CULTURE SCIENCES PHYSIQUE

Ressources scientifiques pour l'enseignement de la physique

Un partenariat entre ENS de Lyon éduscol

Une équation fondamentale en mécanique des fluides : l'équation de Navier - Stokes

Auteur(s) :

Olivier Granier

Lycée Jacques Decour, Paris

Delphine Chareyron

ENS Lyon

Nicolas Taberlet

ENS Lyon

Le projet « La physique animée » est une collaboration entre l'Université des sciences en ligne (Unisciel) et le site CultureSciencesPhysique de l'ENS de Lyon.

Réalisation : Olivier Granier, Delphine Chareyron, Nicolas Taberlet - Illustrations : Justine Chapelon - Montage : Delphine Chareyron - Images studio et incrustation : ENSmédia - Image Labo : Chez Moi Prod - Assistance graphique : Coralie Passaret - Musique : Stéphane Arbon.

Une équation fondamentale en mécanique des fluides : l'équation de Navier - Stokes

Les diverses couches d'un fluide en mouvement ne peuvent pas glisser librement les unes sur les autres : des frottements au sein du fluide s'opposent aux mouvements relatifs des lignes de courant voisines.

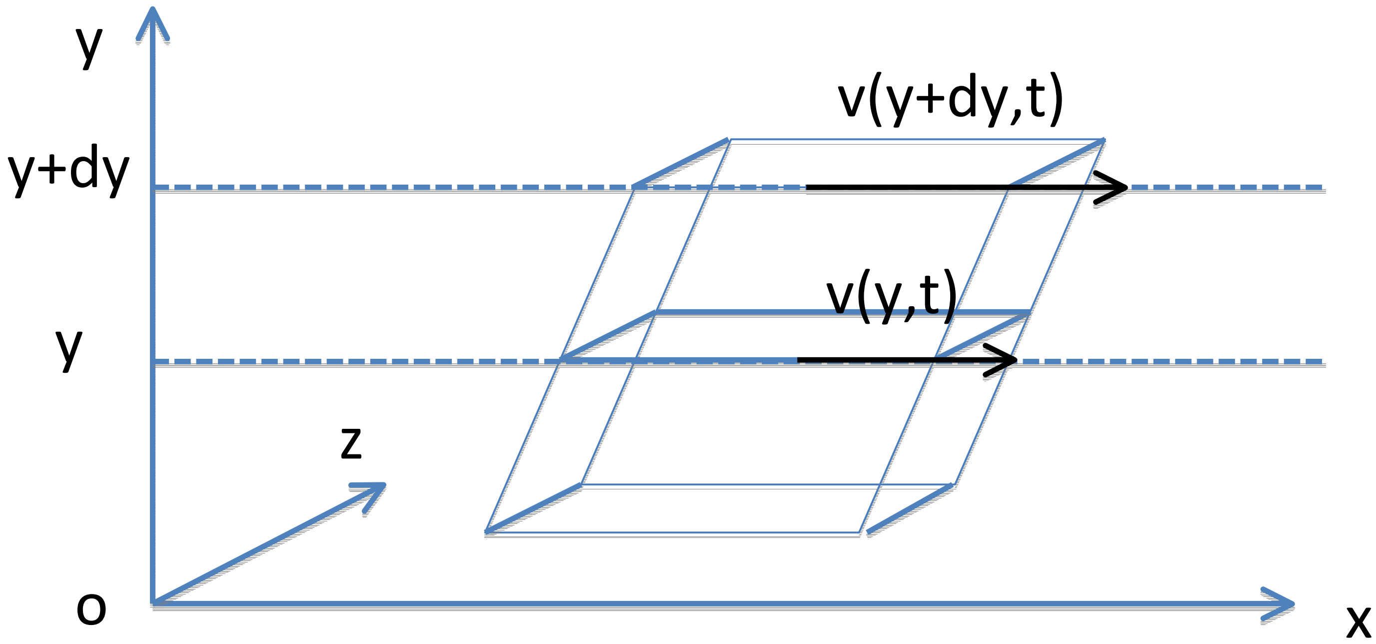
Cette résistance au glissement ou à la déformation caractérise la viscosité d'un fluide.

