement. A quel instant cette phase s'achève-t-elle ?

b) À quelle condition le cerceau revient-il en arrière ?

Démarrage d'une automobile : le coefficient de frottement de la roue sur le sol est f . La roue a une masse m , un rayon R et un moment d'inertie J par rapport à son axe. On lui applique un couple moteur $\vec{\Gamma}_m = \Gamma_m \vec{u}_y$.



Quelle est la condition sur $\vec{\Gamma}_m$ pour qu'il y ait roulement sans glissement ?

Oscillations amorties par frottement fluide :

Un cube de masse M peut glisser sur un plan horizontal avec un coefficient de frottement μ . Il est lié à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et constante de raideur k , dont une extrémité est fixe (Fig. 25). À l'instant initial, le ressort a une longueur égale à $\ell_0 + A$ (avec A positif) et la masse n'a pas de vitesse.

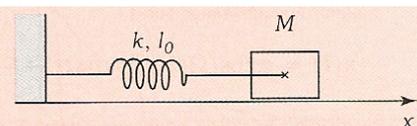


Figure 25

On confondra les coefficients de frottement statique et dynamique et on n'envisagera pas d'autre mouvement pour le cube que la translation.

- À quelle condition la masse se met-elle en mouvement ?
- Dans le cas où un mouvement a lieu, le décrire en donnant sa loi horaire $x(t)$ jusqu'au prochain arrêt du cube.
- À quelle condition le cube se met-il à nouveau en mouvement, dans le sens contraire, après ce premier arrêt ?

- d) Lorsque l'amplitude initiale A est suffisamment élevée pour qu'un grand nombre d'oscillations aient lieu, quelle est l'allure de l'enveloppe du graphe de $x(t)$? Que peut-on dire de la variation au cours du temps de l'amplitude des oscillations ?
- e) Comparer au résultat obtenu pour un frottement fluide.

Balçoire :

Pour amplifier l'amplitude de ses oscillations, un enfant sur une balçoire se déforme. De façon très sommaire, on suppose qu'il modifie son moment d'inertie J sans modifier la position de son centre d'inertie G par rapport à l'axe de rotation Ox .

- a) On suppose que l'enfant, arrivant en $\theta = 0$ avec une énergie cinétique E_{c1} , fait passer rapidement son moment d'inertie de la valeur J_1 à la valeur J_2 . Justifier que son moment cinétique par rapport à l'axe Ox se conserve. En déduire la variation relative d'énergie cinétique $(E_{c2} - E_{c1})/E_{c1}$ au cours de l'opération.
- b) Lorsqu'ensuite l'enfant, arrive en $\theta = \theta_M$, il fait repasser rapidement son moment d'inertie de la valeur J_2 à la valeur J_1 . Justifier que son énergie cinétique ne varie pas. Conclure sur la manière d'amplifier le mouvement.
- c) On peut aussi dire que l'enfant impose une variation de son moment d'inertie $J(t)$ de forme créneau de période $T_0/2$. Pour comprendre en quoi cette situation est optimale, on remplace la fonction créneau par une fonction sinusoïdale de période T . L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$J\ddot{\theta} + mga\theta = 0 \quad \text{avec} \quad J(t) = J_0 + \Delta J \cos \omega t .$$

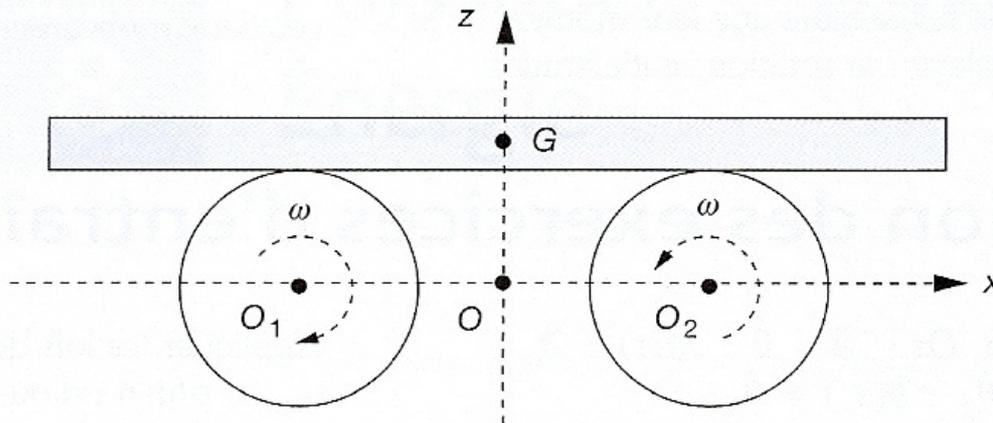
Soit en supposant $|\Delta J| \ll J_0$ et en faisant un développement limité :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta \left(1 - \frac{\Delta J}{J_0} \cos \omega t \right) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J_0}} .$$

En l'absence de déformation on aurait $\theta_0(t) = \theta_M \cos(\omega_0 t)$. En supposant qu'on peut faire l'approximation $\theta(t) \approx \theta_0(t)$ dans le terme décrivant la déformation, justifier sans gros calculs que l'amplification est optimale si $\omega = 2\omega_0$.

Machine de Timochenko :

On fait tourner les deux cylindres de rayon b de la figure 24 en sens inverse à vitesse angulaire ω constante très élevée. À l'instant $t = 0$ on pose la planche homogène de masse m et d'épaisseur négligeable sur les cylindres, son centre d'inertie étant dans le plan médiateur de O_1 et O_2 . On donne les coefficients de frottement de glissement f_1 et f_2 sur les deux cylindres, avec $f_1 > f_2$. On constate que la planche oscille de manière sinusoïdale sans décoller.



- a) Dénombrer les inconnues.
- b) Montrer que nécessairement la planche glisse. Dans la suite on supposera que le sens des vitesses de glissement de la planche sur chacun des rouleaux est imposé par leur sens de rotation.
- c) On écrit les actions de contact exercées par les rouleaux sur la planche sous la forme $\mathbf{R}_1 = T_1 \mathbf{u}_x + N_1 \mathbf{u}_z$ et $\mathbf{R}_2 = T_2 \mathbf{u}_x + N_2 \mathbf{u}_z$. Exprimer T_1 et T_2 en fonction de N_1 , N_2 , f_1 et f_2 .
- d) Établir trois équations scalaires en utilisant les théorèmes généraux pour la planche. En déduire que :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \left(\frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2} \right) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g(f_1 + f_2)}{2a}} \quad \text{et déterminer } x(t).$$

e) À quelle condition la planche oscille-t-elle sans décoller ? Peut-on changer le sens de rotation des cylindres ?

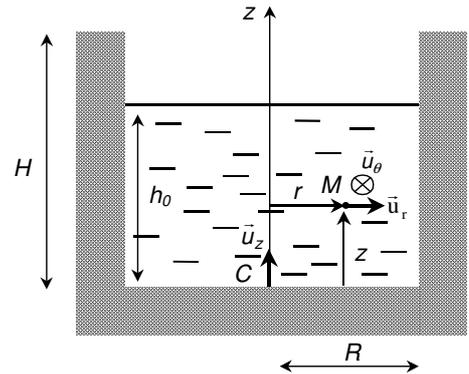


Mécanique des fluides

Etude de la forme d'un miroir métallique liquide :

Cet exercice étudie le principe de fonctionnement et la mise en œuvre d'un miroir métallique liquide, utilisé dans des mesures astronomiques et atmosphériques. La 1^{ère} partie de l'étude, présentée dans cet exercice, propose de déterminer l'équation de la surface libre du miroir liquide en rotation.

Une cuve cylindrique de rayon R et de hauteur intérieure H , contient une hauteur h_0 de liquide métallique incompressible de masse volumique ρ . L'axe de symétrie (Cz) de la cuve est orienté suivant la verticale ascendante, le point origine C étant le centre du fond du récipient. L'accélération de la pesanteur est notée \vec{g} . Le référentiel d'étude (R) est celui du laboratoire supposé galiléen. La cuve est ouverte à l'atmosphère à la pression P_0 . La cuve est progressivement mise en rotation autour de (Cz) et, après une phase de démarrage suffisamment longue, la vitesse de rotation atteint une valeur constante ω , réglée avec précision. Le liquide tourne également en bloc à la même vitesse angulaire autour de l'axe (Cz) et il est immobile par rapport au référentiel (R') lié à la cuve.



1. On considère un volume $d\tau$ de fluide centré sur un point M , de coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans le repère $(C, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ du référentiel (R'). Ecrire la condition d'équilibre relatif de ce volume élémentaire dans (R').

2. En déduire que la surface libre du liquide a pour équation : $z = a + \frac{\omega^2}{2g} r^2$, où a est une constante. Quelle forme géométrique présente la surface libre ?

3. Déterminer l'expression de la constante a en fonction de h_0 , ω , R et g .

4. Quelle est la vitesse angulaire ω_m à ne pas dépasser pour éviter le débordement du liquide ?

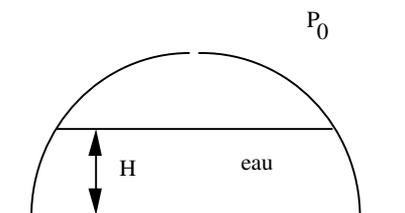
Allure de la surface libre de l'eau dans un camion accéléré :

Un camion rempli d'eau se déplace sur le sol horizontal avec un accélération constante a_0 portée par l'axe horizontal (Ox).

Quelle est l'allure de la surface libre du liquide lorsqu'elle est stabilisée ?

On utilisera la relation fondamentale de la statique des fluides dans le référentiel du camion, en prenant en compte la force d'inertie d'entraînement.

Soulèvement d'une demi-sphère :

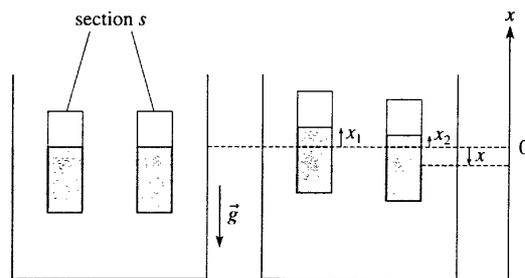


Une cloche hémisphérique de rayon R et de masse m repose sur un plan horizontal. Elle contient de l'eau jusqu'à une hauteur H . Elle est percée d'un petit trou en son sommet.

Montrer qu'il existe une hauteur critique H_C au-delà de laquelle l'équilibre est rompu.

Oscillations de deux flotteurs :

Deux flotteurs cylindriques, identiques (de section s et de masse m) peuvent osciller dans l'eau d'un récipient de section S . Soit ρ la masse volumique de l'eau. Les positions des flotteurs sont repérées par leurs déplacements verticaux x_1 et x_2 par rapport à leurs positions d'équilibre respectives.



1) Déterminer le système d'équations différentielles qui définit le mouvement des deux flotteurs (on admettra que la surface libre reste horizontale et que le théorème d'Archimède est applicable).

2) Résoudre ce système en supposant qu'à l'instant initial, les deux flotteurs sont dans leurs positions d'équilibre respectives, avec des vitesses initiales $2v_0$ pour le premier et v_0 pour le second.

Equilibre d'un fluide à symétrie sphérique, modélisation du Soleil :

La Terre décrit autour du Soleil, assimilé à une sphère de centre O et de rayon R_S et vu depuis la Terre sous un diamètre angulaire $2\alpha_S = 32'$, une orbite pratiquement circulaire de rayon $D = 149,5$ millions de km en 1 an. Le Soleil est modélisé par un fluide gazeux, supposé parfait, de masse volumique constante μ_S .

Données :

*** Constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI

*** Constante des gaz parfaits : $R = 8,32$ J.K⁻¹

*** Masse molaire du fluide solaire : $M = 1,25$ g

a) Calculer le rayon R_S du Soleil et sa masse volumique moyenne μ_S .

b) Calculer le gradient dP/dr de la pression du fluide solaire en tout point M à la distance r du centre du Soleil, à l'aide des constantes μ_S et G .

c) Etablir la loi des pressions $P(r)$ en M en supposant nulle la pression au bord du Soleil. Calculer la pression P_0 et la température T_0 au centre du Soleil.

d) Calculer l'énergie potentielle de gravitation du Soleil, en fonction de G , μ_S et R_S , puis en fonction de la masse M_S et du rayon R_S du Soleil.

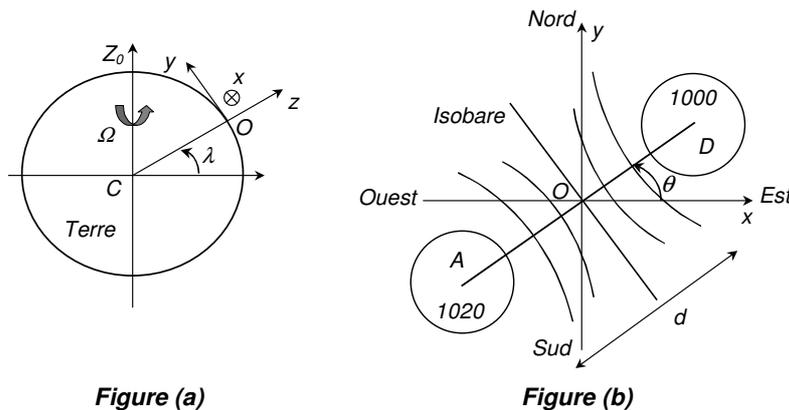
Enroulement du vent autour d'un anticyclone et d'une dépression :

Un point M situé dans l'atmosphère terrestre est repéré par ses coordonnées (x,y,z) dans le repère local $(Oxyz)$, dont l'origine O se trouve dans un plan méridien à la latitude λ , avec $0 \leq \lambda \leq \pi/2$ pour l'hémisphère Nord (figure (a)). L'axe (Ox) est dirigé vers l'Est, l'axe (Oy) vers le Nord et l'axe (Oz) suivant le rayon terrestre. La vitesse angulaire de rotation propre de la Terre est $\Omega = 2\pi / 86\,164 \text{ rad.s}^{-1}$.

1. On s'intéresse à la résultante $d\vec{F}$ des forces de pression s'exerçant sur un élément de fluide atmosphérique de masse dm , de forme parallélépipédique, de volume $d\tau = dx.dy.dz$; montrer que la force de pression rapportée à l'unité de masse, définie par $\vec{f} = d\vec{F} / dm$ est donnée par l'expression $\vec{f} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} P$ où ρ est la masse volumique du fluide et P la pression au point M de coordonnées (x,y,z) . Dans une atmosphère calme, par quoi est compensée la composante verticale des forces de pression ?

Par la suite, on supposera cette compensation effective en toutes circonstances et on ne s'intéressera qu'au mouvement de la particule fluide dans un plan horizontal.