Pour les fluides appelés newtoniens, la viscosité dépend de la température et elle se révèle très peu sensible à la pression.

Pour les fluides non newtoniens, la viscosité peut varier selon de nombreux paramètres. Ainsi, une pâte de dentifrice coule quand la pression sur le tube est suffisante et on peut traverser une piscine remplie d'eau et de maïzena sans se noyer, à condition d'imposer une fréquence suffisante de ses pas !

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de fluide newtonien et la prise en compte de la force de viscosité conduit à l'équation de Navier – Stokes.

La viscosité d’un fluide :

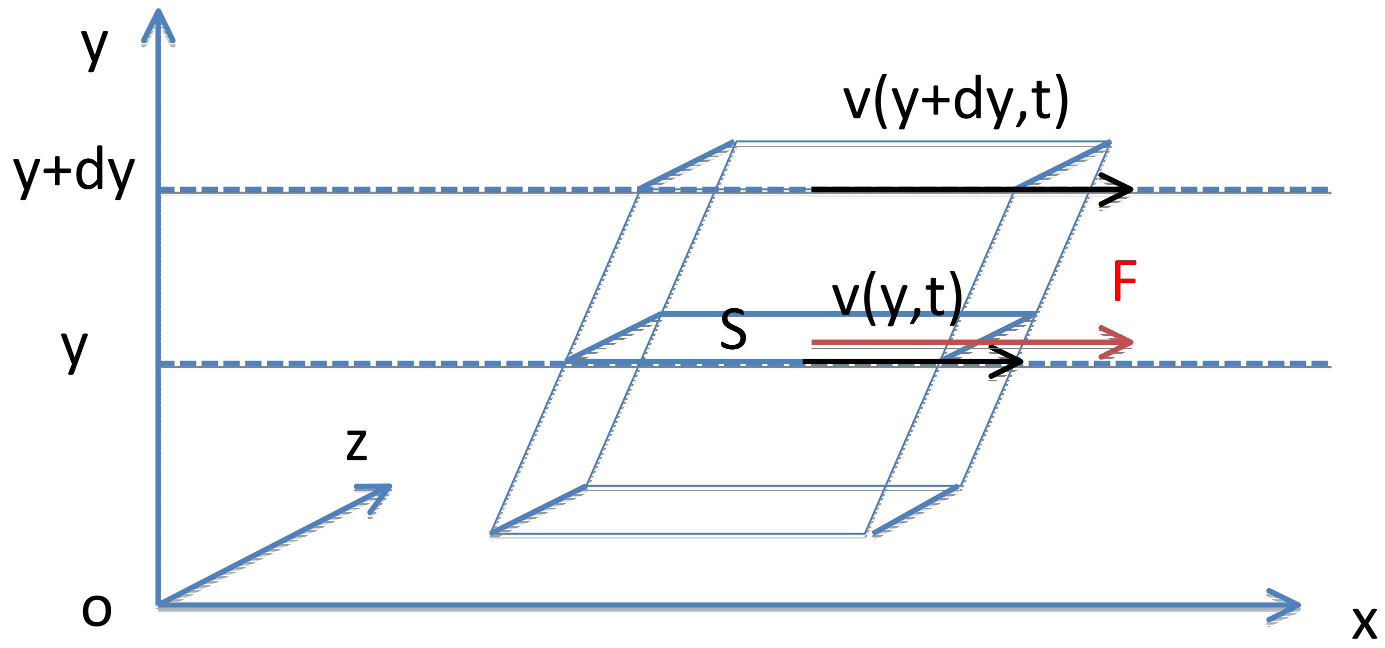


A l’échelle mésoscopique, un fluide est considéré comme un milieu continu. Il peut être « découpé » en volumes élémentaires de fluide encore appelés « particules fluides », contenant un grand nombre de molécules.

On étudie le cas simple où deux volumes élémentaires de fluide glissent l’un sur l’autre dans des plans horizontaux.
La vitesse s’écrit alors :

$$\vec{v} = v(y,t)\vec{u}_x$$

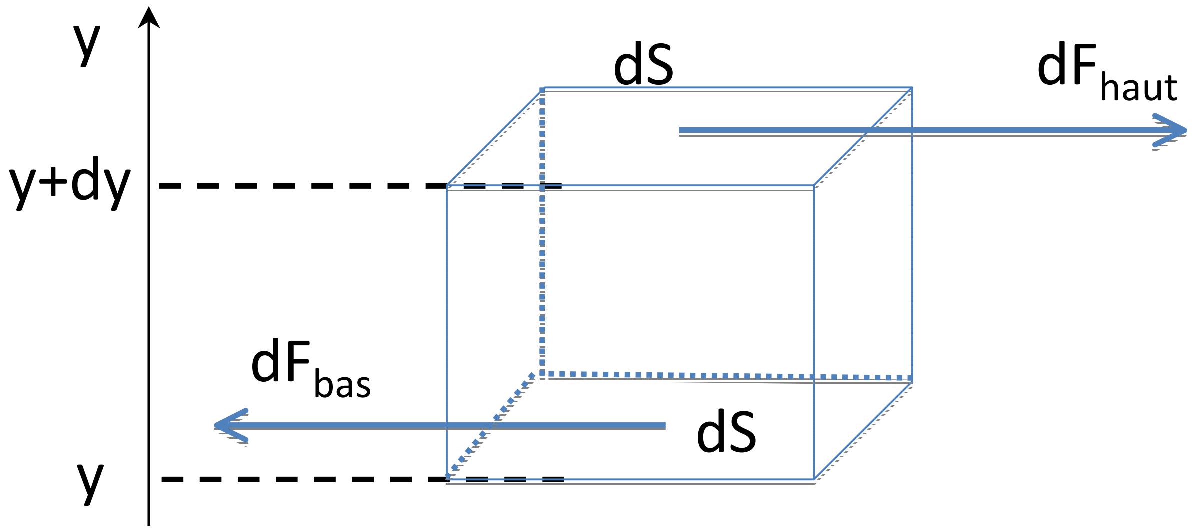
La partie supérieure, si elle est plus rapide, entraîne la partie inférieure par viscosité.



La force de cisaillement ou de viscosité F exercée par la couche de fluide du haut sur celle du bas dépend naturellement de l'aire de la surface de contact S entre les 2 couches, de leur vitesse relative et d'un paramètre η, appelé coefficient de viscosité du fluide, dépendant de la température :

$$\vec{F} = \eta \frac{\partial v(y,t)}{\partial y} S \, \vec{u}_x$$

L'unité pour le coefficient de viscosité η est le poiseuille (dont le symbole est Pl, égal à 1 Pa.s).



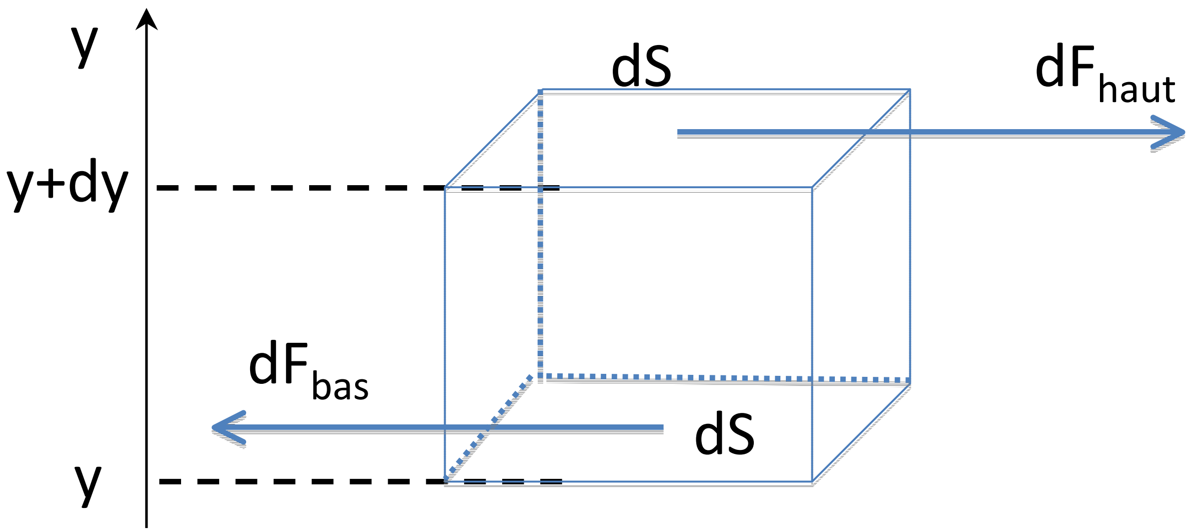
Nous venons de modéliser la force de viscosité dans le cas, plus simple, où l'on a considéré uniquement la surface S.