2. On considère la situation météorologique schématisée sur la figure (b), dans laquelle l'axe anticyclone-dépression² fait un angle θ avec la direction (Ox) . La distance entre les isobares $P_A = 1\,020$ et $P_D = 1\,000$ est notée d , les pressions étant mesurées en hectopascals. On supposera le gradient de pression uniforme sur l'axe (AD) , de norme notée a . Au niveau de l'axe (AD) , les isobares sont perpendiculaires à cet axe et sont localement assimilables à des segments de droite.



a) Le référentiel géocentrique étant supposé galiléen, on se place dans le référentiel terrestre. Ecrire, en négligeant les forces de frottements, le principe fondamental de la dynamique pour la particule de fluide (de masse dm) dans le référentiel terrestre.

b) Exprimer les coordonnées f_x et f_y de la force massique de pression, le long de l'axe (AD) , en fonction de a , ρ et θ .

c) L'approximation géostrophique consiste à négliger l'accélération du mouvement. Montrer que le fluide atmosphérique s'écoule au niveau de l'axe (AD) suivant une direction et un sens que l'on précisera³. Comment modifier ces conclusions dans l'hémisphère Sud ? Calculer la norme notée v du vecteur vitesse du vent. On donne : $d = 800 \text{ km}$, $\lambda = 42^\circ \text{ Nord}$ et $\rho = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$.

² Les régions où la pression atmosphérique est relativement basse sont appelées des dépressions, alors que les anticyclones correspondent à des zones de pression relativement élevée.

³ Le vent ainsi défini est appelé vent géostrophique et constitue le plus souvent une bonne approximation du vent réel, bien que le surestimant systématiquement.

Radiosondage par ballon sonde :

Le radio-sondage est une technique de mesure en altitude des propriétés de l'atmosphère par ballon sonde ascendant. Un tel ballon, rempli d'un gaz plus léger que l'air (du dihydrogène ou de l'hélium), est soumis, d'après le principe d'Archimède, à une force ascensionnelle qui le propulse dans l'atmosphère. Il s'élève alors à une vitesse de l'ordre de 5 m.s^{-1} jusqu'à ce que la dilatation du gaz contenu dans son enveloppe ne provoque son éclatement, généralement observé vers 30 km d'altitude.

Un ballon sonde transporte une mini-station météorologique équipée de capteurs permettant de mesurer les variations de température, d'humidité et de pression de l'air atmosphérique avec l'altitude et de connaître la direction du vent par étude du suivi de la trajectoire du ballon. Un parachute permet, après éclatement de l'enveloppe du ballon, la récupération des équipements embarqués.

On suppose que, dans la troposphère, la température décroît linéairement de $a = 6,5 \text{ K.km}^{-1}$ quand l'altitude augmente. La température au sol est notée $T_0 = 300 \text{ K}$ et l'air et l'hélium sont considérés comme étant des gaz parfaits. On donne R (constante des gaz parfaits), $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

Un ballon sonde sphérique (de rayon r), fermé et placé dans l'air, contient une masse m d'hélium (de masse molaire $M_{\text{He}} = 4 \text{ g.mol}^{-1}$). Ses accessoires (de volume négligeable) et son enveloppe ont une masse $m_0 = 750 \text{ g}$.

1. Le ballon est gonflé au sol de sorte qu'à la température T_0 et pour une pression extérieure de $P_0 = 1 \text{ bar}$, le rayon r_0 soit de 75 cm. On désigne par \bar{g} l'accélération de la pesanteur ($g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$).

a) Quelle masse d'hélium m faut-il utiliser ?

b) On appelle force ascensionnelle F_0 , la force résultante à l'altitude nulle des forces extérieures exercées sur l'ensemble {ballon-gaz}. Etablir l'expression de F_0 en fonction de r_0 , m_0 , m , g et μ_0 (masse volumique de l'air).

c) Quelle est la valeur maximale $m_{0,\text{max}}$ de la masse m_0 des accessoires et de l'enveloppe ? (On donne $\mu_0 = 1,192 \text{ kg.m}^{-3}$)

2. Montrer que la pression atmosphérique $P(z)$ à l'altitude z (l'axe (Oz) est orienté dans le sens des altitudes croissantes) peut s'écrire en fonction de la température $T(z)$ sous la forme $P(z) = P_0(T(z)/T_0)^\eta$, où η est une constante que l'on exprimera en fonction de M_a (masse molaire de l'air), g , a et R . Calculer numériquement η , avec $M_a = 29 \text{ g.mol}^{-1}$.

3. On admet qu'à toute altitude z , les pressions et températures sont identiques à l'extérieur et à l'intérieur du ballon.

a) Déterminer la force ascensionnelle $F(z)$ à l'altitude z .

b) Sachant que le rayon maximal possible du ballon est 2 m, calculer l'ordre de grandeur de l'altitude maximale atteinte par ce ballon avant son éclatement.

Dépression associée à une tornade :

On néglige la pesanteur. Une tornade est décrite par un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène de masse volumique μ , décrit en coordonnées cylindriques par un champ des vitesses $\vec{v} = v(r)\vec{u}_\theta$ tel que le vecteur-tourbillon associé vaut :

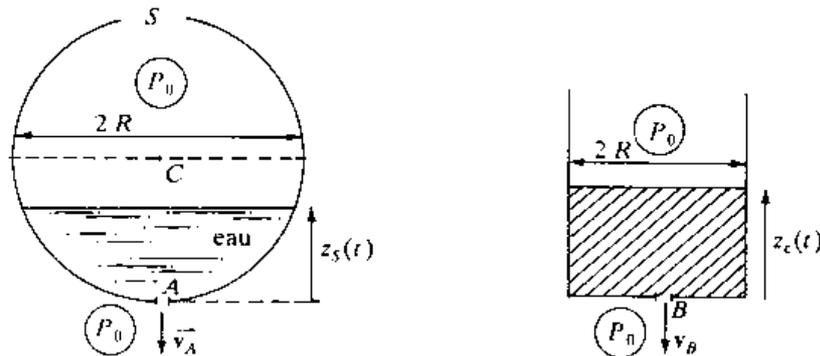
$$\vec{\Omega} (0 \leq r \leq a) = \Omega_0 \vec{u}_z \text{ et } \vec{\Omega} (r > a) = \vec{0}$$

- 1) En utilisant le théorème de Stokes, déterminer $v(r)$.
- 2) En déduire l'expression de la pression $p(r)$ sachant que $p(r = \infty) = p_\infty$. Tracer l'allure de son graphe.

Durées de vidanges de réservoirs sphérique et cylindrique, clepsydre :

1) Vidange d'un réservoir sphérique :

Un réservoir de forme sphérique, de rayon $R = 40$ cm, est initialement rempli à moitié d'eau de masse volumique $\mu = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; la pression atmosphérique P_0 règne au-dessus de la surface libre de l'eau grâce à une ouverture pratiquée au sommet S du réservoir.



On ouvre à $t = 0$ un orifice A circulaire de faible section $s = 1 \text{ cm}^2$ au fond du réservoir.

- a) Etablir l'équation différentielle en $z(t)$, si $z(t)$ est la hauteur d'eau dans le réservoir comptée à partir de A, à l'instant t .
- b) Exprimer littéralement, puis calculer, la durée T_S de vidange de ce réservoir.
- c) Exprimer, en fonction de T_S , le temps nécessaire t_s pour vider la moitié du réservoir.

2) Comparaison des vidanges des réservoirs sphérique et cylindrique :

La même quantité d'eau que celle placée initialement dans le réservoir sphérique est maintenant versée dans un récipient cylindrique de même rayon $R = 40$ cm; la pression atmosphérique P_0 règne au-dessus de l'eau. On ouvre, à l'instant $t = 0$, un orifice B circulaire de même section que A ($s = 1 \text{ cm}^2$) au fond du réservoir cylindrique.

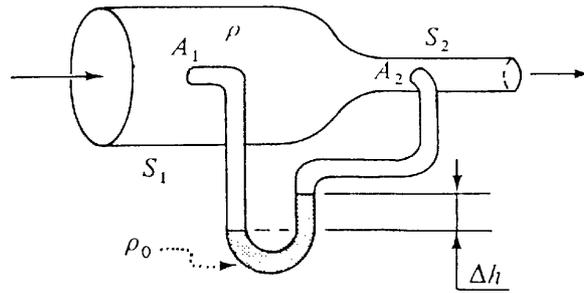
- a) Ecrire la loi $z_C(t)$, où z_C est la hauteur d'eau dans le réservoir, comptée à partir de B, à l'instant t .
- b) Exprimer littéralement la durée T_C de vidange, puis la durée t_C nécessaire pour vider la moitié du récipient cylindrique.
- c) Comparer T_S et T_C d'une part, t_s et t_C d'autre part; conclure.

3) Clepsydre :

Soit un récipient (R_0) à symétrie de révolution autour de l'axe Oz, de méridienne d'équation $r = az^n$, où r est le rayon du réservoir aux points de cote z comptée à partir de l'orifice C, de faible section $s = 1 \text{ cm}^2$ percé au fond du réservoir.

Déterminer les coefficients constants n et a , donc la forme de (R_0), pour que le cote du niveau d'eau placée dans (R_0) baisse régulièrement de 6 cm par minute au cours de la vidange.

Débit d'un gaz :



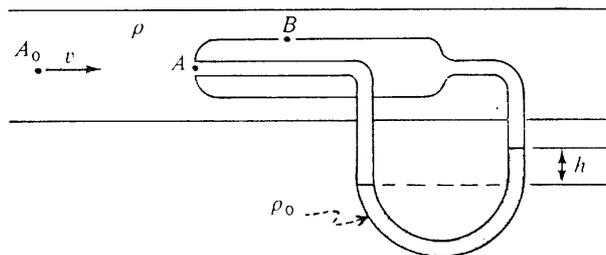
On considère l'écoulement permanent d'un gaz dans le tube représenté ci-dessus. L'axe du tube est horizontal.

Les prises de pression A et B sont situées au même niveau, et le tube en U est rempli d'un liquide de masse volumique ρ_0 .

Exprimer le débit volumique D du gaz en fonction de g , ρ_0 , Δh , S_1 , S_2 et de la masse volumique ρ du gaz.

Tube de Pitot double :

On considère l'écoulement permanent d'un gaz dans une conduite cylindrique munie d'un tube de Pitot double.



Soit ρ la masse volumique du gaz, ρ_0 la masse volumique du liquide remplissant le tube en U. On admettra que la vitesse V du gaz a la même valeur en tout point d'une section droite de la conduite.

Exprimer la vitesse V puis le débit volumique D de la conduite en fonction de ρ_0 , ρ , g , h et de la section droite S de la conduite.

Régime transitoire de la vidange d'un réservoir :

Un grand réservoir est rempli d'un liquide de masse volumique μ . A la hauteur $h = 1,6$ m au-dessous de sa surface libre, un tuyau d'évacuation horizontal, de faible section et de longueur $a = 0,5$ m est fermé par une vanne V . On ouvre brusquement V à l'instant $t = 0$.

A un instant t ultérieur, on admet que le niveau du réservoir ne varie pas et que la vitesse v est nulle dans tout le volume de celui-ci ; le long de la conduite, on a *a priori*, $\vec{v} = v(x, t) \vec{u}_x$, $0 < x < a$ désignant une abscisse comptée à partir de l'entrée de la conduite.

- 1) Etablir que v ne dépend pas de x .
- 2) Donner la valeur v_0 de v correspondant à $t \rightarrow \infty$.

Application numérique avec $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

3) En utilisant l'expression généralisée du théorème de Bernoulli, montrer que à t donné, la pression P dans la conduite est une fonction affine de x .

4) Etablir une équation différentielle décrivant l'évolution de $v(t)$. Intégrer celle-ci en posant $\tau = 2a / \sqrt{2gh}$.

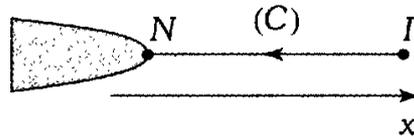
Quelle est la signification physique du paramètre τ ?

Calculer numériquement la durée T au bout de laquelle la vitesse dans la conduite ne diffère plus que de 1 % de sa valeur dans le régime permanent de vidange.

Conclure en ce qui concerne un calcul de temps de vidange tel que celui proposé dans l'exercice « durée de vidange d'un réservoir ».

Écoulement compressible, température de nez d'un avion :

Un avion se déplace en mouvement rectiligne uniforme dans l'air à la vitesse U . Loin de l'avion, l'air est au repos à la pression $p_\infty = 1,0$ bar et à la température $T_\infty = 268$ K. L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29$ g.mol⁻¹ et de coefficient $\gamma = 1,40$. On rappelle la valeur $R = 8,31$ J.K⁻¹.mol⁻¹ de la constante des gaz parfaits.



On suppose l'écoulement de l'air parfait. On note N le nez de l'avion et I le point à l'infini sur la ligne de courant (C) arrivant en N .

1. Montrer que : $U^2 = 2 \int_I^N \frac{dp}{\mu}$.

2. En déduire les expressions de la température T_N du nez N de l'avion, de la masse volumique μ_N au voisinage et de la masse volumique μ_I loin de l'avion.

3. Calculer T_N et μ_N d'une part pour $U = 300$ m.s⁻¹ et d'autre part pour $U = 100$ m.s⁻¹. Comparer μ_N et μ_I dans les deux cas. Commenter.

Oscillations dans un tube en U :

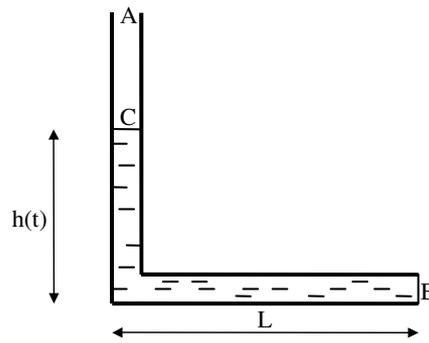
Etudier les oscillations d'un fluide incompressible dans un tube en U de faible section en appliquant le théorème de Bernoulli en régime dépendant du temps ou en effectuant un bilan énergétique. On suppose que les surfaces libres restent dans les parties rectilignes et verticales du tube.

Déterminer ensuite la période des petites oscillations du fluide lorsque celui-ci reste dans la partie semi-circulaire du tube.

Vidange d'un tuyau :

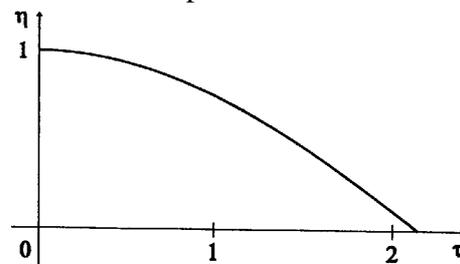
On considère le tuyau de la figure ci-dessous, de section constante S , formant un coude AOB dont les bras AO vertical et OB horizontal ont même longueur L . A l'instant $t = 0$, le tube est rempli d'eau au repos. A un instant t ultérieur, le tube se vide et on note C le point situé à la surface libre de l'eau dans le bras vertical et $h(t)$ sa cote. On suppose l'écoulement parfait, incompressible et homogène de masse volumique μ , unidimensionnel, décrit par le champ de

pression $P(s,t)$ et le champ des vitesses $\mathbf{v}(M) = v(s,t) \mathbf{u}$ où s est l'abscisse curviligne mesurée à partir de C le long de la ligne de courant moyenne (C) et \mathbf{u} le vecteur unitaire tangent à (C).