On s'intéresse maintenant à sa formulation sur un volume élémentaire de fluide dτ, supposé incompressible.

La force s'exerçant sur ce volume est la différence des forces surfaciques :

$$dF_{vis} = dF_{haut} - dF_{bas} = \eta \frac{\partial v(y+dy,t)}{\partial y} dS - \eta \frac{\partial v(y,t)}{\partial y} dS$$

Rq : ne pas expliciter l'équation à l'oral



On voit apparaître la dérivée seconde de la vitesse :

$$dF_{vis} = \eta \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2} \, d\tau$$

Et, sous forme vectorielle, la force s'exprime en fonction du laplacien de la vitesse :

$$d\vec{F}_{vis} = \eta \, \Delta\vec{v} \, d\tau$$

On peut donner quelques valeurs de viscosité (en Pl, dans les conditions normales) :

Pour l'air : 10^{-5}

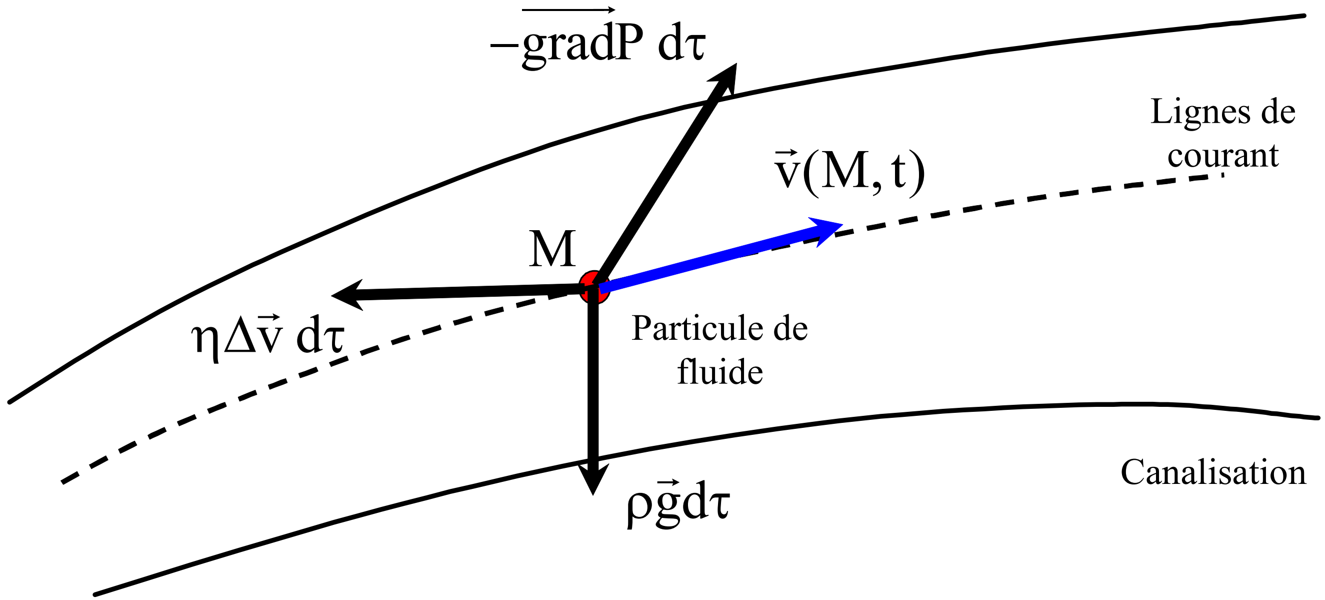
Pour l'eau : 10^{-3} Pl

Pour la glycérine : 1,5 Pl

Pour du miel : 10

Pour du bitume : 10^{8}

Pour un glacier : 10^{12}



L'équation de Navier – Stokes n'est rien d'autre que l'écriture du principe fondamental de la dynamique à une particule fluide, soumise à son poids, à la force volumique de viscosité et aux forces de pression :

$$\underbrace{\rho}_{\text{Masse volumique}}\underbrace{\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right)}_{a} = \underbrace{-\overrightarrow{\text{grad}}(P)}_{\text{de pression}} + \underbrace{\rho\vec{g}}_{\text{de gravité}} + \underbrace{\eta\Delta\vec{v}}_{\text{de viscosité}}$$

forces volumiques

Comment interpréter les deux termes de l'accélération de la particule fluide ?

En description eulérienne, le champ des vitesses v(M,t) coïncide avec le vecteur vitesse de la particule fluide qui passe, à l'instant t, au point M de l'espace.

La particule fluide acquiert une accélération dite « locale », due à la simple variation temporelle de la vitesse en un point M déterminé et donnée par :

$$\vec{a}_{\text{locale}} = \frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t}$$

Prenons l'exemple de l'écoulement stationnaire d'un fluide. L'accélération locale est alors nulle.
Pourtant, une particule fluide n'a pas la même vitesse quand elle est en M_1 ou en M_2.
Elle acquiert une accélération dite « convective », due à sa convection le long de l'écoulement.
Cette accélération peut s'évaluer comme la variation de la vitesse entre les deux points sur le temps nécessaire pour aller d'un point à un autre :

$$\vec{a}_{\text{convection}} \approx \frac{\vec{v}(M_2) - \vec{v}(M_1)}{\Delta t} \approx \frac{\vec{v}(M_2) - \vec{v}(M_1)}{(M_1M_2)/v(M_1)} = \left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$$

La complexité de l’équation de Navier-Stokes est due essentiellement à deux termes :

* Le terme d’inertie (ou de convection de quantité de mouvement), qui rend l’équation non linéaire.

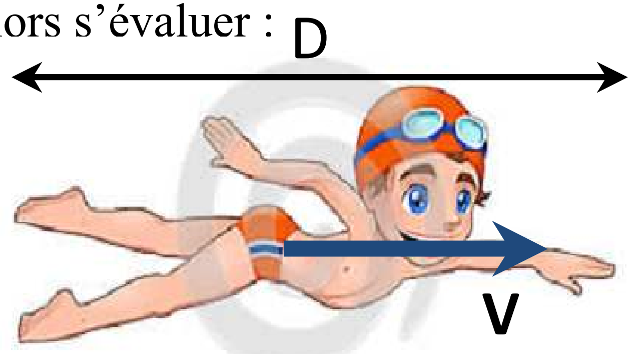
* Le terme de diffusion visqueuse dû au transfert de quantité de mouvement, qui introduit des dérivées du second ordre.

Il existe de nombreux cas où l’un de ces deux termes va prédominer devant l’autre.

Le nombre de Reynolds, nombre sans dimension, permet de comparer ces deux termes et s’écrit comme le rapport du terme d’inertie sur le terme de viscosité :

$$R_e = \frac{inertie}{viscosit\acute{e}} = \frac{\left\| \rho(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} \right\|}{\left\| \eta \Delta \vec{v} \right\|}$$

On considère un écoulement fluide dont on connaît l'ordre de grandeur U de la vitesse ainsi qu'une échelle caractéristique D des variations spatiales de la vitesse, commune aux trois directions de l'espace. Le nombre de Reynolds peut alors s'évaluer :



$$R_e = \frac{\left\| \rho(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} \right\|}{\left\| \eta \Delta \vec{v} \right\|} \approx \frac{\rho \dfrac{U^2}{D}}{\eta \dfrac{U}{D^2}} = \frac{\rho D U}{\eta} = \frac{DU}{\nu} \qquad (\nu = \frac{\eta}{\rho})$$

Et est égal au produit de la taille et de la vitesse caractéristiques sur la viscosité cinématique ν.