- Montrer que $v(s,t)$ est indépendant de s et l'exprimer en fonction de dh / dt .
- Etablir l'équation différentielle (E) du second ordre dont $h(t)$ est solution.
- Obtenir une intégrale première temporelle de (E) et en déduire la vitesse de l'écoulement au moment où le bras vertical est vidé.

Une résolution numérique de cette équation donne le graphe de la figure ci-dessous (on a posé $\eta(t) = h(t) / L$ et $\tau = t / T$). Commenter et exploiter.



- Obtenir une intégrale première temporelle de (E) et en déduire la vitesse de l'écoulement au moment où le bras vertical est vidé. Retrouver ce résultat à l'aide du graphe.

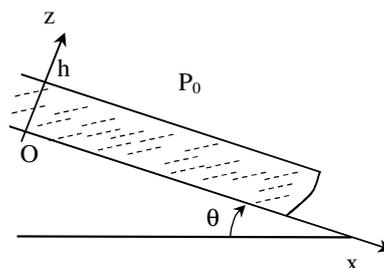
Écoulement d'un fluide visqueux sur un plan incliné :

On considère l'écoulement permanent d'une couche de fluide incompressible et visqueux, de hauteur h , sur un plan incliné. On suppose l'écoulement unidimensionnel : le champ des vitesses sera parallèle à l'axe Ox et ne dépendra que de la variable z .

A la surface libre, la pression est uniforme et vaut P_0 .

La masse volumique du fluide, supposé newtonien, est ρ et sa viscosité η .

On admettra qu'à cause de la faible viscosité de l'air au-dessus du fluide, il n'y a pas de contrainte tangentielle en $z = h$.



On donne l'équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

- a) Simplifier et projeter l'équation de Navier-Stokes.
- b) Déterminer le champ des vitesses $\vec{v} = v(z) \vec{e}_x$, en tenant compte des conditions aux limites.
- c) On s'intéresse à un écoulement de largeur L selon l'axe Oy , avec $L \gg h$, pour pouvoir négliger les effets de bord. Calculer le débit volumique D_v et en déduire la vitesse moyenne du fluide.
- d) On considère une rivière de profondeur 5 m, s'écoulant entre deux points distants de 100 km, avec une différence d'altitude de 10 m. On donne :

$$g = 10 \text{ m.s}^{-2} ; \rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3} ; \eta_{\text{eau}} = 10^{-3} \text{ Pa.s}$$

Calculer la vitesse moyenne et commenter le résultat en utilisant le nombre de Reynolds.

- e) On s'intéresse maintenant à une couche de glycérine $\rho = 900 \text{ kg.m}^{-3} ; \eta_{\text{eau}} = 0,85 \text{ Pa.s}$, de 1 mm d'épaisseur, pour un angle $\theta = 10^\circ$. Reprendre la question précédente.

Écoulement de Poiseuille :

Un fluide de viscosité dynamique η et de masse volumique μ s'écoule en régime stationnaire et incompressible dans une conduite cylindrique d'axe (Oz) , de longueur L et de rayon R . Du fait des symétries du problème, on cherche en coordonnées cylindriques un champ de vitesses de la forme $\mathbf{v}(\mathbf{M}) = v_z(r,z)\mathbf{u}_z$ et un champ de pression $P(\mathbf{M}) = P(r,z)$.

- a) En exploitant l'incompressibilité de l'écoulement, montrer que $v_z(r,z)$ ne dépend pas de z .
- b) Montrer que le champ des accélérations $\mathbf{a}(\mathbf{M})$ est nul. En appliquant le théorème de la résultante dynamique à une particule de fluide, établir l'équation différentielle dont est solution $v_z(r)$ et l'intégrer en tenant compte des conditions aux limites sur la paroi de la conduite.
- c) En déduire l'expression du débit volumique D_v en fonction des pressions $P(z=0) = P_1$ à l'entrée et $P(z=L) = P_2$ à la sortie de la conduite. Comparer le résultat à la loi d'Ohm pour un conducteur filiforme en électrocinétique.

Application numérique : calculer la chute de pression dans une artère de longueur $L = 1 \text{ m}$, de rayon $R = 0,5 \text{ cm}$, où le débit volumique $D_v = 80 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, sachant que la viscosité du sang vaut $\eta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pl}$. Commenter sachant que le cœur maintient une différence de pression DP qui, symbolisée par « 12-8 » en médecine vaut $\Delta P = 12 - 8 = 4 \text{ cm Hg}$.

On rappelle que pour un champ scalaire $f(r)$:

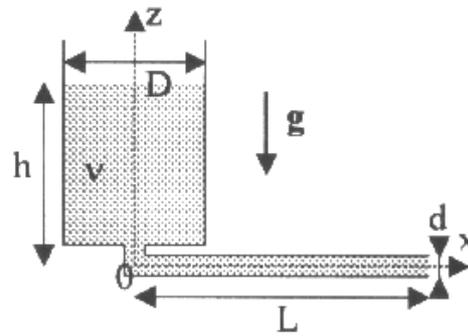
$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{df}{dr} \right]$$

Viscosimètre à écoulement :

Un liquide visqueux, incompressible, s'écoule lentement d'un récipient cylindrique de diamètre D dans un tube capillaire horizontal de diamètre d et de longueur L . On négligera les effets dus aux extrémités du tube.

- 1) Peut-on considérer l'écoulement comme quasi-permanent ? Justifier. En déduire l'expression du débit volumique q_v en fonction de h .

2) A partir de l'équation de continuité, établir une équation différentielle satisfaite par $h(t)$. La résoudre pour la condition initiale $h(0) = h_0$.

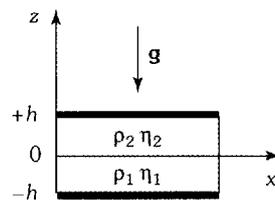


3) Il a fallu une durée $\tau = 75$ min pour que le niveau du liquide passe de la hauteur $h_0 = 5$ cm à la hauteur $h_1 = 2,5$ cm. Déterminer la viscosité cinématique du liquide.

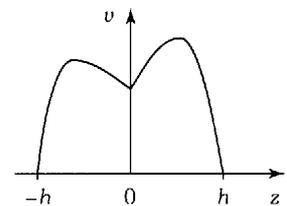
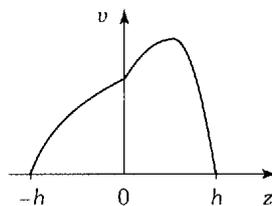
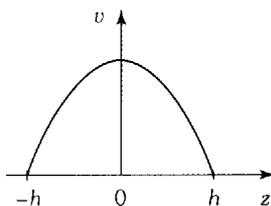
On donne $D = 5$ cm , $L = 40$ cm , $d = 1$ mm et $g = 9,8$ m.s⁻².

Raccordement d'écoulements visqueux :

Deux fluides non miscibles s'écoulent avec un champ de vitesse $\vec{v} = v(x,z) \vec{u}_x$ entre deux parois fixes confondues avec les plans $z = -h$ et $z = h$: le fluide (1), de masse volumique ρ_1 et de viscosité η_1 s'écoule entre les plans $z = -h$ et $z = 0$; le fluide (2), de masse volumique ρ_2 et de viscosité η_2 s'écoule entre les plans $z = 0$ et $z = h$ (Fig. ci-dessus). Les deux fluides sont en contact dans le plan $z = 0$. Les grandeurs ρ_1, ρ_2, η_1 et η_2 sont uniformes.

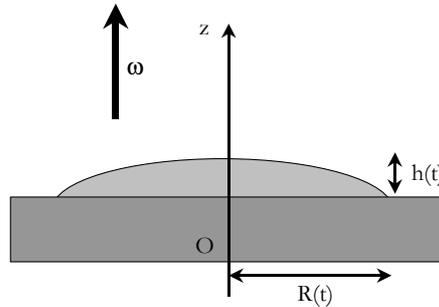


1. Que dire de ρ_2 / ρ_1 ?
2. Justifier que $v(x, z)$ ne dépend pas de x . En déduire la valeur de l'accélération des particules de fluide.
3. Montrer que $p(x, z > 0) + \rho_2 gz = p(x, z < 0) + \rho_1 gz = \Phi(x)$ où $\Phi(x)$ est une fonction inconnue de la seule variable x .
4. On donne $p(x = 0, z = 0) - p(x = L, z = 0) = \Delta p$. Montrer que $\frac{\partial p}{\partial x}$ est une constante et déterminer la forme générale du champ des vitesses dans chacun des fluides.
5. Quelles sont les conditions aux limites permettant d'achever la détermination du champ des vitesses ? On ne demande pas de mener les calculs. Parmi les profils de vitesse proposés sur les figures ci-après, quel est le seul profil susceptible de convenir ?



Au jardin d'acclimatation :

Au jardin d'acclimatation, on propose aux enfants une attraction où ils font de la peinture artistique automatique : une feuille de papier de rayon $R = 10 \text{ cm}$ est fixée sur un plateau tournant à vitesse angulaire $\omega = 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ constante autour d'un axe vertical fixe (Oz). L'enfant envoie une goutte de peinture, de masse volumique μ , de viscosité η et de viscosité cinématique $\nu \approx 10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ verticalement sur la feuille et la goutte s'étale en un film mince d'épaisseur $h < 0,1 \text{ mm}$. La durée typique de l'étalement est $\tau \approx 100 \text{ s}$. Puis il recommence avec plusieurs couleurs en plaçant la goutte différemment. On se propose dans cet exercice d'étudier l'étalement de la goutte à l'aide d'une procédure semi-quantitative.



On adopte le modèle suivant : la goutte a été déposée au centre O et forme à l'instant t un film de rayon $R(t)$ et d'épaisseur maximale $h(t)$, avec $h(t) \ll R(t)$. Son volume reste constant, ce qui donne en « ordre de grandeur » la relation :

$$h(t)R^2(t) = h_0R_0^2$$

Dans le référentiel tournant, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \mu \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} - 2\mu \vec{\omega} \wedge \vec{v} + \mu \omega^2 \overrightarrow{OM}$$

De plus la goutte d'eau étant assez plate et de faible épaisseur, on suppose le champ de pression uniforme.

a) Indiquer la signification des différents termes de l'équation de Navier-Stokes. En évaluant des nombres sans dimension, montrer que tous les autres termes contenant la vitesse sont négligeables devant le terme de viscosité.

b) Exprimer « en ordre de grandeur » la puissance résistante P_r due aux forces de viscosité en fonction de η , $R(t)$, $h(t)$ et dR/dt .

c) Exprimer de même « en ordre de grandeur » la puissance motrice P_m en fonction de μ , ω , $R(t)$, $h(t)$ et dR/dt .

d) En déduire qu'en ordre de grandeur, on a :

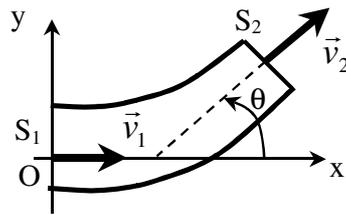
$$R^3 \frac{dR}{dt} \approx \frac{\omega^2 R_0^4 h_0^2}{\nu}$$

et expliciter $R(t)$. Evaluer la durée τ pour qu'une goutte de volume initial $V_0 = 10^{-8} \text{ m}^3$ s'étale jusqu'en $R_M = 10 \text{ cm}$.

Force subie par un coude de canalisation :

Un fluide circule en régime stationnaire dans une canalisation qui fait un coude d'angle θ . Pressions et vitesses sont respectivement P_1 et v_1 au niveau de la section d'entrée S_1 et P_2 et v_2

au niveau de la section d'entrée S_2 . On fera l'hypothèse que ces grandeurs sont uniformes dans les sections S_1 et S_2 . La canalisation est plongée dans l'air ambiant de pression uniforme P_0 .



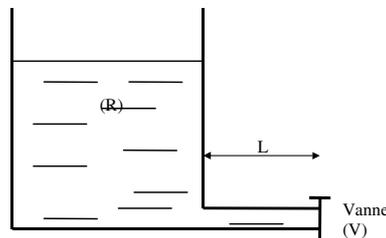
Calculer les composantes F_x et F_y de la force totale subie par la canalisation. On négligera les effets de pesanteur et la masse volumique μ sera prise constante. On exprimera F_x et F_y en fonction de P_0 , P_1 , v_1 , S_1 , S_2 , μ et θ .

Coup de bélier :

Une conduite cylindrique horizontale de longueur L et de section droite d'aire S est en communication avec un réservoir R de très grande capacité et de niveau d'eau que l'on peut considérer comme invariable. La conduite est commandée à son extrémité par une vanne (V). On néglige la viscosité de l'eau.

La vanne est ouverte et le régime stationnaire d'écoulement de débit volumique D_v est établi dans la conduite. L'écoulement est supposé incompressible et la vitesse moyenne d'écoulement est notée v_m .

On ferme alors la vanne. La durée de fermeture est τ . En exprimant un bilan de quantité de mouvement, évaluer la force moyenne en retour F_m (coup de bélier) exercée par la vanne sur le liquide.



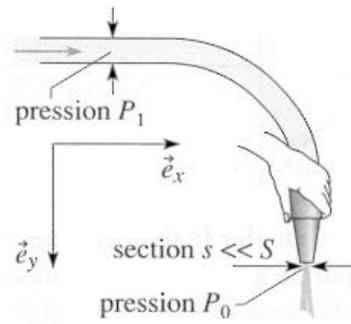
Evaluer la surpression correspondante ΔP . AN : $L = 200 \text{ m}$; $S = 0,30 \text{ m}^2$; $D_v = 150 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$.

Connaissez-vous des exemples de ce phénomène ?

Force sur une lance d'incendie :

Un tuyau souple, de section S , se termine par un embout dont la section terminale s est très petite devant S . La pression dans le tuyau est P_1 et le jet sort dans l'atmosphère à la pression P_0 . L'embout fait un angle droit avec la partie antérieure du tuyau. La vitesse du jet sera supposée très grande devant la vitesse du fluide dans le tuyau.

L'eau étant assimilée à un fluide parfait, calculer le débit massique D_m et F_y , composante parallèle au jet de la force \vec{F} exercée par la personne qui tient la lance.



AN : $P_1 = 10 \text{ bars}$; $P_0 = 1 \text{ bar}$; $s = 1 \text{ cm}^2$

Systèmes à masse variable :

On étudie une benne de masse m_0 à vide pouvant glisser sans frottement sur un plan horizontal. Elle est, à $t = 0$, remplie d'une masse m_1 de sable. Percée d'un petit trou, elle perd régulièrement son chargement avec un taux $\alpha = -dm/dt$ constant (où m est la masse totale de la benne à l'instant t). On exerce, pour $t > 0$, une force horizontale constante \mathbf{F} parallèle au plan.

Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ de la benne puis de sa position $x(t)$ pour $t > 0$.

Goutte d'eau qui tombe dans un nuage :

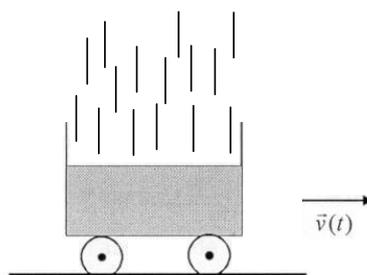
A $t = 0$, une goutte d'eau sphérique de rayon r_0 , animée d'une vitesse v_0 tombe dans un nuage. L'humidité du milieu fait croître le rayon $r(t)$ de la goutte lors de la chute. La croissance du rayon est modélisée par $r(t) = r_0(1 + at)$, avec $a > 0$. La masse volumique de l'eau est notée μ et la masse de la goutte $m(t)$.

- Déterminer l'expression de dm/dt en fonction de la surface $s(t)$ de la goutte, de μ , a et r_0 .
- Déterminer en fonction de $v(t)$ l'équation du mouvement de la goutte. En déduire $v(t)$.
- Reprendre l'étude précédent en tenant compte d'une force de frottement de type visqueux ($-\beta m(t)\vec{v}(t)$).

Il pleut sur un chariot :

Un chariot, rempli de sable, avance sans frottements sur des rails horizontaux avec une vitesse \vec{v}_0 . Sa masse totale est alors M_0 . La section du chariot perpendiculaire à la verticale est notée S .

- Soudain, la pluie se met à tomber, verticalement, et il rentre, par seconde, D kilogrammes d'eau dans le chariot. Donner la loi d'évolution de la vitesse $v(t)$ du chariot.

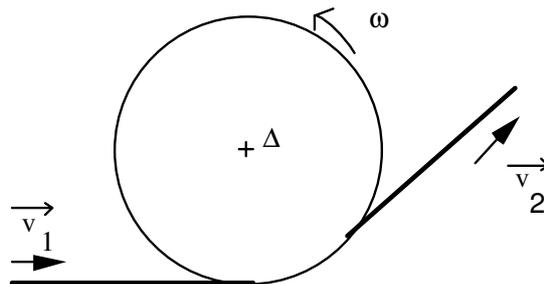


b) La pluie tombe maintenant avec une vitesse u constante et un angle $\theta = 45^\circ$ par rapport à la verticale, dans le sens contraire du mouvement du chariot ; on appelle M_1 la masse du chariot et de son contenu à l'instant où la pluie se met à tomber de manière oblique et v_1 sa vitesse au même instant. Exprimer l'instant t_0 où le chariot s'arrête en fonction de M_1 , v_1 , D , u et θ .

AN : $M_1 = 200 \text{ kg}$; $v_1 = 10 \text{ m.s}^{-1}$; $u = 20 \text{ m.s}^{-1}$; $S = 2 \text{ m}^2$. Par ailleurs, la météo annonce qu'il est tombé 2 mm de pluie en une minute. Calculer t_0 .

Etude d'une turbine :

On étudie une turbine, entraînée par un jet d'eau, qui tourne autour de son axe fixe Δ à la vitesse angulaire $\omega(t)$.



Le jet incident et le jet émergent sont unidimensionnels et d'épaisseur négligeable. Ils entrent et sortent tangentiellement à un cercle d'axe Δ et de rayon a . Le débit massique d'eau est D_m , la vitesse du jet incident est \vec{v}_1 (module v_1) et celle du jet émergent \vec{v}_2 (module v_2). La valeur de v_1 est connue, mais celle de v_2 dépend de $\omega(t)$.

Le moment cinétique par rapport à Δ de la turbine et de l'eau qu'elle contient est $J\omega$. On suppose que J est constant.

La machine entraînée par la turbine et les frottements sur l'axe exercent un moment résistant de valeur absolue Γ . On suppose Γ constant, indépendant du régime.

L'action de la pesanteur est ici négligée.

1) En faisant un bilan de moment cinétique, montrer que :

$$J \frac{d\omega}{dt} - D_m a (v_1 - v_2) = - \Gamma$$

2) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, montrer que:

$$v_2^2 = v_1^2 - \frac{2\Gamma\omega}{D_m} - \frac{2J\omega}{D_m} \frac{d\omega}{dt} + 2 \frac{P_{\text{viscosité}}}{D_m}$$

3) On néglige désormais la dissipation d'énergie due à la viscosité, montrer que:

$$J \frac{d\omega}{dt} = 2 D_m a (v_1 - a \omega) - \Gamma$$

4) En régime permanent, en déduire ω_{RP} . Quelle puissance, la turbine fournit-elle en régime permanent ? La réponse sera donnée en fonction de ω_{RP} . v_1 étant supposé constant, quand est-elle maximale ? Tracer cette puissance en fonction de ω_{RP} .

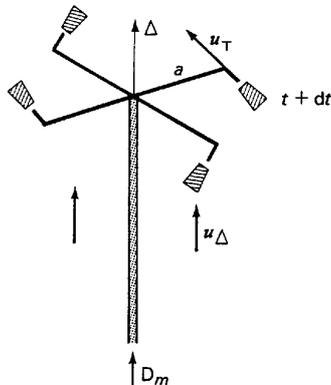
5) Déterminer $\omega(t)$ en régime transitoire. Que vaut τ caractérisant la durée de ce régime ?

Tourniquet hydraulique :

On considère un tourniquet hydraulique en rotation autour de l'axe vertical Δ . L'eau arrive par la base avec un débit de masse constant D_m et ressort par les n branches identiques à la vitesse

u par rapport à ces branches tangentiellement à la circonférence de rayon a trajectoire des extrémités du tourniquet. On considère le système formé à chaque instant par le tourniquet et l'eau contenue à l'intérieur. Le moment cinétique de ce système par rapport à l'axe Δ dans le référentiel d'étude R_0 galiléen est $J\omega$. On néglige les forces de frottement.

1) Ecrire l'équation différentielle du mouvement.



2) En déduire l'expression de ω en fonction du temps et la vitesse angulaire limite ω_∞ atteinte. On supposera $\omega = 0$ pour $t = 0$.

Force sur une chaîne :



Quelle force \vec{F} faut-il exercer pour soulever à vitesse constante V une chaîne de masse linéique λ ?

On admettra que la partie de la chaîne située sur le sol n'exerce pas de force sur la partie soulevée.

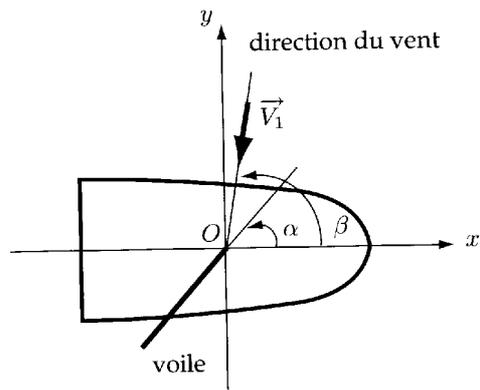
Force que subit une lentille :

Un faisceau lumineux cylindrique de longueur d'onde λ éclaire une lentille mince convergente parallèlement à son axe optique. On rappelle que dans un modèle corpusculaire, la lumière est constituée de photons d'énergie $E = hc/\lambda$ et de quantité de mouvement $\vec{p} = \frac{E}{c} \vec{u}$ où \vec{u} est un vecteur unitaire dans la direction de propagation. Déterminer la force que subit la lentille. On introduira toutes les données nécessaires.

Modèle sommaire de voilier :

On considère un bateau se déplaçant à vitesse constante.

On se place dans le référentiel (Oxy) lié au bateau. La surface totale de la voile sera notée S . Le plan de la voile est incliné d'un angle α par rapport à la direction du bateau. Le vent arrive sur la voile avec la vitesse \vec{V}_1 , selon la direction définie par l'angle β (voir figure).



On suppose que le vent se réfléchit sur la voile selon les lois de Descartes en ne perdant pratiquement pas de vitesse en module.

On supposera que la pression de l'air est uniforme et on notera μ sa masse volumique.

Calculer la force, projetée selon Ox , qui s'applique sur la voile.



Ondes mécaniques

Résonances sur une corde vibrante en présence de forces volumiques :

On étudie les petits mouvements dans la direction \mathbf{u}_z d'une corde métallique de longueur L , fixée en ses deux extrémités d'abscisses $x=0$ et $x=L$. On néglige la pesanteur. La corde est parcourue par un courant d'intensité $I=I_0\cos\omega t$ et plongée dans un champ magnétique $\mathbf{B} = B_0\sin(\pi x/L) \mathbf{u}_y$. On note F la tension de la corde et μ sa masse linéique.

a) Montrer que le déplacement $z(x,t)$ d'un point de la corde est solution d'une équation aux dérivées partielles de la forme :

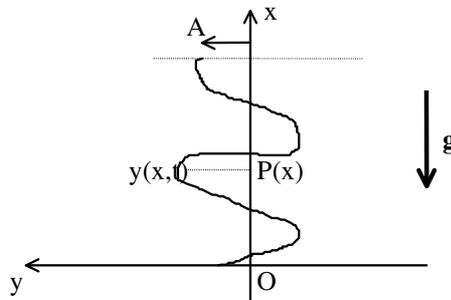
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega t)$$

où c et A sont deux constantes à exprimer en fonction des données.

b) En régime sinusoïdal forcé, on cherche une solution de la forme $z(x,t) = C\sin(\pi x/L)\cos(\omega t)$. Déterminer C pour $\omega \neq \pi c/L$. Que se passe-t-il lorsque ω tend vers $\pi c/L$?

Etude des vibrations d'une corde verticale :

L'axe (Ox) est vertical ascendant, (Oy) horizontal. Une corde, infiniment souple, de masse linéique μ , de longueur L est suspendue au point A dans le champ de pesanteur d'intensité g . Lorsque la corde est au repos, son extrémité inférieure coïncide avec le point O . Son point d'accrochage A effectue des oscillations horizontales : $y_A = a\cos\omega t$, d'amplitude a très inférieure à L . L'extrémité inférieure de la corde ne subit aucune contrainte. Le déplacement (quasi-horizontale) d'un point $P(x)$ de la corde par rapport à sa position d'équilibre est noté $y(x,t)$.



Dans toute la suite, on suppose que y , $\partial y / \partial x$ et $\partial^2 y / \partial x^2$ sont très petits et que le déplacement de la corde ne se produit que dans la direction (Oy) .

a) Montrer que l'équation de propagation des ondes le long de la corde est :

$$\partial^2 y / \partial t^2 = g \left(\partial y / \partial x + x \cdot \partial^2 y / \partial x^2 \right)$$

b) On cherche une solution de l'équation ci-dessus sous la forme :

$$y(x,t) = \alpha(x) \cos \omega t + \beta(x) \sin \omega t$$

* Montrer que $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ vérifient la même équation différentielle.

* On note : $X = x(\omega^2/g)$; $\alpha = A_0 A(X)$; $\beta(x) = B_0 A(X)$, avec $A(0) = 1$. Etablir l'équation vérifiée par la fonction $A(X)$, puis rechercher une solution de cette équation sous la forme d'un développement en série entière :

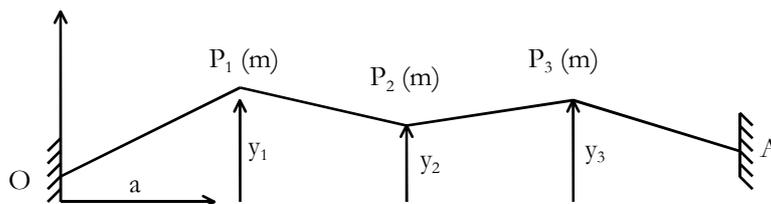
$$A(X) = 1 + A_1 X + A_2 X^2 + \dots$$

Déterminer les coefficients A_k .

Oscillations transversales d'une corde plombée :

Une corde élastique de masse négligeable est, à l'équilibre, tendue avec une force F entre deux points fixes O et A distants de $4a$. La corde porte, régulièrement espacés, trois plombs P_1 , P_2 et P_3 de même masse m . On néglige le poids des plombs, chaque tronçon de corde dont la longueur est a dans l'état d'équilibre initial est caractérisé par la raideur k et la longueur naturelle $l_0 < a$. On pose $\omega_0^2 = F / ma$.

On étudie les petits mouvements transversaux des plombs ; l'ordonnée du plomb P_n est y_n à la date t ($y_n \ll a$), on admet que son abscisse reste constamment égale à $x_n = na$.

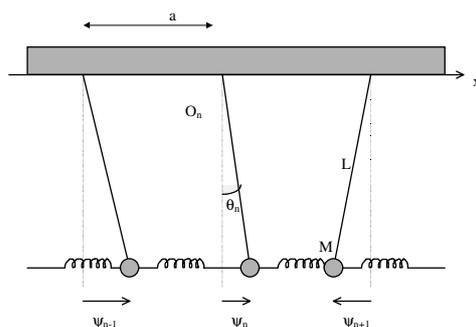


- Etablir un système différentiel du second ordre relatif au mouvement étudié.
- On recherche des solutions du type $y_n = a_n \cos \omega t$ (tous les plombs vibrant en phase à la même fréquence). Déterminer les valeurs de ω possibles pour de tels mouvements (modes propres du système).

Equation de propagation de Klein-Gordon :

On étudie la propagation d'onde le long d'une chaîne de pendules simples, identiques, de masse M et de longueur L , couplés par des ressorts de constante K , représentés sur la figure ci-dessous :

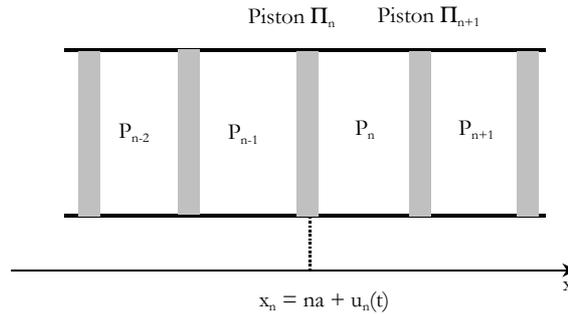
On notera $\omega_0 = \sqrt{K / M}$ et $\Omega_0 = \sqrt{g / L}$.



- Quelle est l'équation de propagation liant les petits déplacements $\psi_n \approx L \theta_n$, ψ_{n-1} et ψ_{n+1} des extrémités des pendules ?
- Quelle est la relation de dispersion des ondes progressives monochromatiques caractérisant cette propagation ?
- Représenter la relation de dispersion en précisant la bande permise pour les pulsations d'oscillations libres de la chaîne de pendules couplés.
- Préciser la forme prise par ces résultats dans l'approximation des milieux continus.

Un modèle de propagation du son dans l'air :

Un tuyau calorifugé de section S est partagé en une infinité de compartiments (C_n) par des pistons calorifugés Π_n et Π_{n+1} de section S et de masse m .



Dans chaque compartiment se trouve une mole d'air, assimilé à un GP évoluant de manière isentropique selon la loi de Laplace $PV^\gamma = cste$. A l'équilibre ; l'abscisse du piston (n) vaut $x_{n,eq} = na$ et la pression a la même valeur P_0 dans chaque compartiment. Hors équilibre, l'abscisse du piston (n) vaut $x_n = na + u_n(t)$, avec $|u_n(t)| \ll a$ et la pression dans le compartiment (n) vaut P_n .