Par exemple, pour cette petite nageuse mesurant 1 m qui avance à 1 km/h :

Avec ρ_{eau}=1 kg/L , $\eta_{eau}=10^{-3}$ Pl , $U \approx 1\, km.h^{-1}$ *et* $D \approx 1\, m$

On trouve un nombre de Reynolds de l'ordre de: $R_e \approx 10^5 >> 1$

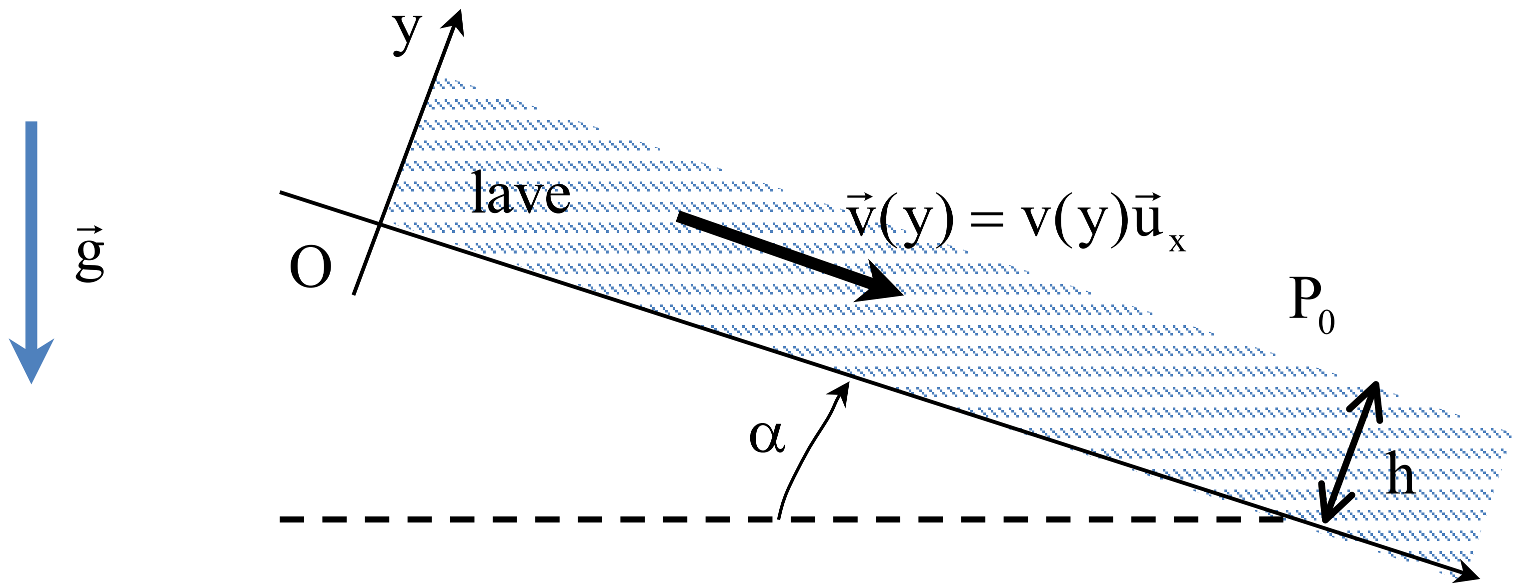
Les transferts de quantité de mouvement par inertie sont plus importants que ceux par viscosité.
Le terme d'inertie prédomine.

Dans le cas du miel et encore plus pour un glacier, les transferts de quantité de mouvement par viscosité sont plus importants que ceux par inertie.
Le terme de viscosité domine alors.

Les écoulements dominés par la viscosité sont toujours des écoulements très lents avec une longueur caractéristique très courte (sève dans les pores des arbres) ou impliquant des fluides très visqueux.

Nous avons déjà évoqué, dans la vidéo « La physique animée » consacrée à l'écoulement de Poiseuille, l'effet de la viscosité sur l'écoulement d'un fluide dans une conduite.