- Etablir l'expression de la pression P_n en fonction de P_0 , γ , a , u_n et u_{n+1} et la linéariser. En déduire l'équation différentielle linéaire déterminant le mouvement du piston Π_n .
- On fait l'approximation des milieux continus en définissant une fonction $u(x,t)$ variant peu à l'échelle de a , telle que $u(na,t) = u_n(t)$. Etablir l'équation aux dérivées partielles dont est solution $u(x,t)$. Définir une célérité c et commenter son expression.
- Evaluer la célérité c du son dans l'air en supposant que les pistons de masse m du modèle sont en réalité constitués par le volume d'air $V = Sa$ compris entre deux pistons dans le modèle.

On donne : $\gamma = 1,4$; $P_0 = 1 \text{ bar}$; $\mu_0 = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$ (masse volumique de l'air dans les CNTP).

Corde plombée :

Une corde de longueur $2L$ et de masse linéique μ_0 a ses deux extrémités fixées sur un axe (Ox). Une masse ponctuelle M solidaire de la corde a été placée à égale distance de ses extrémités. On ne tiendra pas compte de la pesanteur et on se limitera aux petits mouvements selon un axe (Oy) perpendiculaire à (Ox). La corde est tendue avec une tension T_0 . On note

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}} \text{ et } m = 2\mu_0 L \text{ (masse totale de la corde).}$$

- Soient $\psi_1(x,t)$ et $\psi_2(x,t)$ les élongations de la corde respectivement pour $0 \leq x \leq L$ et pour $L \leq x \leq 2L$. $Y(t)$ repère le mouvement de la masse M . Déterminer les modes propres de cette corde plombée.
- Etudier les cas particuliers :

$$M \rightarrow 0 (M \ll m), M \rightarrow \infty (M \gg m) \text{ et } M \text{ finie non nulle et } \mu_0 \rightarrow 0$$

retrouver simplement le résultat obtenu.

Réflexion sur une masse libre :

Au point d'abscisse $x = 0$ d'une corde très longue, de masse linéique μ , est attachée une masse m (par exemple une perle enfilée sur la corde). Une onde incidente $y_i(x,t) = a e^{i(\omega t - kx)}$ arrive du côté $x < 0$. Déterminer l'expression du coefficient de réflexion r (en négligeant le poids de la masse). Que se passe-t-il si $m \rightarrow \infty$?

Propagation d'une onde de choc :

Des billes de masse m sont distantes de d et peuvent glisser sans frottement sur une tige rectiligne.

On applique à la première bille une force constante F jusqu'au premier choc. Les chocs sont supposés élastiques. Une onde de choc se propage.

Trouver la vitesse de l'onde de choc.

Corde de guitare :

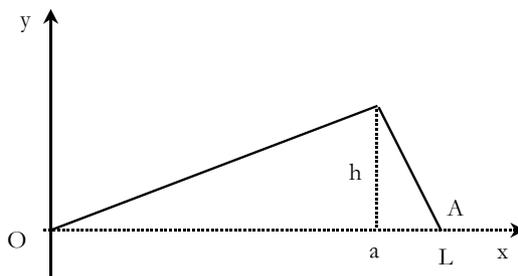
Une corde de guitare de longueur L et de masse linéique μ est tendue (tension T_0) entre deux points O et A . A l'instant $t = 0$, la corde est abandonnée dans la position de la figure (corde pincée) sans vitesse initiale.

$$y(x,0) = f(x) \quad \text{avec} \quad f(x) = h \frac{x}{a} \quad \text{pour} \quad x \in [0, a] \quad \text{et} \quad f(x) = h \frac{L-x}{L-a} \quad \text{pour} \quad x \in [a, L]$$

a) Donner l'équation $y(x,t)$ représentant la forme de la corde à un instant t .

Rappel : la fonction $2L$ -périodique impaire se confondant avec $f(x)$ sur l'intervalle $[0,L]$ est développable en séries de Fourier selon :

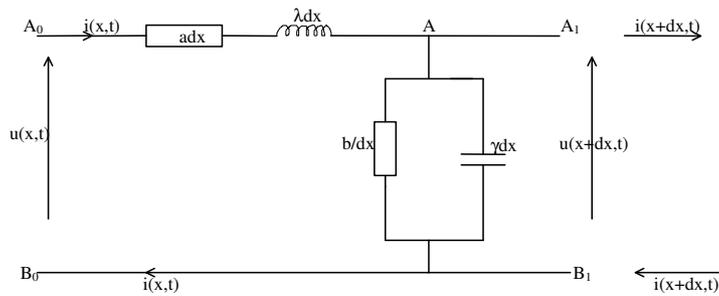
$$f(x) = \sum_1^{\infty} B_n \sin\left(n 2\pi \frac{x}{2L}\right) \quad \text{où} \quad B_n = \frac{2hL^2}{\pi^2 a(L-a)} \frac{\sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right)}{n^2}$$



b) Déterminer la force F_y exercée par la corde sur l'extrémité A (chevalet). Que se passe-t-il si « l'attaque » s'effectue en $a = \frac{L}{p}$ (p entier) ?

Equation des télégraphistes :

On se propose de représenter un câble coaxial réel par le schéma :



a) Relier $\frac{\partial u}{\partial x}$, i et $\frac{\partial i}{\partial t}$; relier de même $\frac{\partial i}{\partial x}$, u et $\frac{\partial u}{\partial t}$.

b) Etablir finalement deux équations aux dérivées partielles vérifiées l'une par $i(x,t)$ et l'autre par $u(x,t)$ (équation des télégraphistes).

c) On cherche de solutions de la forme $i(x,t) = I_m e^{-\alpha x} e^{j(kx - \omega t)}$.

* En déduire deux relations liant α , k et ω à (a, b, λ, γ) .

* Exprimer α en fonction de ω/k , $a\gamma$ et λ/b . Obtenir ainsi une équation bicarrée donnant k en fonction de ω .

Bouchon automobile, équation de Burgers :

On décrit la circulation automobile sur une autoroute d'axe Ox s'étendant entre $x = -\infty$ et $x = +\infty$ par le nombre d'automobiles $n(x, t)$ par unité de longueur et le débit d'automobiles $D(x, t)$ tel que le nombre d'automobiles qui traversent une section d'abscisse x pendant dt dans le sens des x croissants vaut $\delta N = D(x, t) dt$. Un bouchon forme à l'instant t en tout point où $n(x, t)$ dépasse la valeur n_M . En revanche si $n(x, t) \leq n_M$ en tout point, la circulation est fluide. L'enjeu du modèle est de savoir si, la circulation étant fluide à l'instant t , elle le reste ultérieurement.

1. En faisant un bilan du nombre d'automobiles sur le système ouvert et fixe compris à chaque instant entre x et $x + dx$, établir la relation :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial x} = 0$$

2. On suppose dans cette question que la vitesse des automobiles est une constante c_0 . En déduire que $n(x, t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + c_0 \frac{\partial n}{\partial x} = 0$$

Vérifier que toute fonction $n(x, t) = f(x - c_0 t)$ est solution de cette équation d'onde et interpréter physiquement. On admet dans la suite qu'il s'agit de la solution générale de cette équation. Dans le cadre de ce modèle, est-il possible d'interpréter l'apparition d'un bouchon à partir d'une situation initiale fluide ?

3. On affine désormais le modèle de la circulation automobile en supposant que la vitesse c des automobiles est une fonction affine décroissante de la concentration n , ce qu'on écrit :

$$c = c_0 \left(1 - \frac{n}{n_0} \right) \quad \text{pour } 0 \leq n \leq n_M$$

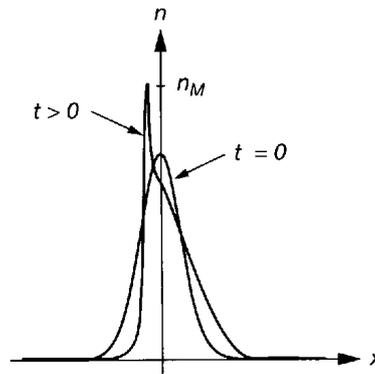
alors que pour $n \geq n_M$ on a $c = 0$ de telle sorte qu'il se forme un bouchon.

a) Montrer que le débit $D(n)$ passe par un maximum pour une valeur n_m de n qu'on exprimera.

b) Établir la nouvelle équation aux dérivées partielles (équation de Burgers) dont est solution $n(x, t)$:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + c_0 \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{c_0}{n_M} \frac{\partial n^2}{\partial x} = 0$$

Pourquoi la méthode de superposition d'ondes proportionnelles à $\exp(j\omega t - jkx)$ ne peut-elle pas convenir pour résoudre cette équation aux dérivées partielles ? La figure suivante fournit le résultat d'une simulation numérique pour $n(x, t > 0)$ ainsi que la condition initiale $n(x, t = 0)$. Commenter.

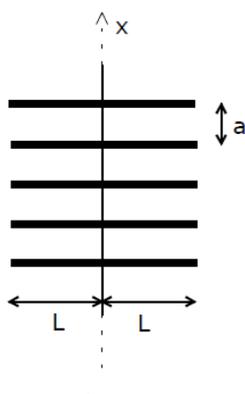


3- On se propose d'interpréter les observations en linéarisant l'équation d'onde au voisinage d'un état uniforme $n(x, t) = n_0 < n_M$. On pose donc $n(x, t) = n_0 + \varepsilon(x, t)$ et on limite les calculs à l'ordre un en ε . Montrer que $\varepsilon(x, t)$ est solution de l'équation :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + c_0 \left(1 - 2 \frac{n_0}{n_M} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0$$

Quelle est la vitesse de propagation de l'onde progressive solution de cette équation ? Justifier alors la possibilité d'engendrer un bouchon à partir d'une situation initiale fluide.

Echelle de perroquet :



On considère un fil de **torsion** (de constante C), autour duquel peuvent osciller des barres régulièrement espacées de la distance a .

Toutes les barres oscillent dans des plans horizontaux, perpendiculaires à l'axe Ox : le moment d'inertie des barres par rapport à cet axe est noté J .

La masse des barres, de longueur $2L$, vaut m ; on pourra prendre: $J = mL^2/3$

• La rotation de la n -ème barre (supposée homogène) sera repérée par l'angle $\theta_n(t)$, compté à partir de la position d'équilibre où le fil est sans torsion, et l'on néglige tout frottement.

1) Ecrire l'équation différentielle satisfaite par l'angle $\theta_n(t)$.

2) La chaîne est supposée illimitée et l'on envisage la propagation d'ondes de la forme :

$$\theta_n(t) = \Theta \exp[i(\omega t - kna)]$$

Est-il logique de considérer Θ comme indépendant de n ?

Déterminer la relation de dispersion $\omega(k)$.

En déduire la vitesse de phase et la vitesse de groupe ; étudier les cas limites $ka \rightarrow 0$ et $ka \rightarrow \pi$. Pourquoi obtient-on une pulsation maximum ω_M correspondant à $ka = \pi$? Décrire le mouvement des barres dans cette dernière situation.

3) Rappeler ce qu'est l'approximation des milieux continus ; dans le cadre de cette approximation, déterminer l'équation vérifiée par l'angle de rotation $\theta(x = na, t)$.

Donner l'expression de la célérité c et commenter.

Ondes capillaires :

On considère deux fluides non miscibles, incompressibles et homogènes L et G: L est en dessous et G au-dessus. A leur interface, on a une onde repérée par $\xi(x, t)$. Ici on négligera la pesanteur mais on prendra en compte les phénomènes de tension superficielle. Ceux-ci se manifestent par l'existence d'une différence de pression entre les deux liquides à l'interface :

$$P_L - P_G = \frac{\alpha}{R}$$

où α est une constante et R le rayon de courbure.

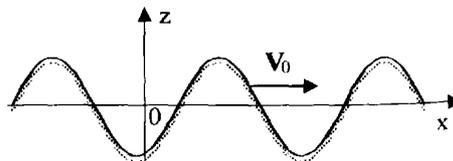
1- Trouver l'équation de dispersion des ondes.

2- Si l'onde se propage selon les x décroissants, obtient-on le même ω ? Justifier.

3- Comment se transforme la relation de dispersion si on tient compte de la pesanteur ?

Onde sonore engendrée par un corps solide en forme de tôle ondulée en déplacement :

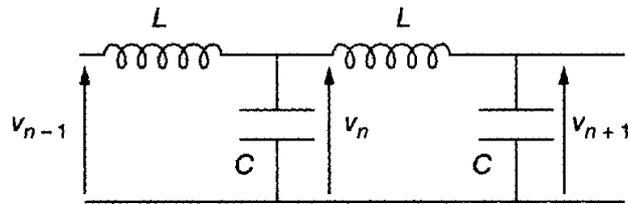
Un corps solide présente une surface en forme de tôle ondulée « illimitée selon Oy », de profil sinusoïdal de période L et d'amplitude ζ_0 . On supposera que $\zeta_0 \ll L$. Il se déplace à vitesse constante $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$.



Etudier les ondes acoustiques sinusoïdales provoquées dans l'air (masse volumique ρ_0 et compressibilité χ_0) par le déplacement de la surface.

Ondes discrètes sur une ligne à retard :

Une ligne à retard semi-infinie est constituée de l'association en cascade d'une infinité de blocs $L - C$ identiques (Fig. suivante). On note $v_n(t)$ la tension à l'entrée du bloc $(n + 1)$ et $v_{n+1}(t)$ la tension à la sortie du bloc $(n + 1)$ qui est aussi la tension à l'entrée du bloc $(n + 2)$. La ligne est semi-infinie c'est-à-dire que $0 \leq n \leq \infty$ et un BF impose $v_0(t) = E \cos(\omega t)$ à l'entrée du bloc (1). On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω et on utilise la notation complexe en posant $\underline{v}_n(t) = \underline{A}_n \exp(j\omega t)$. On pose $\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}$.



1. Établir la relation de récurrence définissant la suite des \underline{A}_n . On cherche des solutions de la forme $\underline{A}_n = \gamma r^n$. Montrer que r est solution d'une équation du second degré, dont le produit des racines vaut 1 ; vérifier que son discriminant change de signe pour $\omega = \omega_c$.

2. On se place dans le cas où $\omega < \omega_c$.

a) Montrer qu'on peut mettre la solution sous la forme $v_n(t) = E \cos(\omega t - kna)$ où a est la taille d'une maille.

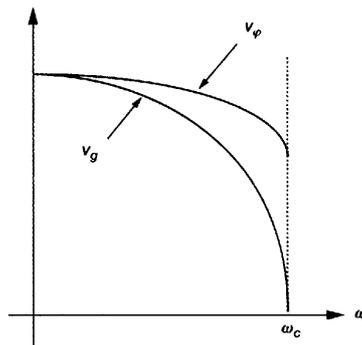
b) Montrer que la relation de dispersion s'écrit :

$$\frac{\omega}{\omega_c} = \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

et justifier qu'on doit se limiter au domaine $0 \leq k \leq \pi/a$.

c) Exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

Les graphes de $v_\varphi(\omega)$ et $v_g(\omega)$ sont fournis sur la figure : commenter et vérifier les valeurs limites pour $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \omega_c$.



3. Déterminer la forme de l'onde pour $\omega > \omega_c$, et vérifier qu'elle est amortie spatialement.

4. Vérifier la cohérence des résultats précédents avec une « analyse électrique » du circuit pour $\omega \rightarrow \infty$ et $\omega \rightarrow 0$.



Ondes acoustiques

Influence de la viscosité sur la propagation d'un son :

Dans le cas d'un fluide visqueux, l'équation vérifiée par le champ des vitesses est l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v}$$

où η est la viscosité dynamique du fluide. On suppose que les fluctuations de masse volumique et de pression sont petites et que l'évolution est isentropique.

a) Etablir l'équation de propagation :

$$\Delta p + \frac{\eta}{\rho_0 c_s^2} \frac{\partial(\Delta p)}{\partial t} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{avec : } \rho_0 \chi_s c_s^2 = 1)$$

On pourra utiliser $\text{div}(\Delta \vec{v}) = \Delta(\text{div} \vec{v})$.

b) On cherche une solution sous la forme d'une onde plane progressive monochromatique du type $\underline{p} = p_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$.

* Déterminer la relation entre \underline{k} et ω .

* On pose $\underline{k} = k' - ik''$. Pour un fluide faiblement visqueux, $k'' \ll k'$. Donner l'expression de k'' au premier ordre en η . Quelle est sa signification physique ?

* AN : pour l'air dans les conditions usuelles, $\rho_0 = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$, $c_s = 340 \text{ m.s}^{-1}$ et $\eta = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ Pl}$. A quelle distance un son est-il atténué de 20 dB pour un son de fréquence 1 000 Hz puis 100 kHz ?

Isolation phonique :

Pour étudier l'atténuation sonore introduite par un mur, on adopte le modèle sommaire suivant : dans un tuyau de section S , une onde sonore incidente plane progressive harmonique de pulsation ω arrive sur un piston de surface S , d'épaisseur e et de masse volumique μ , libre de se déplacer au voisinage de $x = 0$. On cherche un champ des vitesses de la forme :

$$\underline{v}_1(x < 0, t) = A_1 \exp(j\omega t - jkx) + \underline{B}_1 \exp(j\omega t + jkx) ; \underline{v}_1(x > e, t) = \underline{A}_2 \exp(j\omega t - jkx + jke).$$

1) Justifier cette forme et écrire les surpressions $\underline{p}_1(x, t)$ correspondantes.

2) Écrire les conditions aux limites sur le piston indéformable et en déduire que

$$\frac{\underline{A}_2}{A_1} = \left(1 + \frac{j\omega \mu e}{2\mu_0 c} \right)^{-1}$$

3) En déduire le facteur de transmission en puissance T du mur. On donne $\mu_0 = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$, $\mu = 2 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$.

Quelle doit être l'épaisseur minimale du mur si on veut une atténuation d'au moins - 40 décibels pour $f = 1 \text{ kHz}$? Et pour $f = 100 \text{ Hz}$?

Couche sonore « antireflet » :

a) Les impédances caractéristiques des tissus musculaires et de l'air pour les ultrasons valent :

$$Z_a = 4,0 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad Z_m = 1,7 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Calculer le coefficient de transmission des puissances sonores à une interface air-muscle et commenter.

b) Pour supprimer l'onde réfléchie dans l'air, on réalise une couche antireflet d'épaisseur e en graisse, d'impédance Z_g (Fig. 13). On note c_a , c_g et c_m les célérités du son dans chacun des trois milieux, et on pose $k_a = \omega/c_a$, $k_g = \omega/c_g$ et $k_m = \omega/c_m$. On cherche alors en notation complexe des champs de vitesses dans les trois milieux de la forme :

$$\underline{v}(x < 0) = A_a \exp(j\omega t - jk_a x) ;$$

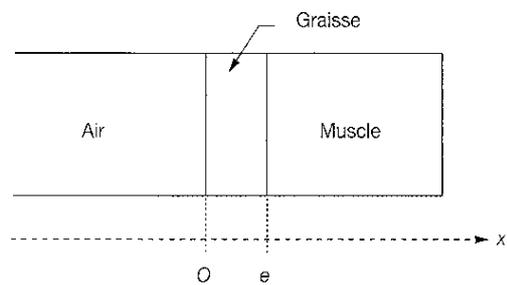
$$\underline{v}(x > e) = A_m \exp(j\omega t - jk_m x)$$

$$\underline{v}(0 < x < e) = A_g \exp(j\omega t - jk_g x) + B_g \exp(j\omega t + jk_g x).$$

Quelle est la forme correspondante du champ des surpressions dans les trois milieux ? Écrire les conditions aux limites. Une élimination non demandée donne la condition :

$$\frac{Z_g - Z_a}{Z_g + Z_a} = \left(\frac{Z_g - Z_m}{Z_g + Z_m} \right) \exp(-2jk_g e).$$

Vérifier sa pertinence sur un cas particulier. Déterminer les valeurs convenables de e et Z_g .

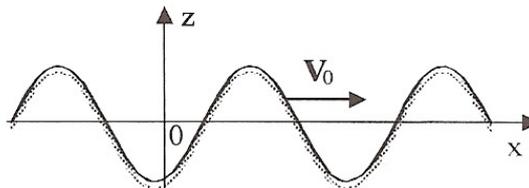


Production de son par une tôle ondulée :

Un solide présente, dans le plan $z = 0$, une surface en forme de tôle ondulée d'équation $\xi(x) = \Re\{\xi_0 \exp(jKx)\}$ avec $K = 2\pi/L$ et $\xi_0 \ll L$. On suppose que cette surface est illimitée selon Oy . On déplace ce solide à la vitesse $\mathbf{V}_0 = V_0 \mathbf{u}_x$ ($V_0 = \text{Cte}$) dans de l'air au repos.

Étudier les ondes acoustiques générées dans l'air par le déplacement du solide.

On notera ρ_0 la masse volumique de l'air au repos et χ_s son coefficient de compressibilité isotherme.



Ondes sonores sphériques :

Une sphère pulsante de centre fixe O dont le rayon $a(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t)$ varie sinusoidalement avec une amplitude $a_1 \ll a_0 \ll \lambda$ émet des ondes sonores dans tout l'espace extérieur à la sphère, rempli d'air de masse volumique μ_0 où la célérité des ondes sonores vaut c . Compte tenu de la symétrie du problème, on cherche en coordonnées sphériques de centre O un champ de pression de la forme $p_1(M, t) = p_1(r, t)$ et on rappelle que pour un champ scalaire $f(r, t)$ ne dépendant ni de θ , ni de φ en coordonnées sphériques, le laplacien peut s'écrire :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r f(r))}{\partial r^2}.$$

1. Déterminer la forme générale des solutions $p_1(r, t)$ de l'équation de d'Alembert et interpréter. Justifier qu'on doit choisir $p_1 = (1/r)f(r - ct)$.

2. Dans la suite, on pose $k = \omega/c$ et on cherche une solution de la forme $p_1 = (A/r)\cos(\omega t - kr - \alpha)$.

a) Déterminer le champ des vitesses correspondant.

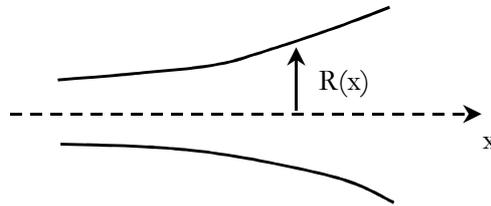
b) Comment se simplifie l'expression de \mathbf{v} pour $r \ll \lambda$? En déduire les expressions de A et α .

c) En déduire la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon r .

d) Comparer le rayonnement sonore de la sphère pulsante avec le rayonnement électromagnétique d'un dipôle électrique (analogies et différences).

Tuyaux sonores de section variable :

On étudie la propagation d'ondes acoustiques dans un tuyau rigide d'axe (Ox) et de section circulaire de surface $S(x)$ variant lentement avec x . Le fluide est de l'air dont les conditions sont données à l'équilibre par ρ_0 (masse volumique) et χ_0 (coefficient de compressibilité isentropique). On néglige la pesanteur.



a) Préciser les hypothèses qui permettent d'assimiler la perturbation sonore à un écoulement unidimensionnel. On supposera ces conditions réalisées par la suite et on désignera par $p(x,t)$ la surpression, $\vec{v} \approx v(x,t) \vec{u}_x$ la vitesse et $\rho(x,t)$ la masse volumique du fluide.

* A partir d'un bilan de matière, établir l'équation linéarisée :

$$S \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial(Sv)}{\partial x}$$

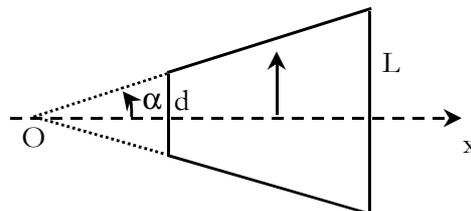
* De même, en faisant un bilan de quantité de mouvement, montrer que : $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$

* A l'aide d'une hypothèse que l'on précisera, relier les variations temporelles de p et de ρ .

* En déduire l'équation de propagation relative à la surpression $p(x,t)$. On fera apparaître la quantité $\frac{1}{S} \frac{dS}{dx}$.

b) Déterminer les propriétés des ondes acoustiques se propageant dans un pavillon exponentiel pour lequel $\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = \frac{1}{a}$, où a est une constante positive. Commenter les résultats obtenus.

c) Le tuyau est maintenant conique (par exemple, tuyau principal du haut-bois), de longueur $\ell = L - d$. On s'intéresse aux ondes acoustiques sinusoïdales de pulsation ω .



* Montrer que l'onde de surpression peut s'écrire, pour $d < x < L$:

$$\underline{p}(x,t) = \frac{a}{k} e^{j(\omega t - kx)} + \frac{b}{k} e^{j(\omega t + kx)}$$

Que vaut k ? En déduire le champ des vitesses acoustiques $\underline{v}(x,t)$.

* L'impédance acoustique est définie par $\underline{Z}(x) = \frac{\underline{p}(x,t)}{\underline{v}(x,t)}$ et on choisit $\underline{Z}(L) = 0$ (sortie ouverte).

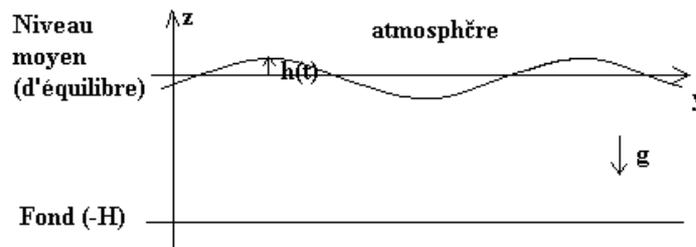
Déterminer l'impédance d'entrée $\underline{Z}(d)$ en fonction de ρ_0 , c , k , d et L . Que dire des fréquences propres du tuyau conique comparées à celles d'un tuyau de section constante et de même longueur lorsque : $\underline{Z}(d) = 0$? ; $\underline{Z}(d) \rightarrow +\infty$?

Ondes de surface :

On va s'intéresser aux ondes de surface qui se propagent sur l'eau. Après avoir établi les équations de propagation de ces ondes, on s'intéressera à l'énergie qu'elles transportent puis à leur réflexion sur une paroi fixe. Le fluide sera considéré comme idéal dans toute cette partie.

1) Etablissement des équations d'onde :

On va considérer que l'eau, incompressible, ne subit aucun courant permanent et que le déplacement des ondes se fait dans un bassin de profondeur constante H (le fond est plat). La pression atmosphérique est $P_0 = 1 \text{ bar}$. Le but de cette partie est d'obtenir les équations linéarisées liées au passage de l'onde. On repère l'altitude de la surface libre par $h(y,t)$ en un point repéré par y . Le problème sera traité en ne considérant aucune propagation en x . Les termes d'ordre un seront $h(y,t)$ et v , norme de la vitesse.



a) Donner l'équation du mouvement d'une particule fluide lors du déplacement de l'eau au passage de l'onde. La simplifier en ne conservant que les termes d'ordre un.

b) On va approcher la pression dans le fluide en l'assimilant à la pression hydrostatique. Déterminer P en fonction de z et h .

c) Dans le cadre de la linéarisation, on ne s'intéresse qu'au terme de vitesse suivant l'axe Oy , v_y . Dédire de ce qui précède une relation différentielle entre v_y et h . La vitesse v_z peut-elle être nulle ? Quelle est la dépendance de v_y en z ?

d) Considérons une colonne fixe comprise entre y et $y + dy$ sur une largeur ℓ en x . Déterminer le volume d'eau dV qu'elle contient. Faire un bilan de matière sur la colonne et en déduire une nouvelle relation différentielle entre v_y et h . Linéariser cette relation.

e) Dédire de ce qui précède les équations d'évolution de v_y et h en fonction de y et t . Déterminer la célérité c des ondes qui se propagent dans le cadre de ce modèle. Donner la forme générale des solutions de l'équation en h (on ne demande pas la démonstration). Interpréter les termes de cette solution.

f) En supposant que l'expression de c reste valable, expliquer qualitativement pourquoi les vagues se brisent en arrivant près de la plage.

2) Onde sinusoïdale :

On va considérer une onde incidente qui se propage dans le sens des y croissants, sinusoïdale de période T et d'amplitude a_i en h .

Numériquement, on prend $H = 5 \text{ m}$, $a_i = 0,50 \text{ m}$ et $T = 6 \text{ s}$.

a) Donner $h_i(y,t)$ et $v_{iy}(y,t)$. Quelle est la valeur de l'amplitude de la vitesse dans l'onde incidente ? Que vaut la longueur d'onde λ ?

b) Estimer la vitesse verticale obtenue ici et la comparer à v_y . Conclure.

c) L'onde arrive sur une jetée orientée suivant Ox , située en $y = 0$ et s'y réfléchit. Quelles sont les conditions aux limites du système qui se développent sur la jetée ? En déduire l'expression de l'onde réfléchie pour $h_r(y,t)$ et $v_{ry}(y,t)$.

d) Donner alors l'expression générale de $h(y,t)$ et $v_y(y,t)$ autour de la jetée. Comment nomme-t-on ce type d'onde et pourquoi ?

e) Quel phénomène important n'a pas été pris en compte pour la propagation des ondes océaniques ? Donner un exemple de type d'onde océanique de période beaucoup plus grande que $T = 6$ s.

Bruit d'hélicoptère.

Un hélicoptère fait du sur place au-dessus d'un lac gelé sur lequel un promeneur se déplace. Le promeneur entend un son assez grave dont la puissance est maximale lorsque l'hélicoptère est dans une direction faisant un angle $\alpha = 45^\circ$ avec la verticale. Lorsque la même scène a lieu au dessus d'une pelouse, le bruit est maximum lorsque l'hélicoptère passe à la verticale du promeneur.

1- Montrer que la situation au-dessus d'un lac ne peut pas s'interpréter si le promeneur ne perçoit que l'onde lui arrivant directement de l'hélicoptère.