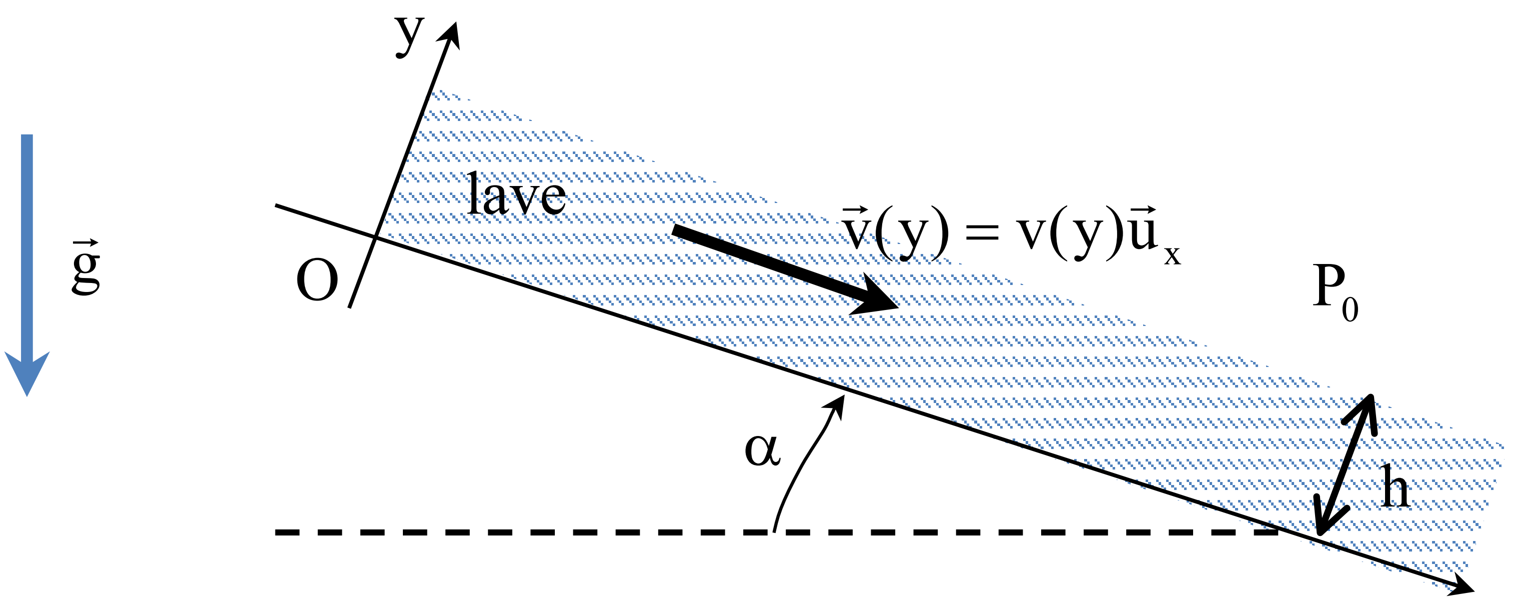
On va donner ici un exemple de résolution de l'équation de Navier-Stokes dans le cas de l'écoulement de la lave d'un volcan en éruption.



L'écoulement de la lave se fait sur une pente inclinée d'un angle $\alpha = 45°$. On suppose que la hauteur de la lave est constante égale à h = 2 m et la vitesse de la lave à la surface vaut 1m/h.

On se place en régime stationnaire. La vitesse d'écoulement est faible et la viscosité est grande. On peut s'attendre à ce que les effets de viscosité dominent : R_e doit être très inférieur à 1.