2- On suppose que le lac se comporte comme un miroir parfait. Justifier la validité de l'approximation de l'acoustique géométrique qui permet d'utiliser les lois de Descartes. En supposant que le champ de surpression ne subit pas de déphasage à la réflexion, interpréter l'observation du promeneur sur le lac et déterminer un ordre de grandeur de la fréquence du son émis par l'hélicoptère.

3- Justifier que le coefficient de réflexion en puissance de l'onde sonore sur le lac est proche de 1. En quoi cela influe-t-il sur l'observation ?

4- Pourquoi le même effet ne se produit-il pas dans le cas de la pelouse ? Interpréter l'observation du promeneur dans ce cas.

Ondes magnétohydrodynamiques dans un fluide :

Un fluide au repos, conducteur de conductivité σ est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$; la masse volumique ρ_0 et la pression P_0 sont uniformes. Cet état de repos est perturbé par la propagation d'une onde plane décrite par les champs de vitesse $\vec{v} = \vec{v}_1(z, t)$ et de pression $P = P_0 + P_1(z, t)$, ainsi que le champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_1(z, t)$, le champ magnétique $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(z, t)$ et la densité de courants $\vec{j} = \vec{j}_1(z, t)$.

L'écoulement est supposé parfait, incompressible et homogène de masse volumique $\rho = \rho_0$. On néglige toute autre force que les forces de pression et les forces de Laplace, dont on rappelle la densité volumique $d\vec{F}/d\tau = \vec{j} \wedge \vec{B}$.

Tous les champs portant l'indice 1 sont supposés infiniment petits de même ordre et on limite tous les calculs à l'ordre 1 en ces infiniment petits.

1. La loi d'Ohm locale dans un élément de volume $d\tau$ de vitesse \vec{v} s'écrit :

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Commenter cette expression. Dans toute la suite, on suppose que $\sigma = \infty$ (modèle du conducteur parfait) ; en déduire l'expression de \vec{E}_1 en fonction de \vec{v}_1 et \vec{B}_0 en supposant que $\|\vec{j}\|$ est borné.

2. Écrire les équations aux dérivées partielles couplant les différents champs de l'onde, en supposant que le champ électromagnétique peut être décrit dans l'ARQS et que le milieu reste localement neutre.

Justifier le qualificatif magnétohydrodynamique attribué à ces ondes en examinant le processus de couplage des champs \vec{E} et \vec{B} .

3. Dans toute la suite, on cherche des ondes harmoniques, c'est-à-dire des champs en notation complexe proportionnels à $\exp(j\omega t - jkz)$.

Montrer que le champ des vitesses, le champ électrique et le champ magnétique sont transversaux. Montrer que la surpression P_1 est nulle.

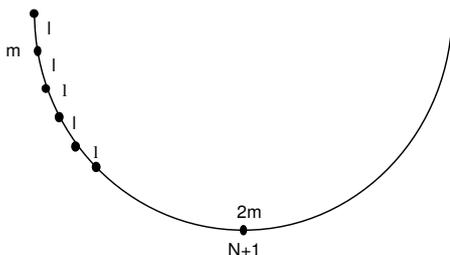
4. Écrire en notation complexe quatre équations couplant les champs \vec{E}_1 , \vec{B}_1 , \vec{j}_1 et \vec{v}_1 . Une élimination non demandée conduit à la relation de dispersion :

$$k^2 = \omega^2 \frac{\rho_0 \mu_0}{B_0^2}$$

Vérifier l'homogénéité de cette relation. Que peut-on en conclure quant à la propagation d'un signal non harmonique ?

Définir et calculer une grandeur caractéristique de ces ondes dans le mercure où $\rho_0 = 7,6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ avec $B_0 = 1 \text{ T}$. Comparer l'ordre de grandeur obtenu à d'autres ordres de grandeurs familiers.

Corde de Huygens :



On considère une corde accrochée à ses deux extrémités, sans masse mais portant tous les l des masselottes de masse m .

Pour simplifier, on supposera le nombre de masselottes égal à $2N + 1$ et celle en $N + 1$ a la masse $2m$.

Trouver x_n et y_n de la $n^{\text{ième}}$ masselotte. Passage aux milieux continus. On pourra introduire

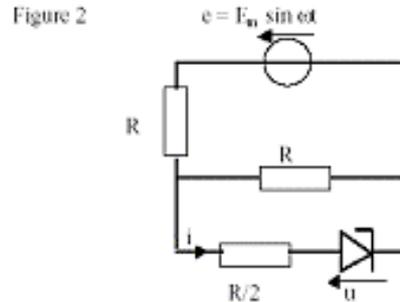
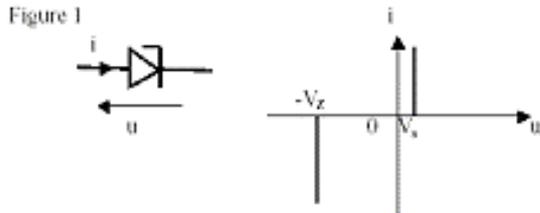
$$a = \frac{Tl}{mg}$$



Electricité

Diode Zener :

a) On considère une diode Zener dont la caractéristique est donnée. Modéliser cette diode dans le cas $i > 0$ et $i < 0$.



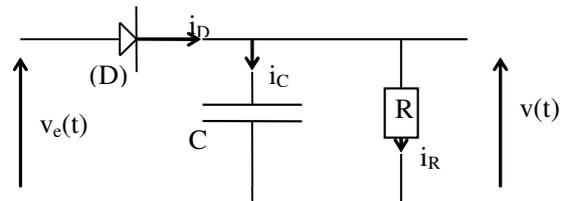
b) On l'utilise dans le circuit proposé. Déterminer l'intensité du courant $i(t)$ et représenter la courbe correspondante sur une période.

Détecteur de crête :

On considère le montage ci-dessous ; la tension d'entrée est $v_e(t) = V_0 \sin \omega t$. On suppose que $RC \gg T = 2\pi / \omega$. La diode est supposée idéale et de seuil nul. On note $v(t)$ la tension aux bornes de R.

a) Décrire qualitativement et comparer les évolutions temporelles de $v_e(t)$ et $v(t)$. On pourra s'aider d'une représentation graphique.

b) A partir de quel instant t_0 le courant i_D devient-il nul ? Montrer que $v(t_0) \gg V_0$.



c) Comment varie $v(t)$ aux instants ultérieurs ?

d) Montrer qu'au cours d'une période, la variation maximale de tension Dv aux bornes de la résistance est approximativement proportionnelle à T et que $Dv / V_0 \ll 1$.

e) AN : on désire que la tension $v(t)$ soit de l'ordre de 12 V et qu'un courant de 1 mA circule dans R. Quelle doit être la valeur de la capacité C pour que $Dv / V_0 < 10^{-2}$, la fréquence du générateur étant de 50 Hz ?

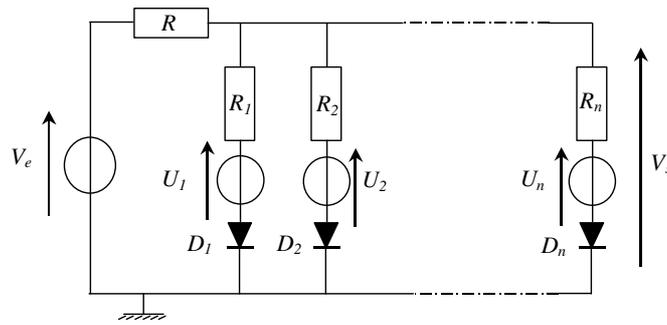
Fabrication d'un générateur sinusoïdal :

Il existe plusieurs façons de transformer un signal triangulaire en signal sinusoïdal. Le principe découle de celui, plus général, qui consiste à approcher une fonction donnée quelconque au moyen de petits segments. Le schéma de principe de l'une des réalisations possibles est donné sur la figure suivante. Les diodes sont supposées être idéales (tension de seuil nulle) et, par conséquent, le passage de l'état bloqué à l'état passant se fait brutalement.

On suppose $U_1 < U_2 < U_3 \dots < U_n$.

1. Déterminer l'expression de V_s en fonction de V_e .

2. Tracer l'allure de la courbe V_s en fonction de V_e , dans le cas où toutes les résistances sont égales à R. On donne $U_k = kU_0$ ($k = 1, \dots, n$; $U_0 = 0,1$ V et $n = 6$).



3. Les diodes ne sont pas parfaites. Quelle sera alors l'allure de la tension V_s ?

Conversion alternatif – continu :

On envisage le circuit de la figure 7 alimenté par une tension $v_e(t) = E_M \cos(\omega t)$. On adopte le modèle de l'AO idéal (courants d'entrée nuls, sortie équivalente à un générateur de tension parfait) avec un gain infini. On adopte le modèle de la diode idéale :

$$i = 0 \text{ si } v < 0 \text{ et } v = 0 \text{ si } i > 0.$$

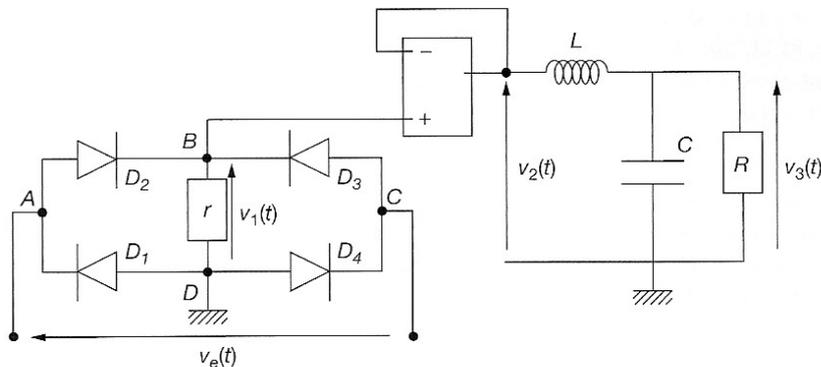


Figure 7

La figure 8 fournit les graphes des tensions $v_1(t)$ à la sortie du pont de diodes, $v_2(t)$ à la sortie de l'AO et $v_3(t)$ à la sortie du montage complet.

1. On se place aux instants t tels que $v_e(t) > 0$ de telle sorte que $v_1(t) = v_e(t) > 0$. Montrer que les diodes D_2 et D_3 (respectivement D_1 et D_4) ne peuvent pas être ni toutes les deux passantes, ni toutes les deux bloquées. En déduire l'état des diodes et interpréter l'allure de la tension $v_1(t)$. Reprendre l'étude pour $v_e(t) < 0$.

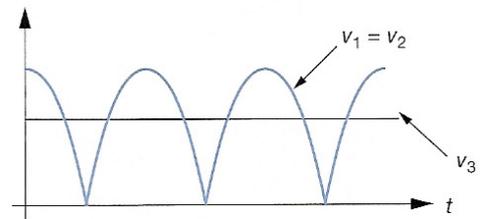


Figure 8

2. Interpréter l'allure de $v_2(t)$. Quel est l'intérêt du montage à AO ?

3. On s'intéresse désormais au rôle du bloc $R - L - C$.

a) On se place tout d'abord en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω . Exprimer la fonction de transfert $H = v_3/v_2$ en fonction de R, L, C et de $j\omega$. À quelle condition, supposée vérifiée dans la suite, peut-on mettre cette fonction sous la forme :

$$H = \frac{1}{(1 + j\omega/\omega_0)^2}.$$

Quelle est alors l'expression de ω_0 ? Quelle est alors la nature du filtre ?

b) Dans la suite, on limite le DSF de $v_2(t)$ aux deux premiers termes non nuls soit :

$$v_2(t) = \frac{2E_M}{\pi} + \frac{4E_M}{3\pi} \cos(2\omega t).$$

Justifier la forme de ce DSF tronqué. Quel est la fréquence du premier terme négligé non nul ?

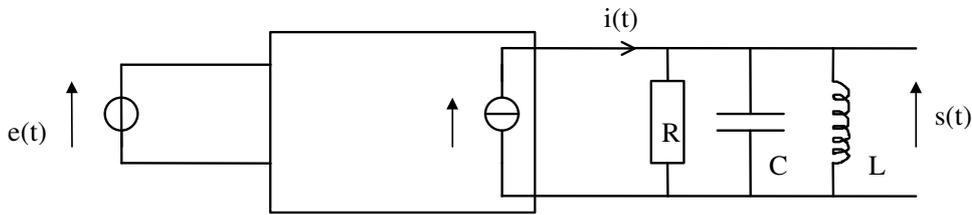
c) Exprimer la tension de sortie $v_3(t)$ en supposant que $\omega \gg \omega_0$. On définit son taux d'ondulation par :

$$\rho = \frac{v_{3\max} - v_{3\min}}{v_{3\text{moyen}}}.$$

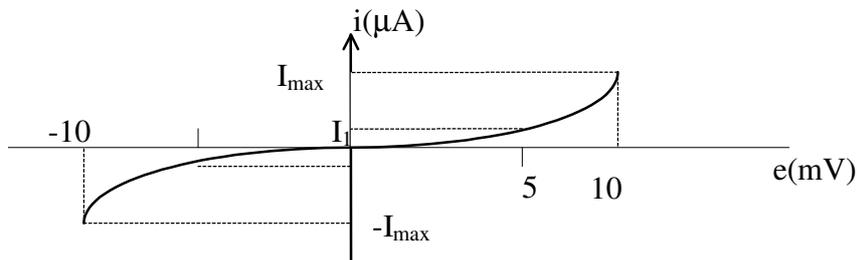
Exprimer ρ en fonction de ω/ω_0 . Comment pourrait-on mesurer ρ en travaux pratiques avec un oscilloscope sachant que son ordre de grandeur est 1 % ?

Circuit non linéaire, taux de distorsion harmonique :

Un circuit (RLC) parallèle est excité par la sortie d'un quadripôle imparfaitement linéaire commandé par la tension $e(t) = E \cos \omega t$. Vu de ses bornes de sortie, ce quadripôle équivaut à une source de courant $i(t)$ contrôlée par la tension $e(t)$ (figure 1).



On donne la courbe de transfert $i(e)$ qui admet l'origine des coordonnées pour centre de symétrie : (figure 2)



$$I_{\max} = 50 \mu\text{A} ; I_1 = 18,2 \mu\text{A} ; E = 10 \text{ mV}$$

- 1) Tracer sommairement la fonction $i(t)$ et justifier rapidement que $i(t)$ s'exprime par une série de la forme :

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} \cos(2k+1)\omega t$$

- 2) On admet, pour simplifier, que la série peut être limitée à deux termes :

$$i(t) = B_1 \cos \omega t + B_3 \cos 3\omega t$$

Afin de déterminer les coefficients B_1 et B_3 , on effectue les lectures de i correspondant aux deux valeurs particulières E et $E/2$ de $e(t)$: pour $e=E$, on note $i=I_{\max}$ et pour $e=E/2$, on note $i=I_1$.