On parle d'écoulement rampant, régi par l'équation de Stokes qui correspond à l'écriture simplifiée de l'équation de Navier – Stokes en régime stationnaire :



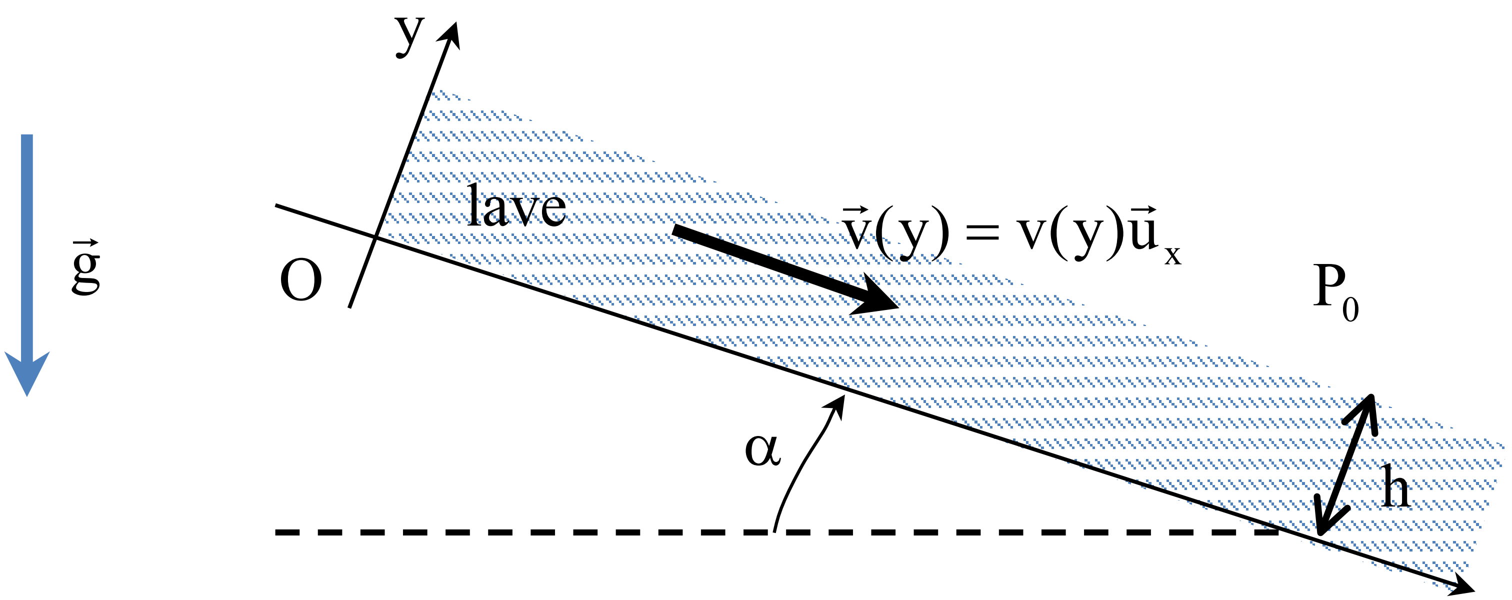
$$-\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P) + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v} = \vec{0}$$

La pression atmosphérique P_0 est constante à la surface de la lave. En projetant selon (Oy), on montre que la pression au sein de la lave ne dépend que de y.
En projection selon Ox, il vient alors :

$$\frac{d^2v(y)}{dy^2} = -\frac{1}{\nu} g \sin\alpha$$

Si on néglige la force de viscosité due à l'air, la dérivée de la vitesse doit être nulle sur la surface libre de la lave. Une première intégration conduit alors à :

$$\frac{dv}{dy} = \frac{g}{\nu} \sin\alpha \, (h - y)$$



La vitesse doit être nulle à l'interface sol-lave, par conséquent, après intégration :

$$v(y) = \frac{g}{\nu}\sin\alpha(h - \frac{y}{2})y \qquad \text{d'où la vitesse à la surface : } v(h) = \frac{1}{2}\frac{gh^2}{\nu}\sin\alpha$$

L'AN $\nu = \dfrac{gh^2}{2v(h)}\sin\alpha \approx 5.10^4 \ m^2.s^{-1}$ conduit à une valeur numérique bien supérieure à la viscosité cinématique de l'eau, égale à $\nu_{eau} \approx 10^{-6} m^2.s^{-1}$.

On peut évaluer a posteriori le nombre de Reynolds et vérifier qu'il est bien inférieur à 1 :

$$R_e = \frac{hv(h)}{\nu} = \frac{1.2.(1/3\,600)}{5.10^4} \approx 7.10^{-9} << 1$$