- a) Déterminer les coefficients B_1 et B_3 en fonction de I_{\max} et de I_1 .
- b) Application numérique pour $E=10$ mV. Calculer B_1 , B_3 et le taux de distorsion harmonique de $i(t)$ définie par $D=B_3/B_1$.

- 3) Etablir l'expression de l'impédance complexe $\underline{z}(j\omega)$ du circuit sélectif (RLC) parallèle sous la forme :

$$\underline{z}(j\omega) = \frac{R}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\Omega_0} - \frac{\Omega_0}{\omega} \right)}$$

Ω_0 et Q étant deux paramètres à expliciter et à définir.

- 4) La quantité Ω_0 est choisie égale à la pulsation ω de la tension de commande $e(t)$.
 - a) Déterminer en fonction de R , B_1 , B_3 et Q l'expression de la tension $s(t)$ aux bornes du circuit sélectif.

- b) Application numérique : quelle valeur maximale doit-on attribuer au paramètre Q pour que le taux de distorsion harmonique D de $s(t)$ n'excède pas 0,2% ?

Système électronique linéaire :

Pour analyser les composantes fréquentielles d'un signal sonore (analyse des phénomènes du langage par exemple), on utilise un transducteur (microphone) qui convertit le signal en une tension $v_e(t)$, puis un filtre passe-bande qui extrait les composantes sinusoïdales de fréquences voisines d'une fréquence f_0 donnée.

On note $v_s(t)$ la tension de sortie du filtre. Le filtre est un circuit linéaire dont la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

On se propose de déterminer les caractéristiques H_0 , Q et ω_0 du filtre à partir des oscillogrammes obtenus en régime périodique pour une tension $v_e(t)$ rectangulaire, pour deux valeurs de fréquences.

On rappelle la décomposition de Fourier de $v_e(t)$ dans le cas où $v_e(t)$ est périodique, de période T , avec :

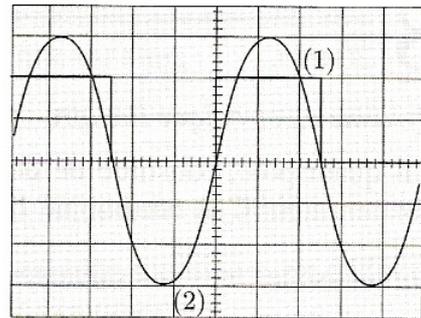
$$\begin{cases} v_e(t) = V_0 \text{ pour } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ v_e(t) = 0 \text{ pour } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases}$$

$$v_e(t) = V_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin[(2k+1)\omega_1 t] \right] \text{ avec } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

Première expérience

- voies (1) et (2) en position DC ;
- base de temps : 50 μ s par carreau ;
- sensibilité :

voie (1) 0,5 V par carreau
voie (2) 2 V par carreau



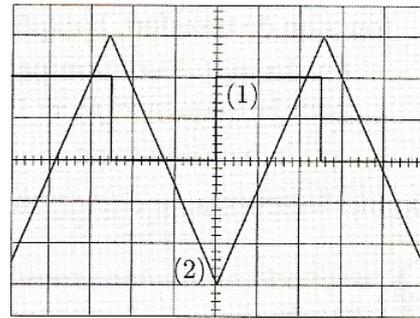
Dans cette expérience :

- la tension $v_s(t)$ est quasi sinusoïdale ;
- si on augmente la fréquence de $v_e(t)$ par rapport à la valeur correspondant à cet oscillogramme, on constate que l'amplitude de $v_s(t)$ diminue ;
- si, par rapport à cette même fréquence, on diminue légèrement la fréquence de $v_e(t)$, on constate que l'amplitude de $v_s(t)$ diminue également.

Deuxième expérience

- voies (1) et (2) en position DC ;
- base de temps : $5 \mu\text{s}$ par carreau ;
- sensibilité :

voie (1) 2 V par carreau
voie (2) 0,2 V par carreau



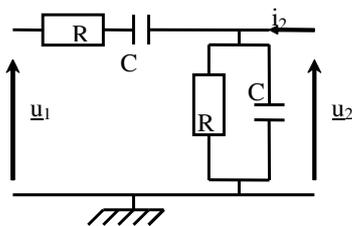
1. Pourquoi, dans chaque expérience, la tension de sortie $v_s(t)$ ne comporte-t-elle pas de composante continue, contrairement à la tension d'entrée $v_e(t)$?
2. Dédurre de l'oscillogramme de la première expérience et du commentaire qui l'accompagne :
 - (a) la pulsation ω_0 ;
 - (b) la valeur de H_0 .
3. Dans la deuxième expérience, $v_s(t)$ est triangulaire alors que $v_e(t)$ est rectangulaire. Le filtre a un comportement intégrateur.
 - (a) Donner l'expression approchée de $\underline{H}(j\omega)$ dans le domaine de fréquences correspondant à la deuxième expérience.
 - (b) En utilisant l'oscillogramme de la deuxième expérience, déterminer, en justifiant la méthode utilisée, le rapport $\frac{H_0\omega_0}{Q}$. En déduire la valeur de Q .

Facteur de puissance : une installation électrique est alimentée sous une tension efficace $U_e = 200 \text{ V}$. Elle consomme une puissance $P = 12 \text{ kW}$. La fréquence est $f = 50 \text{ Hz}$ et l'intensité efficace 80 A .

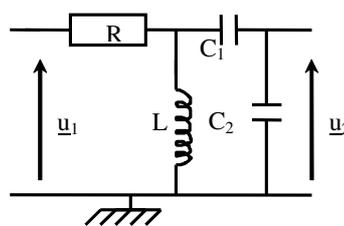
- a) Sachant que cette installation est du type inductif, calculer la résistance R et l'inductance propre L qui, placées en série et avec la même alimentation, seraient équivalentes à l'installation.
- b) Calculer la capacité C à placer en parallèle sur l'installation pour relever le facteur de puissance à la valeur $0,9$.

Filtres de Wien, de Colpitts et de Hartley :

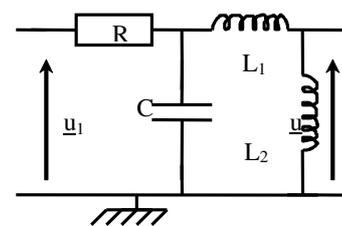
- a) Etablir la fonction de transfert du filtre de Wien (figure (a)) utilisé en sortie ouverte ($i_2 = 0$) et la présenter sous la forme normalisée pour un filtre du second ordre. Préciser notamment la nature du filtre, le facteur de qualité Q et le coefficient d'amortissement s .



Circuit (a)



Circuit (b)

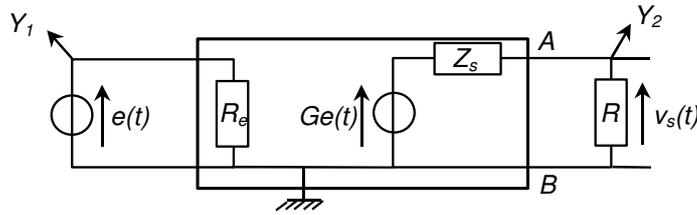


Circuit (c)

- b) Mêmes questions pour le filtre de Colpitts (figure (b)) et pour le filtre de Hartley (figure (c)).
- c) Tracer le diagramme asymptotique de ces trois filtres.

Amplificateur de chaîne Hi-fi :

Un amplificateur de chaîne hi-fi peut être modélisé par le schéma électrique suivant, dans lequel la résistance d'entrée R_e sera considérée comme infinie :



On réalise pour cela les deux essais suivants :

* Essai n°1 : $e(t) = E \cos(2\pi ft)$, $R = 16 \Omega$, valeur efficace de $e(t)$, 1 mV. On mesure avec un oscilloscope numérique une valeur efficace en sortie égale à 0,67 V.

* Essai n°2 : $e(t) = E \cos(2\pi ft)$, $R = 8 \Omega$, valeur efficace de $e(t)$, 1 mV. On mesure alors une valeur efficace en sortie égale à 0,5 V.

De plus, on constate que, lors de chaque essai, les deux signaux de sortie gardent, quelle que soit la fréquence, la même valeur efficace et sont en phase avec $e(t)$.

a Déterminer le gain à vide G et l'impédance de sortie complexe Z_s .

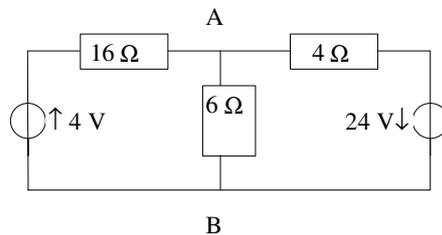
b L'amplificateur étant alimenté par une tension $e(t) = E \cos(2\pi ft)$, quelle doit être la résistance de charge R pour qu'il fournisse le maximum de puissance moyenne à tension d'entrée d'amplitude E constante ?

Conduction du courant :

Le cuivre a pour masse molaire $M=63,54 \text{ g.mol}^{-1}$ et pour masse volumique $\rho=8,8.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Calculer le nombre d'atomes de cuivre par unité de volume. En admettant qu'un atome de cuivre libère un électron de conduction, calculer la vitesse moyenne v de ces électrons correspondant à un courant de 10 A circulant dans un fil de section droite $s=1 \text{ mm}^2$. ($7,5.10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$).

Détermination d'intensités :

Calculer l'intensité dans la branche AB du réseau ci-dessous :



Charge d'un condensateur à l'aide d'une source de tension :

Pour $t < 0$, le circuit est au repos et $e(t)$ est un échelon d'amplitude E .

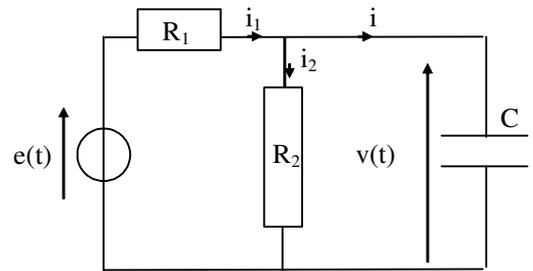
a) On s'intéresse à l'état du circuit juste après l'application de la tension E ; déterminer $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$, $i(0^+)$ et $v(0^+)$.

b) On s'intéresse au régime permanent ; déterminer $i_1(+\infty)$, $i_2(+\infty)$, $i(+\infty)$ et $v(+\infty)$.

c) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$.

d) Déterminer l'expression de $v(t)$ et représenter graphiquement l'allure de $v(t)$.

e) On appelle temps de réponse à 5%, $tr_{5\%}$, le temps que met le condensateur pour atteindre 95% de sa charge finale ; calculer $tr_{5\%}$.



Oscillateur à relaxation :

Le montage étudié comporte un condensateur C , un générateur de fém constante E et de résistance interne R , un interrupteur parfait (K) ainsi qu'un « éclateur ».

Le fonctionnement de l'éclateur est décrit par sa caractéristique tension-courant, qui fait apparaître quatre parties. Lorsque la tension u croît à partir d'une valeur inférieure à sa tension d'amorçage U_a , l'éclateur se comporte comme un circuit ouvert : le courant i est nul (segment $[O,A]$). Dès que u atteint la valeur U_a , l'éclateur devient conducteur : il laisse passer un courant d'intensité i_a (« saut » $[A,A']$). Ensuite, si la tension décroît, il se comporte comme un dipôle passif de résistance r (segment $[A',E']$). La tension peut ainsi décroître jusqu'à la valeur d'extinction U_e de l'éclateur, pour laquelle il redevient isolant (« saut » $[E'E]$).

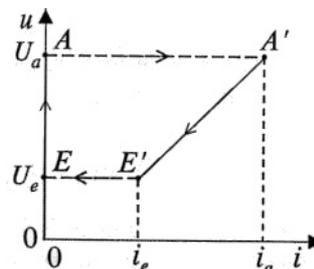
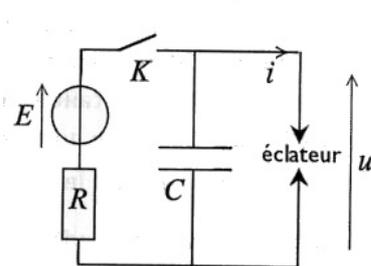


Schéma du circuit étudié (à gauche) et caractéristique de l'éclateur (à droite)

On admet que « les sauts » sont instantanés et qu'ils sont impossibles en sens inverse. Au point E de la caractéristique, l'éclateur ne peut redevenir conducteur à tension constante et au point A' il ne peut redevenir isolant à tension constante.

1) Le condensateur étant initialement déchargé, on ferme à $t = 0$ l'interrupteur (K).

a) Montrer que, juste après la fermeture de (K), l'éclateur se comporte comme un circuit ouvert.

b) Déterminer, dans l'hypothèse où l'éclateur se comporte toujours comme un circuit ouvert, la valeur de $u(t)$ en régime permanent.

c) Quelle valeur E_{\min} faut-il donner à E pour que $u(t)$ atteigne la valeur d'amorçage ?

2) On suppose désormais que $E > E_{\min}$.

a) Ecrire et résoudre l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$ tant que l'éclateur ne s'amorce pas.

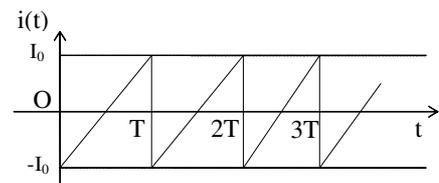
b) Exprimer l'instant t_a auquel l'éclateur devient conducteur ainsi que les valeurs de u et de i à cet instant.

3) Etude de la phase de conduction de l'éclateur.

- a) Dans la phase qui suit l'amorçage, donner le circuit équivalent au montage avec le nouveau fonctionnement de l'éclateur.
 - b) Déterminer la condition portant sur E , R , r et U_e pour que l'intensité du courant dans l'éclateur puisse s'annuler.
 - c) Cette condition étant réalisée, établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par $u(t)$ et, après l'avoir intégrée, déterminer l'instant t_e pour lequel le courant dans l'éclateur s'annule.
 - 4) Décrire l'évolution ultérieure à t_e . Représenter graphiquement $u(t)$.
- 5) on donne $E = 500 \text{ V}$, $U_a = 450 \text{ V}$, $U_e = 150 \text{ V}$, $R = 100 \Omega$, $r = 10 \Omega$ et $C = 1 \mu\text{F}$. En régime établi, calculer la période de la tension $u(t)$.

Courant en dents de scie :

On considère $i = f(t)$ donnée par la courbe ci-contre. Calculer l'intensité moyenne et l'intensité efficace de ce courant en dents de scie.



Etude d'un circuit (RLC) :

On dispose d'un condensateur de capacité $C = 20 \mu\text{F}$, d'une bobine de résistance $R = 10 \Omega$ et de coefficient d'auto-inductance $L = 0,3 \text{ H}$, d'un générateur BF délivrant une tension sinusoïdale de valeur efficace 100 V et de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$.

Calculer l'intensité du courant et son déphasage par rapport à la tension quand on applique la tension successivement :

- a) Aux bornes du condensateur.
- b) Aux bornes de la bobine.
- c) A l'ensemble condensateur-bobine en série.
- d) A l'ensemble condensateur-bobine en parallèle.

